arXiv:2304.09765v1 [math.NT] 19 Apr 2023

环面周期 FOR Ap-ADIC 四元数代数

U. K. ANANDAVARDHANAN 和 Basudev Pattanayak

摘要。设 G 是一个紧群，具有两个给定的子群 H 和 K。设 π 是 G 的一个不可约表示，使得其 H-不变向量空间以及 K-不变向量空间都为一维。设 v_H （分别地，v_K）表示在给定的 G-不变内积 $\langle\ ,\ \rangle_\pi$ 上 π中的一个 H-不变向量（分别为 K-不变向量），且其范数为单位范数。我们感兴趣的是计算相关系数

$$c(\pi; H, K) = |\langle v_H, v_K\rangle_\pi|^2.$$

本文计算了 p 进四元数代数的乘法群的不可约表示相对于任意两个环面的相关系数。特别地，如果 π 是一个具有奇最小导子的不可约表示，且对于两个环面 H 和 K具有非平凡的不变向量，那么其根数 $\varepsilon(\pi)$ 为 ± 1，并且$c(\pi; H,K)$ 非零当且仅当 $\varepsilon(\pi) = 1$。

1. 引言

设G 为一个紧群，给定两个子群H 和K，使得G 的任意不可约表示 π 至多拥有一个一维的不变向量空间，且该空间分别对应于H 和K。设v_H （分别地，v_K）表示在固定的G-不变内积 $\langle\ ,\ \rangle_\pi$ 下， π中一个H-不变（分别地，K-不变）的单位范数向量。那么， π 中H 与K 的相关系数定义为

$$c(\pi; H, K) = |\langle v_H, v_K\rangle_\pi|^2.$$

注意，$c(\pi;\ H,\ K)$ 定义良好，因为 $\langle\ ,\ \rangle_\pi$ 在数乘意义下唯一，并且v_H 和v_K 在绝对值为 1 的复数因子意义下唯一。如果对于 π 有$c(\pi;\ H,\ K)\ \neq 0$，则称子群H 和K 关于 π 相关。相关系数出现在各种不同的背景中，关于更多背景材料，请参阅 [Gro91, §8, §9]和 [Rob99] 。

本文计算了不可约表示 π of $G\ = D^\times/F^\times$ 关于任意两个给定子群环面H 和K的相关系数，其中D 是定义在奇数p-进域F上的四元数代数。关于不可约光滑表示限制到其环面上的研究，开创于 Tunnell [Tun83, HSY93, Sai93]的工作。Tunnell 的结果针对$(SO(3),SO(2))$，而 Prasad 关于$(SO(4),SO(3))$ [Pra90, Pra92] 的工作，则是更一般的分支定律及相关 Gan-Gross-Prasad 猜想 [GGP12]的基础情形。本文关于相关系数的结果处于 Tunnell 结果的基本框架之中；这些结果（见定理1.1和定理1.2）惊人地简洁，让人期待高秩分支律领域也能出现类似结果。

2020数学主题分类。主要分类 20C15；次要分类 20C20、20C33。

对于不可约表示 π of $D^\times$ 而言，要使其对某个环面存在不变向量，其中心特征 ω_π 必须是平凡的。由此可知， π 是自对偶的，且其 epsilon因子 $\varepsilon(1/2, \pi, \Psi)$ 与加性特征 Ψ of F 的选择无关。这就是局部根数，我们现在将其记为 $\varepsilon(\pi)$。根据我们的假设，我们总有 $\varepsilon(\pi) \in \{\pm 1\}$。这些具有算术意义的局部常数及其符号在朗兰兹纲领中至关重要。我们在此强调，本文的一项关键发现是，在本文所考虑的某些情形中，相关系数的消失恰由局部根数的符号决定。我们将此作为首批结果陈述如下。

定理1.1。 设 π 是 $D^\times$ 的一个具有奇最小导子的不可约表示。设 S 和 T 表示两个非同构的环面，对于这两个环面， π 均存在非平凡的不变向量。那么，局部根数 ε（π） 为 ± 1, 并且

$$c(\pi; S, T) \neq 0 \iff \varepsilon(\pi) = 1.$$

此外，当 $\varepsilon(\pi) = 1$,

$$c(\pi; S, T) = \frac{2}{\dim \pi}.$$

我们对定理1.1中关于奇数性的假设作一条注。在这一假设下，存在不变向量的两个不同构环面 S 和 T 具有如下性质：$N(S)$ （即 S 在 $D^\times$ 中的正规化子）与 T 相交于一个非中心元素（反之亦然），并且按照下面注4中的意义，(S,T) 构成一个相容对。若 π 具有偶数的最小导数，则具有不变向量的环面未必相容；因此，为了得到类似的结果，必须将相容性作为假设的一部分。

定理1.2. 设 π 是 $D^\times$ 的一个最小导数为偶数 $f(\pi)$ 的不可约表示。设 S 和 T 表示两个不同的环面， π 在其上存在非平凡的不变向量。假设 $N(S)$ 与 T 的交集中含有一个非中心元素。那么局部根数 $\varepsilon(\pi)$ 为 ± 1, 并且

$$c(\pi; S, T) \neq 0 \iff (-1)^{f(\pi)/2}\varepsilon(\pi) = 1.$$

此外，当 $\varepsilon(\pi) = (-1)^{f(\pi)/2}$ 时,

$$c(\pi; S, T) = \frac{2}{\dim \pi}.$$

注1. 特别地，定理1.1（分别为定理1.2）断言，两个环面的不变向量当且仅当 $\varepsilon(\pi) = -1$ （分别为 $\varepsilon(\pi) \neq (-1)^{f(\pi)/2}$）时正交。一项蕴含也可由 [Pra96，定理 4] 得出。事实上，根据同上引文，关于 $\varepsilon(\pi)$ 的这一条件意味着 π 在 N(S) 下没有不变向量。因此，存在一个元素 $t \in N(S) \cap T$，它不固定 S-不变向量 v_S。注意，对于某个 $\alpha \neq 1$, 有 $t \cdot v_S = \alpha v_S$。现在,

$$\langle v_S, v_T \rangle = \langle v_S, t^{-1} \cdot v_T \rangle = \langle t \cdot v_S, v_T \rangle = \alpha \langle v_S, v_T \rangle,$$

并且可得$c(\pi; S, T) = 0$。

与$D^\times$ 相对应的环面对应于F的二次扩张。根据剩余特征为奇数这一假设，这样的扩张仅有三个互不相同，其中一个

是非分歧的。我们用M 表示非分歧二次扩张，用K 和L表示分歧二次扩张。相应的环面也用相同的记号表示。

$D^\times$ 的不可约表示已由 [GG68, CH77, How77a, How77b], 研究，我们参考 [GK80, KZ80, BF83] ，以了解更多细节以及这些表示的显式构造，而本文将使用这些构造。其核心要点将在第2节中概述。此处只需指出，这些表示与 F 的二次扩张的乘法特征相关联；在这种对应关系中，最小导子为偶数的表示源自 M ，而最小导子为奇数的表示则源自 K 或 L。这些构造更一般地适用于任意温和除法代数；也就是说，当除法代数的指标与剩余特征互素时，均可使用这些构造。这正是我们假设 p 为奇数的原因。

现在我们陈述本文的其他主要结果。第一个结果适用于 π 具有奇数最小导数的情形，第二个结果适用于 π 具有偶数最小导数的情形。

定理1.3。 设 π 是 $D^\times$ 的一个不可约表示，它与 $K^\times$ 的一个特征 ψ 相关，其中 K 是 F 的一个分歧二次扩张。假设 ψ 在 $F^\times$ 上的限制是平凡的，因此$\psi(\varpi) = \pm 1$。那么，

$$(1)\ c(\pi; M, K) = \begin{cases} \frac{2}{\dim \pi} & \text{if } q \equiv 3 \mod 4 \text{ and } \psi(\varpi) = 1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$(2)\ c(\pi; M, L) = \begin{cases} \frac{2}{\dim \pi} & \text{if } q \equiv 1 \mod 4 \text{ and } \psi(\varpi) = 1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

注2。 在定理1.3的情形下，表示 π 总有一个 M-不变向量；当且仅当 $q \equiv 3$ 模 4 时，它有一个 K- 不变向量；当且仅当 $q \equiv 1$ 模 4 时，它有一个 L- 不变向量。特别地，$c(\pi;\ K,\ L) = 0$，当 $q \equiv 1$ 模 4 时，$c(\pi;\ M,\ K) = 0$；当 $q \equiv 3$ 模 4 时，$c(\pi;\ M,\ L) = 0$，原因都很平凡。

注3。 由注2可知，根据定理1.3，两个非零不变向量——一个对应于 M ，另一个对应于 K 或 L ——当且仅当某个符号，即 $\psi(\varpi)$ 的取值，为 -1 时彼此正交。因此，一个符号揭示并刻画了不变向量的正交性！而且，这个符号恰好就是 π 的局部根数（参见第5.4节）。

注 4. 注意，(M, K)（以及 (M, L)）是一个相容对，其含义是：非分歧扩张 M 和分歧扩张 K 的任何其他嵌入都会产生一个对，例如 (M′, K′)，该对与 (M, K) 同时 G共轭；即，存在 $g \in D^\times$ ，使得 $M' = gMg^{-1}$ 且 $K' = gKg^{-1}$。因此，相关系数 c(π; M, K)（以及 c(π; M, L)）与域扩张在 $D^\times$ 中的嵌入选择无关。

定理1.4. 设 π 是$D^\times$ 的一个不可约表示，由$M^\times$上的特征 ψ 所对应，其中M是F的非分歧二次扩张。假设 ψ 在$F^\times$上的限制是平凡的。令$K = F(\omega)$ 和$L = F(\zeta\omega)$，其中 ω 是D的一个固定一致化元，ζ 是一个固定的本原

（(q^2-1)次单位根，属于$D^\times$，其中q是F的剩余域基数。于是，

$$c(\pi;K,L)=\frac{|1+\psi(\zeta)|^2}{2\dim\pi}.$$

注5. 在定理1.4的情形下，表示 π 对 K 和 L 均始终具有不变向量，但对 M则没有。因此，$c(\pi;M,K)=c(\pi;M,L)=0$，这是显而易见的。

注 6. 请注意，(K,L) 并非相容对，因此定理1.4确实取决于域扩张的嵌入方式。换言之，$c(\pi;K,L)$ 取决于域扩张本身，并且在这些扩张的F-同构下并非不变。

注7. 注意，定理1.4也可以表述为两个彼此 \(F\)-同构的分歧扩张。例如，

$$c(\pi;F(\varpi),F(\zeta^2\varpi))=\frac{|1+\psi(\zeta^2)|^2}{2\dim\pi},$$

and

$$c(\pi;F(\varpi),F(\zeta^{\frac{q+1}{2}}\varpi))=\begin{cases}\frac{2}{\dim\pi} & \text{if } \psi(\zeta^{\frac{q+1}{2}})=1,\\ 0 & \text{if } \psi(\zeta^{\frac{q+1}{2}})=-1,\end{cases}$$

其中，这两个域是 F-同构的充要条件是 $q\equiv 3$ 模 4。符号 $\psi(\zeta^{\frac{q+1}{2}})$与 π的局部根数有关，事实上 $\psi(\zeta_{q^2}^{+1})=(-1)^{f(\pi)}\varepsilon(\pi)$（参见第5.4节）。 —

注8. 根据其显式构造，可以很容易地计算出不可约表示 π of$D^\times$ 的维数，其结果为

$$\dim\pi=\begin{cases}2q^{\frac{c-2}{2}} & \text{if } c \text{ is even},\\ (q+1)q^{\frac{c-3}{2}} & \text{if } c \text{ is odd},\end{cases}$$

其中，c 是 π的导子。

我们还知道，对于给定的导子，\(\text{D}\)$^\times$/\(\text{F}\)$^\times$ 有多少个不可约表示，这由 [Tun78、命题 3.5 以及第 189] 页的注给出：

$$\text{Number of } \pi \text{ of conductor } c=\begin{cases}\frac{q^2-1}{2}q^{\frac{c-4}{2}} & \text{if } c \text{ is even},\\ 2(q-1)q^{\frac{c-3}{2}} & \text{if } c \text{ is odd}.\end{cases}$$

显然可以注意到 [AJ22，引理 2.1]

$$\sum_{\pi\in\widehat{G}}\dim\pi\cdot c(\pi;H,K)=\frac{|G||H\cap K|}{|H||K|}, \tag{1}$$

当G 是一个有限群时。通过考虑有限群$G_c=D^\times\ F^\times(1+\mathcal{P}_D^{c-1})$，并注意到……，很容易验证定理1.3和定理1.4与(1)相容。

$$|G_c|=\begin{cases}2(q+1)q^{3j-1} & \text{if } c=2j+1,\\ 2(q+1)q^{3j} & \text{if } c=2j+2,\end{cases}$$

and

$$|M_c| = (q+1)q^{\left[\frac{c-2}{2}\right]}, |K_c| = |L_c| = 2q^{(c-2)-\left[\frac{c-2}{2}\right]},$$

并且这三个子群两两之间的交集均为平凡交集。关于这一验证的证明，请参见第5.3节。

我们以几句话介绍本文包含的其他结果以及各定理的证明，作为引言的结束。定理1.1（分别为定理1.2）由定理1.3（分别为定理1.4）推出，依据的是 G´erardin-Kutzko [GK80] 和 Fr¨ohlich-Queyrut [FQ73], 关于 epsilon 因子的结果；我们将在第5.4节中完成这一步。定理1.3和定理1.4的证明相当直接：我们在将不可约表示实现为$D^\times$ 的诱导表示的模型中，写出显式的不变向量（见第2节）。这些不变向量见推论3.2、推论3.4、推论 3.6、推论 4.2和推论 4.4。利用这些显式的不变向量，我们在第5节计算相应的相关系数。事实上，我们写出不变向量的方法能得到更多结果：我们可以写出环面上大量特征所对应的等变向量。这些结果分别陈述于命题 3.1、命题 3.3、命题 3.5、命题4.1和命题4.3。注9、注10、注 12、注14和注15量化了我们能够处理的特征数量。

2. $D^\times$ 的表示

设 D 是 p进域 F 上的四元数除代数，其中假设 p 为奇数。令 $\mathcal{O}_D$ （分别为 $\mathcal{O}_F$）表示 D（分别为 F）的整数环，并令 $\mathcal{P}_D$（分别为 $\mathcal{P}_F$）表示 $\mathcal{O}_D$ （分别为 $\mathcal{O}_F$）的唯一极大理想。令 ζ 为 D 中一个本原 (q^2-1) 次单位根，其中 q 是 F 的剩余域基数。我们用 $\mathbb{D}$表示 $\mathcal{O}_D/\mathcal{P}_D$ 的陪集代表元集合，由 $\langle\zeta\rangle \cup \{0\}$ 给出。注意， $\mathcal{O}_F/\mathcal{P}_F$ 的陪集代表元集合为 $\mathbb{F} = \mathbb{D} \cap \mathrm{F} = \{\zeta^{i(q+1)} : 0 \le \mathrm{i} \le \mathrm{q}-2\} \cup \{0\}$。我们固定 D 的一个一致化元 ϖ ，使得 $\varpi^2 = \varpi_F$ 是 F 的一致化元，并且 $\varpi\zeta\varpi^{-1} = \zeta^q$。令 $\mathrm{Tr}_{\mathbb{D}/\mathbb{F}} : \mathbb{D} \to \mathbb{F}$ 为迹映射，并令 $\mathbb{T} = \{\gamma \in \mathbb{D} \mid \mathrm{Tr}_{\mathbb{D}/\mathbb{F}}(\gamma) = 0\}$。注意，$\mathbb{D} = \mathbb{T} \bigoplus \mathbb{F}$。

$D^\times$ × 的不可约表示在 [GG68] 中进行了分类。事实上，这些表示不仅适用于四元数代数，也适用于任意次数的温和除法代数；它们有两种不同的构造方式（更多细节见 [BF83 第 8] 章）：一种是 Corwin 和 Howe 提出的可容许对理论 [CH77] ，另一种是 Koch 和 Zink 提出的更初等、明确的方法 [KZ80]。本文采用后者最为合适，我们在 [KZ80, BF83] 中概述这些构造；此处的论述主要遵循 [HSY93, §1]。在四元数情形下，这些构造也见于 [GK80, §3.4, §3.5, §3.6, §4.5]。

构造$D^\times$ 的不可约表示，需要一个$E^\times$ 的特征，其中E 是F的二次扩张。回顾一下，特征 χ 的导子$f(\chi)$ 是满足条件$\rho|_{1+\mathcal{P}_E^\nu} = 1$的最小非负整数 ν 。设 $\mathrm{Nm}_{E/F}$ 和 $\mathrm{Tr}_{E/F}$ 分别为从E 到F的范数映射和迹映射。若$E^\times$ 的特征 χ 满足对$F^\times$的所有特征 ϕ 均有$f(\chi) \le f(\chi \cdot \phi \circ \mathrm{Nm}_{E/F})$ ，则称其为极小特征。我们还固定一个加性特征

ψ_0，它是F的导子为 0 的加性特征，因此 $\psi_0(\mathcal{O}_F) = 1$，但 $\psi_0(\mathcal{P}_F^{-1}) \neq 1$。定义 $\psi_E = \psi_0 \circ \mathrm{Tr}^{E/F}$ 和 $\psi_D = \psi_0 \circ \mathrm{Tr}^{D/F}$，其中 $\mathrm{Tr}^{D/F}$ 是约化迹。

若 π 是$D^\times$ 的不可约表示，则其导子$f(\pi)$ 是满足$\rho|_{1+\mathcal{P}_D^{\nu-1}} = 1$的最小非负整数 ν 。若表示 π 满足$f(\pi) \leq f(\pi \otimes \phi \circ \mathrm{Nm}^{D/F})$，则称其为极小表示，其中 $\mathrm{Nm}^{D/F}$ 表示约化范数。设π 由(E, χ) 导出且为极小表示，则$f(\pi)$ 为奇数当且仅当E/F 分歧。若E/F 分歧（分别为非分歧），则称 π 为分歧（分别为非分歧）。

2.1. **分歧表示**。关于此情形的构造详情，参见 [HSY93，第 133]页。设K 是F 的分歧二次扩张，其整数环为 $\mathcal{O}_K$，唯一的极大理想为 $\mathcal{P}_K$。设 ψ 是$K^\times$ 上的极小特征，且导子为偶数。记$f(\psi) = m + 1$，其中m 为奇整数。此时，有$f(\psi|_{F^\times}) \leq f(\psi)/2$。

存在 $\mathrm{c} \in \mathcal{P}_K^{-m-2}$使得 $\psi(1+\mathrm{x}) = \psi_K(\mathrm{cx})$ 对于 $1+\mathrm{x} \in 1+\mathcal{P}\mathrm{m}_{\frac{+1}{2}}\mathrm{K}$ 均成立。现在 m_{+1}将 ψ_c 定义为 $1+\mathcal{P}$ ²D上的特征，令 $\psi_c(1+\mathrm{x}) = \psi_D(\mathrm{cx})$。注意，$\psi_c($ $1+\mathcal{P}_D^m) \neq 1$，且 $\psi_c(1+\mathcal{P}_D^{m+1}) = 1$。$\psi_c$ 的惯性子群为 $\mathrm{H} = \mathrm{K}^\times(1+\mathcal{P}\mathrm{m}^{\frac{}{2}+1}\mathrm{D})$。将 ψ_c 延拓到 H，定义为 $\psi^\#(\mathrm{y}(1+\mathrm{x})) = \psi(\mathrm{y})\psi_c(1+\mathrm{x})$。

那么，该表示

$$\pi_\psi = \mathrm{Ind}_H^{D^\times} \psi^\#$$

是不可约的，且$f(\pi_\psi) = m+2$，其中心特征为 $\psi|_{F^\times}$。注意，$\dim \pi_\psi = |D^\times/H| = (q+1)q^{\frac{m-1}{2}}$。任意奇数导子的 $D^\times$ 的极小不可约表示，都可由 F 的两个分歧二次扩张之一按此方式得到。

2.2. **非分歧表示**。有关此情形下构造的更多细节，请参见 [HSY93，第 126] 页。设 M 是F的非分歧二次扩张，其整数环为 $\mathcal{O}_M$，唯一的极大理想为 $\mathcal{P}_M$。设 ψ 是$M^\times$ 的极小特征，其导子为 ≥ 1。记$f(\psi) = m + 1$。在此情形下，有$f(\psi|_{F^\times}) \leq f(\psi)$。

存在 $\mathrm{c} \in \mathcal{P}_M^{-m-1} - \mathcal{P}\mathrm{m}_{+1}\mathrm{M} \cap (\mathrm{F} + \mathcal{P}^{-}\mathrm{mM})$，使得对于每个 $\mathrm{x} \in \mathcal{P}^{\lceil \mathrm{m}_{\frac{+2}{2}}\rceil}\mathrm{M}$，都有 $\psi(1+\mathrm{x}) = \overline{\psi_M}(\mathrm{cx})$。此外，$\mathrm{M} = \mathrm{F}(\mathrm{c})$。定义 ψ_c在 $1+\mathcal{P}_D^{m+1}$上的特征为$\psi_c(1+\mathrm{x}) = \psi_D$ (cx)。注意，$\psi_c(1+\mathcal{P}_D^{2m}) \neq 1$。以及 $\psi_c(1+\mathcal{P}_D^{2m+1}) = 1$。$\psi_c$的惯性子群为 $\mathrm{H} = \mathrm{M}^\times($ $1+\mathcal{P}_D^m)$。

我们如下定义 H 的表示 $\theta_\psi^\#$。

(1) 当 m 为偶数时，注意到 $\mathrm{M}^\times(1+\mathcal{P}\mathrm{mD}) = \mathrm{M}^\times(1+\mathcal{P}_D^{m+1})$。现在，通过令 $\theta_\psi^\#$ $(\mathrm{y}(1+\mathrm{x})) = \psi(\mathrm{y})\psi_c(1+\mathrm{x})$，将 ψ_c 延拓。(2) 当 m 为奇数时，令 $\mathrm{H}'' = \mathrm{F}^\times(1+\mathcal{P}_M)$ $(1+\mathcal{P}_D^{m+1})$ 和 $\mathrm{H}' = \mathrm{F}^\times(1+\mathcal{P}_M)(1+\mathcal{P}_D^m)$。首先，通过令 $\psi''(\mathrm{a}(1+\mathrm{y})(1+\mathrm{x})) = \psi$ $(\mathrm{a})\psi(1+\mathrm{y})\psi_c(1+\mathrm{x})$，将 ψ 延拓为 H'' 的一个特征 ψ''。现在，H'' 是 H' 的正规子群，且 H'/H'' 是阶为 q^2 的初等阿贝尔 p 群。根据 [BF83，命题 8.3.3],，存在 H' 的一个极大阿贝尔子群 H_1'，使得 H'' 包含于其中；将 ψ'' 延拓为 H_1' 的一个特征 ψ' 后，存在一个唯一确定的不可约

q 维表示 θ_ψ，其定义在 H' 上，由 $\theta_\psi = \mathrm{Ind}^{H'}{}_{H_1'}\psi'$ 给出，且 $\theta_\psi|H''$ 包含 ψ''。于是，根据 [BF83，命题 8.4.1]，，在 $\det[\theta_\psi^\#|_{\langle\zeta\rangle}] = \psi^q|_{\langle\zeta\rangle}$ 条件下，该表示 θ_ψ 可以唯一地延拓为 H 的一个不可约、次数为 q 的表示 $\theta_\psi^\#$。

那么该表示

$$\pi_\psi = \mathrm{Ind}_H^{D^\times}\theta_\psi^\#$$

是不可约的，具有$f(\pi_\psi) = 2m+2$，其中心特征为 $\psi|_{F^\times}$。注意，$\dim\ \pi_\psi = |D^\times/H|\dim\theta_\psi^\# = 2q^m$。$D^\times$的任何偶导子极小不可约表示，都可由$F$的非分歧二次扩张以此方式得到。

3. 不变向量的构造：分歧情形

$_{m+1}$设 K/F 为二次分歧扩张，并令 $H = K^\times(1+\mathcal{P}^{\ 2_D})$，其中 m 为奇正整数。设

$$\mathcal{S} = \left\{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\frac{m-1}{2}}) \mid \alpha_r \in \mathbb{F}, 1 \le r \le \frac{m-1}{2}\right\}.$$

在下文中，我们用 S'（分别用 S''）表示 $\mathcal{S}$ 中由满足以下条件的元组$\underline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\frac{m-1}{2}})$ 组成的子集：当r 为奇数（分别为偶数）时，$\alpha_r = 0$。

3.1. 限制到非分歧环面。 设M 是F上的非分歧二次扩张。那么M 由 ζ 在F上生成。对每个满足 $0 \le i \le q$ 且$\underline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{\frac{m-1}{2}}) \in \mathcal{S}$的整数$i$，令

$$d_{\underline{\alpha},i} = (1 + \sum_{r=1}^{\frac{m-1}{2}} \alpha_r \zeta^{\frac{q+1}{2}} \varpi^r) \cdot \zeta^i.$$

那么集合 $\{d_{\underline{\alpha},i} \mid \underline{\alpha} \in \mathcal{S}, 0 \le i \le q\}$ 构成$D^\times/H$的一组陪集代表元；即，

$$D^\times = \bigsqcup_{\substack{\underline{\alpha}\in\mathcal{S}\\ 0\le i\le q}} H \cdot d_{\underline{\alpha},i}.$$

对每一对满足 $\underline{\alpha} \in \mathcal{S}$ 且 $0 \le i \le q$的$(\underline{\alpha},i)$，我们定义$D^\times$ 上的一个复值函数

$$f_{\underline{\alpha},i}(h \cdot d_{\underline{\beta},j}) = \begin{cases} \psi^\#(h) & \text{if } \underline{\beta} = \underline{\alpha} \text{ and } j = i, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

对于$h \in H$。注意，

$$\{f_{\underline{\alpha},i} \mid \underline{\alpha} \in \mathcal{S}, 0 \le i \le q\}$$

构成不可约表示$\pi_\psi = \mathrm{Ind}_H^G\psi^\#$的一组基。

命题 3.1. 设 $\mu : M^\times \to \mathbb{C}^\times$ 是 $M^\times$ 的一个光滑特征，且满足 $\mu|_{H\cap M^\times} = \psi^\#|_{H\cap M^\times}$。那么，$\mu$ 在 π_ψ 对 $M^\times$ 的限制中出现，且重数一；该向量

$$v_\mu = \sum_{\substack{\underline{\alpha}\in S'\\ 0\le i\le q}} \mu(d_{\underline{\alpha},i}) f_{\underline{\alpha},i}$$

属于表示 π_ψ 的 μ-同型分量。

证明。 断言的第一部分只是初等的 Mackey 理论。我们证明v^μ 是一个 μ-等变向量。为此，固定 $x = h \cdot d_{\underline{\delta},i_0} \in D^\times$，其中 $h \in H$，$\underline{\delta} = (\delta_1, \ldots, \delta_{m_2^{-1}}) \in \mathcal{S}$，且 $i_0 \in \{0, 1, \ldots, q\}$。显然，

$$v_\mu(x) = \sum_{\substack{\underline{\alpha} \in S' \\ 0 \le i \le q}} \mu(d_{\underline{\alpha},i}) f_{\underline{\alpha},i}(h \cdot d_{\underline{\delta},i_0}) = \begin{cases} \psi^\#(h)\mu(d_{\underline{\delta},i_0}) & \text{if } \underline{\delta} \in S', \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

如果$z \in M^\times$，那么我们写作

$$z = a \cdot \zeta^{j_0} \cdot (1 + \sum_{\substack{r \ge 2 \\ r \text{ is even}}} \beta_r \cdot \zeta^{\frac{q+1}{2}} \cdot \varpi^r)$$

对于某个 $a \in F^\times$、$j_0 \in \{0, 1, \ldots, q\}$，并且对所有$r$，$\beta_r \in \mathbb{F}$ 均成立。于是，

$$\begin{aligned} \pi_\psi(z) v_\mu(x) &= v_\mu(xz) \\ &= v_\mu\left(ah \left(1 + \sum_{r=1}^{\frac{m-1}{2}} \delta_r \zeta^{\frac{q+1}{2}} \varpi^r \right) \cdot \left(1 + \sum_{\substack{r \ge 2 \\ r \text{ is even}}} \beta_r \cdot \zeta^{\frac{q+1}{2}} \cdot \varpi^r \right) \zeta^{i_0 + j_0} \right). \end{aligned}$$

注意到元素

$$\mathbf{y} = \left(1 + \sum_{r=1}^{\frac{m-1}{2}} \delta_r \zeta^{\frac{q+1}{2}} \varpi^r \right) \cdot \left(1 + \sum_{\substack{r \ge 2 \\ r \text{ is even}}} \beta_r \cdot \zeta^{\frac{q+1}{2}} \cdot \varpi^r \right) \zeta^{i_0 + j_0}$$

当且仅当对所有奇整数$r \in \{1, \ldots, m_2^{-1}\}$，$\delta_r = 0$ 成立时，该元素才属于v^μ 的支集。因此，当 $\underline{\delta} \notin S'$ 时，$v^\mu(\mathbf{y}) = 0$。

现在假设 $\underline{\delta} \in S'$。令 m' 为 $\{1, 2, \ldots, m_2^{-1}\}$ 中最大的偶整数。那么，该元素

$$\mathbf{y} = \left(1 + \sum_{\substack{r=2 \\ r \text{ is even}}}^{m'} \delta_r \zeta^{\frac{q+1}{2}} \varpi^r \right) \cdot \left(1 + \sum_{\substack{r \ge 2 \\ r \text{ is even}}} \beta_r \cdot \zeta^{\frac{q+1}{2}} \cdot \varpi^r \right) \zeta^{i_0 + j_0}$$

可以写成

$$\mathbf{y} = b_0 \cdot h_0 \cdot d_{\underline{\delta}', i_0 + j_0}$$

其中

$$b_0 = 1 + \sum_{\substack{r=4 \\ r \text{ is even}}}^{m'} \xi_r \cdot \varpi^r$$

with

$$\xi_r = \left(\sum_{\substack{t=2 \\ t \text{ is even}}}^{r-2} \delta_t \beta_{r-t} \right) \zeta^{q+1}$$

对于 $4 \le r \le m'$，并且

$$\underline{\delta}' = (\delta'_1, \ldots, \delta'_{\frac{m-1}{2}}) \in S'$$

with

$$\delta'_r = \delta_r + \beta_r - \sum_{\substack{t=2 \\ t \text{ is even}}}^{r-2} \delta'_t \xi_{r-t}$$

对于偶数$r \leq m'$，并且

$$h_0 = 1 + \sum_{\substack{r=m'+2 \\ r \text{ is even}}}^{m-1} (\gamma_r \zeta^{\frac{q+1}{2}} + \xi_r)\varpi^r + \cdots$$

with

$$\gamma_r = \beta_r - \sum_{\substack{t=2 \\ t \text{ is even}}}^{m'} \delta'_t \xi_{r-t} - \sum_{\substack{t=m'+2 \\ t \text{ is even}}}^{r-2} \gamma_t \xi_{r-t} \in \mathbb{F},$$

对于$r \geq m'+2$，以及

$$\xi_r = \left(\sum_{\substack{t=2 \\ t \text{ is even}}}^{m'} \delta_t \beta_{r-t} - \sum_{\substack{t=m'+2 \\ t \text{ is even}}}^{r-2} \delta'_{r-t} \gamma_t \right) \zeta^{q+1} - \sum_{\substack{t=m'+2 \\ t \text{ is even}}}^{r-2} \xi_t \xi_{r-t}$$

对于$m'+2 \leq r \leq m-1$。

注意，$b_0 \in F^\times$ 且$h_0 \in H \cap M^\times$。根据我们对 μ的假设，有 $\psi^\#(h_0) = \mu(h_0)$。回想一下我们的假设：$\underline{\delta} \in \mathcal{S}'$。现在，

$$\begin{aligned}
\pi_\psi(z) v_\mu(x) &= v_\mu \left(ah \cdot b_0 \cdot h_0 \cdot d_{\underline{\delta'}, i_0+j_0} \right) \\
&= \psi^\#(h) \psi(a \cdot b_0) \psi^\#(h_0) \mu(d_{\underline{\delta'}, i_0+j_0}) \\
&= \psi^\#(h) \mu(a \cdot b_0 \cdot h_0) \mu(d_{\underline{\delta'}, i_0+j_0}) \\
&= \psi^\#(h) \mu(z \cdot d_{\underline{\delta}, i_0}) \\
&= \mu(z) v_\mu(x).
\end{aligned}$$

注意，在倒数第二步中我们用到了恒等式$a \cdot b_0 \cdot h_0 \cdot d_{\underline{\delta'}, i_0+j_0} = d_{\underline{\delta}, i_0} \cdot z$。因此，

$$\pi_\psi(z) v_\mu = \mu(z) v_\mu$$

对于$z \in M^\times$. □

注9。注意到

$$H \cap M^\times = F^\times (1 + \mathcal{P}_M^{[\frac{m-1}{4}]+1}).$$

因此，我们能够在 π_ψ 中为$(q+1)q^{[\frac{m-1}{4}]}$ 个特征 μ展示 μ-等变向量。

若 π_ψ 具有平凡中心特征，则 $M^\times$ 的平凡特征总会出现在对 $M^\times$的限制 π_ψ 中。将 $\mu = 1$代入上面的命题，得到

Cor推论 3.2. 若 π_ψ 具有平凡中心特征，则 π_ψ 中的一个 $M^\times$-不变向量由下式给出 *by*

$$v_M = \sum_{\substack{\underline{\alpha} \in S' \\ 0 \leq i \leq q}} f_{\underline{\alpha}, i}.$$

3.2. **限制到分歧环面**。 设 K 和 L 是 F的两个分歧扩张。表示 π_ψ 与扩张 K相关联。我们需要考虑它在 K 和 L上的限制。我们取 $K = F(\varpi)$ 和 $L = F(\zeta\varpi)$。

3.2.1. 对 K 的限制$^\times$. 容易观察到，特征 ψ 在限制 π_ψ 到 $K^\times$ 中以重数一出现，并且一个 ψ-不变向量由 f_{0} 给出。类似地，当 $g = \zeta^{\frac{q+1}{2}} \in D^\times$时，特征 ψ^g 在 π_ψ 的限制中以重数一出现，并且一个 ψ^g-不变向量由 $f_{0,\frac{q+1}{2}}$ 给出。在下面的命题中，我们将展示更多等变向量。

对于每个满足 $0 \le i \le q$ 和 $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{\frac{m-1}{2}}) \in \mathcal{S}$ 的整数 i，我们定义

$$d'_{\underline{\alpha},i} = (1 + \sum_{r=1}^{\frac{m-1}{2}} \alpha_r \zeta^{i(1-q)} \varpi^r) \cdot \zeta^i.$$

对于每一对$(\underline{\alpha},i)$，其中 $\underline{\alpha} \in \mathcal{S}$ 和 $0 \le i \le q$，我们通过以下方式定义其在$D^\times$ 上的相应函数:

$$f'_{\underline{\alpha},i}(h \cdot d'_{\underline{\beta},j}) = \begin{cases} \psi^\#(h) & \text{if } \underline{\beta} = \underline{\alpha} \text{ and } j = i, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

对于$h \in H$。

命题3.3。 对于 $1 \le i \le q_2^{-1}$，取元素 $g = \zeta^i \in D^\times$，并考虑 $K^\times$ 的一个光滑特征 κ_g，使得在 $\kappa_g|_{g^{-1}Hg \cap K^\times} = \psi^{\#g}$ 上成立。然后，特征 κ_g 在 π_ψ 限制到 $K^\times$ 和 $\kappa_g|_{F^\times} = \psi|_{F^\times}$ 时以重数一出现。令 $\ell \in \{0,1\}$ 满足$\kappa_g(\varpi) = (-1)^\ell \psi(\varpi)$。该向量

$$v_{\kappa_g} = \sum_{\underline{\alpha} \in S''} \kappa_g(1 + \sum_r \alpha_r \varpi^r) \left[f'_{\underline{\alpha},i} + (-1)^\ell \psi(\zeta^{(1-i)(q+1)}) f'_{\underline{\alpha},q+1-i} \right]$$

属于表示 π_ψ 的 κ_g-同型分量。

证明。 第一个断言直接由 Mackey 理论得到。现在我们证明 v^{κ_g} 是一个 κ_g-不变向量。为此，注意到，除非固定 $x = h \cdot d'_{\underline{\delta},i}$ 或 $x = h \cdot d'_{\underline{\delta},q+1-i}$，对于 $h \in H$，$\underline{\delta} = (\delta_1, \dots, \delta_{\frac{m-1}{2}}) \in \mathcal{S}''$，$v^{\kappa_g}(x) = 0$。显然，

$$v_{\kappa_g}(x) = \begin{cases} \psi^\#(h) \cdot \kappa_g(1 + \sum_r \delta_r \varpi^r) & \text{if } x = h \cdot d'_{\underline{\delta},i}, \\ (-1)^\ell \psi(\zeta^{(1-i)(q+1)}) \psi^\#(h) \cdot \kappa_g(1 + \sum_r \delta_r \varpi^r) & \text{if } x = h \cdot d'_{\underline{\delta},q+1-i}, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

我们将 $z \in K^\times$ 记为

$$z = a \cdot \varpi^{j_0} \cdot (1 + \sum_{\substack{j \ge 1 \\ j \text{ is odd}}} \beta_j \cdot \varpi^j)$$

对于某个 $a \in F^\times$、$j_0 \in \{0,1\}$ 和 $\beta_j \in \mathbb{F}$，对所有 r 均成立。显然，当 <style

$$\pi_\psi(a) v_{\kappa_g}(x) = v_{\kappa_g}(xa) = \psi(a) \cdot v_{\kappa_g}(x) = \kappa_g(a) v_{\kappa_g}(x).$$

现在我们来检查一致化元 $\varpi \in K^\times$ 以及以下形式元素的作用。

$$z' = 1 + \sum_{\substack{j\geq 1\\ j \text{ is odd}}} \beta_j \cdot \varpi^j$$

其中 $\beta_r \in \mathbb{F}$ 对所有 r 均成立。不失一般性，我们可以取 $x = h \cdot d'_{\underline{\delta},i}$，因为 $x = h \cdot d'_{\underline{\delta},q+1-i}$ 的情形证明类似。于是，

$$\begin{aligned}
\pi_\psi(\varpi)v_{\kappa_g}(x) &= v_{\kappa_g}(h \cdot d'_{\underline{\delta},i} \cdot \varpi)\\
&= v_{\kappa_g}(h \cdot \varpi \cdot \zeta^{(i-1)(q+1)} \cdot d'_{\underline{\delta},q+1-i})\\
&= \psi^{\#}(h) \cdot \psi(\varpi) \cdot \psi(\zeta^{(i-1)(q+1)}) \cdot \kappa_g(1 + \sum_r \delta_r \varpi^r)(-1)^\ell \psi(\zeta^{(1-i)(q+1)})\\
&= (-1)^\ell \psi(\varpi) \cdot \psi^{\#}(h)\kappa_g(1 + \sum_r \delta_r \varpi^r)\\
&= \kappa_g(\varpi) \cdot v_{\kappa_g}(x).
\end{aligned}$$

现在我们考察 z' 的作用。我们有

$$\begin{aligned}
\pi_\psi(z')v_{\kappa_g}(x) &= v_{\kappa_g}(h \cdot d'_{\underline{\delta},i} \cdot (1 + \sum_{\substack{j\geq 1\\ j \text{ is odd}}} \beta_j \cdot \varpi^j))\\
&= v_{\kappa_g}\left(h(1 + \sum_{\substack{r=1\\ r \text{ is odd}}}^{\frac{m-1}{2}} \delta_r \zeta^{i(1-q)}\varpi^r) \cdot (1 + \sum_{\substack{j\geq 1\\ j \text{ is odd}}} \beta_j \zeta^{i(1-q)}\varpi^j)\zeta^i\right).
\end{aligned}$$

设 m^* 是 $\{1, 2, ..., m_2^{-1}\}$ 中最大的奇整数。则元素

$$\mathbf{y} = (1 + \sum_{\substack{r=1\\ r \text{ is odd}}}^{m^*} \delta_r \zeta^{i(1-q)}\varpi^r)(1 + \sum_{\substack{j\geq 1\\ j \text{ is odd}}} \beta_j \zeta^{i(1-q)}\varpi^j)\zeta^i$$

可以写成

$$\mathbf{y} = b_0 \cdot h_0 \cdot d'_{\underline{\delta}',i}$$

其中，

$$b_0 = 1 + \sum_{\substack{r=2\\ r \text{ is even}}}^{m^*+1} \xi_r \varpi^r$$

with

$$\xi_r = \sum_{\substack{t=1\\ t \text{ is odd}}}^{r-1} \delta_{r-t}\beta_t$$

对于每个偶数 $r \leq m^* + 1$，以及

$$\underline{\delta}' = (\delta'_1, ..., \delta'_{\frac{m-1}{2}}) \in S''$$

with

$$\delta'_r = \delta_r + \beta_r - \sum_{\substack{t=1\\ t \text{ is odd}}}^{r-2} \delta'_t \xi_{r-t},$$

对于每个奇数 $r \leq m^*$，以及

$$h_0 = 1 + \sum_{\substack{j=m^*+2 \\ j \text{ is odd}}}^{m} \epsilon_j \zeta^{i(1-q)} \varpi^j + \sum_{\substack{k=m^*+3 \\ k \text{ is even}}}^{m-1} \xi_k \varpi^k + \cdots$$

使得

$$\epsilon_j = \beta_j - \sum_{\substack{t=1 \\ t \text{ is odd}}}^{m^*} \delta'_t \xi_{j-t} - \sum_{\substack{t=m^*+2 \\ t \text{ is odd}}}^{j-2} \epsilon_t \xi_{j-t},$$

对于奇数 $j \geq \frac{m^*+1}{2}$，且

$$\xi_k = \sum_{\substack{t=1 \\ t \text{ is odd}}}^{m^*} \delta_t \beta_{k-t} - \sum_{\substack{t=m^*+3 \\ t \text{ is even}}}^{k-2} \xi_t \xi_{k-t} - \sum_{\substack{t=m^*+2 \\ t \text{ is odd}}}^{k-1} \delta'_{k-t} \epsilon_t,$$

对于偶数 $k \geq \frac{m^*+1}{2}$。记为

$$\tilde{h} = g^{-1} h_0 g = 1 + \sum_{\substack{j=m^*+2 \\ j \text{ is odd}}}^{m} \epsilon_j \varpi^j + \sum_{\substack{k=m^*+3 \\ k \text{ is even}}}^{m-1} \xi_k \varpi^k + \cdots.$$

注意，$\tilde{h} \in g^{-1} H g \cap K^\times$。我们有

$$\begin{aligned} \pi_\psi(z') v_{\kappa_g}(x) &= v_{\kappa_g}(h \cdot b_0 \cdot h_0 \cdot d'_{\underline{\delta}',i}) \\ &= \psi^{\#}(h) \cdot \psi(b_0) \cdot \psi^{\#g}(\tilde{h}) \cdot \kappa_g(1 + \sum_{\substack{r=1 \\ r \text{ is odd}}}^{m^*} \delta'_r \varpi^r), \\ &= \psi^{\#}(h) \cdot \kappa_g \left(b_0 \cdot \tilde{h} \cdot (1 + \sum_{\substack{r=1 \\ r \text{ is odd}}}^{m^*} \delta'_r \varpi^r) \right). \end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned} z' \cdot (1 + \sum_{\substack{r=1 \\ r \text{ is odd}}}^{m^*} \delta_r \varpi^r) &= (1 + \sum_{\substack{j \geq 1 \\ j \text{ is odd}}} \beta_j \varpi^j) \cdot (1 + \sum_{\substack{r=1 \\ r \text{ is odd}}}^{m^*} \delta_r \varpi^r) \\ &= b_0 \cdot (1 + \sum_{\substack{j=m^*+2 \\ j \text{ is odd}}}^{m} \epsilon_j \varpi^j + \sum_{\substack{k=m^*+3 \\ k \text{ is even}}}^{m-1} \xi_k \varpi^k + \sum_{t \geq m+1} \gamma_t \varpi^t) \cdot (1 + \sum_{\substack{r=1 \\ r \text{ is odd}}}^{m^*} \delta'_r \varpi^r) \end{aligned}$$

对于某个 $\gamma_t \in \mathbb{F}$ 对于 $t \geq m+1$。由于 $\kappa_g|_{(1+\mathcal{P}_K^{m+1})} = 1$，我们有

$$\kappa_g\left(b_0 \cdot \tilde{h} \cdot (1 + \sum_{\substack{r=1 \\ r \text{ is odd}}}^{m^*} \delta'_r \varpi^r)\right) = \kappa_g\left(b_0 \cdot (1 + \sum_{\substack{j=m^*+2 \\ j \text{ is odd}}}^{m} \epsilon_j \varpi^j + \sum_{\substack{k=m^*+3 \\ k \text{ is even}}}^{m-1} \xi_k \varpi^k) \cdot (1 + \sum_{\substack{r=1 \\ r \text{ is odd}}}^{m^*} \delta'_r \varpi^r)\right)$$

$$= \kappa_g\left(z' \cdot (1 + \sum_{\substack{r=1 \\ r \text{ is odd}}}^{m^*} \delta_r \varpi^r)\right) = \kappa_g(z')\kappa_g(1 + \sum_r \delta_r \varpi^r).$$

因此，

$$\pi_\psi(z')v_{\kappa_g}(x) = \kappa_g(z') \cdot \psi^{\#}(h)\kappa_g(1 + \sum_r \delta_r \varpi^r)$$

$$= \kappa_g(z') \cdot v_{\kappa_g}(x).$$

因此，对于所有的 $z \in K^\times$，$\pi_\psi(z) \cdot v^{\kappa_g} = \kappa_g(z) \cdot v^{\kappa_g}$。 □

注10. 对于每个 $g = \zeta^i$，其中 $1 \leq i \leq q_2^{-1}$，满足 $\kappa_g|_{g^{-1}Hg \cap K^\times} = \psi^{\#g}$ 的特征 $\kappa_g : K^\times \to \mathbb{C}$ 的数量为

$$\left|\frac{K^\times}{F^\times(1 + \mathcal{P}_K^{\frac{m+1}{2}})}\right| = 2q^{\frac{m-1}{2}[\frac{m-1}{4}]}.$$

因此，在命题3.3中，我们展示了 π_ψ for 中的等变向量。

$$\frac{q-1}{2} \times 2q^{\frac{m-1}{2} - [\frac{m-1}{4}]} = (q-1)q^{\frac{m-1}{2} - [\frac{m-1}{4}]}$$

许多特征 κ_g。

若 $q \equiv 3 \bmod 4$ 且 $\psi|_{F^\times} = 1$，则 $K^\times$ 的平凡特征 $\mathbf{1}_{K^\times}$ 出现在到 $K^\times$ 的限制 π_ψ 中。作为上述命题的一个推论，我们得到以下结果。

推论3.4。假设 $q \equiv 3$ 模 4，并将 q 写作 $+1 = 4t_0$。假设 π_ψ 具有平凡中心特征。那么

$$v_K = \sum_{\underline{\alpha} \in S''} [f_{\underline{\alpha},t_0} + \psi(\varpi) f_{\underline{\alpha},3t_0}]$$

是 π_ψ 中一个被 $K^\times$ 固定的不变向量。

证明。如果 π_ψ 具有平凡中心特征，那么 $\psi(\varpi) = \pm 1$。由于 $q+1 = 4t_0,$，我们有

$$\zeta^{t_0(1-q)} = \eta \cdot \zeta^{\frac{q+1}{2}},$$

其中 $\eta = -\zeta^{(t_0-1)(q+1)} \in \mathbb{F}$。注意，$\zeta^{-t_0(1-q)} = -\eta \cdot \zeta^{\frac{q+1}{2}}$。因此，对于每个 $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\frac{m-1}{2}}) \in \mathcal{S}'',$ 我们有

$$f'_{\underline{\alpha},t_0} = f_{\underline{\alpha\eta},t_0},$$

其中 $\underline{\alpha\eta} = (\alpha_1\eta, \alpha_2\eta, \ldots, \alpha_{\frac{m-1}{2}}\eta) \in \mathcal{S}''$，且

$$f'_{\underline{\alpha},q+1-t_0} = f_{-\underline{\alpha\eta},3t_0},$$

其中 $-\underline{\alpha\eta}=(-\alpha_1\eta,-\alpha_2\eta,\ldots,-\alpha_{\frac{m-1}{2}}\eta)\in\mathcal{S}''$。当 $g=\zeta^{t_0}$和 $\psi|_{F^\times}=1$时，我们有 $\kappa_g|_{g^{-1}Hg\cap K^\times}=\psi^{\#g}=1$，因为 $H\cap gK^\times g^{-1}\subset\mathrm{Ker}(\psi^\#)$。现在，根据命题3.3中的 $g=\zeta^{t_0}$ 和 $\kappa_g=1$，我们得到

$$\begin{aligned}
v_K &= \sum_{\underline{\alpha}\in S''}\kappa_g(1+\sum_r\alpha_r\varpi^r)\left[f'_{\underline{\alpha},t_0}+(-1)^\ell\psi(\zeta^{(1-t_0)(q+1)})f'_{\underline{\alpha},q+1-t_0}\right]\\
&= \sum_{\underline{\alpha}\in S''}\left[f'_{\underline{\alpha},t_0}+\psi(\varpi)f'_{\underline{\alpha},q+1-t_0}\right]\\
&= \sum_{\underline{\alpha}\in S''}\left[f_{\underline{\alpha\eta},t_0}+\psi(\varpi)f_{-\underline{\alpha\eta},3t_0}\right]\\
&= \sum_{\underline{\alpha}\in S''}\left[f_{\underline{\alpha},t_0}+\psi(\varpi)f_{\underline{\alpha},3t_0}\right].
\end{aligned}$$

□

注11. 我们可以将推论3.4稍作推广，表述如下。设s 是一个整数，使得 $-q_4^{-3}\le s\le q_4^{+1}$，并令$K_s=F(\zeta^{2s}\varpi)$。那么，向量——

$$v_{K_s}=\sum_{\underline{\alpha}\in S''}[f_{\underline{\alpha},t_0-s}+\psi(\varpi)f_{\underline{\alpha},3t_0-s}]$$

是 π_ψ 中的一个$K_s^\times$ 不变向量。

3.2.2. 对 L 的限制$^\times$. 设 L 为 F 上的分歧二次域扩张，且不与 $K=F(\varpi)$共轭。我们取 $L=F(\zeta\varpi)$。

对于每个满足 $0\le i\le i$ $\underline{\alpha}=q$ 且 $\alpha_1(\alpha_2,\alpha,\ldots_{\frac{-1}{2}m}\in\mathcal{S})$ 的整数，我们定义

$$d''_{\underline{\alpha},i}=(1+\sum_{r=1}^{\frac{m-1}{2}}\alpha_r\zeta^{1+i(1-q)}\varpi^r)\cdot\zeta^i.$$

对于每一对 $(\underline{\alpha},i)$，其中 $\underline{\alpha}\in\mathcal{S}$ 和 $0\le i\le q$，我们定义其在$D^\times$ 上的对应函数:

$$f''_{\underline{\alpha},i}(h\cdot d''_{\underline{\beta},j})=\begin{cases}\psi^\#(h) & \text{if } \underline{\beta}=\underline{\alpha} \text{ and } j=i,\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

注意这些函数属于 $\pi_\psi=\mathrm{Ind}_H^G\psi^\#$ 的诱导空间。

命题 3.5. 对于 $1\le i\le q_2^{+1}$，选取元素 $g=\zeta^i\in D^\times$，并考虑 $L^\times$ 的一个光滑特征 λ_g，使得在 $\lambda_g|_{g^{-1}Hg\cap L^\times}=\psi^{\#g}$ 上成立。则特征 λ_g 在 π_ψ 对 $L^\times$ 和 $\lambda_g|_{F^\times}=\psi|_{F^\times}$ 的限制中以重数一出现。令 $\ell\in\{0,1\}$ 满足，并且 $\lambda_g(\varpi_L)=\lambda_g(\zeta\varpi)=(-1)^\ell\sqrt{\psi(\zeta^{q+1})}\psi(\varpi)$。该向量

$$v_{\lambda_g}=\sum_{\underline{\alpha}\in S''}\lambda_g(1+\sum_r\alpha_r\zeta\varpi^r)\left[f''_{\underline{\alpha},i}+(-1)^\ell\psi(\zeta^{-i(q+1)})\sqrt{\psi(\zeta^{q+1})}f''_{\underline{\alpha},q-i}\right]$$

属于表示 π_ψ 的 λ_g-同型分量。

证明。第一个断言可由 Mackey 理论直接得到。为证明 v^{λ_g} 是一个λ_g-不变向量，我们将$L^\times$ 中的每个元素写成

$$z = a \cdot (\zeta\varpi)^{j_0} \cdot (1 + \sum_{\substack{j\geq 1 \\ j \text{ is odd}}} \beta_j \cdot \zeta\varpi^j)$$

对于某个 $a \in F^\times$、$j_0 \in \{0,1\}$，并且对所有 j 均成立。然后，证明完全按照命题3.3的证明思路进行。□

注12. 对于每个$g = \zeta^i$，其中 $1 \leq i \leq q_2^{+1}$，满足 $\lambda_g|_{g^{-1}Hg\cap L^\times} = \psi^{\#g}$ 的特征 $\lambda_g : L^\times \to \mathbb{C}$ 的数量为

$$\left|\frac{L^\times}{F^\times(1+\mathcal{P}_L^{\frac{m+1}{2}})}\right| = 2q^{\frac{m-1}{2}-\left[\frac{m-1}{4}\right]}.$$

因此，在命题 3.5 中，我们为

$$\frac{q+1}{2} \times 2q^{\frac{m-1}{2}-\left[\frac{m-1}{4}\right]} = (q+1)q^{\frac{m-1}{2}-\left[\frac{m-1}{4}\right]}$$

许多特征 λ_g 展示了等变向量。

如果 $q \equiv 1$ 模 4，且 $\psi|_{F^\times} = 1$，那么$L^\times$ 的平凡特征 $\mathbf{1}_{L^\times}$ 出现在对$L^\times$的限制 π_ψ 中。由上述命题可得以下推论。

推论 3.6. 假设 $q \equiv 1 \bmod 4$，并写作 $q - 1 = 4r_0$。假设 π_ψ 具有平凡中心特征。那么

$$v_L = \sum_{\underline{\alpha}\in S''} \left[f_{\underline{\alpha},r_0} + \psi(\varpi) f_{\underline{\alpha},3r_0+1}\right]$$

是 π_ψ 中的一个 $L^\times$-不变向量。

证明。若 $q - 1 = 4r_0$ 则

$$\zeta^{1+r_0(1-q)} = \eta' \cdot \zeta^{\frac{q+1}{2}},$$

其中 $\eta' = \zeta^{-r_0(q+1)}$。注意 $\zeta^{q+r_0(q-1)} = -\eta' \cdot \zeta^{\frac{q+1}{2}}$。因此，对于每个 $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\frac{m-1}{2}}) \in \mathcal{S}''$，我们有

$$f''_{\underline{\alpha},r_0} = f_{\underline{\alpha\eta'},r_0},$$

其中 $\underline{\alpha\eta'} = (\alpha_1\eta', \alpha_2\eta', \ldots, \alpha_{\frac{m-1}{2}}\eta') \in \mathcal{S}''$，并且

$$f''_{\underline{\alpha},q-r_0} = f_{-\underline{\alpha\eta'},3r_0+1},$$

其中 $-\underline{\alpha\eta'} = (-\alpha_1\eta', -\alpha_2\eta', \ldots, -\alpha_{\frac{m-1}{2}}\eta') \in \mathcal{S}''$。证明的其余部分由命题 3.5 得出 □

注13. 我们可以将推论 3.6 稍作推广，表述如下。设 s 满足 $-q_4^{-1} \leq s \leq q_4^{+1}$，并令 $L_s = F(\zeta^{2s+1}\varpi)$。那么，向量

$$v_{L_s} = \sum_{\underline{\alpha}\in S''} [f_{\underline{\alpha},r_0-s} + \psi(\varpi) f_{\underline{\alpha},3r_0-s+1}]$$

是一个$L_s^\times$-不变向量 π_ψ。

4. 不变向量的构造：非分歧情形

回忆一下，我们正在讨论 $M = F(\zeta)$、$K = F(\varpi)$ 和 $L = F(\zeta\varpi)$。令

$$\mathcal{R} = \{(\alpha_1, 0, \alpha_3, 0, \ldots, \alpha_{m-1}) \mid \alpha_r \in \mathbb{D}, 1 \leq r \leq m-1\}.$$

令 $\mathcal{R}'$ 表示 $\mathcal{R}$ 的子集，该子集由满足以下条件的元组组成：$\underline{\alpha} = (\alpha_1, 0, \alpha_3, 0, \ldots, \alpha_{m-1})$，其中对所有 r，$\alpha_r \in \mathbb{F}$。

对于每个满足 $i \in \{0, 1\}$ 的整数i，以及 $\underline{\alpha} = (\alpha_1, 0, \alpha_3, 0, \ldots, \alpha_{m-1}) \in \mathcal{R}$，我们定义

$$\Delta_{i,\underline{\alpha}} = \varpi^i \cdot (1 + \sum_{r=1}^{m-1} \alpha_r \varpi^r).$$

Then

$$\{\Delta_{i,\underline{\alpha}} \mid \underline{\alpha} \in \mathcal{R}, i = 0, 1\}$$

f构成 $D^\times/H$ 的一组右陪集代表元，其中 $H = M^\times(1 + \mathcal{P}_D^m$).

我们有

$$\pi_\psi = \mathrm{Ind}_H^{D^\times} \theta_\psi^\#,$$

其中 $\theta_\psi^\#$ 在 m 为偶数时是一个一维特征标，在 m 为奇数时是一个 q 维表示。为方便起见，令W 表示表示空间 $\theta_\psi^\#$ （两种情形均如此）。

当 m 为偶数时，对于每一对 $(i, \underline{\alpha})$，其中 $\underline{\alpha} \in \mathcal{R}$ 且 $i \in \{0, 1\}$，我们赋予一个函数$\phi_{i,\underline{\alpha}} : D^\times \to \mathbb{C}$，其支集包含于 $H \cdot \Delta_{i,\underline{\alpha}}$，使得 $\phi_{i,\underline{\alpha}}$ 在元素$h \cdot \Delta_{i,\underline{\alpha}}$ 上取值 $\psi^\#(h)$，对每个 $h \in H$ 均如此。

我们还定义，对于 $\underline{\alpha} = (\alpha_1, 0, \alpha_3, 0, \ldots, \alpha_{m-1}) \in \mathcal{R}'$，

$$\Delta'_{i,\underline{\alpha}} = (\zeta\varpi)^i \cdot (1 + \sum_{r=1}^{m-1} \alpha_r \zeta \varpi^r),$$

以及相应的函数 $\phi'_{i,\underline{\alpha}} : D^\times \to \mathbb{C}$，其支集包含于 $H \cdot \Delta'_{i,\underline{\alpha}}$，使得 $\phi'_{i,\underline{\alpha}}$ 在元素 $h \cdot \Delta'_{i,\underline{\alpha}}$ 上取值 $\psi^\#(h)$，对每个 $h \in H$ 均如此。

当m为奇数时，回顾一下$H'' = F^\times(1 + \mathcal{P}_M)(1 + \mathcal{P}_{m^{+1}D})$和$H' = F^\times(1 + \mathcal{P}_M)(1 + \mathcal{P}_D^m)$。令

$$H_1' = F^\times(1 + \mathcal{P}_M)(1 + \mathcal{P}_L^m)(1 + \mathcal{P}_D^{m+1}).$$

注意，集合 $\mathcal{D} = \{1 + \alpha\varpi^m \mid \alpha \in \mathbb{F}\}$ 构成商 H'/H_1' 的右陪集代表元。

对于每个 $\alpha \in \mathbb{F}$，我们定义 $f_\alpha : H \to \mathbb{C}$，其支集为 $H_1'(1 + \alpha\varpi^m)$，使得对于每个 $h_1 \in H_1'$，它在 $h_1(1 + \alpha\varpi^m)$ 上的取值为 $\psi'(h_1)$。注意，f_α 构成了 W 的一组基。注意到

$$(1 + \alpha\varpi^m) \cdot f_\beta = \theta_\psi(1 + \alpha\varpi^m) f_\beta = \psi[1 + (\beta - \alpha)\alpha\varpi^{2m}] f_{\beta-\alpha}, \tag{2}$$

and

$$(1 + \alpha\zeta\varpi^m) \cdot f_0 = \theta_\psi(1 + \alpha\zeta\varpi^m) f_0 = \psi'(1 + \alpha\zeta\varpi^m) f_0. \tag{3}$$

现在，对于每个元组 $(i, \underline{\alpha}, \alpha_m)$，其中 $i \in \{0, 1\}$, $\underline{\alpha} \in \mathcal{R}'$，且 $\alpha_m \in \mathbb{F}$，我们定义两个W值函数如下。函数 $\phi_{i,\underline{\alpha},\alpha_m} : D^\times \to W$ 的支集为 $H \cdot \Delta_{i,\underline{\alpha}}$，其中

$$\phi_{i,\underline{\alpha},\alpha_m}(h \cdot \Delta_{i,\underline{\alpha}}) = \theta_\psi^\#(h)(f_{\alpha_m})$$

而函数 $\phi'_{i,\underline{\alpha},\alpha_m} : D^\times \to W$ 的支集为 $H \cdot \Delta'_{i,\underline{\alpha}}$，其中

$$\phi'_{i,\underline{\alpha},\alpha_m}(h \cdot \Delta'_{i,\underline{\alpha}}) = \theta^{\#}_{\psi}(h)(f_{\alpha_m})$$

对于每个$h \in H$。

在这种情况下，我们将为$K^\times$ 和$L^\times$的特征展示若干等变向量。

4.1. 限制于$K^\times$。我们首先处理$K = F(\varpi)$。

命题4.1。设 χ 是$K^\times$ 的一个光滑特征，满足

$$\chi|_{H'_1 \cap K^\times} = \chi|_{F^\times(1+\mathcal{P}_K^{m+1})} = \psi'|_{F^\times(1+\mathcal{P}_K^{m+1})},$$

当m为奇数时，以及

$$\chi|_{H \cap K^\times} = \chi|_{F^\times(1+\mathcal{P}_K^{m})} = \theta^{\#}_{\psi}|_{F^\times(1+\mathcal{P}_K^{m})},$$

当 m 为偶数时。因此， χ 在 π_ψ 对 $K^\times$ 的限制中出现，且重数一。该向量

$$v_\chi = \begin{cases} \sum\limits_{\substack{i=0,1 \\ \underline{\alpha}\in\mathcal{R}', \alpha_m \in \mathbb{F}}} \chi(\Delta_{i,\underline{\alpha}})\, \chi(1+\alpha_m \varpi^m) \cdot \phi_{i,\underline{\alpha},\alpha_m} & \text{if } m \text{ is odd,} \\ \sum\limits_{\substack{i=0,1 \\ \underline{\alpha}\in\mathcal{R}'}} \chi(\Delta_{i,\underline{\alpha}}) \cdot \phi_{i,\underline{\alpha}} & \text{if } m \text{ is even,} \end{cases}$$

属于表示 π_ψ 的 χ-同型分量。

证明。 设 m 为奇数。取 $x = h \cdot \Delta_{i_0,\underline{\delta}} \in D^\times$，其中 $h \in H$， $\underline{\delta} = (\delta_1, 0, \delta_3, 0, \ldots, \delta_{m-2}, 0) \in \mathcal{R}$，且 $i_0 \in \{0,1\}$。注意

$$v_\chi(x) = \begin{cases} \sum\limits_{\alpha_m \in \mathbb{F}} \chi(\Delta_{i_0,\underline{\delta}}) \chi(1+\alpha_m \varpi^m) \cdot \theta^{\#}_{\psi}(h)(f_{\alpha_m}) & \text{if } \underline{\delta} \in \mathcal{R}', \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

现在假设 $\underline{\delta} \in \mathcal{R}'$。令 $z \in K^\times$，并写作

$$z = a \cdot \varpi^{j_0} \cdot (1 + \sum_{\substack{r \geq 1 \\ r \text{ is odd}}} \beta_r \varpi^r)$$

对某个 $a \in F^\times$、$j_0 \in \{0,1\}$ 以及所有 r， $\beta_r \in \mathbb{F}$。于是，

$$\pi_\psi(z) v_\chi(x) = v_\chi(xz) = v_\chi\left(ah \cdot \varpi^{i_0+j_0}(1 + \sum_{\substack{r=1 \\ r \text{ is odd}}}^{m-1} \delta_r \varpi^r) \cdot (1 + \sum_{\substack{r \geq 1 \\ r \text{ is odd}}} \beta_r \varpi^r) \right).$$

我们记作

$$\mathbf{y} = \varpi^{i_0+j_0}(1 + \sum_{\substack{r=1 \\ r \text{ is odd}}}^{m-1} \delta_r \varpi^r) \cdot (1 + \sum_{\substack{r \geq 1 \\ r \text{ is odd}}} \beta_r \varpi^r)$$

as

$$\mathbf{y} = b_0 \cdot h_0 \cdot \Delta_{i_0+j_0,\underline{\delta}'},$$

其中

$$b_0 = 1 + \sum_{\substack{r=2 \\ r \text{ is even}}}^{m-1} \xi_r \varpi^r$$

with

$$\xi_r = \sum_{\substack{t=1 \\ t \text{ is odd}}}^{r-1} \delta_{r-t}\beta_t$$

对于偶数 $r \leq m-1$，以及

$$\underline{\delta'} = (\delta'_1,,0,\delta'_3,0,\ldots,\delta'_{m-2},0) \in \mathcal{R}'$$

with

$$\delta'_r = \delta_r + \beta_r - \sum_{\substack{t=1 \\ t \text{ is odd}}}^{r-2} \delta'_t\xi_{r-t}$$

对于奇数 $r \leq m-2$，且

$$h_0 = 1 + \sum_{\substack{j=m \\ j \text{ is odd}}}^{2m-1} \epsilon_j\varpi^j + \sum_{\substack{k=m+1 \\ k \text{ is even}}}^{2m} \xi_k\varpi^k + \cdots$$

使得

$$\epsilon_j = \beta_j - \sum_{\substack{t=1 \\ t \text{ is odd}}}^{m-2} \delta'_t\xi_{j-t} - \sum_{\substack{t=m \\ t \text{ is odd}}}^{j-2} \epsilon_t\xi_{j-t},$$

对于奇数 $j \geq m$，且

$$\xi_k = \sum_{\substack{t=1 \\ t \text{ is odd}}}^{m-2} \delta_t\beta_{k-t} - \sum_{\substack{t=m+1 \\ t \text{ is even}}}^{k-2} \xi_t\xi_{k-t} - \sum_{\substack{t=m \\ t \text{ is odd}}}^{k-1} \delta'_{k-t}\epsilon_t$$

对于偶数 $m+1 \leq k \leq 2m$。我们取上述的 $\delta'_m = 0$。

显然，$b_0 \in F^\times$，且 $h_0 \in H \cap K^\times$。现在我们写作

$$h_0 = h_1 \cdot (1 + \epsilon_m\varpi^m),$$

其中

$$h_1 = 1 + \sum_{\substack{j=m+2 \\ j \text{ is odd}}}^{2m-1} \epsilon_j\varpi^j + \sum_{\substack{k=m+1 \\ k \text{ is even}}}^{2m} \xi_k\varpi^k + \cdots$$

属于 $H'_1 \cap K^\times$。我们得到，

$$\begin{aligned}
\pi_\psi(z)v_\chi(x) &= v_\chi\left(ah \cdot b_0 \cdot h_0 \cdot \Delta_{i_0+j_0,\underline{\delta'}}\right) \\
&= \theta^\#_\psi(ah \cdot b_0 \cdot h_0)v_\chi\left(\Delta_{i_0+j_0,\underline{\delta'}}\right) \\
&= \psi(ab_0)\chi(\Delta_{i_0+j_0,\underline{\delta'}})\theta^\#_\psi(h)\theta_\psi(h_1)\theta_\psi(1+\epsilon_m\varpi^m)\left[\sum_{\alpha_m \in \mathbb{F}} \chi(1+\alpha_m\varpi^m)f_{\alpha_m}\right].
\end{aligned}$$

现在我们来分析这个向量

$$\begin{aligned}\mathbf{w} &= \theta_\psi(h_1)\theta_\psi(1+\epsilon_m\varpi^m)\left[\sum_{\alpha_m\in\mathbb{F}}\chi(1+\alpha_m\varpi^m)f_{\alpha_m}\right]\\ &= \theta_\psi(h_1)\left[\sum_{\alpha_m\in\mathbb{F}}\chi(1+\alpha_m\varpi^m)\cdot\psi\left(1+(\alpha_m-\epsilon_m)\epsilon_m\varpi^{2m}\right)f_{\alpha_m-\epsilon_m}\right]\end{aligned}$$

其中，在最后一步中，我们使用了 (2)。注意，根据我们关于 χ 的假设，我们有 $\theta_\psi(h_1) = \psi'(h_1) = \chi(h_1)$（因为 $h_1 \in H_1' \cap K^\times$），并且 χ 在 $1+\mathcal{P}_K^{2m+1}$ 上也是平凡的（因为 ψ' 在 $1+\mathcal{P}_D^{2m+1}$ 上是平凡的）。因此，我们得到

$$\begin{aligned}\mathbf{w} &= \chi(h_1)\sum_{\alpha_m\in\mathbb{F}}\chi(1+\epsilon_m\varpi^m)\cdot\chi(1+(\alpha_m-\epsilon_m)\varpi^m)f_{\alpha_m-\epsilon_m}\\ &= \chi(h_0)\sum_{\alpha_m\in\mathbb{F}}\chi(1+\alpha_m\varpi^m)f_{\alpha_m}\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}\pi_\psi(z)v_\chi(x) &= \chi\left(a\cdot b_0\cdot h_0\cdot\Delta_{i_0+j_0,\underline{\delta}'}\right)\theta_\psi^\#(h)\left[\sum_{\alpha_m\in\mathbb{F}}\chi(1+\alpha_m\varpi^m)f_{\alpha_m}\right]\\ &= \chi\left(z\cdot\Delta_{i_0,\underline{\delta}}\right)\sum_{\alpha_m\in\mathbb{F}}\chi(1+\alpha_m\varpi^m)\cdot\theta_\psi^\#(h)(f_{\alpha_m})\\ &= \chi(z)\cdot v_\chi(x).\end{aligned}$$

当m 为偶数时，$W = \mathbb{C}$ 和 $\theta_\psi^\#$ 是一个一维特征标。现在注意，奇数情形下的上述证明同样适用，事实上还更简单，只需取 $\alpha_m = 0$、$f_0 = 1$，并令$\phi_{i,\underline{\alpha}} = \phi_{i,\underline{\alpha},0}$。□

注14. 满足 $\chi|_{H_1'\cap K^\times} = \psi'|_{H_1'\cap K^\times}$ 的特征 $\chi: K^\times \to \mathbb{C}$ 是

$$\left|\frac{K^\times}{F^\times(1+\mathcal{P}_K^{m+1})}\right| = 2q^{m-\left[\frac{m}{2}\right]} = 2q^{\frac{m+1}{2}},$$

当m 为奇数时。类似地，当m 为偶数时，满足条件 $\chi|_{H\cap K^\times} = \theta_\psi^\#|_{H\cap K^\times}$ 的特征 $\chi: K^\times \to \mathbb{C}$ 的数量为

$$\left|\frac{K^\times}{F^\times(1+\mathcal{P}_K^{m})}\right| = 2q^{m-1-\left[\frac{m-1}{2}\right]} = 2q^{\frac{m}{2}}.$$

若π_ψ 具有平凡中心特征，则平凡特征$\mathbf{1}_{K^\times}$ 出现于$K^\times$ 的限制π_ψ 中；令 $\chi = 1$，我们得到以下推论。

推论 4.2。 如果 π_ψ 具有平凡中心特征，则该向量

$$v_K = \begin{cases}\sum\limits_{\substack{i=0,1\\ \underline{\alpha}\in\mathcal{R}',\alpha_m\in\mathbb{F}}}\phi_{i,\underline{\alpha},\alpha_m} & \text{if } m \text{ is odd,}\\ \sum\limits_{\substack{i=0,1\\ \underline{\alpha}\in\mathcal{R}'}}\phi_{i,\underline{\alpha}} & \text{if } m \text{ is even,}\end{cases}$$

是表示 π_ψ 中 $K^\times$-不变向量。

4.2. **限制在** $L^\times$。我们取 $L = F(\zeta\varpi)$。

命题4.3。 设 λ 是 $L^\times$ 的一个光滑特征，具有

$$\lambda|_{H_1'\cap L^\times} = \lambda|_{F^\times(1+\mathcal{P}_L^m)} = \psi'|_{F^\times(1+\mathcal{P}_L^m)},$$

当 m 为奇数时，并且

$$\lambda|_{H\cap L^\times} = \lambda|_{F^\times(1+\mathcal{P}_L^m)} = \theta_\psi^\#|_{F^\times(1+\mathcal{P}_L^m)},$$

当 m 为偶数时。于是 λ 在 π_ψ 限制到 $L^\times$ 后重数一出现。向量

$$v_\lambda = \begin{cases} \sum\limits_{\substack{i=0,1\\ \underline{\alpha}\in\mathcal{R}'}} \lambda(\Delta'_{i,\underline{\alpha}})\cdot\phi'_{i,\underline{\alpha},0} & \text{if } m \text{ is odd,} \\ \sum\limits_{\substack{i=0,1\\ \underline{\alpha}\in\mathcal{R}'}} \lambda(\Delta'_{i,\underline{\alpha}})\cdot\phi'_{i,\underline{\alpha}} & \text{if } m \text{ is even,} \end{cases}$$

位于表示 π_ψ 的 λ 同型分量中。

证明。 该证明类似于命题4.1的证明。注意，我们取 $\alpha_m = 0$，并且需要使用 (3) 而不是 (2)。□

注15. 满足 $\lambda|_{H_1'\cap L^\times} = \psi'|_{H_1'\cap L^\times}$ or$\lambda|_{H\cap L^\times} = \theta_\psi^\#|_{H\cap L^\times}$ 的特征 $\lambda : L^\times \to \mathbb{C}$

$$\left|\frac{L^\times}{F^\times(1+\mathcal{P}_L^{\left[\frac{m-1}{4}\right]+1})}\right| = 2q^{m-1-\left[\frac{m-1}{2}\right]}.$$

如果 π_ψ 具有平凡中心特征，那么 $L^\times$ 的平凡特征 $\mathbf{1}_{L^\times}$ 会出现在对 $L^\times$ 的限制 π_ψ 中，令 $\lambda = 1$，即可得到以下推论。

推论 4.4. 若 π_ψ 具有平凡中心特征，则该向量

$$v_L = \begin{cases} \sum\limits_{\substack{i=0,1\\ \underline{\alpha}\in\mathcal{R}'}} \phi'_{i,\underline{\alpha},0} & \text{if } m \text{ is odd,} \\ \sum\limits_{\substack{i=0,1\\ \underline{\alpha}\in\mathcal{R}'}} \phi'_{i,\underline{\alpha}} & \text{if } m \text{ is even,} \end{cases}$$

是表示 π_ψ 中的一个 $L^\times$-不变向量。

5. Correlation Coefficients

本节将证明本文关于相关系数的主要定理。与前面一样，我们有

$$M = F(\zeta), K = F(\varpi), L = F(\zeta\varpi).$$

我们取 $G = D^\times/F^\times$，并考虑 G 中 $M^\times$、$K^\times$ 和 $L^\times$ 的给定嵌入。为简化记号，我们将相应的子群分别记为 M、K 和 L，因为这样不会引起任何混淆。我们关注的是相关系数。

$$c(\pi; M, K), c(\pi; M, L), c(\pi; K, L)$$

对于G的不可约表示 π。

正如引言中所述，我们的方法非常直接。我们使用给定的 $\pi = \pi_\psi$ 模型，并已在第 3 节和第 4 节中明确写出了该模型中 M、K 和 L 的不变向量。现在，为了计算主定理中的相关系数，我们在 π_ψ 上固定一个 G-不变内积，将这三个不变向量归一化为该内积下的单位向量，并计算其中任意两个向量之间的内积。

G不变内积确实是显然的那个。设G 为一个紧群，且H是其闭子群。假设(σ, W) 是 H 的一个不可约酉表示，其内积为 $\langle \cdot, \cdot \rangle_\sigma$。那么诱导表示 $\mathrm{Ind}_H^G \sigma$ 关于以下内积是酉的

$$\langle \phi_1, \phi_2 \rangle = \int_G \langle \phi_1(g), \phi_2(g) \rangle_\sigma dg,$$

其中dg 是G上的 Haar 测度。

回顾一下，在第3节中，以及第3节中m 为偶数时，诱导表示 σ 是一维的；而在第3节中m 为奇数时，诱导表示 σ 的维数为q。

5.1. **分歧情形**。 我们处于第3节的背景下，因此π_ψ 是$D^\times$ 的一个不可约表示，其导子为奇数$m+2$，其中m 是奇正整数。我们进一步假设它具有平凡中心特征。回顾一下，此时它总有一个M 不变向量（参见推论3.2）；当且仅当$q \equiv 3$模4时，它有一个K 不变向量（参见推论3.4）；当且仅当$q \equiv 1$ 模4时，它有一个L 不变向量（参见推论 3.6）。注意，相应的单位向量为:

$$\hat{v}_M = \frac{1}{\sqrt{(q+1)q^{[\frac{m-1}{4}]}}} \sum_{\substack{\underline{\alpha} \in S' \\ 0 \le i \le q}} f_{\underline{\alpha}, i},$$

$$\hat{v}_K = \frac{1}{\sqrt{2q^{[\frac{m+1}{4}]}}} \sum_{\underline{\alpha} \in S''} \left[f_{\underline{\alpha}, t_0} + \psi(\varpi) f_{\underline{\alpha}, 3t_0} \right], \hat{v}_L = \frac{1}{\sqrt{2q^{[\frac{m+1}{4}]}}} \sum_{\underline{\alpha} \in S''} \left[f_{\underline{\alpha}, r_0} + \psi(\varpi) f_{\underline{\alpha}, 3r_0+1} \right].$$

定理*1.3*的证明。 首先假设$q \equiv 3$ 模4，在这种情况下，我们只需要计$c(\pi;\ M,\ K)$。其表达式为

$$\begin{aligned} c(\pi; M, K)] &= |\langle \hat{v}_M, \hat{v}_K \rangle|^2 \\ &= \frac{1}{2(q+1)q^{\frac{m-1}{2}}} \cdot |\langle f_{\underline{0}, t_0} + f_{\underline{0}, 3t_0}, f_{\underline{0}, t_0} + \psi(\varpi) f_{\underline{0}, 3t_0} \rangle|^2 \\ &= \frac{|1+\psi(\varpi)|^2}{2(q+1)q^{\frac{m-1}{2}}} \\ &= \frac{|1+\psi(\varpi)|^2}{2 \dim \pi} \\ &= \begin{cases} \frac{2}{\dim \pi} & \text{if } \psi(\varpi) = 1, \\ 0 & \text{if } \psi(\varpi) = -1. \end{cases} \end{aligned}$$

现在令 $q \equiv 1$ 模 4，并且我们需要计算 $c(\pi; M,L)$。这由以下内容给出

$$\begin{aligned} c(\pi; M, L) &= |\langle \hat{v}_M, \hat{v}_L \rangle|^2 \\ &= \frac{1}{2(q+1)q^{\frac{m-1}{2}}} \cdot |\langle f_{\underline{0},r_0} + f_{\underline{0},3r_0+1}, f_{\underline{0},r_0} + \psi(\varpi) f_{\underline{0},3r_0+1} \rangle|^2 \\ &= \frac{|1+\psi(\varpi)|^2}{2(q+1)q^{\frac{m-1}{2}}} \\ &= \frac{|1+\psi(\varpi)|^2}{2\dim \pi} \\ &= \begin{cases} \frac{2}{\dim \pi} & \text{if } \psi(\varpi) = 1, \\ 0 & \text{if } \psi(\varpi) = -1. \end{cases} \end{aligned}$$

□

注16。类似地，利用注记 11 和注记 13，可以容易地计算出以下相关系数。对于$q \equiv 3$ 模 4 的情形，我们有

$$c(\pi; K_s, K_{s'}) = 0$$

对于 $s \neq s'$，并且

$$c(\pi; M, K_s) = \frac{|1+\psi(\varpi)|^2}{2\dim \pi}.$$

对于 $q \equiv 1$ 模 4，我们有

$$c(\pi; L_s, L_{s'}) = 0$$

对于 $s \neq s'$，并且

$$c(\pi; M, L_s) = \frac{|1+\psi(\varpi)|^2}{2\dim \pi}.$$

5.2. **非分歧情形**。 我们处于第 4 节的背景下，因此 π_ψ 是$D^\times$ 的一个不可约表示，其导子为偶数 $2m+2$。需要考虑两种情形，即 (i) m 为偶数，以及 (ii) m 为奇数。我们进一步假设 π_ψ 具有平凡中心特征。因此，π_ψ 对于K （参见推论 4.2）和L （参见推论 4.4）均具有不变向量。注意，相应的单位向量为：

$$\hat{v}_K = \frac{1}{\sqrt{2q^{\frac{m}{2}}}} \sum_{\substack{i=0,1 \\ \underline{\alpha} \in \mathcal{R}'}} \phi_{i,\underline{\alpha}},$$

$$\hat{v}_L = \frac{1}{\sqrt{2q^{\frac{m}{2}}}} \sum_{\substack{i=0,1 \\ \underline{\alpha} \in \mathcal{R}'}} \phi'_{i,\underline{\alpha}},$$

当m 为偶数时，且

$$\hat{v}_K = \frac{1}{\sqrt{2q^{\frac{m+1}{2}}}} \sum_{\substack{i=0,1 \\ \underline{\alpha} \in \mathcal{R}', \alpha_m \in \mathbb{F}}} \phi_{i,\underline{\alpha},\alpha_m},$$

$$\hat{v}_L = \frac{1}{\sqrt{2q^{\frac{m-1}{2}}}} \sum_{\substack{i=0,1 \\ \underline{\alpha} \in \mathcal{R}'}} \phi'_{i,\underline{\alpha},0},$$

当m 为奇数时。

定理*1.4*的证明。注意到

$$\phi'_{0,\underline{0}} = \phi_{0,\underline{0}} \ \& \ \phi'_{1,\underline{0}} = \psi(\zeta^{-1}) \cdot \phi_{1,\underline{0}},$$

and

$$\phi'_{0,\underline{0},\alpha} = \phi_{0,\underline{0},\alpha} \ \& \ \phi'_{1,\underline{0},\alpha} = \psi(\zeta^{-1}) \cdot \phi_{1,\underline{0},\alpha},$$

当m 为偶数时，我们得到，

$$\begin{aligned} c(\pi; K, L) &= |\langle \hat{v}_K, \hat{v}_L \rangle|^2 \\ &= \frac{1}{4q^m} \cdot |\left\langle \phi_{0,\underline{0}} + \phi_{1,\underline{0}}, \phi_{0,\underline{0}} + \psi(\zeta^{-1})\phi_{1,\underline{0}} \right\rangle|^2 \\ &= \frac{|1+\psi(\zeta)|^2}{4q^m} \\ &= \frac{|1+\psi(\zeta)|^2}{2\dim \pi}, \end{aligned}$$

当m 为奇数时，我们得到，

$$\begin{aligned} c(\pi; K, L) &= |\langle \hat{v}_K, \hat{v}_L \rangle|^2 \\ &= \frac{1}{4q^m} \cdot |\left\langle \sum_{\alpha \in \mathbb{F}} \phi_{0,\underline{0},\alpha} + \sum_{\alpha \in \mathbb{F}} \phi_{1,\underline{0},\alpha}, \phi_{0,\underline{0},0} + \psi(\zeta^{-1})\phi_{1,\underline{0},0} \right\rangle|^2 \\ &= \frac{|1+\psi(\zeta)|^2}{4q^m} \\ &= \frac{|1+\psi(\zeta)|^2}{2\dim \pi}. \end{aligned}$$

□

5.3. **与舒尔正交关系的相容性**。 本节验证定理1.3和定理1.4与恒等式 [AJ22（第 502] 页，公式**(1)**）一致

$$\sum_{\pi \in \widehat{G}} \dim \pi \cdot c(\pi; H, K) = \frac{|G||H \cap K|}{|H||K|},$$

该恒等式适用于任意具有两个无重数子群H 和K的有限群G 。上述恒等式可由 [AJ22, 引理2.1] ，利用舒尔正交关系轻易推出。

如第 1 节所述，其思路是使用有限群 $G_c = D^\times F^\times(1+\mathcal{P}_D^{c-1})$，以及环面在 G_c 中对应的嵌入 M_c、K_c 和 L_c 。注意，这些子群中的任意两个的交集都是平凡的。这些群的基数由下式给出。

$$|G_c| = \begin{cases} 2(q+1)q^{3j-1} & \text{if } c = 2j+1, \\ 2(q+1)q^{3j} & \text{if } c = 2j+2, \end{cases}$$

and

$$|M_c| = (q+1)q^{\left[\frac{c-2}{2}\right]}, |K_c| = |L_c| = 2q^{(c-2)-\left[\frac{c-2}{2}\right]}.$$

我们需要知道具有平凡中心特征的给定导子的 $D^\times$ 的不可约表示数量，这由 [Tun78、命题 3.5 以及第 189] 页的注给出：

$$\text{Number of } \pi \text{ of conductor } c = \begin{cases} \frac{q^2-1}{2} q^{\frac{c-4}{2}} & \text{if } c \text{ is even and } c \geq 4, \\ 2(q-1)q^{\frac{c-3}{2}} & \text{if } c \text{ is odd and } c \geq 3. \end{cases}$$

注意，导子为 1 的表示只有平凡表示，而导子为 2 的不可约表示的数量，等于二面体群 $D^{2(q+1)}$ 的二维表示数量，即 $_{q_2}^{-1}$ 。

我们还注意到，由于缺少不变向量，许多相关系数为零。更准确地说，当 π 的导子为奇数时，若 $\mathfrak{q} \equiv 1 \bmod 4$，则 $\mathfrak{c}(\pi; \mathfrak{M}, \mathfrak{K}) = 0$；若 $\mathfrak{q} \equiv 3 \bmod 4$，则 $\mathfrak{c}(\pi; \mathfrak{M}, \mathfrak{L}) = 0$；而 $\mathfrak{c}(\pi; \mathfrak{K}, \mathfrak{L}) = 0$ 总是如此（参见注 2）。当 π 的导子为偶数时，$\mathfrak{c}(\pi; \mathfrak{M}, \mathfrak{K}) = \mathfrak{c}(\pi; \mathfrak{M}, \mathfrak{L}) = 0$（参见注 5）。

我们先验证涉及 $c(\pi; M,K)$ 的恒等式；涉及 $c(\pi; M,L)$ 的恒等式验证过程类似。只有导子为奇数的表示（设为$c = 2j + 1$）会对左侧的和有贡献。给定奇数导子的表示中，一半来自 K，另一半来自 L。当$q \equiv 3 \bmod 4$ 时，来自 L 的表示不作贡献；当 $q \equiv 1 \bmod 4$ 时，来自 K 的表示不作贡献。在 π_ψ 中那些可能对和有贡献的表示里，恰有一半作非平凡贡献，即 $^2\dim \pi$；另一半不作贡献，因为有一半情况下 $\psi(\varpi) = 1$，而另一半情况下$\psi(\varpi) = -1$。因此，

$$\begin{aligned} \sum_{\pi \in \widehat{G}} \dim \pi \cdot c(\pi; M, K) &= 1 + \sum_{i=3}^{c} \frac{2(q-1)q^{\frac{i-3}{2}}}{4} \cdot \dim \pi \cdot \frac{2}{\dim \pi} \\ &= 1 + (q-1)\left(1 + q + \cdots + q^{\frac{c-3}{2}}\right) \\ &= q^{\frac{c-1}{2}} = q^j = \frac{2(q+1)q^{3j-1}}{(q+1)q^{j-1} \cdot 2q^j} \\ &= \frac{|G_c|}{|M_c||K_c|}. \end{aligned}$$

接下来我们验证涉及 $c(\pi;K、L)$ 的恒等式。这一次，只有导子为偶数的表示才会起作用，例如 $c = 2j + 2$。注意到

$$\sum_{\psi} |1 + \psi(\zeta)|^2 = \sum_{\psi} (2 + \psi(\zeta) + \psi(\zeta^{-1})) = \begin{cases} q-1 & \text{if } i = 0, \\ (q^2-1)q^{i-1} & \text{if } i \geq 1, \end{cases}$$

其中求和遍及导子为 $i+1$ 的$M^\times$ 的极小特征。我们有

$$\begin{aligned}\sum_{\pi\in\widehat{G}} \dim\pi\cdot c(\pi;K,L) &= 1+\frac{q-1}{2}+\sum_{i=1}^{j}\frac{q^2-1}{2}q^{i-1}\\ &= \frac{q+1}{2}q^j = \frac{2(q+1)q^{3j}}{2q^j\cdot 2q^j}\\ &= \frac{|G_c|}{|K_c||L_c|}.\end{aligned}$$

5.4. **定理1.1和定理1.2的证明**。设 π 是$D^\times$ 的一个不可约表示，它对某些环面有不变向量，因此 $\omega_\pi=1$。特别地，

$$\varepsilon(\pi,\Psi_a)=\omega_\pi(a)\varepsilon(\pi,\Psi)=\varepsilon(\pi,\Psi)$$

与域F的加性特征 Ψ 无关，因此我们将 epsilon因子记为 $\varepsilon(\pi)$。由于 $\omega_\pi=1$，故有 $\pi\equiv\pi^\vee$。现在由恒等式可得

$$\varepsilon(\pi)\varepsilon(\pi^\vee)=\omega_\pi(-1)$$

即 $\varepsilon(\pi)\in\{\pm1\}$。

假设 $\pi=\pi_\psi$ 是按照第2节中的方法，由F 的一个极小（按照[GK80]的术语，即原始）特征 ψ 构造而成，其中 Ω 是F 的一个二次扩张。那么，根据 [GK80 定理3.7和命题4.5], ，我们有

$$\varepsilon(\pi_\psi,\Psi)=(-1)^{f(\psi)}\varepsilon(\psi,\Psi\circ\mathrm{Tr}_{\Omega/F}).$$

注意， $\psi|_{F^\times}=\omega_\pi=1$，因此根据 [FQ73，定理 3],，我们得到

$$\varepsilon(\psi,\Psi\circ\mathrm{Tr}_{\Omega/F})=\psi(\Delta),$$

其中， Δ 是 $\Omega^\times$ 中的任意元素，满足 $\mathrm{Tr}_{\Omega/F}(\Delta)=0$。

注意，当 π 具有奇最小导子时，我们可以取 $\Omega=K$ 和 $\Delta=\varpi$ 。还要注意，在这种情况下，$f(\psi)$ 是偶数。因此

$$\varepsilon(\pi)=\psi(\varpi).$$

容易看出，根据$D^\times$ 的不可约表示的特征公式，或根据 Tunnell结果 [Tun83, Sai93] ，这样的 π 总有一个非平凡的M-不变向量；当$q\equiv 3$ 模 4 时，它有一个非平凡的K-不变向量（当$q\equiv 1$ 模 4 时，则有一个非平凡的L-不变向量）。现在定理1.1由定理1.3得出。

类似地，注意到当 $\Omega=M$ 时，$\Delta=\zeta_{q^2}^{+1}$，而在这种情况下，我们有$f(\psi)=f(\pi)/2$，即可由定理1.4和注7推出定理1.2。

致谢

作者感谢 Dipendra Prasad 提出了若干想法，进行了许多富有成效的讨论，并鼓励他们开展这项工作。第二作者感谢孟买印度理工学院的卓越学院部门通过学院博士后奖学金支持其博士后职位。

参考文献

[AJ22] U. K. Anandavardhanan 和 Arindam Jana，《不变向量的正交性》，J. Algebra 604 (2022)，496–532。MR 4414822[BF83] Colin J. Bushnell 和 Albrecht Fr¨ohlich，《高斯和与 p 进除代数》，Lecture Notes in Mathematics，第 987 卷，Springer-Verlag，Berlin-New York，1983。MR 701540[CH77] Lawrence Corwin 和 Roger E. Howe，《温和分歧的 p 进除代数的特征计算》，Pacific J. Math. 73 (1977)，第 2 期，461–477。MR 492084[FQ73] A. Fr¨ohlich 和 J. Queyrut，《关于实表示的特征的 Artin L 函数的函数方程》，Invent. Math. 20 (1973)，125–138。MR 321888[GG68] I. M. Gelfand 和 M. I. Graev，《局部紧域和函数域上四元数群的表示》，Funkcional. Anal. i Prilo˘zen 2 (1968)，第 1 期，20–35。MR 0236314[GGP12] Wee Teck Gan、Benedict H. Gross 和 Dipendra Prasad，《辛局部根数、中心临界 L 值及经典群表示论中的限制问题》，第 346 期，2012，Sur les conjectures de Gross et Prasad. I，第 1–109 页。MR 3202556[GK80] Paul G´erardin 和 Philip Kutzko，《GL(2) 的局部因子》，Ann. Sci. ´Ecole Norm. Sup. (4) 13 (1980)，第 3 期，349–384。MR 597744[Gro91] Benedict H. Gross，《Gelfand 对在数论中的若干应用》，Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 24 (1991)，第 2 期，277–301。MR 1074028[How77a] Roger E. Howe，《紧 p 进群的 Kirillov 理论》，Pacific J. Math. 73 (1977)，第 2 期，365–381。MR 579176[How77b] ———，《GL_n 的温和分歧超尖表示》，Pacific J. Math. 73 (1977)，第 2 期，437–460。MR 492087[HSY93] Hiroaki Hijikata、Hiroshi Saito 和 Masatoshi Yamauchi，《局部域上四元数代数的表示与 Hecke 算子的迹公式》，J. Number Theory 43 (1993)，第 2 期，123–167。MR 1207495[KZ80] Helmut Koch 和 Ernst-Wilhelm Zink，《局部域上 Galois 群与中心除代数表示的对应（温和情形）》，Math. Nachr. 98 (1980)，83–119。MR 623696[Pra90] Dipendra Prasad，《GL(2) 表示的三线性形式与局部 ϵ-因子》，Compositio Math. 75 (1990)，第 1 期，1–46。MR 1059954[Pra92] ———，《局部域上 GL_2 表示的不变形式》，Amer. J. Math. 114 (1992)，第 6 期，1317–1363。MR 1198305[Pra96] ———，《跷跷板对偶在分支定律中的若干应用》，Math. Ann. 304 (1996)，第 1 期，1–20。MR 1367880[Rob99] Justin Roberts，《经典 6j 符号与四面体》，Geom. Topol. 3 (1999)，21–66。MR 1673272[Sai93] Hiroshi Saito，《关于 GL(2) 特征的 Tunnell 公式》，Compositio Math. 85 (1993)，第 1 期，99–108。MR 1199206[Tun78] Jerrold B. Tunnell，《关于 GL(2) 的局部 Langlands 猜想》，Invent. Math. 46 (1978)，第 2 期，179–200。MR 476703[Tun83] ———，《GL(2) 的局部 ϵ-因子与特征》，Amer. J. Math. 105 (1983)，第 6 期，1277–1307。MR 721997

印度理工学院孟买分校数学系，印度孟买 400076。电子邮箱地址: anand@math.iitb.ac.in

印度理工学院孟买分校数学系，印度孟买 400076。电子邮箱: basudev@math.iitb.ac.in