arXiv:2304.09857v1 [math.MG] 28 Mar 2023

拓扑模上通过w–距离的锥度量空间中的不动点定理

SHALLU SHARMA、IQBAL KOUR 和 POOJA SAPROO

Abstract. 带有 w–距离的锥度量空间这一概念由 H. Lakzian 和 F. Arabyani [16] 于2009年提出。2020年，Branga 和 Olaru [4]提出了拓扑模上的锥度量空间这一概念。本文将这些概念结合起来，引入拓扑模上带有w–距离的锥度量空间，并证明了一些不动点定理。

1. Introduction

Huang 和 Zhang [8] 引入了锥度量空间的概念，并在这一背景下建立了Banach压缩原理。关于锥度量空间的更多结果，可参见 [5, 6, 11, 13, 14, 15]。此外，许多作者研究了锥度量空间中的不动点定理（例如，参见[1, 2, 3, 9, 10]）。Kada 等人 [12]于 1996年引入了带有 w-距离的度量空间。H. Lakzian 和 F. Arabyani [16] 引入了带有 w-距离的锥度量空间，并证明了一些不动点定理。2020年，Branga 和 Olaru [4]引入了拓扑模上的锥度量空间。本文将 w-距离的概念扩展到拓扑模上的锥度量空间，并引入一种新的概念："拓扑模上带有 w-距离的锥度量空间"，进而证明了一些不动点定理。

2. Preliminaries

定义 2.1. [7] 设 $(G, +)$ 是一个群，且 $\leq$ 是 G 上的偏序关系。若 G 中的平移保持序关系，则称 G 为偏序群：

$$x \leq y \Rightarrow c + x + d \leq c + y + d, \ \forall \ x, y, c, d \in G$$

定义 2.2. [17] 考虑一个带单位元 1 的环 $(R, +, .)$，其中 $1 \neq 0$，且 $\leq$ 是 R 上的偏序关系。若满足以下条件，则称 R 为偏序环：

(a) $(R, +, .)$ 是一个偏序群；(b) 对所有 $c, d \in R$,

若 $c \geq 0$ 且 $d \geq 0$，则 $c.d \geq 0$。

R 的正锥记为 $R^+ = \{r \in R : r \geq 0\}$。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 37C25, 47H10,46H25,47L07.

Key words and phrases. 带 w-距离的锥度量空间；拓扑模；不动点定理。

注 2.3. $\mathcal{U}(R)$ 表示 R 的可逆元集合，而 $\mathcal{U}_{+}(R)$ 表示$\mathcal{U}(R) \cap R^{+}$。

定义 2.4. [19] 设阿贝尔群 $(G,+)$。如果 G 赋予拓扑 $\mathcal{G}$ 并满足以下条件，则称 G 为拓扑群：

(a) 对于 $(g_1,g_2) \in G \times G$，映射 $(g_1,g_2) \to g_1+g_2$ 连续，其中 g_1+g是 G 的一 $_2$ 个元素，且 $G \times G$ 赋予积拓扑；(b) 对于 $g \in G$，映射 $g \to -g$ 连续，其中 $-g$ 是 G的一个元素。

我们将拓扑群记作 $(G,+,\mathcal{G})$ 或 $(G,\mathcal{G})$。

定义 2.5. [19] 若环 $(R,+,.)$ 中的 R赋予拓扑 $\mathcal{R}$，使得 $(R,+,\mathcal{R})$ 成为拓扑群，并且对于 (r_1,r_2) $\in R \times R$，映射 (r_1,r_2) $\to r_1.r_2$ 连续，其中 $r_1.r_2$ 是 R 的一个元素，且 $R \times R$ 赋予积拓扑，则称该环为拓扑环。

若拓扑 $\mathcal{R}$ 是 Hausdorff 的，则称 $(R,+,.,\mathcal{R})$ 为 Hausdorff拓扑环 [19]。我们将该拓扑环记作 $(R,+,.,\mathcal{R})$ 或 $(R,\mathcal{R})$。

定义 2.6. [19] 设拓扑环为 $(R,\mathcal{R})$。若在 E 上定义拓扑 $\mathcal{E}$，使得 $(E,+)$ 是拓扑阿贝尔群，并且满足以下条件，则称左 R–模 $(E,+,.)$ 为拓扑模 R–：对于 (r,x) $\in R \times E$，映射 (r,x) $\to r.x$ 是连续的，其中 $r.x$ 是 $E.$的一个元素。我们将拓扑左 R– 模记作 $(E,+,.,\mathcal{E})$ 或 $(E,\mathcal{E})$。

本节后续的定义和结果参见 [4]。

定义 2.7. 设拓扑模为 $(E,+,.,\mathcal{E})$。若集合 $P \subset E$ 满足：

¯(1) $P \neq \phi$、$P = P$、$P \neq \{0_E\}$；(2) $c.x+d.y \in P$，当 x、$y \in P$ 且 c、$d \in R^{+}$ 时；(3) $x \in P$ 且 $-x \in P$ 蕴含 $x = 0_E.$

¯注 2.8. 本文中，P° 表示 P 的内部，P 表示 P 的闭包。若 $P^{\circ} \neq \phi.$，则称锥 P 为实锥。设 P 是包含于 $E.$ 中的锥。关于 P 的偏序 $\leq_P$ 定义为：当且仅当 $x \leq_P y.$ 时，$y-x \in P$。此外，$x <_P y$ 表示 $x \leq_P y$，$x \neq y.$。另外，偏序 $x \ll y$ 表示 $y-x \in P^{\circ}.$

考虑以下假设：

(假设 I) 设 $(R,+,\odot,\mathcal{R})$ 是一个 Hausdorff拓扑环，使得：

(1) $\mathcal{U}_{+}(R)$非空。(2) 0_R 是 $\mathcal{U}_{+}(R)$的极限点。(3) $\leq_R$ 表示 $R.$上的偏序关系

(假设 II) $(E,+,.,\mathcal{E})$被视为一个拓扑左 $R-$模。(假设 III) P 是 E.中的实心锥

命题1. 设 $(E,+,.,\mathcal{E})$ 是一个拓扑左 $R-$模，且 P是 E中的一个锥，并满足假设 $HypI$、$HypII$ 和 $HypIII$ 。则

(1) $P^{\circ}+P^{\circ}\subseteq P^{\circ}$.(2) $\alpha\odot P^{\circ}\subseteq P^{\circ}$，其中 α 是 $\mathcal{U}_{+}$（R）的一个元素。(3) 如果 $u\leq_P v$ 且 $\beta\in R^{+}$，则 $\beta\odot u\leq_P \beta\odot v$.(4) 如果 $x\leq_P y$ 且 $y\ll z$，则 $x\ll z$. (5) 如果 $x\ll y$ 且 $y\leq_P z$，则 $x\ll z$.(6) 如果 $x\ll y$ 且 $y\ll w$，则 $x\ll w$.(7) 如果 $0_E\leq_P x\ll u$、 $\forall\, u\in P^{\circ}$，则 $x=0$.(8) 如果 $0_E\ll u$ 且 $\{b_n\}$ 是 E 中的一个序列，使得 $b_n\to 0_E$，则存在一个自然数 m_0 ，使得对 $n\geq m_0$.有 $b_n\ll u$

从现在起，$(R,+,.,\mathcal{R})$表示一个Hausdorff拓扑环。

定义2.9. 有向集定义为满足以下条件的偏序集$(\Lambda,\preceq)$:

对于 $\lambda_1,\lambda_2\in\Lambda$ ，存在 $\lambda_3\in\Lambda$ ，使得 $\lambda_1\leq\lambda_3$ 且 $\lambda_2\leq\lambda_3$.

定义2.10. 序列 $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 包含于 R ，是由有向集索引的元素族。

定义2.11. 若族 $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 包含于 R 收敛到元素 $x\in R$ ，则称其收敛；如果对 x 的每个邻域 U ，都存在 $\lambda_0\in\Lambda$ ，使得对每个 $\lambda\in\Lambda$， x_λ 都是 U 的元素，其中 $\lambda\geq\lambda_0$.

定义2.12. 若序列 $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 满足：对于 0_R 的每个邻域 U ，都存在 $\lambda_0\in\Lambda$ ，使得对每个 $\lambda_0\leq\lambda_1$ ， $x_{\lambda_1}-x_{\lambda_2}\in U$ 且$\lambda_0\leq\lambda_2$.，则称 $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 为柯西序列。

定理2.13. 每个包含在 R 中的收敛序列 $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 都是柯西序列。

为定义拓扑环中元素族的可和性，令 $\mathcal{H}(\Lambda)$为包含在 Λ 中的所有有限集合所构成的集合，并以包含关系 $\subseteq$.作为有向关系

定义 2.14. 若序列 $\{t_I\}_{I\in\mathcal{H}(\Lambda)}$ 收敛到 t，则称 t 是包含在 R 中的族 $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 的和，其中对每个 $I\in\mathcal{H}(\Lambda)$,

$$t_I=\sum_{\lambda\in I}x_\lambda.$$

若 $\{t_\lambda\}_{\lambda\in I}$ 有和 t 属于 $R.$，则称族 $\{t_\lambda\}_{\lambda\in I}$ 可求和

定义 2.15. 若包含于 R 中的族 $\{x_\lambda\}_{\lambda\in I}$ 满足以下条件，则称其满足柯西条件：对于 0_R 的每个邻域 U，存在 $\mathcal{H}(\Lambda)$中的 I_U，使得对于每个与 I_U.不相交的 $J \in \mathcal{H}(\Lambda)$, $\sum_{\lambda\in J} x_\lambda \in U$

定理 2.16. 包含在 R 中的族 $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 满足柯西条件，当且仅当 $\{t_I\}_{I\in\mathcal{H}(\Lambda)}$ 是柯西序列。

定理 2.17. 设 $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是 $R.$ 中的一个可求和族。那么，对于 0_R 的每个邻域U，都存在 J 属于 $\mathcal{H}(\Lambda)$，使得对每个 $\lambda \in \Lambda \setminus J.$，$x_\lambda \in U$

定义 2.18. 设 $(R,+,.,\mathcal{R})$ 为一个拓扑环。则称 R 是完备的，如果环 $(R,+,\mathcal{R})$ 的拓扑加法群是完备的。

定义 2.19. 设 $X \neq \phi$ 为一个集合，$(E,+,.,\mathcal{E})$ 为一个拓扑左 R–模，且映射 d : $X \times X \to E$ 满足:

(1) $d(x,y) \geq_P 0_E \ \forall\ x,y \in X.$(2) $d(x,y) = 0_E$ 当且仅当 $x = y \ \forall\ x,y \in X.$(3) $d(x,y) = d(y,x)$ $\forall\ x,y \in X.$(4) $d(x,y) \leq_P d(x,z) + d(z,y)\ \forall\ x,$ $y \in X.$

则称 d 是 X 上的锥度量，并称有序对 (X,d) 为拓扑左 $R-$ 模上的锥度量空间 $E.$

定义 2.20. 设 (X,d) 是拓扑左 $R-$ 模 E 上的锥度量空间，x 是 X 的一个元素，且 $\{x_n\}$ 是 $X.$ 中的一个序列。则

(1) 若对每个 $u \gg 0$，都存在一个自然数 N，使得 $d(x_n,x) \ll u,\ \forall\ n > N.$，则称 $\{x_n\}$ 收敛到 x。(2) 若 $\{x_n\}$ 包含于 X，且对每个 $u \gg 0$，都存在一个自然数 N，使得 $d(x_n,x_m) \ll u,\ \forall\ m,n > N.$，则称其为柯西序列。

如果锥度量空间 (X,d) 中的每个柯西序列都收敛，则称 (X,d) 是完备的。

3. Cone metric spaces over topological module

本节提出了关于拓扑模上的锥度量空间的一些新结果。

命题2. 设 $(E,+,.,\mathcal{E})$ 为一个拓扑左 R-模，且 P 是 E 中的一个锥，使得假设 $HypI$、$HypII$ 和 $HypIII$ 均成立。如果

(i) $x \leq_P y$、$y \leq_P z$，然后是 $x \leq_P z.$(ii) $x \ll y$和 $\lambda \in R^+$，然后是 $\lambda \odot x \ll \lambda \odot y.$(iii) $x \ll y$和 $\lambda \in R^+$，然后是 $\lambda \odot x \leq_P \lambda \odot y.$

证明。(i) 若 $x \leq_P y$，则 $y - x \in P.$。此外，若 $y \leq_P z$，则 $y - z \in P.$。现在，$z - x = (z - y) + (y - x) \in P + P \subset P.$。因此，$z - x \in P.$。所以，$x \leq_P z.$

(ii) 若 $x \ll y$，则 $y-x \in P^{\circ}.$。此外，对于 $\lambda \in R^{+}$， $\lambda \odot (y-x) \in P^{\circ}.$。因此， $\lambda \odot x \ll \lambda \odot y$.(iii) 证明可由（$ii$）得出。

□

定理 3.1. 设 (X,d) 是拓扑左 R-模 E 上的锥度量空间。那么每个收敛序列都是柯西序列。

证明。假设 $\{x_n\}$ 是 X 中收敛到 $x.$ 的序列。那么对于所有 $u \gg 0$，存在一个自然数 N，使得 $d(x_n,x) \ll u/2$ 且 $d(x_m,x) \ll u/2$， $\forall\, n,\ m \geq N.$ 现在，

$$\begin{array}{rcl} d(x_n,x_m) & \leq_P & d(x_n,x)+d(x,x_m) \\ & \ll & \dfrac{u}{2}+\dfrac{u}{2} \\ & = & u. \end{array}$$

因此得证。 □

定理 3.2. 设 (X,d) 是定义在拓扑左 R-模 E 上的锥度量空间， P 是 E 中的一个实心锥，使得假设 H_1、 H_2 和 H_3 均成立。考虑 X 中的序列 $\{x_n\}$ 以及 $\{b_n\} \in E$，使得 $b_n \to 0_E.$

(i) 如果 $d(x_n,x_m) \leq b_n$ 对每个 $n \in \mathbb{N}$ 且 $m > n$，则 $\{x_n\}$ 是柯西序列。(ii) 如果 $d(x_n,x) \leq b_n$ 对每个 $n \in \mathbb{N}$，则 $\{x_n\}$ 收敛于 x.(iii) 如果 $d(x_n,x) \leq b_n$ 对每个 $n \in \mathbb{N}$，则 $\{x_n\}$ 是柯西序列。

证明。 (i) 由于 $b_n \to 0_E.$，由命题 1（8）可知，对于 $u \gg 0$，存在一个自然数 m_0，使得对于 $n \geq m_0.$，有 $b_n \ll u$。因此，$d(x_n,x_m) \leq b_n$ 意味着 $d(x_n,x_m) \ll u,\ \forall\, n,m > N.$。这证明了 $\{x_n\}$ 是一个柯西序列。(ii) 由于 $b_n \to 0_E.$，由命题 1（8）可知，对于 $u \gg 0$，存在一个自然数 N，使得对于 $n \geq N.$，有 $b_n \ll u$。因此， $d(x_n,x) \leq b_n$ 意味着，对于所有满足 $n > N.$ 的 $N \in \mathbb{N}$，都有 $d(x_n,x) \ll u$。这证明了 $\{x_n\}$ 收敛于 x。(iii) 证明由定理 3.1 和 (ii) 得出。

□

注释 3.3. [4] 设 (X,d) 是拓扑左 $R-$模 E 上的锥度量空间，并考虑 $X.$ 中的一个序列 $\{x_n\}$。如果 $\{x_n\}$ 收敛到 x，且 $\{x_n\}$ 收敛到 y，那么 $x=y.$

定理 3.4. 设 (X,d) 为拓扑左 $R-$模E上的锥度量空间， P为 E中的一个实心锥，使得假设 H_1、 H_2 和 H_3 均成立， $\{x_n\}$和 $\{y_n\}$为 X中的序列， $\{a_n\}$、 $\{b_n\}$为 E中收敛到 0_E和y的两个序列， $z \in X$。

(i) 若对任意自然数 n， $d(x_n,y) \leq_P a_n$且 $d(x_n,z) \leq_P b_n$，则 $y=z.$

(ii) 若 $d(x_n, y_n) \leq_P a_n$ 且 $d(x_n, z) \leq_P a_n$，则 $\{y_n\}$ 收敛于 z.(iii) 若 $d(x_n, y_n) \leq_P a_n$ 且 $d(x_n, z) \leq_P a_n$，则 $\{y_n\}$ 是一个柯西序列。

证明。（i）由于 $d(x_n, y) \leq_P a_n$ 且 $d(x_n, z) \leq_P b_n$，$n \in \mathbb{N}$. 根据定理 3.2 $\{x_n\}$ 收敛于 y，且 $\{x_n\}$ 收敛于 z.。由注释 3.3 可知 $y = z$.。（ii）由于 $\{a_n\}$ 收敛于 0_E.，根据命题 1（8），对于每个$u \gg 0$，有 $d(x_n, y_n) \ll u$ 且 $d(x_n, z) \ll u$.。现在，$d(y_n, z) \leq_P d(y_n, x_n) + d(x_n, z) \ll u + u = 2u$.。因此 $\{y_n\}$ 收敛于 z.。（iii）证明由定理 3.1 和（ii）可得。

□

4. Fixed point theorems via w-distance

本节讨论本文的主要结果。首先，我们介绍拓扑模上的锥度量空间中的w–距离。接下来，我们讨论一些相关结果。此外，我们证明了拓扑模上的锥度量空间中关于w–距离的一些不动点定理。

定义 4.1. 设 (X, d) 是拓扑左 R–模 E 上的锥度量空间。若映射 $q: X \times X \to E$ 满足以下条件，则称其为 X 上的 w–距离：

(1) $q(x, y) \geq_P 0_E \ \forall\ x, y \in X$.(2) $q(x, z) \leq_P q(x, y) + q(y, z) \ \forall\ x, y, z \in X$.(3) $q(x, .) \to E$ 是下半连续的 $\forall\ x \in X$.(4) 对每个 $u \gg 0$，存在 $v \gg 0$，使得若 $q(z, x) \ll v$ 且 $q(z, y) \ll v$，则 $d(x, y) \ll u$，其中 $u, v \in E$.

定义 4.2. 设 (X, d) 是拓扑左 R–模E上的锥度量空间，q是 X 上的一个 w–距离，$x \in X$，且 $\{x_n\}$ 是 X 中的一个序列。则

(1) 若对每个 $u \in E, u \gg 0$，都存在 $\mathbb{N} \in \mathbb{Z}^+$ 使得 $q(x_n, x_m) \ll u, \forall\ m, n \geq N$.，则称 $\{x_n\}$ 为 q–柯西；(2) 若对每个 $u \in E, u \gg 0$，都存在 $N \in \mathbb{Z}^+$ 使得 $q(x, x_n) \ll u, \forall\ n \geq N$.，则称 $\{x_n\}$ 收敛于点 $x \in X$。利用 q 的下半连续性概念，对每个 $n \geq N$，我们有 $q(x_n, x) \ll u$。(3) 若拓扑左 R–模 E 上的锥度量空间 (X, d) 关于 w–距离是完备的，则每个柯西序列都收敛。

定理 4.3. 设 (X, d) 是拓扑左 R–模 E 上的锥度量空间，且 q 是 X. 上的一个 w–距离。那么 q– 中的每个 q–收敛序列都是柯西序列。

证明。假设 $\{x_n\}$ 是 X 中收敛到 x. 的序列。那么对于所有 $u \gg 0$，存在正整数 N，使得 $q(x_n, x) \ll u/2$ 且 $q(x_m, x) \ll u/2, \forall\ n, m \geq N$.

Now,

$$\begin{aligned} q(x_n, x_m) &\leq_P q(x_n, x) + q(x, x_m) \\ &\ll \frac{u}{2} + \frac{u}{2} \\ &= u. \end{aligned}$$

证明至此完成。 □

定理 4.4. 设 (X, d) 是拓扑左 $R-$模 E 上的一个锥度量空间，且 q 是 $X.$ 上的一个 $w-$ 距离。那么，每个收敛序列都有唯一的极限。

证明。令 $u \gg 0.$ 现在， $q(x, y) \leq_P q(x, x_n) + q(x_n, y) \ll u + u = 2u.$ 然后由 1 (8) 可知， $q(x, y) = 0.$ 以类似方式继续推导，可得 $q(y, x) = 0.$因此 $x = y.$ 定理得证。□

定理 4.5. 设 (X, d) 是定义在拓扑左 R-模 E, q 上的锥度量空间， $w-$ 是 $X.$ 上的一个 $w-$ 距离。假设 f 是一个从 X 到 E 的函数，满足 $f(x) \geq_P 0_E, \forall\, x \in X.$。那么，由 $p(x, y) = f(x) + q(x, y)\ \forall (x, y) \in X \times X$ 定义的从 $X \times X$ 到 E 的函数 p 是一个 $w-$ 距离。

证明。对于每个 $x, y, z \in X,$ 有 $p(x, z) = f(x) + p(x, z) \leq_P f(x) + f(y) + q(x, y) + q(x, z) = p(x, y) + p(y, z)$。显然， f是一个下半连续函数。接下来，设 $\beta \gg 0$ 固定。由于 q 是定义在 X 上的 $w-$距离，存在$\alpha \gg 0$，使得 $q(z, x) \ll \alpha, q(z, y) \ll \alpha$ 蕴含 $d(x, y) \ll \beta.$。接下来，若 $p(z, x) \ll \alpha, p(z, y) \ll \alpha$，则可得 $q(z, x) \leq_P f(z) + q(z, x) = p(z, x) \ll \alpha, q(z, y) \leq_P f(z) + q(z, y) = p(z, y) \ll \alpha.$。这意味着 $d(x, y) \ll \beta.$ □

定理 4.6. 设 (X, d) 是拓扑左 R-模 E, q 上的锥度量空间， $w-$ 是 $X.$ 上的一个 $\{x_n\}$ 距离。考虑 $\{y_n\}$ 中的序列 $X.$ 和 $\{a_n\}$。再设 $\{b_n\}$ 和 P 是 0_E 中的两个序列，分别收敛于 x 和 y，且 $z \in X.$,。则有以下结论:

(i) 若 $q(x_n, y_n) \leq_P a_n$ 且 $q(x_n, z) \leq_P b_n$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$ 均成立，则 $\{y_n\}$ 收敛于 $z.$。(ii) 若 $q(x_n, y_n) \leq_P a_n$ 且 $q(x_n, z) \leq_P b_n$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$ 均成立，则 $\{y_n\}$ 是柯西序列。(iii) 若 $q(x_n, y) \leq_P a_n$ 且 $q(x_n, z) \leq_P b_n$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$ 均成立，则 $y = z.$。(iv) 若 $q(x_n, x_m) \leq_P a_n$ 对所有 $m, n \in \mathbb{N}$ 均成立，则 $\{x_n\}$ 是柯西序列。

证明。(i) 令 $u \gg 0.$。则存在 $v \gg 0$，使得 $q(u', v') \ll v$，且 $q(u', z) \ll v$，这意味着 $d(v', z) \ll u.$。令 m_0 为一个自然数，使得 $a_n \ll v$，并且对于每个 $n \geq m_0.$ ，都有 $b_n \ll v$ 。接下来，对于每个 $n \geq m_0$， $q(x_n, y_n) \leq_P a_n \ll v$，且 $q(x_n, z) \leq_P b_n \ll v.$。因此， $d(y_n, z)) \ll u.$。这证明了 y_n 收敛于 $z.$。

(ii) 证明由 (i) 和定理 3.1 得出。

(iii) 显然由 (i) 得出。(iv) 令 $u \gg 0$. 按照 (i) 的证明过程，令 $v \gg 0$. 则 $m_0 \in \mathbb{N}$. 接下来，对于n，$m \geq m_0 + 1$，$q(x_{m_0}, x_n) \leq u_{m_0} \ll v$且 $q(x_{m_0}, x_m) \leq u_{m_0} \ll v$. 因此，$d(x_n, x_m) \ll v$. 这证明了 $\{x_n\}$ 是一个柯西序列。

□

定理 4.7. 设 (X, d) 是一个定义在拓扑左 R–模 E 上的锥度量空间，带有 w–距离 q，且假设 $HypI$、$HypII$ 和 $HypIII$ 均成立。定义

$$\mathcal{S} = \{r \in R^+ | (r^n) \text{ is a summable family}\}$$

并且 $f\colon X \to X$ 是满足以下条件的映射

$$q(fx, fy) \leq_P rq(x, y) \ \forall \ x, y \in X.$$

那么 f 在 X.中有唯一的不动点

证明。取 x_0 为 X. 中的任意一点。对每个 $n \geq 1$，令 $x_1 = f(x_0)$ 且$x_{n+1} = f(x_n) = f^{n+1}(x_0)$。于是，
$q(x_n, x_{n+1}) = q(fx_{n-1}, fx_n) \leq_P rq(x_{n-1}, x_n) \leq_P r^2q(x_{n-2}, x_{n-1}) \leq_P \ldots \leq_P r^nq(x_0, x_1)$。
根据上述不等式，对于每个 $p \geq 1$，我们有
$q(x_n, x_{n+p}) \leq_P q(x_n, x_{n+1}) + q(x_{n+1}, x_{n+2}) + \ldots + q(x_{n+p-1}, x_{n+p})$
$\leq_P r^nq(x_0, x_1) + r^{n+1}q(x_0, x_1) + \ldots + r^{n+p-1}q(x_0, x_1) \leq_P (1_R + r + \ldots + r^{p-1})r^nq(x_0, x_1) \leq_P (\sum_{i=0}^{+\infty} r^i)r^nq(x_0, x_1)$.

由定理 2.17，我们有 $r^n \xrightarrow{\mathrm{R}} 0_R$，因为 $n \to \infty$. 。此外，$\{r^n\}$ 是一个可求和族，右乘连续，且由命题 1（8）可知，对于每个$u \gg 0$，存在一个自然数 N，使得 $q(x_n, x_{n+p}) \ll u \ \forall \ n \geq N$，并且 $p \geq 1$.。这证明了 $\{x_n\}$ 是 q–Cauchy 于 X. 。由 X 的完备性，存在 x^* 属于 X，使得当 n 趋于 ∞. 时，$\{x_n\}$ 收敛至 x^*。取一个自然数 N_2，使得对于每个 $n \geq N_2, u \gg 0.$，$q(x_n, x^*) \ll u/2$ 且 $q(x^*, x_n) \ll u/2$。因此，

$$\begin{aligned} q(fx^*, x^*) &\leq_P q(fx^*, fx_n) + q(fx_n, x^*) \\ &\leq_P rq(x^*, x_n) + q(x_{n+1}, x^*) \\ &\ll ru/2 + u/2. \end{aligned}$$

现在，利用命题1的（1）和（2），我们有

$$q(fx^*, x^*) \ll v, \ \forall \ v > 0.$$

接下来，利用命题1（7），我们得到

$$q(x^*, fx^*) = 0.$$

以类似的方式继续推导，我们得到 $q(f(x^*,x^*)) = 0.$因此， $fx^* = x^*.$所以， x^* 是 $f.$ 的不动点。现在，若 y^* 是 $f.$ 的另一个不动点，那么对于每个 $u \in P^\circ$，我们有

$$q(x^*,y^*) = q(fx^*,fy^*) \leq_P rq(x^*,y^*) \leq_P r^2q(x^*,y^*) \leq_P q(x^*,y^*) \leq_P \ldots \leq_P r^n \ll u.$$

因此， $q(x^*,y^*) = 0.$以类似的方式继续推导，我们得到 $q(y^*,x^*) = 0.$因此，$x^* = y^*.$ 这证明了 f 具有唯一的不动点。□

定理 4.8. 设 (X,d) 是一个定义在拓扑左 R–模 E上的锥度量空间，其 w–距离为 q，并满足假设 $HypI$、$HypII$ 和 $HypIII$。定义

$$\mathcal{S} = \{k \in R^+ | (k^n) \text{ is a summable family}\}$$

且 $f\colon X \to X$ 是满足以下条件的映射:

(1) $q(fx,f^2x) \leq_P kq(x,fx)\ \forall\ x \in X,$
(2) $inf\{q(x,y)+q(x,fx) : x \in X\} >_P 0,$ *for each* $y \in X$ *where* $y \neq fy.$

那么存在 $\zeta \in X$使得 $\zeta = f\zeta.$此外，若 $\xi = f(\xi)$，则 $q(\xi,\xi) = 0.$

证明。设 v 是 $X.$ 中的一个元素。定义 $v_n = f^nv,$ 其中 $n \in \mathbb{N}.$。于是我们有以下不等式:
$q(v_n,v_{n+1}) \leq_P kq(v_{n-1},v_n) \leq_P \ldots \leq_P k^nq(v_0,v_1).$
根据前面的不等式，对于所有 $p \geq 1$，我们有

$$\begin{aligned} q(v_n,v_{n+p}) &\leq_P q(v_n,v_{n+1}) + \ldots + q(v_{n+p-1},v_{n+p}) \\ &\leq_P k^nq(v_0,v_1) + \ldots + k^{n+p-1}q(v_0,v_1) \\ &\leq_P k^n(1_R + k + \ldots + k^{p-1})q(v_0,v_1) \\ &\leq_P k^n(\sum_{i=0}^{+\infty} k^i)q(v_0,v_1). \end{aligned}$$

利用定理 2.17，我们有 $k^n \xrightarrow{R} 0_R$，当 $n \to \infty.$ 时。此外，$\{k^n\}$ 是一个可求和族，右乘运算是连续的，并且利用命题 1（8），我们看到，对于每个 $u \gg 0$，存在一个自然数 m，使得 $q(v_n,v_m) \ll u\ \forall\ n > m.$。这证明了 $\{v_n\}$ 是 $q-$ 在 $X.$ 中的柯西列。由 X 的完备性，存在 ζ 属于 X，使得当 n 趋于 $\infty.$ 时，$\{v_n\}$收敛于 ζ。设 n 是一个固定的自然数。由于 $\{v_m\}$ 收敛于 ζ，且 $q(v_n,.)$ 是下半连续的，我们得到

$q(v_n,\zeta) \leq_P$极限$_{m\to\infty}$下确界 $q(v_n,v_m) \leq_P k^n\sum_{i=0}^{+\infty} k^iq(v_0,v_1).$

接下来假设 $\zeta \neq f\zeta.$ 那么我们有
$0_E \leq_P \inf\{q(v_n,\zeta) + q(v_n,v_{n+1}):\ \ n \in \mathbb{N}\} \leq_P \inf\{k^n\sum_{i=0}^{+\infty} k^iq(v_0,v_1) + k^nq(v_0,v_1):$
$n \in \mathbb{N}\} = 0_E,$
矛盾。因此 $\zeta = f(\zeta)$。如果 $\zeta = f(\zeta)$，那么我们有，
$q(\zeta,\zeta) = q(f(\zeta)\ f^2(\zeta)) \leq kq(\zeta,f(\zeta)) = kq(\zeta,\zeta).$

因此，对每个 $u \gg 0.$， $q(\zeta,\zeta) \leq k^n q(\zeta,\zeta) \ll u$。接着利用命题1 (7)，我们得到

$$q(\zeta,\zeta) = 0.$$

证毕。 □

注 4.9. “$\zeta = f(\zeta)$ then $q(\zeta,\zeta) = 0$”这一表述给出了前述定理的应用。为了求得 f 的不动点，我们需要找到满足 $q(\zeta,\zeta) = 0$ 的点 ζ；因为若 $q(\zeta,\zeta) \neq 0$，则 $\zeta \neq f(\zeta)$。

References

1. M. Abbas 和 G. Jungck，《锥度量空间中非交换映射的无连续性公共不动点结果》，Journal of Mathematical Analysis and Applications，341(1)（2008年），416–420。2. M. Abbas 和 B. E. Rhoades，《锥度量空间中的不动点与周期点结果》，Applied Mathematics Letters，22(4)（2009年），511–515。3. A. Azam 和 M. Arshad，《锥度量空间中广义压缩映射的公共不动点》，Bulletin Iranian Mathematical Society，35(2)（2009年），255–264。4. A. N. Branga 和 I. M. Olaru，《拓扑模上的锥度量空间及 Lipschitz 映射的不动点定理》，Mathematics，8(5)（2020年）。5. L. Ciric、H. Lakzian 和 V. Rakocevic，《tvs-锥度量空间中 w-锥距离压缩映射的不动点定理》，Fixed Point Theory and Applications，2012(3)（2012年）。6. M. Dordevic、D. Doric、Z. Kadelburg、S. Radenovic 和 D. Spasic，《tvs-锥度量空间中基于 c 距离的不动点结果》，Fixed Point Theory and Applications，29（2011年）。7. A. M. W. Glass，《偏序群》，第 7 卷，World Scientific，1999。8. L. G. Huang 和 X. Zhang，《锥度量空间与压缩映射的不动点定理》，Journal of Mathematical Analysis and Applications，332(2)（2007年），1468–1476。9. D. Ilic 和 V. Rakocevic，《锥度量空间上映射的公共不动点》，Journal of Mathematical Analysis and Applications，341(2)（2008年），876–882。10. D. Ilic 和 V. Rakocevic，《锥度量空间上的拟压缩》，Applied Mathematics Letters，22(5)（2009年），728–731。11. S. Jankovic、Z. Kadelburg 和 S. Radenovic，《关于锥度量空间：综述》，Nonlinear Analysis，74(7)（2011年），2591–2601。12. O. Kada、T. Suzuki 和 W. Takahashi，《完备度量空间中的非凸极小化定理与不动点定理》，Math. Japonica，44（1996年），381-391。13. Z. Kadelburg 和 S. Radenovic，《非正规锥度量空间中的一些公共不动点结果》，Journal of Nonlinear Science and its Applications，3(3)（2010年），193–202。14. Z. Kadelburg、S. Radenovic 和 V. Rakocevic，《拓扑向量空间值锥度量空间与不动点定理》，Fixed Point Theory and Applications，（2010年），文章编号 170253，共 17 页，2010年。15. Z. Kadelburg 和 S. Radenovic，《tvs-锥度量空间与 w-锥距离下的耦合不动点结果》，Advances Fixed Point Theory，2(1)，（2012年）。16. H. Lakzian 和 F. Arabyani，《带有 w–距离的锥度量空间中的一些不动点定理》，Int. Journal of Math. Analysis，3(22)（2009年），1081-1086。17. S. A. Steinberg，《格序环与模》，Springer Science + Business Media, LLC，2010。18. D. Wardowski，《锥度量空间中集合值压缩映射的端点与不动点》，Nonlinear Analysis，71(1-2)（2009年），512–516。

19. S. Warner，拓扑环，《北荷兰数学研究》，178，1993 年。

Department of Mathematics, University of Jammu
Email address: shallujamwal09@gmail.com

Department of Mathematics, University of Jammu
Email address: iqbalkour208@gmail.com

Department of Mathematics,University Of Jammu, India
Email address: poojasaproo1994@gmail.com