arXiv:2304.09815v1 [math-ph] 19 Apr 2023

关于由 p,q-二项式系数导出的广义 Lambert W 分支转移函数

P. °AHAG、R. CZY˙Z 和 P. H. LUNDOW

摘要。Lenz-Ising 磁性模型是理论物理中研究最广泛的模型之一，但目前仅在一维情形下有完整解，在二维情形下则只得到部分解决。解决该模型在高维情形（$d > 4$）中的一种方法，是用 p, q-二项式系数对磁化强度分布进行建模。参数p, q 与分布峰值之间的联系，是通过一个转移函数 ω 得到的；该函数推广了 Lambert W 函数分支 W_0 与 W_{-1} 之间的映射。我们给出了特殊情形下各分支的显式公式。此外，我们还求得了导数、积分、参数化、级数展开和渐近行为。

1. 引言与背景

我们将研究在利用 p,q-二项式系数处理高维统计力学磁性模型时产生的转移函数 ω 。为全面了解这项研究，我们先在第 1.1 节介绍 Lenz-Ising 模型的物理背景。第 1.2 节将介绍 p,q-二项式系数，以及它与所研究物理问题的关系。第 1.2 节还将说明转移函数是如何产生的，以及它与 Lambert W 函数的关系。

1.1.物理起源。Lenz-Ising 模型通常称为伊辛模型，由 Wilhelm Lenz [16]于 1920年提出，是一种用于描述磁性的简单模型。在 Pierre Curie[1]发现磁性材料（铁、钴、镍等）会在临界温度 T_c（即居里温度）发生相变之后，提出这样一个模型正逢其时；高于该温度时，这些材料会失去其永久磁性。在没有外场的伊辛模型中，材料被描述为一个相互作用粒子系统，每个粒子具有自旋 ± 1，系统受温度 [7, 11, 20]支配。所研究的系统可以是任意有限图，其中顶点对应粒子，边表示相互作用的粒子。在该模型最著名的版本中，系统是（无限的） d维整数晶格。一维模型（由粒子组成的无限链）由 Lenz 的学生 Ernst Ising 于1925年在其学位论文 [14]中求解。不幸的是，这一结果令人失望，因为他证明该系统在任何正温度下都不会发生相变，其临界温度为 $T_c = 0$。

日期：2023年4月20日。2020 数学主题分类。主要分类 33B99、33F05、82B20；次要分类 05A10、05A30。关键词和短语。Lambert W 函数的推广、Lenz-Ising 模型、磁化分布、 p,q-二项式系数、特殊函数。[1]在他的 1895 年学位论文中。他和妻子玛丽后来因在放射性方面的研究，与 Becquerel 共同获得了 1903年诺贝尔物理学奖。

直到1944年，挪威化学家拉尔斯·昂萨格[2] 才求解了二维系统 [21]的模型。这一解答被视为重大突破，得出了正的临界温度，即 $T_c = 2/\log(1+\sqrt{2})$（假设晶格中最近邻粒子之间的相互作用为单位值）。然而遗憾的是，昂萨格所采用的技术并未指向三维模型的解法。事实上，直到今天，关于三维模型的严格结果仍然非常少，而带有外场的二维模型也尚未求解。对于维数为 $d \geq 4$ 的情形，决定临界点附近各种物理量行为的临界指数已知是精确的，但对于任何 $d > 2$，临界温度仍无法精确确定。

这并没有降低伊辛模型的吸引力，反而催生了大量论文，研究该模型在不同维度下的多种变体 [23, 5, 22, 12]。此外，它也已成为检验各种蒙特卡洛模拟算法的试验平台 [26, 25, 13]。

让我们进一步关注无外场伊辛模型的一个有趣方面，即其磁化分布。伊辛模型的磁化 M 是系统中所有自旋 $S_i = \pm 1$ 的总和， $M = \sum_i S_i$，因此，对于一个含有 n 个自旋的系统，我们有 $-n \leq M \leq n$。对于有限的 d维系统（假设 $d \geq 2$），在任意给定温度 T下，磁化 M 服从对称分布，并在 $\pm an$处出现峰值，其中 $0 \leq a \leq 1$。现在，当温度高于居里温度（$T > T_c$）时，磁化分布呈单峰，在 $M = 0$ 处达到峰值，因此 $a = 0$。当温度降至居里温度（$T < T_c$）以下时，分布变为双峰，并在 $\pm an$ 处出现峰值，此时 $0 < a \leq 1$，且 $a \to 1$ 为 $T \to 0$。这里的参数 a 对应于伊辛模型中所谓的自发磁化强度，但只有对于二维（无限）系统，其与 T的关系才有精确解。Onsager 于1948年提出了这一猜想，Yang 于1952年证明了它（详见 [19]）；在这种情况下

$$a(T) = \begin{cases} (1 - \sinh(2/T)^{-4})^{1/8} & \text{if } T < T_c \\ 0 & \text{if } T \geq T_c \end{cases}$$

其中 $T_c = 2/\log(1+\sqrt{2})$。因此，当 a 变为正值时，相变发生在 $T = T_c$。从物理意义上说，单峰分布对应于磁性消失，而双峰分布则对应于磁性保留。找到适用于维度 $d \geq 3$ 的相应公式，将是一项重大突破。

1.2. 关于 p, q-二项式系数。 [17] 提出，对于有限高维系统（$d \geq 5$），磁化分布可以用 p, q-二项式系数很好地描述。事实上，在一个特殊情形（平均场）下，两者是等价的；对于 $d \geq 5$，当 $n \to \infty$时，它们具有相同的渐近形状。原则上，可以用一个 p, q-二项分布来模拟温度为 T 的有限系统的磁化分布，其中 p 和 q 根据某些函数 $p(T)$ 和 $q(T)$ 依赖于 T。更切实可行的研究是求出温度非常接近 T_c 时的这些函数； [18]中曾尝试过这一做法。

然而，应当指出的是， p， q-二项式系数也因其他有趣的纯数学性质 [2, 3, 9]而受到关注。

[2]1968年诺贝尔化学奖，以表彰他在不可逆过程热力学方面的研究工作。

下面我们对这些系数作进一步说明。 p,q-二项式系数 [8] 定义为 $p \neq q$，其中

$$\binom{n}{k}_{p,q} = \prod_{j=1}^{k} \frac{p^{n-k+j} - q^{n-k+j}}{p^j - q^j}, \quad 0 \le k \le n$$

据此定义一个对称的 p,q-二项分布 [17, 18]，其概率质量函数正比于这些系数构成的序列。注意，与标准二项式系数的和简单地等于 2^n 不同， p,q-二项式系数之和似乎没有简单的表达式。对于$p,q>0$，已有研究 [24] 表明，这些系数要么构成单峰序列，且最大值位于 $k=\lfloor n/2 \rfloor$；要么构成双峰序列，且对于某个 $0 \le k \le n/2$，最大值分别位于 k 和 $n-k$。我们通过定义 a 来控制序列最大值的位置：

$$k = \frac{n}{2}(1-a), \quad 0 \le a \le 1.$$

若两个连续的 p,q-二项式系数（索引分别为 $k-1$ 和 k）相等，化简后可得方程

$$\frac{p^{n-k+1} - p^k}{q^{n-k+1} - q^k} = 1, \quad 1 \le k \le \lfloor n/2 \rfloor. \tag{1.1}$$

W此处需要引入 p,q-参数化 tion 马会

$$p = 1 + \frac{2y}{n}$$

$$q = 1 + \frac{2z}{n}, \quad z < 0$$

尽管其他参数化方式也值得关注。在固定 a 和 z 后，我们现在求解 y。

1.3. 引入函数 ω 和 ψ。 首先考虑特殊情形 $a = 0$。(1.1) 中比值的渐近形式现在变得很简单。

$$\frac{ye^y}{ze^z} + \mathcal{O}(1/n) = 1$$

并且为了得到首项为 1，我们必须有 $ze^z = ye^y$。这定义了转移函数 ω 的一个特殊情形：

$$y = \omega(0,z) = \begin{cases} W_0(ze^z) & \text{if } z < -1 \\ W_{-1}(ze^z) & \text{if } -1 \le z < 0 \end{cases}. \tag{1.2}$$

其中， W 表示著名的 Lambert W 函数，该函数返回方程 $x = we^w$ 的两个实数解 $w = W_i(x)$ 之一。主解 $w = W_0(x)$ 在 $x \ge -1/e$ 上定义，给出 $w \ge -1$；另一分支 $w = W_{-1}(x)$ 在$-1/e \le x < 0$上定义，给出 $w < -1$。因此，转移函数 $\omega(0,z)$ 将解从 Lambert W 函数的一个分支映射到另一个分支。于是，系数序列将在满足 $\ell = o(n)$ 的点 $k = n/2 \pm \ell$ 处取得两个最大值。图 1 右图展示了这一情形的一个示例，左图则展示了 $a = 1/2$ 情形。

现在我们将把 W 的转移函数推广到 $0 < a < 1$ 的情形。(1.1) 中的比值现在变为

$$\frac{\sinh(ay)e^y}{\sinh(az)e^z} + \mathcal{O}(1/n) = 1$$

因此，为了得到正确的首项 1，我们现在必须求解

$$\sinh(ay)e^y = \sinh(az)e^z. \tag{1.3}$$

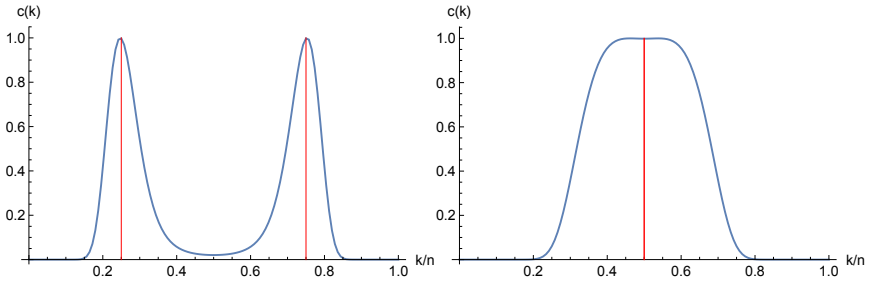


图 1. $c(k) = \frac{1}{C}\binom{n}{k}_{p,\,q}$ 与 k/n 的图，其中 $n = 2^{10}$、 $z = -5$和 $y = \omega(a,\ z)$，其中 C 是归一化因子。红色竖线位于 $k/n = (1 \pm a)/2$处。各面板展示了情形 $a = 1/2$ 与$y = -0.0891004$ （左）以及情形 $a = 0$ 与 $y = -0.0348858$ （右）。随着$n \to \infty$，峰值位置将趋近于竖线所在的位置。此外，系数的质量将更加集中在这些竖线附近。

因此，我们定义函数

$$f(a, w) = \sinh(aw)e^w$$

并将其逆函数 $w = \psi_i(a,\ x)$ 引入为两个实数解之一的

$$x = f(a, w), \quad 0 < a < 1.$$

我们注意到， $f(a,\ w)$ 在 $w = M_a$ 处取得其最小值 L_a，其中

$$L_a = \frac{-a}{\sqrt{1-a^2}}\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{\frac{1}{2a}},$$
$$M_a = \frac{1}{2a}\log\left(\frac{1-a}{1+a}\right).$$

主分支 $\psi_0(a,\ x) \geq M_a$ 现在定义于 $x \geq L_a$，而另一分支 $\psi_{-1}(a,\ x) \leq M_a$ 定义于 $L_a \leq x < 0$。因此， M_a 是分支分隔点，其中 $f(a,\ M_a) = L_a$ 且 $\psi_0(a,\ L_a) = \psi_{-1}(a,\ L_a) = M_a$。图 2 展示了方程 $f(a,\ w) = x$ 与定义 ψ 和 ω之间的关系。

上文仅在式 (1.2) 中对 $a = 0$ 定义的转移函数 ω，现在可以推广为 $0 < a < 1$

$$y = \omega(a, z) = \begin{cases} \psi_0(a, f(a, z)) & \text{if } z < M_a \\ \psi_{-1}(a, f(a, z)) & \text{if } M_a \leq z < 0 \end{cases}. \tag{1.4}$$

图 3 展示了 ψ 和 ω 的图像。

注意，$\lim_{a\to 0^+} \omega(a,\ z) = \omega(0,\ z)$，因此，对于 $0 < a < 1$， ω确实是式 (1.2) 中 Lambert W 转移函数的一种自然且连续的推广。不过，函数 ψ 仅在 a 较小时才与 Lambert W 相关。在这种情况下，我们有 $f(a,\ w) \sim awe^w$，因此

$$\psi(a, x) \sim W(x/a), \quad x > L_a$$

对于定义这些函数的两个分支，情况均如此。我们还简要陈述 ω的以下性质。

(1) $z = M_a$ 是一个不动点，即 $\omega(a,\ M_a) = M_a$。

(2) ω 是一个对合，即对于所有 $z < 0$， $\omega(a,\ \omega(a,\ z)) = z$。

(3) 对于所有 $z < 0$， $\omega(a, z)$ 均为负值、单调递减且凹。

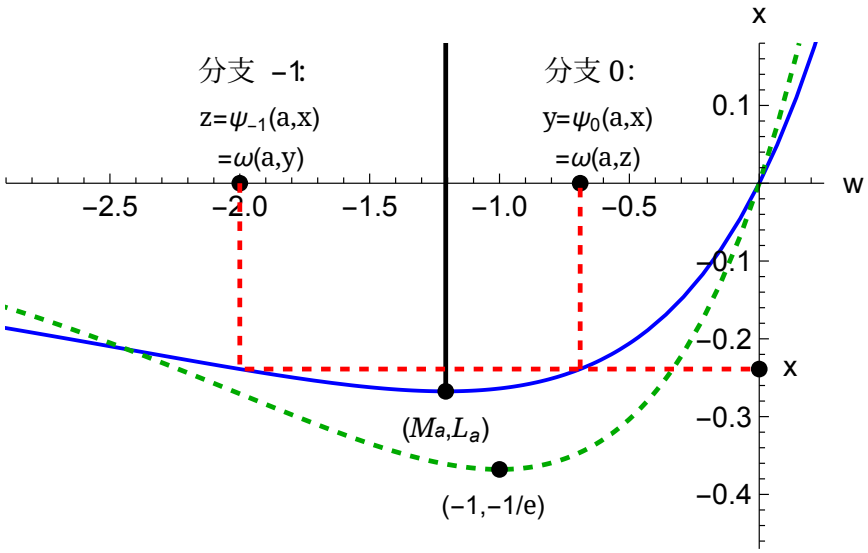


图 2。 we^w （绿色虚线）和 $\sinh(aw)e^w$ （蓝色实线）的图像，其中 $a = 2/3$。当 $z < 0$ 时，某一分支上的点 z 映射到另一分支上的点 $y = \omega(a, z)$，两条分支由 $x = M_a$ 分隔。注意 $x = \sinh(ay)e^y = \sinh(az)e^z$ ，其中 $L_a \le x < 0$。

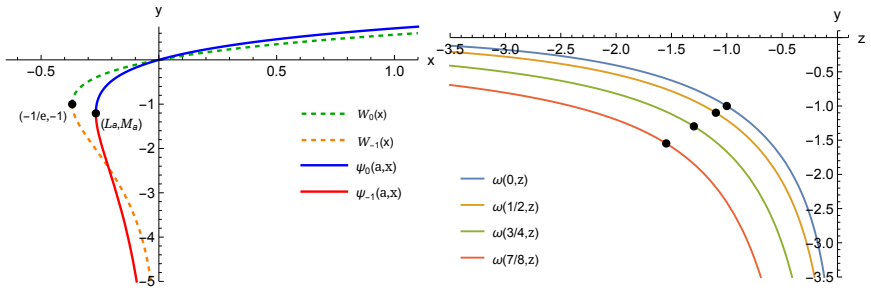


图 3。左： $y = W(x)$（绿色和橙色虚线）以及 $y = \psi(2/3, x)$（蓝色和红色实线）的分支 0（点上方）和分支 -1 （点下方）的图像。右： $\omega(a, z)$ 在 $a = 0$、 $1/2$、 $3/4$、 $7/8$ （向下）的图像。点位于 (M_a, M_a)。

(4) $\lim_{z\to-\infty} \omega(a, z) = 0$ 且 $\lim_{z\to0^-} \omega(a, z) = -\infty$。

转移函数 ω 曾被用于 [17], ，尽管其形式略有不同，而且很少有内容涉及其数学性质。本文旨在通过首先研究 ψ 的性质，并将其应用于 ω，来弥补这一不足。

总之，本节中的 p, q-二项式系数序列的峰值将出现在 $k = n/2(1 \pm a) \pm \ell$ ，其中 $\ell = o(n)$，参数 z 控制序列的质量形状，见图 1。请注意，峰值绝不会恰好出现在$k = n/2(1 \pm a)$。要得到这一结果，所得的 y 还将取决于 n ，并且需要一个特殊函数 $\bar{\omega}(n, a, z)$。此时，当$n \to \infty$时，我们将有 $\bar{\omega}(n, a, z) \to \omega(a, z)$。

2. 关于通过初等方法得到的 ψ-和 ω-函数的结果

本节将仅用初等方法证明 ψ 和 ω-函数的一些基本性质，并求解一些有趣的特殊情形。本文稍后将采用更强有力的方法，并大幅推广这些结果。

2.1. $a = 0$ **和** $a = 1$ **的边界情形，以及** ψ_0 **的一个下界**。首先回顾

$$f(a,w) = \sinh(aw)e^w = \frac{1}{2}\left(e^{w(1+a)} - e^{w(1-a)}\right), \quad 0 \le a \le 1,\, w \in \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

The limi 当 w 固定时 $a \to 0^+$ 和 $a \to 1^-$ 的 ts ar

$$f(0,w) = \lim_{a\to 0^+} f(a,w) = 0,$$
$$f(1,w) = \lim_{a\to 1^-} f(a,w) = \frac{1}{2}\left(e^{2w} - 1\right).$$

对于固定的 w，我们还有:

(1) 若 w 为正，则 $f(a,w)$关于 $0 < a < 1$递增。

(2) 若 w 为负，则 $f(a,w)$关于 $0 < a < 1$递减。

现在我们可以定义 ψ的极限形式。由 $f(1,w) = x$ 解出 w，得到极限逆函数

$$\psi_0(1,x) = \lim_{a\to 1^-} \psi_0(a,x) = \frac{1}{2}\log(1+2x), \quad x > -\frac{1}{2},$$

这归功于一致收敛。事实上，由于 $f(a,w)$关于a 递增，而 $\psi_0(a,x)$随 a 递减，因此我们得到不等式

$$\psi_0(a,x) \ge \frac{1}{2}\log(1+2x), \quad 0 < a < 1,\, x > -\frac{1}{2}.$$

在下文的定理 8.1 中，我们将给出一个精确得多的界，但这需要付出相当多的工作。由于 $f(1,w) > -1/2$ 对所有 w都严格递增，因此不存在第二个分支，我们得不到极限 $\psi_{-1}(1,x)$。此外，由于 $f(0,w) = 0$，逆函数 $\psi_{-1}(0,x)$没有良好定义。

2.2. **的参数化** ψ_0 **对于一般的** a。在第4节中，我们将使用一种强大的技巧，对 $L_a \le x <$0 时的两个分支 ψ_0 和 ψ_{-1} 进行参数化。然而，在这里，我们只需要一种初等方法，以便构造 $x > 0$ 时 $\psi_0(a,\ x)$ 的参数化。首先，我们定义

$$u(x) = \tfrac{1}{2}x(x^a - x^{-a}) = \tfrac{1}{2}(x^{1+a} - x^{1-a}), \quad x > 0.$$

则 $u \circ \exp(x)$ = 双曲正弦$(ax)e^x$ = $f(a,x)$，因此 $\log \circ u^{-1}(x)$ = $\psi(a,x)$。于是，$e^{\psi(a,x)} = u^{-1}(x)$，使得 $e^{\psi(a,u(x))} = x$。最后，现在我们要求 $x > 0$，从而得到分支 ψ_0，因此我们可以得到

$$\psi_0\big(a, \tfrac{1}{2}(x^{1+a} - x^{1-a})\big) = \log x,$$

这给出了所需的参数化，其定义域为 $\beta > 1$:

$$x = \tfrac{1}{2}(\beta^{1+a} - \beta^{1-a}),$$
$$\psi_0(a,x) = \log\beta.$$

2.3. 一般 a 下 f 和 ψ_{-1} 的特殊值。 ψ_{-1} 分支对于一般的 a 而言更难进行参数化。不过，很容易给出满足 $\psi_{-1}(a, x_n) = y_n$ 的无穷点列（x_n, y_n），我们将在此给出该点列。

注意，容易证明，f 的 n 阶导数在 M_a 的 n 倍处为零，因此

$$\frac{\partial^n}{\partial w^n} f(a, w) = 0 \text{ for } w = n\, M_a, \quad n = 1, 2, \dots \tag{2.2}$$

如果我们定义

$$I_a(n) = \frac{1}{2}\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{\frac{n(1-a)}{2a}} \left(\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^n - 1\right) \tag{2.3}$$

使得 $I_a(1) = L_a$，且 $I_a(2) = -2L_a^2/a$ 是 ψ_{-1} 等的拐点，那么

$$f(a, nM_a) = I_a(n). \tag{2.4}$$

当然，由于当 $n \geq 1$ 时 $w = nM_a \leq M_a$，这只能给出方程 $f(a, w) = I_a(n)$ 在分支 -1 上的解，因此得到

$$\psi_{-1}(a, I_a(n)) = n\, M_a, \quad n = 1, 2, \dots \tag{2.5}$$

由于 $\psi_0(a, I_a(n))$ 也有一个相应的解，但这个值似乎没有简单的表达式。不过，对于 a 的特殊取值，我们可以求得 ψ 的闭式表达式；这一点我们将在第 4 节中再讨论。

2.4. 特殊情形 $a = 1/3$：显式公式 ψ 和 ω。 一般而言，很难为 ψ 和 ω找到显式公式。不过，对于a 的一些特殊情形，我们可以得到结果，而情形 $a = 1/3$ 的处理出乎意料地简单。在第4节中，我们将给出 ψ 和 ω 在a 取其他有理数值时的公式，但这些公式复杂得多，因为它们基于四次多项式的根。这里给出的 ψ 和 ω 的公式似乎是唯一简单的精确解。

为计算 $\psi(a,\ x)$，我们需要求解方程 $f(a,\ w) = x$，从而求出 w。当$a = 1/3$ 时，我们便得到

$$f(\tfrac{1}{3}, w) = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{4w}{3}} - e^{\frac{2w}{3}}\right) = \frac{1}{2}\left(Y^2 - Y\right) = x \tag{2.6}$$

其中

$$Y = e^{\frac{2w}{3}}$$

解这个二次多项式可得其根

$$Y = \frac{1}{2} \pm \sqrt{2x + \tfrac{1}{4}} \tag{2.7}$$

其中两个解分别对应两个分支，因此

$$\psi_0(\tfrac{1}{3}, x) = \frac{3}{2}\log\left(\frac{1}{2} + \sqrt{2x + \frac{1}{4}}\right), \quad -\frac{1}{8} \leq x \tag{2.8}$$

$$\psi_{-1}(\tfrac{1}{3}, x) = \frac{3}{2}\log\left(\frac{1}{2} - \sqrt{2x + \frac{1}{4}}\right), \quad -\frac{1}{8} \leq x < 0. \tag{2.9}$$

我们现在将其与式 (1.4) 中 ω 的定义结合起来。情形 $w < M_{1/3} = -\frac{3}{2}\log 2$ 对应于 $0 < Y < 1/2$，由此我们得到

$$\begin{aligned}\omega(\tfrac{1}{3}, w) = \psi_0(\tfrac{1}{3}, f(\tfrac{1}{3}, w)) &= \frac{3}{2}\log\left(\frac{1}{2} + \sqrt{Y^2 - Y + \frac{1}{4}}\right) \\ &= \frac{3}{2}\log\left(\frac{1}{2} + \left|Y - \frac{1}{2}\right|\right) = \frac{3}{2}\log(1 - Y) = \frac{3}{2}\log\left(1 - e^{\frac{2w}{3}}\right).\end{aligned}$$

另一种情形 $-\frac{3}{2}\log 2 \le w < 0$ 给出 $1/2 \le Y < 1$ 从而

$$\begin{aligned}\omega(\tfrac{1}{3},w) = \psi_{-1}(\tfrac{1}{3},f(\tfrac{1}{3},w)) &= \frac{3}{2}\log\left(\frac{1}{2}-\sqrt{Y^2-Y+\frac{1}{4}}\right)\\ &= \frac{3}{2}\log\left(\frac{1}{2}-\left|Y-\frac{1}{2}\right|\right) = \frac{3}{2}\log(1-Y) = \frac{3}{2}\log\left(1-e^{\frac{2w}{3}}\right).\end{aligned}$$

因此，在两种情形下我们都得到相同的公式，所以得出

$$\omega(\tfrac{1}{3},z) = \frac{3}{2}\log\left(1-e^{\frac{2z}{3}}\right), \quad z<0. \tag{2.10}$$

现在很容易给出 ω 的定积分，例如：

$$\int_{-\infty}^{0}\omega(\tfrac{1}{3},z)\,\mathrm{d}z = -\frac{3\pi^2}{8}, \tag{2.11}$$

但我们将在第5节给出 a 的一般公式。本情形下的结果很容易得到

$$\begin{aligned}\psi_0(\tfrac{1}{3},x) &\sim \frac{3}{4}\log(2x)+\frac{3}{4\sqrt{2x}}, \quad x\to\infty\\ \psi_{-1}(\tfrac{1}{3},x) &\sim \frac{3}{2}\log(-2x)-3x+9x^2, \quad x\to 0^-\end{aligned}$$

我们将在第8节和第9节陈述一般渐近线。

2.5. $\psi(a,\ x)$ **是超越数**。我们将证明，若 $x\neq 0$ 是代数数（$x\in\mathcal{A}$），则 $\psi(a,\ x)$ 是超越数（$\psi(a,\ x)\in\mathcal{T}$）。为证明这一点，我们需要 Lindemann-Weierstrass 定理（[4, 定理 1.4]），即若 a_1，……，$a_n\in\mathcal{A}$ 和 α_1，……，$\alpha_n\in\mathcal{A}$ 是互不相同的数，则方程

$$a_1e^{\alpha_1}+\cdots+a_ne^{\alpha_n}=0$$

仅有平凡解 $a_1=\cdots=a_n=0$。

命题 2.1. 若 $a,\ x\in\mathcal{A},\ x\neq 0$，则 $\psi(a,\ x)\in\mathcal{T}$。

证明。假设 $a,\ x\in\mathcal{A}, x\neq 0$ 和 $\psi(a,\ x)\in\mathcal{A}$。则 $1+a,\ 1-a,\ 2x\in\mathcal{A}$，因此 $(1+a)\psi(a,\ x)$，$(1-a)\psi(a,\ x)\in\mathcal{A}$。根据 ψ 的定义，我们有

$$e^{(1+a)\psi(a,x)}-e^{(1-a)\psi(a,x)}-2xe^0=0,$$

这根据林德曼–魏尔斯特拉斯定理是不可能的。 □

3. ψ 的导数与一个原函数

在命题 3.1 中，我们给出了 ψ 关于 x 的 n 阶导数公式。这里使用较简洁的记号 $\psi(x)=\psi(a,\ x)$，指代两个分支，并将 a 视为固定参数。稍后将在命题 3.2 中得到 ψ 的一个原函数。

命题 3.1. 对于 $n\in\mathbb{N}$

$$\psi^{(n)}(x) = \frac{P_n(\cosh(a\psi(x)),\sinh(a\psi(x)))e^{-n\psi(x)}}{(a\cosh(a\psi(x))+\sinh(a\psi(x)))^{2n-1}}, \tag{3.1}$$

其中多项式 P_n 由以下递推公式给出：$P_1(x,y)=1$ 并且

$$\begin{aligned}P_{n+1}(x,y) &= P_n(x,y)((a-3na)x+(a^2-n-2na^2)y)\\ &+\frac{\partial P_n}{\partial x}(x,y)(a^2xy+ay^2)+\frac{\partial P_n}{\partial y}(x,y)(axy+a^2x^2).\end{aligned}$$

证明。 我们采用归纳法。提及两个分支时，将使用简写 $\psi(x) = \psi(a, x)$。情形 $n = 1$可由隐函数定理推出：

$$\psi'(x) = \frac{e^{-\psi(x)}}{(a\cosh(a\psi(x)) + \sinh(a\psi(x)))} = \frac{1}{x\left(a\coth(a\psi(x)) + 1\right)}$$

取特殊值

$$\psi_0'(0) = \frac{1}{a}.$$

接下来，假设对于某个自然数 n，(3.1) 成立。定义

$$\begin{aligned} g(x) &= a\cosh(a\psi(x)) + \sinh(a\psi(x)) \\ X &= \cosh(a\psi(x)) \\ Y &= \sinh(a\psi(x)) \end{aligned}$$

于是我们有

$$\begin{aligned} \psi^{(n+1)} &= \frac{e^{-n\psi}\psi'\left(-nP_n + \frac{\partial P_n}{\partial x}a\sinh(a\psi) + \frac{\partial P_n}{\partial y}a\cosh(a\psi)\right)g^{2n-1}}{g^{4n-2}} \\ &\quad - \frac{e^{-n\psi}\psi' P_n\left(a^2\sinh(a\psi) + a\cosh(a\psi)\right)(2n-1)g^{2n-2}}{g^{4n-2}} \\ &= e^{-n\psi}\psi' g^{-2n}\left(\left(-nP_n + aY\frac{\partial P_n}{\partial x} + aX\frac{\partial P_n}{\partial y}\right)(aX+Y) - P_n(2n-1)(a^2Y + aX)\right) \\ &= e^{-(n+1)\psi}g^{-2n-1}\left(P_n(-naX - nY - (2n-1)a^2Y - (2n-1)aX)\right) \\ &\quad + e^{-(n+1)\psi}g^{-2n-1}\left(\frac{\partial P_n}{\partial x}(a^2XY + aY^2) + \frac{\partial P_n}{\partial y}(a^2X^2 + aXY)\right) \end{aligned}$$

由此可根据归纳公理得出所需结果。 □

例 3.2。 作为命题 3.1 的一个应用，我们得到 ψ_0 在 $x = 0$处的泰勒级数公式。于是有

$$\psi_0^{(n)}(0) = \frac{P_n(1,0)}{a^{2n-1}}.$$

特别地，前几个泰勒系数为

$$\psi_0(0) = 0, \quad \psi_0'(0) = \frac{1}{a}, \quad \psi_0''(0) = -\frac{2}{a^2}, \text{ and } \psi_0^{(3)}(0) = \frac{-a^4 + 10a^2}{a^5}.$$

在第 6 节中，我们将给出一种更高效的计算这些系数的方法。

命题 3.3。该函数

$$\Psi(x) = x\psi(x) - \frac{x}{1-a^2} + \frac{ax}{1-a^2}\coth(a\psi(x)) \tag{3.2}$$

是 $\psi(x) = \psi(a, x)$ 的原函数。

证明。 使用代换 $x = \sinh(at)e^t$, $\mathrm{d}x = (a\cosh(at) + \sinh(at))e^t\,\mathrm{d}t$, 我们得到

$$\begin{aligned}
\Psi(x) &= \int \psi(x)\,\mathrm{d}x = \int t(a\cosh(at) + \sinh(at))e^t\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\int t\left((1+a)e^{(1+a)t} - (1-a)e^{(1-a)t}\right)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{1+a}\right)e^{t(1+a)} - \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{1-a}\right)e^{t(1-a)} \\
&= t\sinh(at)e^t + \frac{1}{1-a^2}(-e^t\sinh(at) + ae^t\cosh(at)) \\
&= x\psi(x) - \frac{x}{1-a^2} + \frac{a}{1-a^2}e^{\psi(x)}\cosh(a\psi(x)) \\
&= x\psi(x) - \frac{x}{1-a^2} + \frac{ax}{1-a^2}\coth(a\psi(x)).
\end{aligned}$$

□

注： 类似地，利用代换 $x = \sinh(at)e^t$，可以证明，形如以下形式的积分

$$\int x^n\psi^m(x)\,\mathrm{d}x, \quad n, m \in \mathbb{N},$$

可以用初等方法求出。

利用泰勒级数 $\psi_0(x) = \frac{x}{a} - \frac{2x^2}{a^2} + \ldots$ 以及 $\psi(L_a) = M_a$ 的值，我们得到

$$\begin{aligned}
\Psi_0(0) &= \lim_{x\to 0}\Psi_0(x) = \frac{a}{1-a^2}, \\
\Psi(L_a) &= L_a\left(M_a - \frac{2}{1-a^2}\right).
\end{aligned}$$

因此，现在可以计算以下定积分：

$$\int_{L_a}^{0}\psi_0(a,x)\,\mathrm{d}x = \Psi_0(0) - \Psi(L_a) = \frac{a+2L_a}{1-a^2} - L_aM_a,$$

并且，由于 ψ_{-1} 是 f 的逆函数,

$$\begin{aligned}
\int_{L_a}^{0}\psi_{-1}(a,x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{M_a} f(a,w)\,\mathrm{d}w - L_aM_a \\
&= \frac{2L_a}{1-a^2} - L_aM_a \\
&= \frac{\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{\frac{1}{2a}}}{2\sqrt{1-a^2}}\left(\frac{-4a}{1-a^2} + \log\left(\frac{1-a}{1+a}\right)\right).
\end{aligned}$$

4. ψ 的显式公式

在本节中，对于某些有理数值 a，我们将求出 ψ 函数两个分支及转移函数 ω 的显式公式。我们用 $\mathrm{root}(p(x))$ 表示多项式方程 $p(x) = 0$ 的实正解。回顾一下,

$$f(a,w) = e^w\sinh(aw) = \frac{1}{2}\left(e^{w(1+a)} - e^{w(1-a)}\right). \tag{4.1}$$

对于自然数 n 和 m，满足 $n > m$，我们定义

$$a = \frac{n-m}{n+m} \quad \text{and} \quad \alpha = \frac{2}{n+m}.$$

使得

$$1+a=\frac{2n}{n+m}\text{ and }1-a=\frac{2m}{n+m}.$$

利用代换 $Y=e^{\alpha w}=e^{\frac{2w}{n+m}}$，我们将 (4.1) 改写为

$$f(a,w)=\frac{1}{2}\left(Y^n-Y^m\right)=x$$

然后

$$w=\frac{n+m}{2}\log\left(\operatorname{root}(Y^n-Y^m-2x)\right). \tag{4.2}$$

于是，我们可以通过经典方法，在以下情形中给出该方程的显式解：

$$w=\begin{cases}2\log(\operatorname{root}(Y^3-Y-2x)) & \text{if } a=1/2,\\ \frac{5}{2}\log(\operatorname{root}(Y^3-Y^2-2x)) & \text{if } a=1/5,\\ \frac{5}{2}\log(\operatorname{root}(Y^4-Y-2x)) & \text{if } a=3/5,\\ \frac{7}{2}\log(\operatorname{root}(Y^4-Y^3-2x)) & \text{if } a=1/7.\end{cases}$$

而情形 $a=1/3$ 已在第 2 节中讨论过。

情形 *a=1/2:* 经过一些直接但相当冗长的计算，并使用卡尔丹求解三次方程的方法，我们得到如下结果：

$$\psi_0(\tfrac{1}{2},x)=\begin{cases}2\log\left(\sqrt[3]{x+\sqrt{x^2-\frac{1}{27}}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{x^2-\frac{1}{27}}}\right), & \text{if } \frac{\sqrt{3}}{9}\le x\\ 2\log\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\left(\frac{\arccos(3\sqrt{3}x)}{3}\right)\right), & \text{if } -\frac{\sqrt{3}}{9}<x<\frac{\sqrt{3}}{9}\end{cases}$$

and

$$\psi_{-1}(\tfrac{1}{2},x)=2\log\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\left(\frac{\arccos(3\sqrt{3}x)+4\pi}{3}\right)\right),\quad \text{if } -\frac{\sqrt{3}}{9}<x<0,$$

由此得到转移函数

$$\omega(\tfrac{1}{2},z)=\begin{cases}2\log\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\left(e^{3z/2}-e^{z/2}\right)\right)\right)\right), & \text{if } z<-\log 3\\ 2\log\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\left(e^{3x/2}-e^{x/2}\right)\right)\right)\right), & \text{if } -\log 3\le z<0.\end{cases}$$

情形 *a=1/5:* 再次使用卡尔丹诺法求解三次方程，在此情形下得到：

$$\psi_0(x)=\begin{cases}\frac{5}{2}\log\left(\sqrt[3]{x+\frac{1}{27}+\sqrt{x^2+\frac{2x}{27}}}+\sqrt[3]{x+\frac{1}{27}-\sqrt{x^2+\frac{2x}{27}}}+\frac{1}{3}\right), & \text{if } 0\le x\\ \frac{5}{2}\log\left(\frac{2}{3}\cos\left(\frac{\arccos(27x+1)}{3}\right)+\frac{1}{3}\right), & \text{if } -\frac{2}{27}<x<0,\end{cases}$$

and

$$\psi_{-1}(x)=\frac{5}{2}\log\left(\frac{2}{3}\cos\left(\frac{\arccos(27x+1)+4\pi}{3}\right)+\frac{1}{3}\right),\quad \text{if } -\frac{2}{27}<x<0.$$

现在我们得到转移函数

$$\omega(\tfrac{1}{5},z)=\begin{cases}\frac{5}{2}\log\left(\frac{2}{3}\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{27}{2}\left(e^{6x/5}-e^{4x/5}\right)+1\right)\right)+\frac{1}{3}\right), & \text{if } z<-\frac{5}{2}\log(3/2)\\ \frac{5}{2}\log\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{27}{2}\left(e^{6x/5}-e^{4x/5}\right)+1\right)\right)\right), & \text{if } -\frac{5}{2}\log(3/2)\le z<0.\end{cases}$$

在以下情形中，我们只给出 ψ-函数。

情形 *a=3/5:* 在此情形下，我们将求解

$$Y^4-Y-2x=0\quad\text{for } x\ge-\frac{3}{8\sqrt[3]{4}}$$

通过使用Ferrari方法。首先，我们需要求出辅助方程的解：

$$v^3 + 2xv - \frac{1}{8} = 0.$$

在我们的情形中，$x \geq -\frac{3}{8\sqrt[3]{4}}$，因此

$$v = \frac{1}{\sqrt[3]{16}} \left(\sqrt[3]{1 - \sqrt{4\left(\frac{8x}{3}\right)^3 + 1}} + \sqrt[3]{1 + \sqrt{4\left(\frac{8x}{3}\right)^3 + 1}} \right),$$

由此，我们得到

$$\psi_0(\tfrac{3}{5}, x) = \frac{5}{2} \log \left(\frac{(2v)^{3/4} + \sqrt{2 - (2v)^{3/2}}}{2\sqrt[4]{2v}} \right), \quad \text{if } -\frac{3}{8\sqrt[3]{4}} \leq x$$

此外，

$$\psi_{-1}(\tfrac{3}{5}, x) = \frac{5}{2} \log \left(\frac{(2v)^{3/4} - \sqrt{2 - (2v)^{3/2}}}{2\sqrt[4]{2v}} \right), \quad \text{if } -\frac{3}{8\sqrt[3]{4}} < x < 0.$$

情形 $a=1/7$：在这种情形下我们将求解

$$Y^4 - Y^3 - 2x = 0 \quad \text{for } x \geq -\left(\frac{3}{8}\right)^3$$

使用Ferrari方法。经过一些冗长但直接的计算，我们得到：

$$\psi_0(\tfrac{1}{7}, x) = \frac{7}{2} \log \left(\frac{\sqrt{2v + \frac{1}{4}} + \sqrt{-2v + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{8v+1}}}}{2} + \frac{1}{4} \right), \quad \text{if } -\left(\frac{3}{8}\right)^3 \leq x$$

and

$$\psi_{-1}(\tfrac{1}{7}, x) = \frac{7}{2} \log \left(\frac{\sqrt{2v + \frac{1}{4}} - \sqrt{-2v + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{8v+1}}}}{2} + \frac{1}{4} \right), \quad \text{if } -\left(\frac{3}{8}\right)^3 \leq x < 0,$$

其中

$$v = \sqrt[3]{-\frac{x}{8} + \sqrt{\left(\frac{2x}{3}\right)^3 + \left(\frac{x}{8}\right)^2}} + \sqrt[3]{-\frac{x}{8} - \sqrt{\left(\frac{2x}{3}\right)^3 + \left(\frac{x}{8}\right)^2}}.$$

5. 参数化与定积分

本节的主要目的是证明

$$\int_{-\infty}^{0} \omega(a, z)\, \mathrm{d}z = \frac{\pi^2}{3(a^2 - 1)}.$$

我们采用一种巧妙的思路，同时对 ψ 在 $x < 0$ 下的两个分支进行参数化。这一思路源自 [10], ，并在 [15, 定理 1.3.1] 中作了说明。我们的参数化形式由以下定理给出：

定理 5.1。设

$$x = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha^{1+a} - \alpha^{2a}}{\alpha^{1+a} - 1} \right)^{\frac{1-a}{2a}} \left(\frac{1 - \alpha^{2a}}{\alpha^{1+a} - 1} \right)$$

其中 $1<\alpha$。那么

$$\psi_0(a,x)=\log(\alpha)+\psi_{-1}(a,x)$$
$$\psi_{-1}(a,x)=\frac{1}{2a}\log\left(\frac{\alpha^{1-a}-1}{\alpha^{1+a}-1}\right).$$

证明。我们正在寻找满足以下条件的 α。

$$x(\alpha)=e^{\psi_0(x(\alpha))}\sinh(a\psi_0(x(\alpha)))=e^{\psi_1(x(\alpha))}\sinh(a\psi_1(x(\alpha)))\,.$$

设 $\psi_0=\psi_{-1}+p/a$，其中 $p>0$ 是一个参数。那么，

$$e^{\psi_0}\sinh(a\psi_0)=e^{\left(\psi_{-1}+\frac{p}{a}\right)}\sinh(a(\psi_{-1}+p/a))=e^{\psi_{-1}}\sinh(a\psi_{-1})\,,$$

这意味着

$$e^{-\frac{p}{a}}=\frac{\sinh(a\psi_{-1}+p)}{\sinh(a\psi_{-1})}=\cosh(p)+\coth(a\psi_{-1})\sinh(p)\,.$$

因此，

$$\psi_{-1}=\frac{1}{a}\operatorname{arcoth}\left(\frac{e^{-\frac{p}{a}}-\cosh(p)}{\sinh(p)}\right)=\frac{1}{2a}\log\left(\frac{e^{-p}-e^{-\frac{p}{a}}}{e^{p}-e^{-\frac{p}{a}}}\right).$$

以类似方式继续，我们设定 $\psi_{-1}=\psi_0-p/a$，其中 $p>0$ 是一个参数，这意味着

$$e^{\psi_0-p/a}\sinh(a\psi_0-p))=e^{\psi_0}\sinh(a\psi_0)\,.$$

因此，

$$e^{\frac{p}{a}}=\frac{\sinh(a\psi_0-p)}{\sinh(a\psi_0)}=\cosh(p)-\coth(a\psi_0)\sinh(p)\,,$$

从而得到

$$\psi_0=\frac{1}{a}\operatorname{arcoth}\left(\frac{-e^{\frac{p}{a}}+\cosh(p)}{\sinh(p)}\right)=\frac{1}{2a}\log\left(\frac{-e^{p}+e^{\frac{p}{a}}}{-e^{-p}+e^{\frac{p}{a}}}\right).$$

因此，对于 $p\in(0,\infty)$，有

$$x=e^{\psi_0}\sinh(a\psi_0)=\frac{1}{2}\left(\frac{-e^{p}+e^{\frac{p}{a}}}{-e^{-p}+e^{\frac{p}{a}}}\right)^{\frac{1-a}{2a}}\left(\frac{e^{-p}-e^{p}}{e^{\frac{p}{a}}-e^{-p}}\right).$$

设 $p=a\log(\alpha)$，其中 $\alpha\in(1,\infty)$。那么

$$x=\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha^{1+a}-\alpha^{2a}}{\alpha^{1+a}-1}\right)^{\frac{1-a}{2a}}\left(\frac{1-\alpha^{2a}}{\alpha^{1+a}-1}\right)$$
$$\psi_0(x)=\log(\alpha)+\psi_{-1}(x)$$
$$\psi_{-1}(x)=\frac{1}{2a}\log\left(\frac{\alpha^{1-a}-1}{\alpha^{1+a}-1}\right).$$

□

得益于定理 5.1 中的参数化，我们可以用另一种方法求出 ψ_0 和 ψ_{-1} 的显式公式。以下示例针对情形 $a=1/3$。

例 5.2. 我们回到 $a=1/3$ 的特殊情形。对于 $-1/8\le x<0$ and$\alpha\ge 1$，我们令

$$x=\frac{-\alpha^{2/3}}{2(\alpha^{2/3}+1)^2}\,,\tag{5.1}$$

and

$$\psi_0=-\frac{3}{2}\log\left(1+\alpha^{-2/3}\right)\quad\text{and }\psi_{-1}=-\frac{3}{2}\log\left(1+\alpha^{2/3}\right).$$

因此，通过求解 $\alpha^{2/3}$中的(5.1)，并利用定理 5.1，我们得到

$$\psi_0 = \frac{3}{2}\log\left(\frac{1}{2}+\sqrt{2x+\frac{1}{4}}\right) \quad \text{and} \quad \psi_{-1} = \frac{3}{2}\log\left(\frac{1}{2}-\sqrt{2x+\frac{1}{4}}\right).$$

□

利用定理 5.1，我们现在可以陈述如下定理：

定理 5.3。

$$\int_{-\infty}^{0}\omega(a,z)\,\mathrm{d}z = \frac{\pi^2}{3(a^2-1)}.$$

证明。 转移函数的定义如下：

$$\omega(a,z) = \begin{cases}\psi_0(a,f(a,z)) & \text{if } z < M_a\\ \psi_{-1}(a,f(a,z)) & \text{if } M_a \le z < 0\,.\end{cases}$$

对于 $y \ge L_a$ 中的关系 $y = f(a,z)$，我们注意到，其中一个逆函数分支为 $z = \psi_0(a, y) \ge M_a$，另一个分支为 $z = \psi_{-1}(a,y) \le M_a$。因此，

$$\int_{-\infty}^{0}\omega(a,z)\,\mathrm{d}z = \int_0^{L_a}\left(\psi_0(y)\psi_{-1}'(y) - \psi_{-1}(y)\psi_0'(y)\right)\mathrm{d}y.$$

由定理 5.1 可知

$$\psi_0(y(\alpha)) = \log(\alpha) + \psi_{-1}(y(\alpha)) \quad \text{and} \quad \psi_{-1}(y(\alpha)) = \frac{1}{2a}\log\left(\frac{\alpha^{1-a}-1}{\alpha^{1+a}-1}\right),$$

因此

$$\int_{-\infty}^{0}\omega(a,z)\,\mathrm{d}z = \int_1^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha}\Psi(\alpha) - \log(\alpha)\Psi'(\alpha)\right)\mathrm{d}\alpha,$$

其中

$$\Psi(\alpha) = \frac{1}{2a}\log\left(\frac{\alpha^{1-a}-1}{\alpha^{1+a}-1}\right).$$

最后，由代换 $\alpha = \frac{1}{\beta}$ 可知 –

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{0}\omega(a,z)\,\mathrm{d}z = \int_0^1 \Bigg(&\frac{1}{2a\beta}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-\left((\beta^{1-a})^n - (\beta^{1+a})^n\right)}{n}\\ &+\frac{\log(\beta)}{2a\beta}\left((1-a)\sum_{n=1}^{\infty}(\beta^{1-a})^n - (1+a)\sum_{n=1}^{\infty}(\beta^{1+a})^n\right)\Bigg)\mathrm{d}\beta\\ &= \frac{1}{1-a^2}\left(-\frac{\pi^2}{6}-\frac{\pi^2}{6}\right) = \frac{\pi^2}{3(a^2-1)}.\end{aligned}$$

□

6. ψ_0 在零点处的泰勒级数

在本节和下一节中，我们将重点讨论级数展开。这里我们使用拉格朗日反演定理来确定 ψ_0 关于 $x = 0$ 的泰勒级数（见 (6.1)）。首先，让我们回顾一下拉格朗日反演定理 [1, 6]:

定理 6.1（拉格朗日反演定理）。 如果 $x = f(w)$， $x_0 = f(w_0)$，对于某个在 w_0 邻域内实解析的函数，且满足 $f'(w_0) \ne 0$，那么

$$w = g(x) = w_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x-x_0}{k!}\left(\frac{d^{k-1}}{dw^{k-1}}\left(\frac{w-w_0}{f(w)-x_0}\right)^k\right)\Bigg|_{w=w_0},$$

其中收敛半径严格大于零。此外，如果

$$f(w)=\sum_{k=0}^{\infty} f_k \frac{w^k}{k!} \quad and \quad g(x)=\sum_{k=0}^{\infty} g_k \frac{x^k}{k!},$$

则有

$$\begin{aligned} g_n &= \frac{1}{f_1^n}\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k n^{\bar{k}} B_{n-1,k}\left(\frac{f_2}{2f_1},\frac{f_3}{3f_1},\ldots,\frac{f_{n-k+1}}{(n-k+1)f_1}\right) \\ &= \frac{1}{a^n}\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k a^k n^{\bar{k}} B_{n-1,k}\left(\frac{f_2}{2},\frac{f_3}{3},\ldots,\frac{f_{n-k+1}}{(n-k+1)}\right),\ n\geq 2, \end{aligned}$$

其中 $g_1=\frac{1}{f_1}=\frac{1}{a}$，$n^{\bar{k}}=n(n+1)\cdots(n+k-1)$ 是上升阶乘，而 $B_{n,k}$ 是部分指数贝尔多项式。

我们将此定理应用于函数

$$\begin{aligned} f(w)=f(a,w)&=\frac{1}{2}(e^{(1+a)w}-e^{(1-a)w}) \\ &=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+a)^n-(1-a)^n}{2n!}w^n \\ &=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n}{n!}w^n, \end{aligned}$$

于是得到

$$\psi_0(a,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g_n}{n!}x^n,$$

其中

$$g_n=\frac{1}{f_1^n}\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k n^{\bar{k}} B_{n-1,k}\left(\frac{f_2}{2f_1},\frac{f_3}{3f_1},\ldots,\frac{f_{n-k+1}}{(n-k+1)f_1}\right).$$

因此，ψ_0 在 $x=0$ 附近的泰勒级数前几项为：

$$\begin{aligned} (6.1)\quad \psi_0(a,x) &= \frac{x}{a}-\frac{1}{a^2}x^2-\frac{(a^2-9)}{6a^3}x^3+\frac{2(a^2-4)}{3a^4}x^4 \\ &\quad +\frac{(9a^4-250a^2+625)}{120a^5}x^5-\frac{2(4a^4-45a^2+81)}{15a^6}x^6 \\ &\quad -\frac{(225a^6-12691a^4+84035a^2-117649)}{5040a^7}x^7+\frac{16(9a^6-196a^4+896a^2-1024)}{315a^8}x^8 \\ &\quad +\frac{(1225a^8-116244a^6+1439046a^4-4960116a^2+4782969)}{40320a^9}x^9 \\ &\quad -\frac{2(576a^8-20500a^6+170625a^4-468750a^2+390625)}{2835a^{10}}x^{10}+\mathcal{O}(x^{11}) \end{aligned}$$

此外，泰勒级数的收敛半径不能超过 $|L_a|$。

7. Series expansions of ψ at $x=L_a$ and of ω at $z=M_a$

本节旨在借助命题 7.1 作为工具，确定 ψ 在 $x=L_a$ 处以及ω 在 $z=M_a$ 处的级数展开。这些级数分别在 (7.1)、(7.2) 和 (7.3) 中给出。

命题 7.1。设 f 是0 邻域内的一个光滑函数，使得$f(0)=f'(0)=0$且 $f''(0)>0$。那么 f具有两个光滑反函数（在

在0的某个邻域内）、一个关于 $x > 0$的右逆函数 $h(x) > 0$，以及一个关于 $x > 0$的左逆函数$g(x) < 0$，它们可以表示为

$$h(x) = h_1\sqrt{x} + h_2 x + h_3 x^{3/2} + \dots,$$
$$g(x) = g_1\sqrt{x} + g_2 x + g_3 x^{3/2} + \dots,$$

其中 $g_{2k} = h_{2k}$ 且 $g_{2k-1} = -h_{2k-1}$ 对于 $k = 1, 2, \dots$.

证明。不失一般性，我们可以假设 f 在零点某个可能更小的邻域内是凸的。在零点处的泰勒展开可表示为

$$f(x) = x^2(f_2 + f_3 x + \cdots), \quad \text{with } f_2 > 0.$$

因此，对于某个光滑函数 $\tilde{f}$，有 $f(x) = x^2\tilde{f}(x)$，且 $\tilde{f}(x) > 0$。于是，$\sqrt{\tilde{f}(x)}$ 在 0 的邻域内是光滑的。令

$$F(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2\tilde{f}(x)}, & \text{if } x \geq 0 \\ -\sqrt{x^2\tilde{f}(x)}, & \text{if } x \leq 0. \end{cases}$$

函数 F 在 0 的某个可能去心邻域内可逆且光滑。此外，对于所有 $n \in \mathbb{N}$，下列极限均存在:

$$\lim_{x\to 0^+} f^{(n)}(x) \quad \text{and} \quad \lim_{x\to 0^-} f^{(n)}(x)$$

且 $F^2 = f$。由此可知，f 有两个光滑的反函数，$f^{-1} = F^{-1} \circ (x^2)^{-1}$，它们可表示为 $F^{-1}(\sqrt{y})$ 和 $F^{-1}(-\sqrt{y})$，$y \geq 0$。最后，对 F^{-1} 应用泰勒级数展开，即可得到所需结论。□

令 $K_a = L_a(a^2 - 1)$，并回忆 $f(a, M_a) = L_a$。于是，我们得到在 $y = 0$ 附近的以下级数展开

$$\frac{1}{K_a}\left(f(a, y + M_a) - L_a\right) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 + \frac{a^2+3}{24}y^4 + \frac{a^2+1}{30}y^5 + \frac{a^4+10a^2+5}{720}y^6 + \frac{3a^4+10a^2+3}{2520}y^7 + \frac{a^6+21a^4+35a^2+7}{40320}y^8 + \mathcal{O}(y^9)$$

逆函数级数展开给出 ψ_0，可通过使用 f 和 h 的级数设定，并在命题 7.1 中逐项求解 $f(h(x)) = x$ 得到。

$$\psi_0(a, x\,K_a + L_a) - M_a = \sqrt{2}\sqrt{x} - \frac{2}{3}x + \frac{11-3a^2}{18\sqrt{2}}x^{3/2} - \frac{43-27a^2}{135}x^2 + \frac{81a^4-786a^2+769}{2160\sqrt{2}}x^{5/2} - \frac{8(81a^4-318a^2+221)}{8505}x^3 + \frac{680863-1273509a^2+551853a^4-30375a^6}{2721600\sqrt{2}}x^{7/2} + \mathcal{O}(x^4) \tag{7.1}$$

它在 $0 \leq x < -L_a/K_a = 1/(1-a^2)$ 时收敛。注意，对于 $0 < a < 1$，x^3 和 $x^{7/2}$ 的系数可能改变符号。

根据命题 7.1，我们可以推导出另一个分支

$$\psi_{-1}(a, x\,K_a + L_a) - M_a = -\sqrt{2}\sqrt{x} - \frac{2}{3}x - \frac{11-3a^2}{18\sqrt{2}}x^{3/2} - \frac{43-27a^2}{135}x^2 - \frac{81a^4-786a^2+769}{2160\sqrt{2}}x^{5/2} - \frac{8(81a^4-318a^2+221)}{8505}x^3 - \frac{680863-1273509a^2+551853a^4-30375a^6}{2721600\sqrt{2}}x^{7/2} + \mathcal{O}(x^4) \tag{7.2}$$

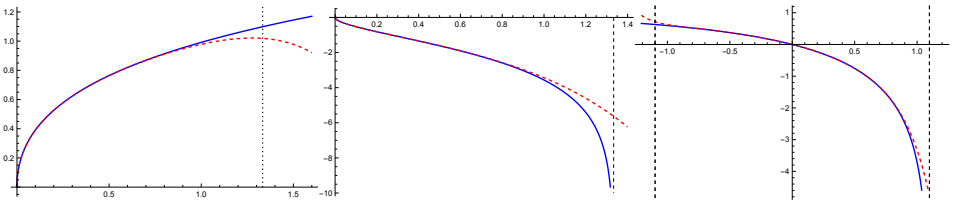


图 4。左：$\psi_0(a,\ x/K_a + L_a) + M_a$（蓝色实线）与相应的 6 阶级数展开（红色虚线）的图像。中：$\psi_{-1}(a,\ x/K_a + L_a) + M_a$（蓝色实线）与相应的 6 阶级数展开（红色虚线）的图像。右：$\omega(a,\ x - M_a) + M_a$（蓝色实线）与相应的 11 阶级数展开的图像。图中显示$a = 1/2$。图中的竖直点线表示收敛区间的端点。左图和中图的端点为 $x = -L_a/K_a$，右图的端点为 $x = \pm M_a$。

并且该级数同样在 $0 \le x < 1/(1-a^2)$ 处收敛。请注意，两个级数中的第二个参数都是 $x\,K_a + L_a \in [L_a, 0)$。

现在我们将 $\psi_{-1}(a,\ x\,K_a + L_a) - M_a$ 的级数与 $(f(a,\ x + M_a) - L_a)/K_a$的级数组合，得到 $\omega(a,\ x + M_a) - M_a$的级数，并注意到 K_a因子会抵消，

$$
\begin{aligned}
(7.3)\quad \omega(a, x+M_a) - M_a = {} & -x - \frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{9}x^3 + \frac{2(3a^2-22)}{135}x^4 + \frac{4(9a^2-26)}{405}x^5 \\
& - \frac{4(3a^4-88a^2+150)}{2835}x^6 - \frac{8(81a^4-808a^2+956)}{42525}x^7 \\
& + \frac{2(27a^6-2106a^4+11124a^2-9968)}{127575}x^8 + \frac{4(135a^6-3258a^4+11064a^2-7928)}{229635}x^9 \\
& - \frac{4(2025a^8-341604a^6+4049838a^4-9850752a^2+5857336)}{189448875}x^{10} + \mathcal{O}(x^{11}).
\end{aligned}
$$

请注意，x^4 的系数是第一个依赖于 a 的系数。还请注意，x^9 的系数是第一个可能在某些 $0 < a < 1$ 取值下变为零的系数。这发生在 $a = 0.998689$ 处。x^{10} 的系数在 $a = 0.952489$ 处变为零。

例 7.2. 图 4 展示了 $a = 1/2$ 时的 ψ_0、ψ_{-1}、ω，以及如前所述它们各自的级数展开。在这种情况下，相应展开的前几项为

$$
\begin{aligned}
\psi_0\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{x}{4\sqrt{3}} - \tfrac{1}{3\sqrt{3}}\right) + \log(3) &= \sqrt{2}\sqrt{x} - \frac{2}{3}x + \frac{41}{72\sqrt{2}}x^{3/2} - \frac{29}{108}x^2 + \frac{9241}{34560\sqrt{2}}x^{5/2} + \dots \\
\psi_{-1}\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{x}{4\sqrt{3}} - \tfrac{1}{3\sqrt{3}}\right) + \log(3) &= -\sqrt{2}\sqrt{x} - \frac{2}{3}x - \frac{41}{72\sqrt{2}}x^{3/2} - \frac{29}{108}x^2 - \frac{9241}{34560\sqrt{2}}x^{5/2} + \dots \\
\omega\left(\tfrac{1}{2}, x - \log(3)\right) + \log(3) &= -x - \frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{9}x^3 - \frac{17}{54}x^4 - \frac{19}{81}x^5 + \dots
\end{aligned}
$$

□

8. 分支 ψ_0 在 $x \to \infty$ 时的渐近行为

这里我们确定了当 $x \to \infty$ 时，$\psi_0(a, x)$ 的渐近行为。在此过程中，一个重要的工具是以下定理。

定理 8.1. 设

$$x \geq \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{e^{|\frac{1}{3}-a|}-1}\right)^{\frac{1+a}{2a}}.$$

则下列结论成立。

(1) 若 $0<a<\frac{1}{3}$，则

$$\frac{1}{1+a}(2x)^{-\frac{2a}{1+a}}+\frac{\log(2x)}{1+a}\leq\psi_0(a,x)\leq\frac{\log(2x)}{1+a}+\frac{2}{1+a}(2x)^{-\frac{2a}{1+a}}.$$

(2) 如果 $\frac{1}{3}<a<1$，那么

$$\frac{1}{3(1+a)}(2x)^{-\frac{2a}{1+a}}+\frac{\log(2x)}{1+a}\leq\psi_0(a,x)\leq\frac{\log(2x)}{1+a}+\frac{1}{1+a}(2x)^{-\frac{2a}{1+a}};$$

注记。设 x_0 为当 $x\geq x_0$时满足这些界限的点。数值实验表明，对于下界，我们有

(*i*) 若 $0<a<1/3$ 则

$$x_0=\frac{e^{-29/4}}{(\frac{1}{3}-a)^2}$$

当 $a\to(1/3)^-$ 时，这似乎是精确的最优点。当 $a\to0^+$ 时，它并非最优，但仍然有效。

(*ii*) 如果 $1/3<a<1$，那么 $x_0\approx0.1$ 可行。ψ_0 与下界之间的差值在 $x\geq1/4$ 时递减（这是 $a\to1^-$ 时的极限）。

对于上界，我们得到

(*i*) 如果 $0<a\lesssim0.102$ 那么 $x_0\sim\exp(-3.8+\frac{0.117}{a})$。上界与 ψ_0 之间的差值在 $x>\exp(-3.1+\frac{0.35}{a})$时递减。这两个公式都是粗略估计，但它们远小于定理中的 x-界。无论如何，若要使上界在 a较小时成立，就需要非常大的 x。

(*ii*) 当 $0.102\lesssim a<1$ 上界对所有 $x>0$ 都成立时。

(*iii*) 当 $0.1255\lesssim a<1$ 上界与 ψ_0 之间的差值对所有 $x>0$ 均递减时。

首先注意到，如果 $y=\psi_0(a,\ x)$，那么

$$x=\sinh(ay)e^y=\frac{e^{(1+a)y}-e^{(1-a)y}}{2}<\frac{e^{(1+a)y}}{2},$$

因此我们得到

$$\psi_0(a,x)=y>\frac{1}{1+a}\log(2x).$$

接下来我们将继续证明两个辅助引理。

引理 8.2。对于 $0<a<1$，有

$$0\leq\psi_0(a,x)-\frac{\log(2x)}{1+a}\leq\log\left(\frac{(2x)^{\frac{a}{1+a}}}{(2x)^{\frac{a}{1+a}}-(2x)^{-\frac{a}{1+a}}}\right),$$

对于所有 $x>0$。特别是，

$$\lim_{x\to\infty}\left(\psi_0(a,x)-\frac{1}{1+a}\log(2x)\right)=0.$$

证明。 根据 ψ_0 的定义以及双曲正弦函数单调递增这一事实，我们有

$$1 \le e^{\psi_0(a,x)-\frac{\log(2x)}{1+a}} = e^{\psi_0(a,x)}(2x)^{-\frac{1}{1+a}} = \frac{x(2x)^{-\frac{1}{1+a}}}{\sinh(a\psi_0(a,x))}$$
$$\le \frac{x(2x)^{-\frac{1}{1+a}}}{\sinh\left(a\frac{\log(2x)}{1+a}\right)} = \frac{(2x)^{\frac{a}{1+a}}}{(2x)^{\frac{a}{1+a}} - (2x)^{-\frac{a}{1+a}}}.$$

当 $x \to \infty$ 时，上述最后一项趋于 1，这就证明了最后的结论。 □

下面的引理是一个直接的练习，可通过对 e^y about0 进行泰勒展开得到。

引理 8.3. 对于任意 $0 < a < \frac{1}{3}$，存在一点 $b(a) > 0$，使得

(*i*) $e^{2ay} - e^{(a-1)y} - (a+1)y \le 0$，并且

(*ii*) $e^{2ay} - e^{(a-1)y} - (a+1)y + \frac{1}{2}(-3a^2 - 2a + 1)y^2 \ge 0$,

对于所有 $0 \le y \le b(a)$。此外，对于 $a > \frac{1}{3}$，存在一点 $b(a) > 0$，使得

$$(1+a)y \le e^{2ay} - e^{(a-1)y} \le 3(1+a)y$$

对所有 $0 \le y \le b(a)$均成立。事实上，在这两种情形下，都可以取 $b(a) = |a - \frac{1}{3}|$。

现在我们可以给出本节主要结果的证明了。

定理 *8.1* 的证明。 由引理 8.2 可知， $\varphi(x) = \psi_0(a,x) - \log(2x)\,1+a$满足： $\varphi > 0, \varphi(x) \to 0$，因为 $x \to \infty$ 且 $\varphi(x) \le h(x)$，其中

$$h(x) = \log\left(\frac{(2x)^{\frac{a}{1+a}}}{(2x)^{\frac{a}{1+a}} - (2x)^{-\frac{a}{1+a}}}\right).$$

接下来，将 $x = \varphi(x)$ 代入 ψ_0 的隐式定义中，可得

$$e^{(1+a)\left(\varphi(x)+\frac{\log(2x)}{1+a}\right)} - e^{(1-a)\left(\varphi(x)+\frac{\log(2x)}{1+a}\right)} = 2x,$$

重新整理后得到

$$e^{2a\varphi(x)} - e^{(a-1)\varphi(x)} = (2x)^{-\frac{2a}{1+a}}. \tag{8.1}$$

有 $0 < \varphi(x) \le h(x)$。此外，显然，对于任意 $\epsilon > 0$， $h(x) \le \epsilon$ 当且仅当

$$x \ge \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{e^\epsilon - 1}\right)^{\frac{1+a}{2a}}. \tag{8.2}$$

取 $\epsilon = b(a) = |\frac{1}{3} - a|$，其中 $b(a)$ 来自引理 8.3。为完成此证明，我们将引理 8.3 与 $y = \varphi(x)$ 一起应用于 (8.1)。总结并写出若干细节如下：

(1) 由引理 8.3

$$\varphi(x) \ge \frac{1}{1+a}(2x)^{-\frac{2a}{1+a}}, \text{ for } a < \frac{1}{3};$$
$$\frac{1}{3(1+a)}(2x)^{-\frac{2a}{1+a}} \le \varphi(x) \le \frac{1}{1+a}(2x)^{-\frac{2a}{1+a}}, \text{ for } a \ge \frac{1}{3}.$$

(2) 对于 $a < \frac{1}{3}$，同样利用引理 8.3

$$\beta_1(a)\varphi(x) + \frac{1}{2}\beta_2(a)\varphi^2(x) \le (2x)^{-\frac{2a}{1+a}},$$

其中 $\beta_1(a) = 1 + a$ 和 $\beta_2(a) = 3a^2 + 2a - 1$。注意，由 (8.2) 得彩在线

$$\Delta = \beta_1(a)^2 + 2\beta_2(a)(2x)^{-\frac{2a}{1+a}} = (1+a)^2\left(1 + \frac{6a-2}{1+a}(2x)^{-\frac{2a}{1+a}}\right) \geq 0\,,$$

因为

$$1 + \frac{1}{e^{|a-\frac{1}{3}|} - 1} \geq \left|\frac{1+a}{2-6a}\right|.$$

在情形 $a < \frac{1}{3}$ 下，我们有 $\beta_2(a) = (3a-1)(a+1) < 0$ 且

$$\varphi_1 = \frac{\beta_1(a) + \sqrt{\Delta}}{-\beta_2(a)} > \varphi_2 = \frac{\beta_1(a) - \sqrt{\Delta}}{-\beta_2(a)} > 0.$$

因此，$\varphi \leq \varphi_2$。于是，

$$\varphi(x) \leq \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{2-6a}{1+a}(2x)^{-\frac{2a}{1+a}}}}{1-3a} \leq \frac{2}{1+a}(2x)^{-\frac{2a}{1+a}}.$$

□

作为前述证明的推论，我们可以得到关于变量$Y = (2x)^{-\frac{2a}{1+a}}$的级数展开。首先重述（8.1）：

$$e^{2a\varphi(x)} - e^{(a-1)\varphi(x)} = (2x)^{-\frac{2a}{1+a}},$$

然后我们使用指数函数在 0 处的泰勒展开：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2a)^k - (a-1)^k}{k!}\varphi^k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_k(a)}{k!}\varphi^k(x) = (2x)^{-\frac{2a}{1+a}},$$

其中 $\beta_k(a) = (2a)^k - (a-1)^k$, $\beta_1(a) = 1 + a$, $\beta_2(a) = 3a^2 + 2a - 1$, $\beta_3(a) = 7a^3 + 3a^2 - 3a + 1$。然后利用定理 6.1，我们得到

$$\psi(a,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n(a)}{n!}Y^n,$$

其中

$$g_n(a) = \frac{1}{\beta_1^n}\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k n^{(k)} B_{n-1,k}\left(\frac{\beta_2}{2\beta_1}, \frac{\beta_3}{3\beta_1}, \ldots, \frac{\beta_{n-k+1}}{(n-k+1)\beta_1}\right),\ n \geq 2,$$

并且 $g_1(a) = \frac{1}{\beta_1} = \frac{1}{a+1}$, $n^{\bar{k}} = n(n+1)\cdots(n+k-1)$ 是上升阶乘，而 $B_{n,\,k}$表示部分或不完全指数贝尔多项式。

我们来计算几个系数：

$$\begin{aligned}
g_1(a) &= \frac{1}{\beta_1} = \frac{1}{a+1} \\
g_2(a) &= \frac{1}{\beta_1^2(a)}(-1)2B_{1,1}(\hat{\beta}_1) = -\frac{\beta_2(a)}{\beta_1^3(a)} = \frac{1-3a}{(a+1)^2} \\
g_3(a) &= \frac{1}{\beta_1^3(a)}\left(-3B_{2,1}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) + 12B_{2,2}(\hat{\beta}_1)\right) \\
&= \frac{1}{\beta_1^3(a)}\left(-3\hat{\beta}_2 + 12\hat{\beta}_1{}^2\right) = \frac{-\beta_3\beta_1 + 3\beta_2^2}{\beta_1^5} \\
&= \frac{2(10a^2 - 7a + 1)}{(a+1)^3}.
\end{aligned}$$

因此，

$$\varphi(x) \sim g_1(a)Y + \frac{g_2(a)}{2}Y^2 + \frac{g_3(a)}{6}Y^3 = \frac{1}{a+1}Y + \frac{1-3a}{2(a+1)^2}Y^2 + \frac{10a^2-7a+1}{3(a+1)^3}Y^3,$$

这意味着

$$\psi_0(a,x)\sim\frac{\log(2x)}{1+a}+\frac{1}{a+1}(2x)^{-\frac{2a}{1+a}}+\frac{1-3a}{2(a+1)^2}(2x)^{-\frac{4a}{1+a}}+\frac{10a^2-7a+1}{3(a+1)^3}(2x)^{-\frac{6a}{1+a}}.$$

9. 分支 ψ_{-1} 在 $x\to0^-$ 时的渐近性

使用与前几节相同的方法，我们将研究分支$\psi_{-1}(a,\ x)$'在零点附近的行为。我们将证明以下定理。回顾一下，分支 $\psi_{-1}(a,\ x)$ 定义于 $L_a\le x<0$。

定理 9.1. 令 $0<a<1$。则

(1) $\lim\limits_{x\to0^-}\left(\psi_{-1}(a,x)-\dfrac{1}{1-a}\log(-2x)\right)=0.$

(2) $\psi_{-1}(a,x)\ge\dfrac{\log(-2x)}{1-a}-\log\left(1-(-2x)^{\frac{2a}{1-a}}\right).$

(3) *For* $-\frac{1}{2}\left(\frac{1-a}{6a+2}\right)^{\frac{1-a}{2a}}\le x\le0$ *it holds*

$$\frac{\log(-2x)}{1-a}+\frac{1}{1-a}(-2x)^{\frac{2a}{1-a}}\le\psi_{-1}(a,x)\le\frac{\log(-2x)}{1-a}+\frac{2}{1-a}(-2x)^{\frac{2a}{1-a}}.$$

在定理 9.1 的证明中，我们需要以下初等事实。

引理 9.2。 对于 $x>0$，有

(i) $e^{-2ax}-e^{(-a-1)x}-(1-a)x\le0$ *and*

(ii) $e^{-2ax}-e^{(-a-1)x}-(1-a)x-\frac{1}{2}(3a^2-2a-1)x^2\ge0.$

定理 *9.1* 的证明。(1) 若 $y=\psi_{-1}(x)$，则

$$x=\sinh(ay)e^y=\frac{e^{(1+a)y}-e^{(1-a)y}}{2}>-\frac{e^{(1-a)y}}{2},\tag{9.1}$$

因此我们得到

$$\psi_{-1}(a,x)=y>\frac{1}{1-a}\log(-2x).\tag{9.2}$$

然后，令 $\varphi(x)=\psi_{-1}(a,\ x)-\frac{\log(-2x)}{1-a}$。我们知道 $\varphi>0$。由 (9.1) 可得

$$e^{(1+a)\left(\varphi(x)+\frac{\log(-2x)}{1-a}\right)}-e^{(1-a)\left(\varphi(x)+\frac{\log(-2x)}{1-a}\right)}=2x,$$

重新整理后，我们得到

$$e^{-2a\varphi(x)}-e^{(-a-1)\varphi(x)}=(-2x)^{\frac{2a}{1-a}}.\tag{9.3}$$

左侧的每一项都有界，且由于右侧趋于零，当 $x\to0^-$ 时，$\varphi(x)$ 也趋于零。

(2) 根据 ψ_{-1} 的定义、函数双曲正弦递增这一事实以及 (9.2)，我们得到

$$e^{-\psi_{-1}(a,x)+\frac{\log(-2x)}{1-a}}=e^{-\psi_{-1}(x)}(-2x)^{\frac{1}{1-a}}=\frac{(-2x)^{\frac{1}{1-a}}\sinh(a\psi_{-1}(a,x))}{x}$$

$$\le\frac{(-2x)^{\frac{1}{1-a}}\sinh\left(a\frac{\log(-2x)}{1-a}\right)}{x}=\frac{(-2x)^{\frac{1+a}{1-a}}-(-2x)^{\frac{1-a}{1-a}}}{2x}=1-(-2x)^{\frac{2a}{1-a}}.$$

(3) 令 $\varphi(x)=\psi_{-1}(x)-\frac{\log(-2x)}{1-a}$。该证明与定理 8.1 的证明非常相近，但我们使用 (9.3) 代替关系式 (8.1)，并且引理 9.2 取代引理 8.3。

□

按照与第8节类似的方法，我们得到 ψ_{-1} 关于 $Z = (-2x)^{\frac{2a}{1-a}}$的展开式：

$$\psi_{-1}(a,x) \sim \frac{\log(-2x)}{1-a} + \frac{1}{1-a}(-2x)^{\frac{2a}{1-a}} + \frac{1+3a}{2(1-a)^2}(-2x)^{\frac{4a}{1-a}} + \frac{10a^2+7a+1}{3(1-a)^3}(-2x)^{\frac{6a}{1-a}}.$$

参考文献

[1] Abramowitz, M. 与 Stegun, I. A.《数学函数手册：公式、图表和数学表》。Dover，纽约，1972年。[2] Ahmia, M. 与 Belbachir, H. 保持对数凹性的 p,q-线性变换的类比。《印度纯粹与应用数学杂志》49, 3（2018），549–557。[3] Ahmia, M. 与 Belbachir, H. 保持 p,q-二项式系数的对数凹性。《离散数学：算法与应用》11, 2（2019），1950017。[4] Baker, A.《超越数论》。剑桥大学出版社，剑桥，1975年。[5] Baxter, R. J. 临界温度下的Potts模型。《物理学杂志 C：固体物理》6, 23（1973），L445。[6] Charalambides, C. A.《枚举组合学》。Chapman&Hall/CRC，博卡拉顿，佛罗里达，2002年。[7] Cipra, B. A. 伊辛模型简介。《美国数学月刊》94（1987），937–959。[8] Corcino, R. B. 关于 p,q-二项式系数。《INTEGERS：组合数论电子期刊》8（2008），#A29。[9] Corcino, R. B.、Gonzales, K. J. M.、Loquias, M. J. C. 与 Tan, E. L. 对偶加权斯特林型数列。《欧洲组合学杂志》43（2015），55–67。[10] Corless, R. M.、Gonnet, G. H.、Hare, D. E. G.、Jeffrey, D. J. 与 Knuth, D. E. 关于 Lambert W函数。《计算数学进展》5, 4（1996），329–359。[11] Duminil-Copin, H. 超立方晶格上（临界）伊辛模型的100年。https: //arxiv.org/abs/2208.00864，2022年。即将发表于《国际数学家大会论文集》2022。[12] Edwards, S. F. 与 Anderson, P. W. 自旋玻璃理论。《物理学杂志 F：金属物理学》5（1975），965–974。[13] Ferrenberg, A. M.、Xu, J. 与 Landau, D. P. 推进三维伊辛模型蒙特卡罗模拟的极限。《物理评论 E》97（2018），043301。[14] Ising, E. 关于铁磁性理论的贡献。《物理学杂志》31（1925），253–258。[15] Kalugin, A. Lambert W 函数的解析性质。博士论文，西安大略大学，伦敦，安大略，加拿大，2011年。[16] Lenz, W. 关于固体中磁现象的理解的贡献。《物理学杂志》21（1920），613–615。[17] Lundow, P. H. 与 Rosengren, A. 关于 p,q-二项式分布与伊辛模型。《哲学杂志》90, 24（2010），3313–3353。[18] Lundow, P. H. 与 Rosengren, A. 应用于五维伊辛模型的 p,q-二项式分布。《哲学杂志》93, 14（2013），1755–1770。[19] McCoy, B. M. 与 Wu, T. T.《二维伊辛模型》。哈佛大学出版社，1973年。[20] Okounkov, A. 我们这个维度和时代中的伊辛模型。https://arxiv.org/abs/ 2207.03874，2022年。即将发表于《国际数学家大会论文集》2022。[21] Onsager, L. 晶体统计学 I：具有有序-无序相变的二维模型。《物理评论》（第2辑）65（1944），117–149。[22] Sherrington, D. 与 Kirkpatrick, S. 可解的自旋玻璃模型。《物理评论快报》35, 26（1975），1792–1796。[23] Stanley, H. E. 临界性质对自旋维数的依赖关系。《物理评论快报》20, 12（1968），589–592。[24] Su, X.-T. 与 Wang, Y. 证明 Lundow 与 Rosengren 关于 p,q-二项式系数双峰性的猜想。《数学分析及其应用杂志》391, 2（2012），653–656。[25] Wang, F. 与 Landau, D. P. 用于计算态密度的高效多区间随机游走算法。《物理评论快报》86, 10（2001），2050–2053。[26] Wolff, U. 用于更新自旋系统的集体蒙特卡罗方法。《物理评论快报》62, 4（2001），361–364。

广义朗伯 W 分支转移函数

数学与数理统计系，Ume ̊a 大学，SE-901 87 Ume ̊a，瑞典电子邮件地址：per.ahag@u
mu.se 数学与计算机科学学院，雅盖隆大学， Łojasiewicza 6，30-348 克拉科夫，波兰电子邮件地址：
rafal.czyz@im.uj.edu.pl 数学与数理统计系，Ume ̊a 大学，SE-901 87 Ume ̊a，瑞典电子邮件地址：
per.hakan.lundow@math.umu.se