arXiv:2304.09798v1 [math.LO] 19 Apr 2023

带有自同构的 BANACH L^p 格蕴含

ANTONIO M. SCIELZO

摘要。我们在连续逻辑框架下研究带有一个指定自同构的巴拿赫格。利用罗赫林引理的函数版本，我们证明该理论存在一个模型伴侣，它是稳定的并且具有量词消去。我们证明，该理论中非平凡的类型不可能是孤立的。随后，我们利用这一结果证明，在 Aut*(μ) 中不存在稠密余集共轭类；Aut*(μ) 是标准概率空间上非奇异变换所构成的波兰群。

目录

1. 引言 1 2. L^p 格上的自同构 3 3. 带有一个自同构的 L^p 格的模型论 7 4. 类型及其动力学性质 14 5. Aut*(μ) 的共轭类 18 参考文献 21

1. 引言

本文旨在研究带有自同构的 Banach L^p 格的模型论性质。我们将在 [BU10] 和 [Ben]所述的连续逻辑框架下开展研究。给定一个测度空间 $(X, \mathrm{F}\ \mu)$，我们用 $L^p(X, \mathrm{F}\ \mu)$ 表示由 p- 可积函数按几乎处处相等关系取商得到的向量空间。赋予范数 $\mathrm{k}f\mathrm{k} = \left(\int |f|^p \mathrm{d}\mu\right)^{1/p}$后，它便是一个 Banach 空间。此外，按逐点比较定义的序 6 是 $L^p(X, \mathrm{F}\ \mu)$ 上的格序，并且与赋范向量空间的结构相容。整体 $(L^p(X, \mathrm{F}\ \mu), \mathrm{k}\cdot\mathrm{k}, 6)$ 就是我们所说的 Banach L^p 格。

对于任意给定的 $0 \leqslant p < \infty$，AL$_p$L 表示这些格的理论。Ben Yaacov、Berenstein 和 Henson 在 [BBH11],中研究了 AL$_p$L 的模型论性质，证明了 AL$_p$L 是稳定的，并利用分析中的概念刻画了非分叉。此前 [HI02] 已证明 AL$_p$L 具有量词消去性质；由角谷表示定理 [Mey12] 可知，AL$_p$L 是可分范畴的，也就是说，除同构意义外只有一个可分 Banach L^p 格，即 $L^p([0,1],\mathrm{B}\ \mu)$，其中 μ B 上的测度为勒贝格测度。

模型理论中的一个自然问题如下。设 T 是给定语言 L 中的一个理论。如果我们用函数符号 σ 扩展 L，并将 T_σ 定义为理论 T 加上一个声明 σ 是自同构的公理，那么 T_σ 是否有模型

模型伴侣 T_A? 遗憾的是，目前尚无关于此类理论 T_A 存在性的一般判据。本文证明，扩展了自同构的 AL^{p}L 理论存在一个模型伴侣。这是对 [BH04]，中类似结果的推广，在该文中，他们证明了带有自同构的概率代数理论存在一个模型伴侣。

在某些条件下，$L^p(X, \mathrm{F}\ \mu)$ 的巴拿赫格自同构与 $(X, \mathrm{F}\ \mu)$ 的非奇异变换一一对应，也就是说，它们是保持零测集族不变的可逆可测映射。这些变换推广了保测映射的概念，是非奇异遍历理论的核心。Danilenko 在 [DS12] 中撰写了一篇综述，介绍非奇异动力系统的主要研究成果。

巴拿赫格自同构与非奇异变换之间的这种密切联系，使我们能够研究 L^p 格的一些动力学性质及其类型。随后，我们利用由此获得的模型论结果，证明单位区间上的非奇异变换所构成的波兰群中不存在稠密余集共轭类。这似乎揭示了数学这两个领域之间一种有趣的联系。

本文的组织结构如下。第 2 节中，我们介绍有关 L^p 格及其自同构的基本概念。我们将回顾 Kakutani 表示定理，该定理使我们能够将抽象的 L^p 格与具体结构$L^p(X, \mathrm{F}\ \mu)$ 联系起来。随后，我们将在可分情形下，将表示定理推广到 L^p 格的自同构，证明它们与标准概率空间上的非奇异变换相对应，并且当且仅当这些变换满足罗赫林引理时，它们才是无周期的。最后，我们将给出罗赫林引理的一个函数形式。

在第 3 节中，我们引入带有指定自同构的无原子 L^p 格理论，并证明它存在一个模型伴侣 T_A，从而回答了 [BH04] 中提出的一个问题。这里的主要工具将是函数式罗赫林引理。接着，我们运用 Lascar [Las91] 的一个结果证明 T_A 具有量词消去，并沿用 [CP98] 中的相同思路刻画 T_A 中的独立性，并证明 T_A 是稳定的。

在第 4 节中，我们回顾类型空间 $S_n(T_A)$ 的逻辑拓扑和度量的定义。随后证明，在 $S_1(T_A)$ 中不存在非平凡的孤立类型，即两个拓扑重合的空间中的点。接着，我们为 L^p 格引入一种遍历性概念；在可分情形下，它与测度论中的遍历性概念相对应。在遍历理论中，非奇异遍历变换可根据是否存在有限或 σ-有限等价不变测度进行分类。本文将介绍一种类似的遍历格分类方法，其依据是它们实现的类型。

最后，在第 5 节中，我们展示 T_A 不存在非平凡孤立 1-型的一个应用。我们回顾标准概率空间上的非奇异变换群 Aut$^*(\mu)$ 的弱拓扑定义，该拓扑使其成为一个波兰群。随后，我们考察一个可分的 L^p 格 E，并指出使 (E, σ) 成为 T_A 的模型的自同构 σ，正是 Aut$^*(\mu)$ 中的无周期变换；这些变换构成该群的余瘦子集。然后我们证明，若某个自同构 σ 有一个余贫乏的共轭类，则 (E, σ) 不实现所有非孤立类型，这是不可能的。

2. L^p 格的自同构

我们从一些基本定义开始，沿用[Mey12]中的表述和记号。我们称实 Banach 空间 E 连同格序 6 为 巴拿赫格 ，如果对所有 $u, v, w \in E$，都有

—（平移不变性） $u \leqslant v$ 蕴含 $u + w \leqslant v + w$，—（正齐次性）对于任意标量 $0 \leqslant r$，若 $u \leqslant v$ 则 $ru \leqslant rv$，—（单调性） $|u| \leqslant |v|$ 蕴含kuk 6 kvk,

其中 $|x| = \sup\{x, -x\} = x \vee (-x)$。如果 E 中的两个元素 u 和 v 满足 $|u| \wedge |v| = 0$, 则称它们为**不相交**。给定 $1 \leqslant p < \infty$，如果巴拿赫格 $(E,6)$ 满足：只要 u 和 v 不相交，就有 $\|u + v\|^p = \|u\|^p + \|v\|^p$，则称其为 L^p 格 。巴拿赫格中一个不能表示为两个其他非零不相交元素之和的非零元素称为**原子**。如果该格不含原子，则称其为**无原子**。除非另有说明，以下我们讨论的格均为无原子格。

如果（X，F μ）是一个测度空间，那么由 p-可积函数关于几乎处处相等的等价类组成的空间 $L^p(X$，F $\mu)$，连同由逐点比较给出的序，是一个 L^p 格。角谷表示定理 [Mey12，定理 2.7。1]指出，每个抽象的 L^p 格实际上都是某个测度空间的具体 L^p 格。在可分的无原子情形下，角谷表示定理具有更精确的形式。

事实 2.1 （[Mey12，定理 2.7。3]）。 如果 E 是一个可分的无原子 L^p 格，那么它同构于 L^p（ $\mathbb{I}$，$\mathcal{B}$ λ），其中（ $\mathbb{I}$，$\mathcal{B}$ λ） 是单位区间$\mathbb{I} = [0, 1]$上的勒贝格测度空间。

设 E 是一个巴拿赫格。 E 的一个向量子空间 B 称为带，如果
— 对所有的 $u \in E$ 和 $v \in B$，只要 $|u| \leqslant |v|$，就有 $u \in B$；— 对每个在 E 中有上确界的子集 $A \subset B$，都有 $\sup(A) \in B$。
若 A 是 E 的子集，我们将包含 A 的最小带记作 $\mathfrak{b}(A)$。若对于某个 $u \in E$，有 $A = \{u\}$，我们将由 $\{u\}$ 生成的带记作 $\mathfrak{b}(u)$。由单个元素生成的带称为主带。

给定一个集合 $A \subseteq E$， A 的不交补 $A^\perp$ 是由所有与 A 中任意元素都不相交的 $u \in E$ 组成的集合。事实证明，由 A 生成的带恰好是 A 的双重补集 $A^{\perp\perp} = (A^\perp)^\perp$ 。根据 [Mey12，定理 1.2.9]，，若 E 是一个 L^p 格且 $A \subseteq E$，则可将 E 分解为直和 $E = \mathfrak{b}(A) \oplus A^\perp$。给定 $u \in E$ 和$B \subseteq E$ 一个带，我们将 u 沿 $B^\perp$ 投影到 B 上的投影记作 $u \restriction B$。

给定巴拿赫格 E， E 的巴拿赫格自同构 是保格序的等距线性自同构，或者等价地保格模 $|\cdot|$。
我们将一个正元素对另一个正元素的限制 定义为

$$x \restriction y := \lim_n 2^n \Big(\frac{x}{2^n} \wedge y \Big).$$

对于一般情形，只需令 $x \restriction y := x^+ \restriction |y| - x^- \restriction |y|$。这与将 x 投影到由 y 生成的带上的投影一致（参见 [Mey12，命题 1.2.11]）。特别地，在具体格 $L^p(X$，F $\mu)$ 中，对于所有正的 f和 g，都有 $f \restriction g = f \restriction \operatorname{supp} g$。在

事实上，

$$\left\| f\cdot\chi_{\operatorname{supp} g}-2^n\left(\frac{f}{2^n}\wedge g\right)\right\| = \left\|(f-2^n g)\cdot\chi_{\{x:0<g(x)<f(x)/2^n\}}\right\| \leqslant \left\|f\cdot\chi_{\{x:0<g(x)<f(x)/2^n\}}\right\|\to 0$$

当 n 趋于无穷时，因为集合序列 $\left\{x:\ 0<g(x)<f(x)/2^n\right\}$ 递减，且交集为空。容易看出，如果 σ 是向量格的自同构，则 $\sigma(x\restriction y)=\sigma x\restriction\sigma y$。

2.1. **自同构群的表示** L^p**格。** 如果 $\sigma\colon(X,\ \mathsf{F}\ \mu)\to(X',\ \mathsf{F}'\nu)$ 是一个可测映射，我们用 $\sigma_*\mu$ 表示由 $\sigma_*\mu(A)=\mu(\sigma^{-1}A)$ 定义的推前测度，其中对所有 $A\in\mathsf{F}'$ 均成立。通常，如果 ν 是 $(X,\ \mathsf{F})$ 上的另一个测度，我们称 μ 和 ν 等价，如果对于所有 $A\in\mathsf{F}$，$\mu(A)=0$ 当且仅当 $\nu(A)=0$。

定义 2.2. 设 $(X,\ \mathsf{F}\ \mu)$ 为一个测度空间。若映射 $\sigma\colon X\to X$ 是一个可逆的可测映射，且 μ 与 $\sigma_*\mu$ 等价，则称其为**非奇异变换**（或测度类保持变换）。

$(X,\mathsf{F}\ \mu)$ 上的非奇异变换构成一个群，我们将其记为 $\mathrm{Aut}^*(X,\mathsf{F}\ \mu)$；当上下文已明确所讨论的测度空间时，也简记为 $\mathrm{Aut}^*(\mu)$。

现在假设 $(X,\ \mathsf{F}\ \mu)$ 是一个 σ有限测度空间，并令 $\sigma\in$自同构群$^*(\mu)$。那么 $\mathrm{d}\sigma_*\mu$ 相对于 $\mathrm{d}\mu$ 的拉东–尼科迪姆导数存在，因此对于每个 $u\in L^p(X,\ \mathsf{F}\ \mu)$，我们可以定义一个可测函数 $\widetilde{\sigma}(u)$，定义如下：

$$\widetilde{\sigma}(u)=\left(\frac{\mathrm{d}\sigma_*\mu}{\mathrm{d}\mu}\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(u\circ\sigma^{-1}\right). \tag{2.1}$$

事实上，这是一个 p-可积函数，因为

$$\begin{aligned}\left\|\widetilde{\sigma}(u)\right\|^p &= \int\left(\frac{\mathrm{d}\sigma_*\lambda}{\mathrm{d}\lambda}\right)\cdot\left(|u|^p\circ\sigma^{-1}\right)\mathrm{d}\lambda\\ &= \int\left(|u|^p\circ\sigma^{-1}\right)\mathrm{d}\sigma_*\lambda=\int|u|^p\,\mathrm{d}\lambda=\|u\|^p.\end{aligned}$$

这也表明 $\widetilde{\sigma}$ 实际上是 $L^p(\mu)$ 的等距性，而且很容易看出，$\widetilde{\sigma}\colon L^p(\mu)\to L^p(\mu)$ 是一个向量格自同构。这意味着 $\widetilde{\sigma}$ 属于 $\mathrm{Aut}(L^p(\mu))$，即巴拿赫格自同构群，以下我们将其简称为自同构。

直接计算可得，应用 $\sigma\mapsto\widetilde{\sigma}$ 定义了 $\mathrm{Aut}^*(\mu)$ 在 $L^p(\mu)$ 上通过自同构给出的作用。此外，在测度空间为单位区间 $\mathbb{I}$及其勒贝格概率测度 λ 的特殊情形下，$L^p(\lambda)$ 的每个自同构都由 $\mathbb{I}$ 的一个非奇异变换诱导，且这种对应是一个群同构。

事实 2.3 ([Ben18，定理 2。4])。 上文定义的映射 $\sigma\mapsto\widetilde{\sigma}$ 是从自同构群$^*(\lambda)$ 到$\mathrm{Aut}(L^p(\lambda))$的同构。其逆映射定义为

$$\overline{\tau}(r)=\inf\left\{q\in\mathbb{I}\cap\mathbb{Q}:r\in\operatorname{supp}\tau(\chi_{[0,q]})\right\},$$

对所有 $\tau \in \mathrm{Aut}(L^p(\lambda))$ 以及所有 $r \in \mathbb{I}$。

然而，一般而言，并非 $L^p(\mu)$ 的每个自同构都由 $(X, \mathsf{F}\ \mu)$ 上的非奇异变换所诱导。

2.2. **巴拿赫格自同构的罗赫林引理**。设 $(X,\mathsf{B}\ \mu)$ 是一个带有 σ-有限测度的标准博雷尔空间。

定义 2.4。若非奇异变换 σ 作用于 $(X,\mathsf{B}\ \mu)$，且对每个整数 $n > 0$，$\{x \in X\colon \sigma^n(x) = x\}$ 中 n-周期点构成的集合是零测的，则称其为无周期的 。

无周期变换的一个基本例子是平移 τ_r，步长为 r，定义在实数直线 $(\mathbb{R},\mathsf{B}\ \lambda)$ 上，并以勒贝格测度为测度，定义为

$$\tau_r(x) = x + r, \tag{2.2}$$

对任意 $r \in \mathbb{R}$。另一个例子是旋转 ρ_α，角度为 $2\pi\alpha$，定义在带有勒贝格测度的单位区间 $(\mathbb{I},\mathsf{B}\ \lambda)$ 上，定义为

$$\rho_\alpha(x) = \begin{cases} x + \alpha & \text{if } x + \alpha \leqslant 1 \\ x + \alpha - 1 & \text{otherwise,} \end{cases} \tag{2.3}$$

其中 $0 < \alpha < 1$ 是一个无理数。

设 σ 是 $(X,\mathsf{B}\ \mu)$ 上的非奇异变换。现在我们回顾遍历理论中的一条经典结论，并将在 L^p 格的背景下重述它。

事实 2.5（非奇异变换的罗赫林引理 [Fri70, 引理 7。9]）。若 σ 是无周期的，则对任意 $n > 1$ 和 $\varepsilon > 0$，存在 $A \in \mathcal{B}$ 使得 $\sigma^i A$，其中 $0 \leqslant i < n$两两不相交，并且

$$\mu\Big(X \smallsetminus \bigcup_{i<n} \sigma^i A\Big) < \varepsilon.$$

下面是一条关于无周期变换的更基本的结果，可通过反复应用 [Fri70, 引理 7.1]得到。

引理 2.6。对于每个正测度的 $A \in \mathcal{B}$ 和每个整数 $N > 0$，都存在一个正测度的$B \subseteq A$，使得 $\sigma^k(B)$ 对所有 $1 \leqslant k \leqslant N$均成立。

事实证明，罗赫林引理刻画了非奇异变换的无周期性，正如我们将在下面的命题中看到的那样。

命题 2.7。设 σ 满足罗赫林引理，即对于所有的 $n > 0$ 和 $\varepsilon > 0$，存在一个可测集 A，使得集合 A、σA、.....、$\sigma^{n-1}A$ 两两不相交，并且共同覆盖 X 的全部，至多除去测度为 ε 的部分。那么 σ 是无周期的。

证明。假设不是这样。那么存在某个 $m \in \mathbb{N}$，使得 $Y = \{x \in X\colon \sigma^m x = x\}$ 具有正测度。选取 $n = 2m$ 和 $\varepsilon = \mu Y/2$，并找到满足 Rokhlin 条件的集合 A。由于 $\mu Y > 2\varepsilon$，必定存在一个 $k < n$，使得 $\sigma^k A$ 与 Y 相交，因此存在$x \in A$ 使得 $\sigma^k x \in Y$。令 m' 为 m 或 $-m$，取决于哪一个使不等式 $0 \leqslant m' + k < n$ 成立。现在，$\sigma^k A$ 和 $\sigma^{m'+k}A$ 不相交，因此 $\sigma^k x \neq \sigma^{m'+k}x$，但是$\sigma^{m'}(\sigma^k x) = \sigma^k x$，根据 Y 的选取，这就产生了矛盾。□

以下是适用于 L^p 格的罗赫林引理的一个版本，它将成为我们证明 T_σ的模型伴侣存在性的主要工具。这里我们给出一个由 Ita¨ı Ben Yaacov 提供的直接证明。这里我们假设格 $L^p(\mu) = L^p(\mathbb{I},\mathrm{B}\ \mu)$ 配备了一个由 $\mathbb{I}$ 上的无周期非奇异变换诱导的自同构 σ，该变换用相同的字母 σ 表示。

引理2.8 (泛函罗赫林引理)。设 f 是 $L^p(\mu)$中的一个正函数。对于每个 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ 和每个 $\varepsilon > 0$，存在一个正的 $g \in L^p(\mu)$，其范数不超过$\|f\|$，以及一个范数至多为 ε的正 h，使得对于$0 \leqslant k < n$，$\sigma^k(g)$ 两两不相交，且$f \leqslant \sum_{k<n} \sigma^k(g) + h$。

证明。我们将使用以下断言，它是引理 2.6 的推广。

断言 2.9。对于每个具有正测度的 $A \subseteq \mathbb{I}$ 和正整数 N，都存在具有正测度的$B \subseteq A$，使得对于所有 $1 \leqslant k \leqslant N$，$\sigma^k(B) \cap B = \varnothing$，此外，$A \subseteq \bigcup_{-N\leqslant k\leqslant N} \sigma^k(B)$在忽略零测集的意义下成立。

证明。构造一个递增序列 $(B_\alpha)_\alpha$，由 A 的子集组成，使得对所有 $1 \leqslant k \leqslant N$，$\sigma^k(B_\alpha) \cap B_\alpha = \varnothing$。从 $B_0 = \varnothing$ 开始。对于极限序数 $\alpha < \omega_1$，令 $B_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} B_\beta$。给定 B_α，令

$$A_\alpha = A \setminus \bigcup_{-N\leqslant k\leqslant N} \sigma^k(B_\alpha).$$

若 A_α 是零测的，则我们可以停止并选取 $B = B_\alpha$。否则，对 A_α 应用引理 2.6，得到一个集合 $C_\alpha \subseteq A_\alpha$，它与 σ 作用下的前 N 个像不相交，并令 $B_{\alpha+1} = B_\alpha \cup C_\alpha$。由于 C_α 都不是零测集，该构造必定会在某个可数序数处停止。△

现在固定 $N \geqslant n\|f\|/\varepsilon$，并应用该断言找到一个集合 B，使得对 $1 \leqslant k \leqslant N$ 和 $\mathbb{I} \subseteq^* \bigcup_{-N\leqslant k\leqslant N} \sigma^k B$，$\sigma^k(B) \cap B = \varnothing$；也就是说，除了至多一个零测集外，该并集覆盖了整个 $\mathbb{I}$。对等式两边应用 σ^{-N-1}，便得到 $B \subseteq^* \bigcup_{-2N-1\leqslant k\leqslant -1} \sigma^k B$，因此，对每个 $x \in B$，都存在一个正的 $k \leqslant 2N+1$，使得 $\sigma^k(x) \in B$。称 $k(x)$ 为满足条件的最小 k，并定义 $B_\ell = \{x \in B : k(x) = \ell\}$。这些集合两两不相交且可测，并且 $B \subseteq^* \bigcup_{N+1\leqslant \ell\leqslant 2N+1} B_\ell$。此外，满足 $N+1 \leqslant \ell \leqslant 2N+1$ 且 $0 \leqslant k < \ell$ 的集合 $\sigma^k B_\ell$ 构成 $\mathbb{I}$ 的一个划分（除去一个零测集）。

我们首先假设对于某个 ℓ，$S_\ell = \bigcup_{0\leqslant k<\ell} \sigma^k B_\ell$ 支持 f，并令 f_k 为 f 在 $\sigma^k B_\ell$ 上的限制，因此 $f = \sum_{k<\ell} f_k$。现在写作 $\ell = qn + p$，其中 $0 \leqslant p < n$，并注意到必定存在某个 $q_0 \leqslant q$，使得 $\sum_{m<p} \|f_{q_0 n+m}\| \leqslant \|f\|/(q+1)$。接下来，我们将对该构造进行“拆分”，避免使用介于 $q_0 n$ 和 $q_0 n + p$ 之间的指标。对于每个 $m < n$，我们定义

$$g_m = \sum_{0\leqslant k<q_0} f_{kn+m} + \sum_{q_0\leqslant k<q} f_{kn+p+m}.$$

由于各个 f_k 两两不相交，各个 g_m 也两两不相交。此外，

$$\|h\| \leqslant \frac{\|f\|}{q+1} \leqslant \frac{\|f\| n}{N} \leqslant \varepsilon$$

根据 N 和 $f = h + \sum_{m<n} g_m$ 的选取。最后，令

$$g = \sum_{m<n} \sigma^{-m} g_m.$$

然后 $\|g\| \leq \|f\|$，且 $\sigma^m g$ 与 g_m 支集相交，因此它与 g 不相交。此外，$\sigma^m g \geqslant g_m$，这意味着 $f = h + \sum_{m<n} g_m \leqslant h + \sum_{m<n} \sigma^m g$。

在一般情况下，只需分别处理每个 ℓ：定义 $f^{(\ell)} = f \restriction S_\ell$，找到相应的 $g^{(\ell)}$ 和 $h^{(\ell)}$，然后对 ℓ求和。□

粗略而言，该引理指出，在允许任意小误差的意义下，每个正的p-可积函数 f 都可以被给定数量的不相交 σ-像之和所控制，其中这些像来自另一个正的 p-可积函数 g，且该函数的范数不超过 f。

3. 带有自同构的 L^p 格的模型论

我们假设读者熟悉连续逻辑的基本概念，例如可在 [BU10] 中找到这些概念。不过，我们将遵循 [Ben], 中采用的、略有不同的公式约定：所有公式的族在一致收敛，或者更准确地说，在强制极限下是封闭的，因此我们不区分可定义谓词和公式。如果去掉强制极限构造，我们就得到所谓的基本公式。

无原子 L^p 格在连续语言 $\mathrm{L}_{\mathrm{BL}} = \{0, -, \frac{x+y}{2}, |\cdot|, \|\cdot - \cdot\|\}$ 中是初等的，并且可在 [Ben09, §2]中找到完备公理化。我们将这一理论记为 AL$_p$L。严格地说，AL$_p$L 的一个模型只是一个 L^p 格的闭球，但这足以恢复整个格，因此在下文中我们不作任何区分，仍将这些球称为 L^p 格。

AL$_p$L 的模型论性质由 Ben Yaacov、Berenstein 和 Hen-son 在 [BBH11], 中进行了研究，不过采用的是一种不同但等价的形式体系。在 [BBH11 的命题 4.11 和定理 4.12] 中，他们给出了 L^p 格的独立性刻画，并证明了 AL$_p$L 是稳定的。AL$_p$L 具有量词消去这一事实已在 [HI02] 中得到证明。此外，由角谷表示定理可知，AL$_p$L 是可分范畴的，这进而意味着其可分模型 E 是近似齐性的，即，如果 a 和 b 是 M 中具有相同类型的元组，那么对于每个 $\varepsilon > 0$，都存在 E 的一个自同构，使得 $d(fa, b) < \varepsilon$。

将 L_σ 写作由酉函数符号 σ 扩张的巴拿赫格语言 L_{BL}，并定义 T_σ 为 AL$_p$L 与以下公理的并：这些公理规定 σ是巴拿赫格的自同构，即，

—（态射性）$\sup_{\bar{x}} \|\sigma(F\bar{x}) - F(\sigma\bar{x})\| = 0$，对于 L_{BL} 中的每个函数符号 F，—（等距性）$\sup_x \big|\|\sigma x\| - \|x\|\big| = 0$，—（满射性）$\sup_x \inf_y \|x - \sigma y\| = 0$。

对于每个 $n > 0$，令第 n 个 罗克林公理 为连续语句。

$$(R_n) \qquad \sup_x \inf_y \max\left(\big\|\sigma^i|y| \wedge |y|\big\| : 0 < i < n, \left\| \Big(\sum_{k<n} \sigma^k|y| - |x|\Big)^- \right\|, \|y\| \dot{-} \|x\| \right).$$

那么，$R_n = 0$ 意味着，对于所有正的 x 和所有 $\varepsilon > 0$，都存在一个范数小于$\|x\| + \varepsilon$的正 y，其在 σ 作用下的前 n 个像彼此不相交（允许误差 ε），并且它们的和是

大于 x，但有一部分的范数小于 ε。在下文中，我们还将使用记号 $R_n(x,y)$ 表示移除两个量词后的 R_n。

我们将 T_A $\mathrm{AL}_1\mathrm{L}_\sigma$ 与所有 Rokhlin公理合称为该理论。引理2.8 给出了 T_A 的一些模型示例；事实上，它刻画了 T_A 的可分模型。

引理3.1. 若 σ 是标准无原子概率空间 $(X,\mathcal{B},\mu)$上的无周期非奇异变换，则 $(L^p(\mu),\widetilde{\sigma})$ 是 T_A 的一个模型。

我们将通过几个引理来证明 T_A 是 T_σ 的模型伴侣。显然，T_A 的每个模型都是 T_σ 的模型，因此我们只需证明 T_σ 的每个模型都嵌入到 T_A 的一个模型中，并证明 T_A 是模型完备的。由于根据 Ben12，引理3.3]，$\mathrm{AL}_p\mathrm{L}$ 可在 $\mathrm{AL}_1\mathrm{L}$ 中定义，我们将在假设 $p=1$ 的前提下进行这些证明，但所得结果对任意 $p\geqslant 1$ 均成立。

引理 3.2. T_σ 的每个模型都嵌入到 T_A的一个模型中。

证明。只需证明可分模型的情形。设 (M,σ) 是 T_σ的一个模型。根据事实 2.3，不妨设 M 是单位区间 $L^1(\lambda)$ 上的 L^1 格，并且 σ 由非奇异变换 f诱导，其中 $\mathbb{I}\to\mathbb{I}$通过 $\sigma(u)=f(u)=(\mathrm{d}\sigma_*\lambda/\mathrm{d}\lambda)(u\circ f^{-1})\widetilde{}$。

现在令 g 为 $\mathbb{I}$上的一个无周期保测变换，例如式 (2.3) 中定义的无理旋转。然后定义单位正方形（$\mathbb{I}^2$,B^2,λ^2）上的变换 h 如下：

$$h(x,y):=\big(f(x),g(y)\big)$$

并注意到 $h_*\lambda^2=f_*\lambda\otimes g_*\lambda$，因此 h 也是非奇异的。此外，h 是无周期的，因为对所有 n

$$\begin{aligned}\lambda^2\big\{(x,y):h^n(x,y)=(x,y)\big\}&=\lambda^2\big\{(x,y):f^n(x)=x\text{ and }g^n(y)=y\big\}\\&=\lambda\big\{x:f^n(x)=x\big\}\cdot\underbrace{\lambda\big\{y:g^n(y)=y\big\}}_{=0}=0,\end{aligned}$$

因此，$N=L^1(\lambda^2)$ 上的诱导自同构 $\tau=h$ 满足 Rokhlin公理。因此，我们只需验证由 $\Phi(u)(x,y)=u(x)$ 定义的映射 $\Phi\colon M\to N$ 是一个 L_σ-嵌入。显然，它是一个Banach格等距映射，因此接下来只需证明 $\tau\circ\Phi=\Phi\circ\sigma$，但是

$$\begin{aligned}\tau(\Phi(u))(x,y)&=\frac{\mathrm{d}h_*\lambda^2}{\mathrm{d}\lambda^2}(x,y)\cdot\Phi(u)\big(h^{-1}(x,y)\big)\\&=\frac{\mathrm{d}f_*\lambda}{\mathrm{d}\lambda}(x)\cdot\underbrace{\frac{\mathrm{d}g_*\lambda}{\mathrm{d}\lambda}(y)}_{=1}\cdot\Phi(u)(f^{-1}x,g^{-1}y)\\&=\frac{\mathrm{d}f_*\lambda}{\mathrm{d}\lambda}(x)\cdot u(f^{-1}x)=\sigma(u)(x)=\Phi(\sigma(u))(x,y),\end{aligned}$$

从而证明完毕。 □

我们将 使用以下连续逻辑中模型完备性的刻画。 .

事实 3.3 ([Ben，练习 6。21]). 理论 T 是模型完备的，当且仅当，对于所有 $\aleph_1$-饱和模型 $M \subseteq N$，对于 T 中的每个无量词基本公式 $\varphi(x, y)$、每个 $c \in M^{|y|}$、每个 $b \in N^{|x|}$ 和每个 $\varepsilon > 0$，都存在 $a \in M^{|x|}$ 使得

$$\big|\varphi(a, c) - \varphi(b, c)\big| < \varepsilon.$$

假设模型是饱和的，我们便得到罗赫林引理的精确版本，没有误差。我们将由 f 生成的带记为 $\mathfrak{b}(f)$。

引理 3.4. 设 M 是一个 $\aleph_1$-饱和的 T_A 模型，且 F 是 M 中由正元素组成的有限集合。那么存在一个主带 B，它包含 F 且在 σ 下保持不变，也就是说，$\sigma(B) = B$。此外，对于任意整数 $n > 0$，都存在一个正的 g 属于 M，使得 $\big\{\mathfrak{b}\big(\sigma^i g\big) : i < n\big\}$ 是 B 的一个划分。特别地，g 和 $\sigma^n g$ 生成相同的带。

证明。 考虑平均值 $f_0 := \frac{1}{|F|}\sum_{f\in F}|f| \in M$，并定义

$$f_1 := \frac{1}{3}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{\sigma^k f_0}{2^{|k|}},$$

它仍是 M 的一个元素，并生成一个带 $B := \mathfrak{b}(f_1)$，该带在 σ 下保持不变且包含 F。

由 R_n 应用于 f_1 并结合饱和性可知，存在一个正的 $g \in M$，使得对所有 $i < n$，都有 $\sigma^i g \perp g$，并且 $f_1 \leqslant \sum_{i<n} \sigma^i g$。若将 g 替换为 $g \restriction f_1$，则得到的元素仍满足这些性质，且属于由 f_1生成的带，因此，对于 $i < n$，带 $\mathfrak{b}\big(\sigma^i g\big)$ 构成了 B的一个划分。

由于 $\sigma^n g$ 与任何满足 $0 < i < n$ 的 $\sigma^i g$ 都不相交（因为 $\sigma^{n-1}g \perp \sigma^{i-1}g$ 蕴含 $\sigma^n g \perp \sigma^i g$），并且 B 在 σ下具有不变性，因此我们有

$$\bigcup_{i<n} \mathfrak{b}\big(\sigma^i g\big) = B = \sigma(B) = \bigcup_{0<i\leqslant n} \mathfrak{b}\big(\sigma^i g\big),$$

其中各并集两两不相交。这意味着 $\mathfrak{b}(\sigma^n g) = \mathfrak{b}(g)$。 □

引理 3.5。 T_A 是模型完备的。

证明。 我们将用到事实 3.3。考虑 T_A的两个 $\aleph_1$-饱和模型 $M \subseteq N$、一个无量词基本公式 $\varphi(x, y)$、一些元素 $f \in M^{|y|}$和 $h \in N^{|x|}$，以及一个正数 ε。为简便起见，我们可以假设 $|x| = 1$。我们将找到 $\hbar \in M^{|x|}$，使得 $\big|\varphi(\hbar, f) - \varphi(h, f)\big| < \varepsilon$。由于公式 φ是无量词的，它具有如下形式

$$\varphi(x, f) = \psi(\sigma^i x : i < \ell; f_j : j < m),$$

其中 σ 不出现在 ψ中，可能还会加入一些新的参数，接下来我们仍将它们统称为 f。我们还将 $(\sigma^i x : i < \ell)$ 简写为 $(\sigma^{<\ell} x)$。

现在，公式 ψ是项 $\big\|t(\sigma^{<\ell}x;\ f)\big\|$的范数的连续组合，因此存在 $\delta_0 > 0$ 使得

$$\max_{t \text{ term of } \psi} \Big|\big\|t(\sigma^{<\ell}h; f)\big\| - \big\|t(\sigma^{<\ell}\hbar; f)\big\|\Big| < \delta_0 \implies \big|\varphi(h, f) - \varphi(\hbar, f)\big| < \varepsilon,$$

对所有 $\hbar \in M$ 均成立。接下来只需找到 $\hbar \in M$，使得对于 φ 的任意项 t，都有 $\big|\big\|t(\sigma^{<\ell}h;\ f)\big\| - \big\|t(\sigma^{<\ell}\hbar;\ f)\big\|\big| < \delta_0$。现在，我们将空间划分为许多带，使得上述大多数项在 h 上的限制与 $\hbar$ 中的相应项具有相同的范数。

因此，只需证明其余项的贡献很小。由于$\big\|t(\,\cdot\,;\ f)\big\|^N$是连续的，存在某个 $\delta_1 > 0$，使得对所有 $a_1, a_2 \in N^\ell$，

$$d_1(a_1, a_2) < \delta_1 \implies \Big|\big\|t(a_1; f)\big\| - \big\|t(a_2; f)\big\|\Big| < \frac{\delta_0}{2\ell},$$

其中，d_1 是由各分量逐点相加所给出的距离。

我们将引理 3.4 应用于 M 和 $F := \{f_j : j < m\}$，其中

$$n > \frac{4\ell\|h\|}{\delta_1},$$

以找到一个正的 $g_0 \in M$，使得 $\{\mathfrak{b}(\sigma^i g_0) : i < n\}$ 构成由 F 生成的 σ-不变带 B 的划分。我们分别考虑 h 在由 B 生成的 N 带及其不交补中的分量 h' 和 h''，这两个带都具有 σ-不变性。

然后我们将引理 3.4 应用于 N 和 h''，并找到 $g_1 \in N$ 使得 $\{\mathfrak{b}(\sigma^i g_1) : i < n\}$ 构成一个带的划分，该带与 B 不相交且包含 h''。

对于每个 $i < n$，考虑 h 的第 i 个分量 $h_i := h' \restriction g_0 + h'' \restriction g_1$。存在 $n_0 < n$，使得来自 n_0 的 ℓ 个分量与之前的 ℓ 合起来所占的范数小于 h 总范数的 $2\ell/n$，也就是说，

$$\sum_{k<\ell} \big\|h_{(n_0+k) \bmod n}\big\| + \sum_{k<\ell} \big\|h_{(n_0+n-1-k) \bmod n}\big\| < \frac{2\ell\|h\|}{n}$$

然后，我们将 g_0 和 g_1 替换为它们在 σ 下的第 n_0 个像，使得 h 的前 ℓ 个分量和最后 ℓ 个分量对 h 的范数的贡献小于 $2\ell\mathbf{k}h\mathbf{k}/n$。

将 $h \restriction \sigma^i g_0$ 记为 h'_i，将 $h \restriction \sigma^i g_1$ 记为 h''_i，并考虑 $(\sigma^{-i}h'_i : i < n)$ 在$\{g_0, \sigma^{-i}f$ 上的类型：在约化结构 $N \restriction \mathbf{L}_{\mathrm{BL}}$ 中的 $i < n\}$（即，仅将 N 视为巴拿赫格，不涉及自同构）。由于 $\mathbf{AL_1L}$ 是模型完备的，这是 $M \restriction \mathbf{L}_{\mathrm{BL}}$ 中的一个类型；由饱和性，它由 M 中的某个元组 $(\hbar'_i : i < n)$ 实现。特别地，每个 $\hbar'_i$ 都属于由 g_0 生成的带，因此与它在 σ 下的前 $n-1$ 个像不相交。于是我们有如下分解

$$t\big(\sigma^{<\ell}h; f\big) = \sum_{i<n} t\big(\sigma^{<\ell}h; f\big) \restriction \sigma^i g_0 + \sum_{i<n} t\big(\sigma^{<\ell}h; f\big) \restriction \sigma^i g_1,$$

其中每个加项都与其他项不相交。现在，对于所有 $i < n$,

$$t\big(\sigma^{<\ell}h; f\big) \restriction \sigma^i g_0 = t\big(\sigma^k h'_{(i-k) \bmod n} : k < \ell; f \restriction \sigma^i g_0\big)$$

and

$$t\big(\sigma^{<\ell}h; f\big) \restriction \sigma^i g_1 = t\big(\sigma^k h''_{(i-k) \bmod n} : k < \ell; 0\big).$$

由于 M 是 $\aleph_1$-饱和的，因此存在一个正元 $a \in M$，它与 B 不相交，并生成一个在 σ 下不变的带。将引理 3.4 应用于 M 和 a，可找到 $g_2 \in M$，使得 $\{\mathfrak{b}(\sigma^i g_2) : i < n\}$ 构成 $\mathfrak{b}(a)$ 的一个划分。带 $\mathfrak{b}(g_2)$ 仍然是一个 L_1- 格，因此 .....

是 $N \restriction \mathrm{L}_{\mathrm{BL}}$ 中类型 $(\sigma^{-i}h_i'' \colon i < n)$ 的一种实现 $(h_i'' \colon i < n)$。每个 $\sigma^i h_i''$ 都属于带 $\mathfrak{b}\big(\sigma^i g_2\big)$，因此它们两两不相交。因此，

$$\hbar := \sum_{i<n} \sigma^i(h_i' + h_i'')$$

可以按照与 h 相同的方式进行分解，只需将 g_1 替换为 g_2，将 h_j' 替换为 $\sigma^j h_j'$，并将 h_j'' 替换为 $\sigma^j h_j''$。

现在我们比较 h 和 $\hbar$ 中各项的分量范数。对于所有 $\ell \leqslant i < n$，

$$\begin{aligned}\big\|t(\sigma^i h_{i-k}' : k < \ell; f \frown \sigma^i g_0)\big\| &= \big\|t(h_{i-k}' : k < \ell; \sigma^{-i} f \frown g_0)\big\| \\ &= \big\|t(\sigma^{k-i} h_{i-k}' : k < \ell; \sigma^{-i} f \frown g_0)\big\| \\ &= \big\|t(\sigma^k h_{i-k}' : k < \ell; f \frown \sigma^i g_0)\big\|,\end{aligned}$$

其中，第一个和最后一个等式是由 σ 为等距映射且与 L_{BL} 的所有其他符号交换这一事实得到的，而第二个等式则是类型实现的应用。基于相同的理由，我们有

$$\big\|t(\sigma^i h_{i-k}'' : k < \ell; 0)\big\| = \big\|t(\sigma^k h_{i-k}'' : k < \ell; 0)\big\|,$$

这意味着，索引为 $i \geqslant \ell$ 的分量的范数相互抵消，只剩下前 ℓ 个分量。更准确地说，

$$\begin{aligned}(3.1)\quad &\Big|\big\|t\big(\sigma^{<\ell} h; f\big)\big\| - \big\|t\big(\sigma^{<\ell} \hbar; f\big)\big\|\Big| \leqslant \\ &\qquad \sum_{i<\ell} \Big|\big\|t(\sigma^k h_{(i-k) \bmod n} : k < \ell; f \frown \sigma^i g_0)\big\| - \big\|t(\sigma^k \hbar_{(i-k) \bmod n} : k < \ell; f \frown \sigma^i g_0)\big\|\Big|,\end{aligned}$$

其中，$\hbar_i$ 只是 $\sigma^i(h_i' + h_i'')$。

根据 n_0 的选择，对每个 $i < \ell$，

$$\sum_{k<\ell} \big\|h_{(i-k) \bmod n}\big\| = \sum_{k<\ell} \big\|\hbar_{(i-k) \bmod n}\big\| < \frac{2\ell\|h\|}{n}$$

使得

$$\sum_{k<\ell} \big\|h_{(i-k) \bmod n} - \hbar_{(i-k) \bmod n}\big\| < \frac{4\ell\|h\|}{n} < \delta_1$$

因此，由于 $\|t(\cdot\,; f)\|^N$ 的一致连续性，(3.1) 中的和严格小于 δ_0，这正是我们所需要的。□

由此我们证明了主要结果。

定理 3.6. T_A 是 T_σ 的模型伴侣。

3.1. **量词消去**。给定一个基数 $\kappa > 2^{\aleph_0}$，回想一下，若一个赋范空间结构是 κ-万有的，则称它为 κ-强齐次且 κ-饱和。我们将在某个大基数 κ 下，使用 ALpL 的一个 κ-万有模型 U。

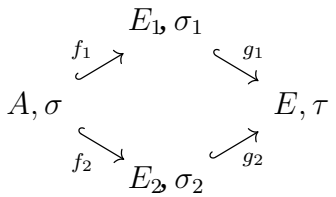
我们将利用 Lascar 的以下结果证明 T_A 具有量词消去；该结果也可以证明在连续逻辑中成立。

事实 3.7 ([Las91，定理 3.3])。 设 T 是一个稳定理论，$\mathcal{C}$ 是T的一个大型万有模型，且 M_0、 M_1 和 M_2 是$\mathcal{C}$ 的初等子结构。如果 $M_0 \prec M_1$、 M_2 和 M_1 以及 M_2 在 M_0 上独立，则 $M_1 \cap M_2 = M_0$，并且对于 M_1 的所有自同构群 α 和 M_2 的所有自同构群 β，若它们在 M_0 上的限制相同，则应用 $\alpha \cup \beta$： $M_1 \cup M_2 \to M_1 \cup M_2$ 是初等的。

定理 3.8. T_A 具有量词消去。

证明。如同经典一阶逻辑中的情形，模型完备理论 T 具有量词消去，当且仅当其全称部分 $T_\forall$ 具有合并性质。根据 [Ben 引理 6，24], 若 T^* 是 T的模型伴侣，则它们的全称部分相同，因此在此只需证明 $(T_\sigma)_\forall$ 具有合并性质。

由于 $T_\forall$ 的模型恰好是 T的模型的子结构，因此只需验证：给定 T_σ的模型 (E_1, σ_1) 和 (E_2, σ_2)，以及 L_σ 结构的嵌入 f_i： $A \hookrightarrow E_i$，它们来自 $(T_\sigma)_\forall$ 的一个模型 (A, σ)，则存在一个带自同构的 L^p 格 (E, τ) 以及 L_σ-嵌入 g_i： $E_i \to E$，使下图交换。



令 $\mathbb{M}$ 为 $\mathrm{AL}^p\mathrm{L}$ 的一个充分万有模型。由于 $\mathrm{AL}^p\mathrm{L}$ 稳定，我们不妨设 $A \subseteq E_1$, $E_2 \subseteq \mathbb{M}$ 且 $\sigma_1 \restriction A = \sigma_2 \restriction A = \sigma$，并且 E_1 在 A 上与 E_2（分岔）独立。特别地，$E_1 \cap E_2 = \mathrm{acl}\, A$，但由 [BBH11，事实 3.11 和引理 3.12] 可知，这恰好是由 A 生成的巴拿赫格。因此， σ 唯一地延拓为 $\mathrm{acl}\, A$ 的一个巴拿赫格自同构，这使我们可以假设 A 是代数闭的。

此时，我们可以按照 [Las91，定理 3.3] 的方法证明映射 $\sigma_1 \cup \sigma_2$ 在 $E_1 \cup E_2$ 上是初等的，因此只需将 $\sigma_1 \cup \sigma_2$ 延拓为自同构τ，即可得出结论；该自同构作用于由 $E_1 \cup E_2$ 生成的 L^p 格 E。□

由于语言 $L_{\mathring{B}L}$ 中唯一的常量是 0，而所有 T_A 中的函数都将其固定不变，因此我们得到以下推论。

推论 3.9。 T_A 是完备的。

3.2. **独立性与稳定性**。 在本节中，我们将使用一种与 [CP98], 中所采用的论证类似的方法，证明 T_A 是稳定的。但我们不会通过证明独立性定理来说明 T_A 是简单的，而是将证明 T_A 具有一种平稳的独立关系，这意味着 T_A 实际上是稳定的。

设 $(\mathrm{U}\ \sigma)$ 为 T_A 的一个大型万有模型。我们将写作 $\sigma^{\mathbb{Z}}a$，表示 $(\sigma^i a)_{i\in\mathbb{Z}}$，类似地，$\sigma^{\mathbb{Z}}A$ 是 $\{\sigma^i u$ 的简写： $u \in A, i \in \mathbb{Z}\}$

引理 3.10。 设 a 和 b 是$\mathcal{U}$ 中长度相同的两个元组， C 是$\mathcal{U}$ 的一个小子集。那么，按照 $(\mathcal{U}\ \sigma)$ 的意义， a 和 b 在 C 上具有相同的类型，当且仅当按照$\mathcal{U}$ 的意义， $\sigma^{\mathbb{Z}}a$ 和 $\sigma^{\mathbb{Z}}b$ 在 $\sigma^{\mathbb{Z}}C$ 上具有相同的类型。

证明。ALpL 和 T_A 都具有量词消去，因此我们只需检验无量词类型的相等性。假设按照 U 的意义， $\sigma^{\mathbb{Z}}a$ 和 $\sigma^{\mathbb{Z}}b$ 在 $\sigma^{\mathbb{Z}}C$ 上具有相同的类型，并令 $\varphi(x,c)$ 为 $\mathrm{L}_\sigma(C)$ 中在 a 处取零的一个无量词公式。那么，φ 具有 $\psi(f_1x,\dots,f_kx,g_1c,\dots,g_mc)$ 的形式，其中 f_i 和 g_i 是 σ 的幂，并且 ψ 中不再出现 σ 的其他实例。这意味着 $\psi(y_1,\dots,y_k,gc)$ 属于 $\mathrm{L}_{\mathrm{BL}}(\sigma^{\mathbb{Z}}C)$，并在 fa 处取零，因此它在 fb 处也取零，这意味着 $\varphi(b,c)=0$。反向命题只需以相反顺序重复相同的推理即可。□

在下文中，我们将按照 U 的意义，将 a over C 的类型简称为 $\mathrm{tp}(a/C)$，并将按照 (U σ) 的意义所对应的类型记为 $\mathrm{tp}^\sigma(a/C)$。我们还将用 $a\equiv^\sigma_C b$ 表示 $\mathrm{tp}^\sigma(a/C)=\mathrm{tp}^\sigma(b/C)$，省略 σ时也同样如此。我们还将 dcl A表示按照 ALpL 的意义， A 的可定义闭包，并令 $\mathrm{dcl}_\sigma(A)=\mathrm{dcl}(\sigma^{\mathbb{Z}}A)$。

引理 3.11. $\mathrm{dcl}_\sigma(A)$ 是 A 在 T_A意义下的代数闭包。

证明。 根据 [BBH11, Fact 3.11 和 Lemma 3.12], $\mathrm{dcl}_\sigma(A)=\mathrm{acl}(\sigma^{\mathbb{Z}}A)$ 是由 $\sigma^{\mathbb{Z}}A$ 生成的巴拿赫格。因此，显然其中的每个元素按照 T_A 的意义都是关于 A 的代数元素。反过来，假设 a 按照 T_A 的意义是关于 $S=\mathrm{dcl}_\sigma(A)$ 的代数元素，并利用连续逻辑中代数类型的刻画 [BU10, Lemma 4.9]，改写 [CP98, Lemma 3.6] 的证明。□

定义 3.12。 设 A、 B 和 C 是 U 的小子集。若 $\mathrm{dcl}_\sigma(AC)$ 与 $\mathrm{dcl}_\sigma(BC)$ 在 $\mathrm{dcl}_\sigma(C)$ 上分叉独立，则称 A 在给定 C 时与 B σ-独立。我们用 $\mathop{\downarrow^\sigma}$ 表示 σ-独立性。

注意，根据 [BBH11，定理 4.12],，我们有

$$A \underset{C}{\overset{\sigma}{\downarrow}} B \iff \sigma^{\mathbb{Z}}A \underset{\sigma^{\mathbb{Z}}C}{\downarrow} \sigma^{\mathbb{Z}}B. \tag{3.2}$$

引理 3.13. 关系 $\mathop{\downarrow^\sigma}$ 对任意小的子集合 A、 B、 C、 $D\subseteq\mathcal{U}$ 满足以下性质。

1. 在$(\mathcal{U}\ \sigma)$的自同构下的不变性。*2.* 对称性：$A\mathop{\downarrow^\sigma_C}B$ 当且仅当 $B\mathop{\downarrow^\sigma_C}A$。*3.* 传递性： $A\mathop{\downarrow^\sigma_C}BD$ 当且仅当 $A\mathop{\downarrow^\sigma_C}B$ 且 $A\mathop{\downarrow^\sigma_{BC}}D$。*4.* 有限特征：$A\mathop{\downarrow^\sigma_C}B$ 当且仅当对于所有有限元组 $a\subseteq A$， $a\mathop{\downarrow^\sigma_C}B$ 。*5.* 扩张：存在 $A'\equiv^\sigma_C A$ 使得$A'\mathop{\downarrow^\sigma_C}B$。*6.* 局部特征：对于任意有限元组 a，存在可数的 $B_0\subseteq B$ 使得$a\mathop{\downarrow^\sigma_{B_0}}B$。*7.* 稳定性：若 $A\equiv^\sigma_C D$、 $A\mathop{\downarrow^\sigma_C}B$且 $D\mathop{\downarrow^\sigma_C}B$，则 $A\equiv^\sigma_{BC}D$。

证明。不变性、对称性和传递性可由等价关系 (3.2) 立即推出。对于有限特征，注意到若 $A\mathop{\downarrow^\sigma_C}B$，则由 $\downarrow$ 的单调性可得 $\sigma^{\mathbb{Z}}a\downarrow_{\sigma^{\mathbb{Z}}C}\sigma^{\mathbb{Z}}B$，也就是说，对于任意有限元组 $a\subseteq A$，都有 $a\mathop{\downarrow^\sigma_C}B$。反过来，若对于任意有限元组 $a\subseteq A$ 都有 $a\mathop{\downarrow^\sigma_C}B$，则由 $\downarrow$ 的单调性和有限特征可得 $\sigma^{\mathbb{Z}}a\downarrow_{\sigma^{\mathbb{Z}}C}\sigma^{\mathbb{Z}}B$ ，从而有 $A\mathop{\downarrow^\sigma_C}B$。

要扩张 $\mathop{\downarrow^\sigma}$，利用 $\downarrow$ 的相应性质，找到某个 $\Phi\in\mathrm{Aut}(\mathrm{U}/\sigma^{\mathbb{Z}}C)$，使得 $\Phi(\sigma^{\mathbb{Z}}A)\mathop{\downarrow^\sigma_{\mathrm{dcl}_\sigma C}}\sigma^{\mathbb{Z}}B$，并定义 $A_0=\Phi(A)$ 和 $\sigma_0=\Phi\sigma\Phi^{-1}$，从而 $\sigma_0^{\mathbb{Z}}A_0\mathop{\downarrow^\sigma_{\mathrm{dcl}_\sigma C}}\sigma^{\mathbb{Z}}B$。利用定理 3.8 的证明中所示的合并性质，$(\sigma_0^{\mathbb{Z}}A_0,\ \sigma_0)$

且 $(\sigma^{\mathbb{Z}}B,\ \sigma)$ 包含在 T_A 的一个模型 $(E,\ \tau)$ 中，因此，根据 (U σ) 的饱和性，我们可以找到 $A' \equiv^{\sigma}_{C} A$，使其在 C 上与 B σ-独立。

对于局部特征，假设 a 是一个有限元组，并且对于每个 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$，利用 $\downarrow$ 的相应性质，找到一个可数子集 $B_n \subseteq \sigma^{\mathbb{Z}}B$，使得 $\sigma^{[-n,n]}a \downarrow_{B_n} \sigma^{\mathbb{Z}}B$。由有限特征和传递性，我们有 $\sigma^{\mathbb{Z}}a \downarrow_{\sigma^{\mathbb{Z}}\bigcup_n B_n} \sigma^{\mathbb{Z}}B$。因此，集合 $B_0 = \bigcup_n B_n \cap B$ 是可数的，并且 $a \overset{\sigma}{\downarrow}_{B_0} B$。

最后，由引理 3.10 和 (3.2) 可立即得到稳定性。事实上，这些假设等价于 $\sigma^{\mathbb{Z}}A \equiv_{\sigma^{\mathbb{Z}}C} \sigma^{\mathbb{Z}}D$、$\sigma^{\mathbb{Z}}A \downarrow_{\sigma^{\mathbb{Z}}C} \sigma^{\mathbb{Z}}B$ 和 $\sigma^{\mathbb{Z}}D \downarrow_{\sigma^{\mathbb{Z}}C} \sigma^{\mathbb{Z}}B$，因此根据 $\downarrow$ 的稳定性，我们有 $\sigma^{\mathbb{Z}}A \equiv_{\sigma^{\mathbb{Z}}(CB)} \sigma^{\mathbb{Z}}D$，即 $A \equiv^{\sigma}_{CB} D$。□

理论 em 3.14. T_A 稳定性与 σ-独立性和分叉独立性一致 .

证明。由前一个引理和 [Ben03，定理 1.51、2.8] 可得。 □

4. 类型及其动力学性质

令 $S_n(T)$ 表示 T 中空集上的（完备） n-类型的集合。回顾一下，一个公式 φ 诱导出一个函数 $\bar{\varphi}\colon S_n(T) \to \mathbb{R}$，其定义方式是：将每个类型 $\mathfrak{p} \in S_n(T)$ 赋值为唯一满足 $\varphi(x) - r$ 属于 $\mathfrak{p}$ 的 $r \in \mathbb{R}$。关于 $\bar{\varphi}$ 的集合所诱导的初始拓扑，即使这些函数连续的最粗拓扑，称为 逻辑拓扑，它使得 $S_n(T)$ 成为一个紧豪斯多夫空间，参见 [Ben，定理 7.5]。此外，集合 $[\![\varphi > 0]\!] = \{\mathfrak{p} \in S_n(T) : \bar{\varphi}(\mathfrak{p}) > 0\}$，其中 φ 在各个基本公式中变化，构成了该拓扑的一个基。

当 T是一个完全理论时，任意两个类型 $\mathfrak{p},\ \mathfrak{q} \in S_n(T)$ 都在 T 的万有模型 U 中实现，因此我们可以定义

$$d(\mathfrak{p},\mathfrak{q}) = \inf\{d_\infty(a,b) : a,b \in \mathcal{U}^n, a \models \mathfrak{p}, b \models \mathfrak{q}\},$$

其中 $d_\infty(a,b) = \max_{i<n} d(a_i,b_i)$，且 d 是 U 中的距离。在 [BU10, 第 4 节中，3]证明了新定义的 d 是 $S_n(T)$ 上的完备度量，它细化了逻辑拓扑。此外，当且仅当 T 是可分范畴时，这两个拓扑才一致。这意味着，在我们的理论 T_A 中，至少在整体上，该度量严格强于逻辑拓扑。稍后我们将看到局部层面上的情况。

在下文中，我们将使用通常与度量空间相关的术语来指称类型度量，而其他拓扑学术语，如开集和闭集、邻域、内部等，除非另有说明。

注记 4.1。设 $\mathfrak{p}$ 和 $\mathfrak{q}$ 是 T_A 的一个模型的类型，使得 $\mathbf{k}x^{-}\mathbf{k}^{\mathfrak{p}} = \mathbf{k}x^{-}\mathbf{k}^{\mathfrak{q}} = 0$。对于每个 $n < \omega$，我们有

$$d(\mathfrak{p},\mathfrak{q}) \geqslant \Big|\|x\|^{\mathfrak{p}} - \|x\|^{\mathfrak{q}} + \|x \wedge \sigma^n x\|^{\mathfrak{p}} - \|x \wedge \sigma^n x\|^{\mathfrak{q}}\Big|, \tag{4.1}$$

因为，对于所有的 $a \models \mathfrak{p}$ 和 $b \models \mathfrak{q}$,

$$\begin{aligned} 2\|x\|^{\mathfrak{p}} - 2\|x \wedge \sigma^n x\|^{\mathfrak{p}} &= d(a,\sigma^n a) \\ &\leqslant d(a,b) + d(b,\sigma^n b) + d(\sigma^n b,\sigma^n a) \\ &= d(a,b) + 2\|x\|^{\mathfrak{q}} - 2\|x \wedge \sigma^n x\|^{\mathfrak{q}} + d(b,a), \end{aligned}$$

其中这些等式由一般恒等式 $d(|x|,\ |y|) = \mathbf{k}x\mathbf{k} + \mathbf{k}y\mathbf{k} - 2\big\||x| \wedge |y|\big\|$ 得出。

命题 4.2. T_A 不是 ω-稳定。

证明。 我们采用 [BB09 引理 3.3] 中的相同思路，证明存在一个不可数的 1-类型集合，其中任意两个类型之间的距离至少为 $1/2$。对于每个无理数 $\alpha > 0$，考虑由 α 的旋转（定义见 (2.3)）诱导的 $L^p(\lambda)$ 的自同构 σ_α，使得 $(L^p(\lambda), \sigma_\alpha)$ 是 T_A的一个模型，并令 $\mathfrak{p}_\alpha$ 为其中的 $u = \chi_{[0,1/2]}$ 类型。

令 α 和 β 为在有理数域上线性无关的无理数。对于任意 $\varepsilon > 0$，我们可以找到正整数 n、k、m，使得 $|n\alpha - k| < \varepsilon$ 和 $\left|n\beta - m - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$。这意味着，误差不超过 2ε时，幂 σ_α^n 将 u 映回自身，而 σ_β^n 则将 u 映到 $\mathbb{I}$ 的另一半，也就是说 $\|x \wedge \sigma^n x\|^{\mathfrak{p}_\alpha} > \frac{1}{2} - 2\varepsilon$ 且 $\|x \wedge \sigma^n x\|^{\mathfrak{p}_\beta} < \varepsilon$。由 (4.1)，我们有$d(\mathfrak{p}_\alpha, \mathfrak{p}_\beta) > \frac{1}{2} - 3\varepsilon$，因此 $d(\mathfrak{p}_\alpha, \mathfrak{p}_\beta) \geqslant \frac{1}{2}$。□

现在我们回顾可数语言上的完全理论 T 的类型的孤立概念。

定义 4.3。 若对所有 $r > 0$，球 $B(\mathfrak{p}, r)$ 都包含 $\mathfrak{p}$ 于其拓扑内部，则类型 $\mathfrak{p} \in S_n(T)$ 称为孤立的： $\mathfrak{p} \in B(p, r)^\circ$ （即，度量与拓扑在 $\mathfrak{p}$ 处一致）。

注意，类型 $\mathfrak{p}$ 孤立，当且仅当每个在拓扑上收敛到 $\mathfrak{p}$ 的类型网也在度量上收敛到 $\mathfrak{p}$。连续逻辑中的 Ryll-Nardzewski 定理给出了可分范畴性的一个基于孤立类型的刻画： T 可分范畴，当且仅当对于每个 n，所有 n-类型都是孤立的。关于孤立类型的另一个有趣事实如下。

事实 4.4 （[Ben，推论 10。10]）。 类型 $\mathfrak{p} \in S_n(T)$ 可省略，当且仅当它不是孤立的。

备注 4.5。 在 T_A 中，0 的类型是孤立的。事实上，如果 $(\mathfrak{p}_\alpha)_\alpha$ 是一个在逻辑拓扑中收敛到 tp 0 的网，那么 $\|x\|^{\mathfrak{p}_\alpha}$ 收敛到 $\|0\| = 0$。现在， $d(\mathfrak{p}_\alpha, \text{tp } 0) \leq \inf\{\|a_\alpha\| : a_\alpha \models \mathfrak{p}_\alpha\} = \|x\|^{\mathfrak{p}_\alpha}$，因此在度量下也收敛。

引理 4.6。 T_A 的非平凡1-型都不是孤立的。

证明。 设 $\mathfrak{p}(x)$ 是 T_A 的一个非平凡 1-型。那么 $\|x\|^{\mathfrak{p}}$ 为正，经过适当缩放，我们可以假设 $\|x\|^{\mathfrak{p}} = 1$。我们还可以设 $\|x^{-}\|^{\mathfrak{p}} = 0$；否则，只需在本证明中将每处 x 替换为 $|x|$ 即可。我们区分以下两种情况：

1. 要么 $\lim_n \|x \wedge \sigma^n x\|^{\mathfrak{p}} = 0$2.

要么 $\liminf_n \|x \wedge \sigma^n x\|^{\mathfrak{p}} > 0$。

令 ρ 为 $E_{\mathbb{I}} = L^p(\mathbb{I}, \mathrm{B}\ \lambda)$ 的自同构，它由单位区间 $\mathbb{I}$ 上的无理旋转诱导，如 (2.3) 中所定义；再令 τ 为 $E_{\mathbb{R}} = L^p(\mathbb{R}, \mathrm{B}\ \lambda)$ 的自同构，它由实线上步长为 -1 的平移诱导，如 (2.2) 中所定义。因此，我们得到 T_A 的两个模型 $(E_{\mathbb{I}}, \rho)$ 和 $(E_{\mathbb{R}}, \tau)$。

首先注意，$u = \chi_{[0,1]}$在 $(E_{\mathbb{R}}, \tau)$ 中满足 $\lim_n \|u \wedge \sigma^n u\| = 0$，而 $v = \chi_{\mathbb{I}}$在 $(E_{\mathbb{I}}, \rho)$ 中满足 $\lim_n \|v \wedge \sigma^n v\| = 1$，因此上述两种情况都可能发生，我们不能排除其中任何一种。现在，第一种情况下的类型 $\mathfrak{p}$ 无法在 $(E_{\mathbb{I}}, \rho)$ 中实现。事实上，如果我们将 α称为与 ρ对应的旋转的无理数步长，那么根据狄利克雷逼近定理，我们可以找到一个递增序列 $(n_i)_{i<\omega}$，使得 $n_i\alpha$ 至多相差 $1/n_i$

由一个整数得到。这意味着，根据控制收敛，对于任意 $u \in E_{\mathbb{I}}$，$\lim_i \mathrm{k}u \wedge \rho^{n_i} u\mathrm{k} = \mathrm{k}u\mathrm{k}$，因此 $E_{\mathbb{I}}$ 中没有元素能够实现 $\mathfrak{p}$。

现在假设我们处于上述第二种情形，并且 $\liminf_n \mathrm{k}x \wedge \sigma^n x\mathrm{k}^{\mathfrak{p}} = \alpha > 0$。设 u 是 $E_{\mathbb{R}}$ 的正元素，并令 $k \geqslant 2n+1$。注意到

$$\left\|u \wedge \tau^k u\right\| \leqslant \left\|u \restriction]-\infty, -n[\right\| + \left\|u \restriction]n, +\infty[\right\| = \left\|f - f \restriction [n,n]\right\| \to 0,$$

因此 $\lim_n \mathrm{k}u \wedge \tau^n u\mathrm{k} = 0$，与 $\alpha > 0$ 矛盾。这表明 $\mathfrak{p}$ 无法在 $(E_{\mathbb{R}}, \tau)$ 中实现。

在这两种情况下，$\mathfrak{p}$ 都可以省略，因此我们可以利用事实 4.4 得出结论：它不是孤立的。□

由此可知，T_A 不存在原子模型，即只实现孤立类型的模型。

4.1. 遍历分类。 在经典遍历理论中，遍历非奇异变换根据是否存在有限或 σ-有限等价不变测度，被划分为不同的类型 。我们将利用非奇异变换与 L^p 格的自同构之间的对应关系，为格呈现类似的分类，并将以模型论风格给出这些类型的刻画。这里我们的主要参考文献是 [DS12]。

一个非奇异动力系统 是一个对象（X，B μ，τ），由配备 σ-有限测度 μ 的标准博雷尔空间和非奇异变换 τ组成。

定义 4.7. 非奇异系统 $(X, \mathrm{B}\ \mu, \tau)$ 称为遍历的，如果每个 τ-不变的 $A \in \mathrm{B}$ 要么是零测的，要么其补集是零测的。

τ 称为在 B 上保持测度 ν，如果 $\tau_* \nu = \nu$，也就是说，对所有 $A \in \mathrm{B}$，$\nu(\tau^{-1} A) = \nu(A)$。在这种情况下，测度 ν 称为在 τ下不变。

定义 4.8。 假设非奇异系统 $(X, \mathrm{B}\ \mu, \tau)$ 是无原子且遍历的。若存在一个定义在 B 上的 σ-有限测度 ν，该测度与 μ 等价，并且在 τ 作用下保持不变，则称该系统为***II*** 型；否则称其为***III*** 型。当系统为 II 型时，我们进一步作如下区分：如果 τ 保持一个与 μ 等价的有限测度，则称其为 ***II*** 型 $_1$,；否则称其为 ***II*** 型 $_\infty$。

在文献中，这种分类使用“类型”而非“种类”一词，但这里我们倾向于使用后者，以避免与逻辑类型混淆。

定义 4.9. 若可测集 W 满足游荡 条件，即对所有$i \in \mathbb{Z}$都有 $W \cap \tau^i W = \varnothing$ 。如果我们只要求存在一个无限集 $I \subseteq \mathbb{N}$，使得对 I中的所有 $i \neq j$ 都有 $\tau^i W \cap \tau^j W = \varnothing$，那么 W 就称为弱游荡。

It 事实证明，不存在弱游荡集是 II 型的特征 $_1$.

事实 4.10 ([HK64, 定理 1])**.** 非奇异系统是 ***II*** 型$_1$ ， 当且仅当它不含弱游荡集。

带有自同构的无原子 L^1 格称为格系统。现在我们将定义遍历格及其类型，使其在可分情形下分别对应于相应的测度论概念。

定义 4.11. 若对于 E 中任意两个正元素 u 和 v，都存在 $n\in\mathbb{Z}$，使得 u 和 $\sigma^n v$ 不相交，则称格系统 (E,σ) 是遍历的。

如果 u 和 v 满足 $u\restriction v = v\restriction u$，则称它们相容。若元素 u 满足对所有 $n<\omega$，u 和 $\sigma^n u$ 都相容，则称其为自相容的。

定义 4.12。 (E,σ) 若存在正的自相容元素，则称其为 II 型；否则称其为 III 型。当 (E,σ) 为 II 型时，若它存在不动点，则它为 II 型$_1$，否则为 II 型$_\infty$。

现在假设 E 是可分的，则 (E,σ) 可与 $(L^1(X,\mathsf{B},\mu),\widetilde{\tau})$ 等同，其中 (X,B,μ) 是标准无原子概率空间，而 τ 是其上的非奇异变换。回忆

$$\widetilde{\tau}(u)=\frac{\mathrm{d}\tau_*\mu}{\mathrm{d}\mu}\cdot\big(u\circ\tau^{-1}\big)$$

对每个 $u\in E$。

命题 4.13。 (E,σ) 是遍历的，当且仅当 $(X,\mathcal{B},\mu,\tau)$ 是遍历的。

证明。 假设 (E,σ) 是遍历的，且 $A\in\mathsf{B}$ 是 τ-不变的。那么，对所有 $i\in\mathbb{Z}$，$\sigma^i(\chi_A)$ 与 $\chi_{X\smallsetminus A}$ 不相交，这意味着 A 或 $X\smallsetminus A$ 是零测的。反过来，若 (X,τ) 是遍历的，且 $f,g\in E$ 为正，则 f 的支集模 μ 包含于 $\bigcup_{i\in\mathbb{Z}}\tau^i\mathrm{supp}(g)$ 中，因为后者是 τ-不变的。这意味着存在 $i\in\mathbb{Z}$，使得 $\mu\big(\mathrm{supp}(f)\cap\mathrm{supp}(\sigma^i g)\big)>0$，由此可知 (E,σ) 是遍历的。□

命题 4.14。 设 X 为 II_1, II_∞ 或 III。那么，(E,σ) 属于 X 类，当且仅当 $(X,\mathcal{B},\mu,\tau)$ 属于 X 类。

证明。 假设 (E,σ) 为 II 型。那么存在一个正的自相容元素 $f\in E$。定义 $A_i=\mathrm{supp}(\sigma^i f)$ 和 $g=\sup_{i\in\mathbb{Z}}\sigma^i f$。于是 $g\restriction A_i=\sigma^i f$，并且根据遍历性，$\bigcup_i A_i = X$ 模 μ，因此 g 几乎处处为正，从而 $\nu(A)=\int_A g\,\mathrm{d}\mu$ 是 X 上的一个与 μ 等价的测度。显然，ν 是 σ-有限的，因为 $\nu(A_i)=\|\sigma^i f\|=\|f\|$，这是有限的。

反过来，假设 τ 保持一个 σ-有限测度 ν，且该测度与 μ 等价。那么，拉东–尼科迪姆导数 $g=\mathrm{d}\mu/\mathrm{d}\nu$ 是一个几乎处处为正的可测函数，并且存在某个 $A\in\mathsf{B}$，使得 $f=g\restriction A$ 具有有限积分，因此 $f\in E$。

容易验证，如果 μ 和 ν 是等价的 σ-有限测度，并且 τ 关于 μ 非奇异，或者等价地关于 ν 非奇异，那么

$$\frac{\mathrm{d}\tau_*\mu}{\mathrm{d}\tau_*\nu}\circ\tau=\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\nu},\tag{4.2}$$

由此可得

$$\widetilde{\tau}^n f=\frac{\mathrm{d}\tau_*^n\mu}{\mathrm{d}\mu}\cdot(f\circ\tau^{-n})=\widetilde{\tau^n}f,$$

对于所有整数 n。令 $x\in A\cap\tau^i A$，则根据（4.2），

$$f(\tau^{-i}x)=\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}(\tau^{-i}x)=\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\tau_*^i\mu}(x)$$

使得 $\sigma^i f(x)=\frac{\mathrm{d}\tau_*^i\mu}{\mathrm{d}\mu}(x)f(\tau^{-i}x)=f(x)$，表明 f 是自相容的。

同样的论证结合 $A_0 = A = X$ 表明，(E, σ) 是 II 型$_1$ 当且仅当 $(X, \mathrm{B}\ \mu, \tau)$ 是 II 型$_1$，，由此完成证明。□

设 $\mathfrak{p}$ 是 $S_x(T_\sigma)$ 中满足 $\|x\|^{\mathfrak{p}} = \|x^+\|^{\mathfrak{p}} = 1$ 的 1-型，即范数为 1 的正元素的类型。若 $\|\sigma x - x\|^{\mathfrak{p}} = 0$，我们称 $\mathfrak{p}$ 为不动点类型；若对所有 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $\left\|\frac{\sigma^n x}{2} \wedge x - \frac{x}{2} \wedge \sigma^n x\right\|^{\mathfrak{p}} = 0$，则称其为相容性类型；若存在一个无限集合 $I \subseteq \mathbb{N}$，使得对于 I 中的所有 $i \neq j$ 都有 $\|\sigma^i x \wedge \sigma^j x\|^{\mathfrak{p}} = 0$，则称其为弱游荡类型。

作为事实 4.10 的推论，我们有：(E, σ) 是 II 型$_1$ 当且仅当它不实现弱游荡类型。这使我们能够根据可分的格系统所实现的 1-类型，区分不同类型的可分格系统。

命题 4.15。一个可分的格系统(E, σ) 是
— 当其实现一种不动点类型，但不实现任何弱游荡类型时，为 *II* 型$_1$；— 当其实现一种相容性类型、一种弱游荡类型，但不实现任何不动点类型时，为 *II* 型$_\infty$；— 当其实现一种弱游荡类型，但不实现任何相容性类型时，为 *III* 型。

问题 4.16。是否存在一种非平凡的 1-型，可由两种不同类型的格系统实现?

5. 自同构群$^*(\mu)$的共轭类

设 $(X$,B $\mu)$ 是一个标准无原子概率空间，并设 Aut$^*(\mu)$ 表示 X 上所有非奇异变换构成的群。那么，$E = L^1(X$,B $\mu)$ 是 AL$_1$L 的一个可分模型，而巴拿赫格自同构群 Aut(E) 通过 (2.1) 与 Aut$^*(\mu)$ 同构。正如我们在第 2.2 节所见，这个同构将无周期变换的子集 $S \subseteq$ Aut$^*(\mu)$ 与那些使 (E, σ) 成为 T_A 模型的自同构集合 $\sigma \in$ Aut(E) 对应起来。为简单起见，以下我们不区分 Aut$^*(\mu)$ 的元素与 E 的诱导自同构。

在 [Ion65], Ionescu Tulcea 引入了 Aut$^*(\mu)$ 的弱拓扑w，它可以描述为 Aut(E) 中逐点收敛（或强算子拓扑）的拓扑，并通过上述同构传递到 Aut$^*(\mu)$ 上。这意味着，如果 $(\sigma_n)_n$ 是 Aut$^*(\mu)$ 中的一个序列，那么它在w 下收敛到某个 σ_*，当且仅当对于所有 $u \in E$，$\|\widetilde{\sigma}_n u - \widetilde{\sigma}_* u\| \to 0$。该拓扑使 Aut$^*(\mu)$ 成为一个波兰群，并且当我们用另一个等价测度替换 μ 时，该拓扑保持不变。

Aut$^*(\mu)$ 的拓扑性质已得到广泛研究。关于全面的论述，请参阅 [DS12；Hal60；Fri70]。以下事实是这一领域中的一项基本工具。

事实 5.1 ([Hal60，第 77])。每个无周期变换的共轭类在自同构群$^*(\mu)$中都是稠密的。

对于任意公式 φ，我们用 φ^σ 表示它在结构 $(E,\ \sigma)$ 中的解释。我们用 tp$^\sigma(u)$ 表示 u 在 $(E,\ \sigma)$ 中的类型。

引理 5.2。<*escape*> </*escape*>自同构群$^*(\mu)$ 上的弱拓扑恰好是相对于函数族 $\sigma \mapsto \varphi^\sigma(u)$的初始拓扑，其中 $\varphi(x)$ 是 $\mathcal{L}_\sigma$ 和$u \in E^{|x|}$中的无量词公式。

证明。设 $(\sigma_\alpha)_\alpha$ a 是 Aut*(μ) 中一个网，收敛于上述初始拓扑下的某个 σ_*，并考虑 $\varphi(x,y) = \mathrm{k}\sigma x - y$ k。那么，对于任意 $u \in E$, $\varphi^{\sigma_\alpha}(u, \sigma_* u) = \mathrm{k}\sigma_\alpha u - \sigma_* u\mathrm{k}$ 都收敛于 $\varphi^{\sigma_*}(u, \sigma_* u) = 0$，这表明 $\sigma_\alpha \xrightarrow{w} \sigma_*$。

反过来，假设 $(\sigma_n)_n$ 是一个在弱拓扑下收敛到 σ_* 的序列，并设$\varphi(x)$是 L$_\sigma$ 和 $u \in E^{|x|}$中的一个无量词公式。

我们可以将 $\varphi(x)$ 改写为 $\psi(x,\ \sigma x,\ \ldots\ldots,\ \sigma^k)$，且 $\psi(x,\ y_1,\ \ldots\ldots,\ y_k)$ 中不出现 σ。对每个 $i < k$,

$$\left\|\sigma_n^{i+1} u - \sigma_*^{i+1} u\right\| \leqslant \left\|\sigma_n^i u - \sigma_*^i u\right\| + \left\|\sigma_n(\sigma_*^i u) - \sigma_*(\sigma_*^i u)\right\|,$$

由归纳法和 w-收敛性可知，它趋于零。由于 ψ^E 是一致连续的，我们得出 $\varphi^{\sigma_n}(u)$ 收敛到 $\varphi^{\sigma_*}(u)$。□

注5.3。由于 T_A 消去了量词，w 在 S 上的限制可像前一个引理中那样描述，但其中的 φ 遍历所有公式。

容易看出，集合 $[\![\varphi u > 0]\!] = \{\sigma \in \text{自同构群}^*(\mu) :\ \varphi^\sigma u > 0\}$（其中 $\varphi(x)$ 是 L$_\sigma$ 和 $u \in E^{|x|}$ 中的一个无量词公式）构成弱拓扑的一个基。

引理 5.4. S 是G_δ 子集自同构群$^*(\mu)$中的稠密子集。特别地，S 是一个波兰空间。

证明。无周期变换的共轭变换仍然是无周期变换，因此 S 在共轭下保持不变。这意味着，若 $\sigma \in S$，并用 $[\sigma]$表示其共轭类，则 $[\sigma] \subseteq S$；但根据事实 5.1 $[\sigma]$ 在自同构群*(μ)中稠密，因此 S 也稠密。

现在我们将证明 S 是 G$_\delta$。由于 S 中的元素恰好是满足罗赫林公理 $\sup_x \inf_y R_n(x, y)$（定义见(R_n)）的元素，我们可以将 S改写为

$$S = \bigcap_{n<\omega} \bigcap_{u\in E_0} \bigcap_{m>0} \bigcup_{v\in E} \{\sigma \in \mathrm{Aut}^*(\mu) : R_n^\sigma(u,v) < 1/m\},$$

其中 E_0 是 E的一个可数稠密子集。根据前一个引理，$\{\sigma :\ R_n^\sigma(u,\ v) < 1/m\}$是开集，因此 S 是开集的可数交。□

设 $\varphi(x)$ 是 L$_\sigma$ 中的一个公式。其解释族 $\varphi^\sigma :\ E^{|x|} \to \mathbb{R}$ 当 σ 在 S 中变化时是等度连续的，因此，根据注 5.3 中的刻画，由 $\pi_\varphi(\sigma,\ u) = \varphi^\sigma(u)$ 定义的映射 $\pi_\varphi :\ S \times E^{|x|} \to \mathbb{R}$ 是连续的。这意味着映射

$$\begin{aligned} \vartheta_n : S \times E^n &\to S_n(T_A) \\ (\sigma, u) &\mapsto \mathrm{tp}^\sigma(u) \end{aligned}$$

也都是连续的。我们还将用到以下事实，它是对 T_A进行量词消去的一个简单推论。

事实 5.5。$\varphi^{f\sigma f^{-1}}(u) = \varphi^\sigma(f^{-1}u)$ 以及 $\mathrm{tp}^{f\sigma f^{-1}}(u) = \mathrm{tp}^\sigma(f <^{-1} u)$ 对任意 $f \in$ 自同构群(E) 和$\sigma \in S$均成立，这是由量词消去得到的。

回顾一下，集合 A 在 $S_n(T_A)$ 中按 r 加厚后得到的集合为 $B(A,r) = \bigcup_{\mathfrak{p}\in A} B(\mathfrak{p}, r)$。在$S_n(T_A)$中，拓扑开性在按 [加厚时保持不变（Ben，引理 10.2]）。下面的引理，其证明主要归功于 Todor Tsankov，保证对于任意 $v \in E^n$，S中的开集在 $\vartheta_n(\cdot\ u)$ 下的像在 $S_n(T_A)$ 中具有开加厚。

引理 5.6. 如果 $U \subseteq S \times E^n$ 是开集，那么对于所有 $r > 0$，由 r 对 $\vartheta_n(U)$ 进行的加厚在逻辑拓扑下都是开集。

证明。令 $(\sigma, u) \in U$。由于 U 是开集，我们可以找到 $\varphi(y) \in \mathrm{L}_\sigma$, $w \in E^{|y|}$ 以及 $\rho > 0$，使得

$$(\sigma, u) \in [\![\varphi \cdot w > 0]\!] \times B(u, \rho) \subseteq U.$$

不失一般性，可以假设 $\varphi^\sigma(w) = 2$。为了证明 $B(\vartheta_n(U)\ r)$是开集，只需找到 $\mathrm{tp}^\sigma(u)$ 的某个开邻域 V，使得对于所有 $\mathfrak{q} \in V$，存在 $\tau \in [\![\varphi \cdot w > 0]\!]$ 和 $v \in B(u, \rho)$，满足 $d(\mathfrak{q}, \mathrm{tp}^\tau v) < r$。由于族 $\{\varphi^\sigma : \sigma \in S\}$ 是等度连续的，存在一个正的 δ，使得

$$\left|\varphi^\tau(w') - \varphi^\tau(w)\right| < 1$$

对于所有 $\tau \in S$ 以及所有 $w' \in B(w, 2\delta)$。我们还可以要求 $2\delta \leqslant r$。

由于 $\mathbf{AL}^p\mathbf{L}$ 是可分范畴的，逻辑拓扑与度量拓扑重合 [BU10, § 4.3]。这意味着球 $B(\mathrm{tp}^E(uw)\ \delta)$包含 $\mathrm{tp}^E(uw)$ 的一个拓扑邻域，因此存在一个公式 $\psi(x, y)$，属于 L_{BL}，使得 $\psi^E(u, w) = 2$，并且对于所有满足 $\psi^E(u', w') > 0$的 $u'w' \in E^{|xy|}$，都有 $d(\mathrm{tp}^E(u'w'), \mathrm{tp}^E(uw)) < \delta$。由此可推出存在某个 $u''w'' \equiv^E u'w'$，使得 $d(u''w'', uw) < \delta$；这是由 [Ben, Proposition 10.4]得出的。由于 E 是 $\mathbf{AL}^p\mathbf{L}$ 的可分模型，根据 [Ben, Prop. 9.8 and Corollary 10.12]，它是近似齐性的，因此存在 E 的一个自同构 f，使得 $d(u''w'', f(u'w')) < \delta$，进而由三角不等式可得 $d(f(u'w')\ uw) < 2\delta$。

定义 $V = [\![\sup_y(\varphi(y) \wedge \psi(x, y)) > 1]\!]$。这是 $\mathrm{tp}^\sigma(u)$ 的一个开邻域，因为 $\varphi^\sigma(w) = \psi^E(u, w) = 2$。现在令 $\mathfrak{q} \in V$。存在 $\sigma_0 \in S$ 和 $u' \in E^n$ 使得$\mathfrak{q} = \mathrm{tp}^{\sigma_0}(u')$，并且存在 $w' \in E^{|y|}$ 使得 $\varphi^{\sigma_0}(w') > 1$且 $\psi^E(u', w') > 1$。根据上一段，我们可以找到 $f \in \mathrm{Aut}(E)$ 使得

$$d(f(u'w'), uw) < 2\delta. \tag{5.1}$$

特别地，$d(fw', w) < 2\delta$，因此，根据 δ 的选取，我们有 $\left|\varphi^\tau(fw') - \varphi^\tau(w)\right| < 1$对所有 $\tau \in S$ 均成立。

现在令 $\tau = f\sigma_0 f^{-1}$。根据事实 5.5，$\varphi^\tau(fw') = \varphi^{\sigma_0}(w') > 1$，因此上一段中的最后一个不等式推出 $\varphi^\tau(w) > 0$，这意味着 $\tau \in [\![\varphi \cdot w > 0]\!]$。若我们选择$v = u$，那么条件 $v \in B(u, \rho)$ 显然成立，我们只需验证$d(\mathfrak{q}, \mathrm{tp}^\tau u) < r$。再次根据事实 5.5，我们有 $\mathfrak{q} = \mathrm{tp}^\tau(fu')$。因此，

$$d(\mathfrak{q}, \mathrm{tp}^\tau u) = d(\mathrm{tp}^\tau(fu'), \mathrm{tp}^\tau u) \leqslant d(fu', u) < 2\delta \leqslant r,$$

由 (5.1)，证明至此完成。 □

由于上度量类型空间 $(S_n(T),\ \ell\ \partial)$ 中的距离是下半连续的，因此集合 $\{(\mathfrak{p},\ \mathfrak{q}) \in S_n(T)^2 : d(\mathfrak{p},\ \mathfrak{q}) \leqslant r\}$ 是闭的，所以它的截面也是闭的，而这些截面恰好是 $S_n(T)$ 中半径为 r 的闭球。由此得到以下事实。

事实 5.7。 类型空间中的度量闭球在拓扑上也是闭的 .

引理 5.8。 令 $\mathfrak{p}$ 为 T_A 的非孤立 n 类型。则存在 S 的余瘦子集 S_0，使得对于所有 $\sigma \in S_0$，(E, σ) 省略 $\mathfrak{p}$。

证明。 根据 [Ben，引理 10.3] ，存在一个以 p 为中心的球 $B(\mathfrak{p}, 2r)$，其内部为空。根据事实 5.7，闭球 $B[\mathfrak{p}, r]$ 在逻辑拓扑中是闭集。这意味着，根据 ϑ_n 的连续性，原像 $C = \vartheta_n^{-1}B[\mathfrak{p}, r]$ 在 $S \times E^n$ 中是闭集。我们将证明 C 的内部为空。假设存在 C 的一个开子集 U 。根据引理 5.6，将 $\vartheta_n(U)$ 通过 r 加厚后得到的集合在逻辑拓扑中是开集，但它也包含于球 $B(\mathfrak{p}, 2r)$ 中，而该球的内部为空。这意味着 $U = \varnothing$ 的内部为空，因而 C 的内部也为空。

上一段还表明，集合 $A = \vartheta_n^{-1}(B(\mathfrak{p}, r)$ 在$S \times E^n$中是无处稠密的。由 Kuratowski–Ulam 定理，存在 S 的一个余瘦子集 S_0，使得对于所有 $\sigma \in S_0$ ，集合 $A_\sigma = \{u \in E^n : (\sigma, u) \in A\} = \{u \in E^n : \mathrm{tp}^\sigma(u) \in B(\mathfrak{p}, r)\}$ 都是无处稠密的。

现在考虑映射 $t_\sigma\colon E^n \to S_n(T_A)$，其定义为 $t_\sigma(u) = \vartheta_n(\sigma, u) = \mathrm{tp}^\sigma(u)$。注意到，关于类型度量，该映射是连续的，因为 $d(\mathrm{tp}^\sigma u, \mathrm{tp}^\sigma v) \leq d(u, v)$。现在可以将 A_σ 重写为 $t_\sigma^{-1}B(\mathfrak{p}, r)$，这表明 A_σ 在 E^n 中是开集，这意味着它恰好在为空时才是无处稠密的。这意味着，对于每个$\sigma \in S_0$，模型 (E, σ) 都省略 $\mathfrak{p}$。□

定理 5.9。 自同构群$^*(\mu)$ 中没有余贫乏的共轭类。

证明。反设存在某个 $\sigma \in G = \mathrm{Aut}^*(\mu)$，使得 $[\sigma]$ 在 G 中余贫乏。由于 S 在 G 中余贫乏，交集 $[\sigma] \cap S$ 在 G 中也余贫乏，因此非空。由于 S 在共轭作用下不变，我们可以推得 $[\sigma] \subseteq S$。根据引理 5.4， S 是波兰空间，因此事实上 $[\sigma]$ 在 S 中余贫乏。

设 u 是 E 的非零元素，并考虑其类型 $\mathfrak{p}(x) = \mathrm{tp}^\sigma(u)$ in (E, σ)。由于 $\mathfrak{p}$是一个非平凡的 1-型，根据引理 4.6，它不是孤立的。由引理 5.8 可知，余贫乏地存在许多 $\tau \in S$，使得模型 (E, τ) 遗漏 $\mathfrak{p}$。鉴于余贫乏集合的交集非空，存在 σ 的一个共轭变换 $f\sigma f^{-1}$，使得不存在满足 $\mathrm{tp}^{f\sigma f^{-1}}(u) = \mathfrak{p}$ 的 $u \in E^{|x|}$。但根据事实 5.5，$\mathrm{tp}^{f\sigma f^{-1}}(u) = \mathrm{tp}^\sigma(f^{-1}u)$，因此 (E, σ) 遗漏 $\mathfrak{p}$，矛盾。□

推论 5.10。 自同构群$^*(\mu)$ 中的每个共轭类都是贫乏的。

证明。 根据 S 在共轭下的不变性，一个类 $[\sigma]$ 要么包含于 S 中，要么包含于其补集中。在第一种情况下，它是稠密的，因此 Effros 定理和前面的结果表明它是贫乏的。在第二种情况下，由于 S 是余贫乏的，因此它是贫乏的。□

参考文献

[Ben03] 伊塔·ıBen Yaacov：《紧抽象理论中的简单性》。载于：《数学逻辑杂志》3 (2003)，第163–191页。[Ben09] 伊塔·ı Ben Yaacov：《模函数与 Nakano 空间的扰动》。载于：*J. Log. Anal.*1 (2009)，论文1，42页。[Ben12] 伊塔·ı Ben Yaacov：《关于 L_p 格及其他度量结构中的一致规范基》。载于：*J. Log. Anal.* 4 (2012)，论文12，30页。[Ben18] 伊塔·ı Ben Yaacov：《关于一个无法在完备度量空间上实现传递作用的 Roelcke-预紧 Polish 群》。载于：*Israel J. Math.* 224.1 (2018)，第105–132页。[Ben] 伊塔·ı Ben Yaacov。连续逻辑与 $\aleph_0$-范畴性。未发表的笔记。

[BB09] Ita¨ı Ben Yaacov 和 Alexander Berenstein。《关于具有泛自同构的希尔伯特空间与概率代数的扰动》。载于：《逻辑分析杂志》1（2009）。[BBH11] Ita¨ı Ben Yaacov、Alexander Berenstein 和 C. Ward Henson。《巴拿赫格中的模型论独立性 $L_p(\mu)$》。载于：《以色列数学杂志》183（2011），第 285–320 页。[BU10] Ita¨ı Ben Yaacov 和 Alexander Usvyatsov。《连续一阶逻辑与局部稳定性》。载于：《美国数学会汇刊》362.10（2010），第 5213–5259 页。[BH04] Alexander Berenstein 和 C. Ward Henson。《具有自同构的概率空间的模型论》。2004 年。arXiv： math/0405360。[CP98] Zo´e Chatzidakis 和 Anand Pillay。《泛结构与简单理论》。载于：《纯粹与应用逻辑年刊》95.1-3（1998），第 71–92 页。[DS12] Alexandre I. Danilenko 和 Cesar E. Silva。《遍历理论：非奇异变换》。载于：《复杂性与动力系统数学》。第 1–3 卷。纽约：Springer，2012 年，第 329–356 页。[Fri70] Nathaniel A. Friedman。《遍历理论导论》。Van Nostrand Reinhold 数学研究丛书。Van Nostrand Reinhold，1970 年。[HK64] Arshag B. Hajian 和 Shizuo Kakutani。《弱游荡集与不变测度》。载于：《美国数学会汇刊》110（1964），第 136–151 页。[Hal60] Paul R. Halmos。《遍历理论讲义》。纽约：Chelsea 出版公司，1960 年。[HI02] C. Ward Henson 和 Jos´e Iovino。《分析中的超积》。载于：《分析与逻辑》（蒙斯，1997）。第 262 卷。伦敦数学会讲义丛书。剑桥：剑桥大学出版社，2002 年，第 1–110 页。[Hod93] Wilfrid Hodges。《模型论》。第 42 卷。数学及其应用百科全书。剑桥：剑桥大学出版社，1993 年。[Ion65] Alexandra Ionescu Tulcea。《遍历理论中某些变换类的范畴》。载于：《美国数学会汇刊》114（1965），第 261–279 页。[Las91] Daniel Lascar。《围绕小指标性质》。载于：《伦敦数学会会刊》（第三辑）62.1（1991），第 25–53 页。[Mey12] Peter Meyer-Nieberg。《巴拿赫格》。Universitext 丛书。柏林海德堡：Springer，2012 年。

Antonio M. Scielzo，克洛德·贝尔纳里昂第一大学，卡米耶·若尔当研究所，法国国家科学研究中心 UMR 5208，11月11日大道 43 号，69622 维勒班 Cedex，法国电子邮箱： scielzo@math.univ-lyon1.fr