arXiv:2304.09950v1 [math.GT] 19 Apr 2023

GUTS 与具有 3 个尖点的最小体积可定向双曲 3-流形

YUE ZHANG

Abstract. 对于尖点数目给定的可定向双曲流形，尖点数为 0、1、2、4 时的最小体积已经确定，而具有 3 个尖点的可定向双曲流形的最小体积仍然未知。通过利用缝合流形和 pared 流形中的 GUTS，我们能够证明：对于每个二阶同调类均为叶状纤维型的具有 3 个尖点的可定向双曲三维流形，其体积至少为 $5.49\ldots = 6\times$卡塔兰常数。

1. Introduction

Jørgensen 和 Thurston [Thu79，第 6 节。6]证明了双曲三维流形的体积是良序的。此外，如果一个体积是较小体积的 n 阶极限点（序型为 ω^n），那么就存在一个相应的有限体积双曲流形，且恰有 n 个可定向尖点。这引出了确定具有 n 个尖点的最小体积可定向双曲三维流形的问题。

对于 $n = 0$ （闭流形），Gabai、Meyerhoff 和 Milley [GMM09] 确定最小体积可定向双曲三维流形是 Fomenko-Matveev-Weeks 流形，其体积为 0。$94\ldots$。

对于 $n = 1$，Cao 和 Meyerhoff [CM01] 证明，八字结补空间以及由 Whitehead 链环补空间经（5，1）-Dehn 填充得到的流形具有最小体积。它们的体积为 $2.02\ldots = 2V_3$，其中 V_3是理想正四面体的体积。

对于 $n = 2$，Agol [Ago10] 发现 Whitehead 链环补空间和（-2，3，8）Pretzel 链环补空间是具有两个尖点的最小体积可定向双曲三维流形，其体积为 $V_8 = 3.66\ldots = 4 \times K$，其中 K 是 Catalan 常数

$$K = 1 - 1/9 + 1/25 - 1/49 + \cdots + (-1)^n/(2n + 1)^2 + \cdots .$$

V_8 也是 $\mathbb{H}^3$中一个正则理想八面体的体积。

当 $n = 4$，Yoshida [Yos13] 证明了 8_2^4 该链环补空间是具有四个尖点的唯一最小体积可定向双曲流形。

对于两个和四个尖点的情形，Agol 和 Yoshida 利用 pared 流形的 GUTS 来估算体积。

然而，具有三个尖点的最小体积可定向双曲三维流形仍然未知。下面是一个关于最小体积的猜想。

猜想 1.1。3 尖点可定向双曲流形的最小体积等于 3 链环补空间的体积，即 5.33.....

本文对这一猜想取得了一些进展。

设 M 为一个带尖点的可定向双曲三维流形，且 z 为 $H_2(M, \partial M)$ 中的一个元素。

命题 3.2 对 $\Gamma(z)$ 中定义的缝合核分支进行分类，见 [AZ22]。每个 guts 分支都是一个 $T \times I$，其一个边界分支是环面缝合线，另一边界分支上有两个环带作为环带缝合线；或者是边界上有 2 条非经向缝合线的实心环面；或者是边界上有 4 条纵向缝线的实心环面；或者是一个无柱的紧 taut 缝合流形。

我们称 z 为叶状纤维型，如果缝合核 $\Gamma(z)$ 由实心环面和 $T \times I$'s 组成。参见定义 4.11。如果 z 是叶状纤维型，则存在一个 图书馆丛结构 使得 M 的脊为 $\Gamma(z)$。通过 交换 的 guts 分支 $\Gamma(z)$，我们可以使相邻 层中的两个 guts 相交。这会在流形中产生一些复杂的 pared guts。定义见第 4 节，更精确的表述见引理 4.7 。

我们还在引理 ,4.16 中找到了具有 2、3 或 4 层的图书馆缝合流形的 pared guts。

通过应用引理 4.7 和引理 4.16 以及 [Ago10] 和[Yos13], 中的技巧，我们在第 6 节证明以下定理。

定理 1.2. 设 M 是一个具有 3 个尖点的有限体积可定向双曲三维流形，并且 $H_2(M, \partial M)$ 中的每个类都是叶状纤维型。设 z 是 Thurston 球面的一个顶点。如果 $\Gamma(z)$ 包含两个 $T \times I$ 或 4-ST G 和 G'，使得 G 和 G' 的每条缝合线都是同调非平凡的，并且 G 的每条缝合线都不同痕于 G' 的任一缝合线，则 $\mathrm{Vol}(M) \geq 1.5V_8$.

我们将 z 的双倍内核定义为水平素内核的双重 $\Gamma(z)$，见定义7.3。设 Δ 为一个开瑟斯顿锥。我们在定理7.7中证明，若 z中的任意元素 $H_2(M, \partial M)$ 是一个叶状纤维型类，且 Δ 中的任何元素都不在两个边界分支上消失（见定义5.3），则Δ 中各元素的双倍内核保持不变。这一结果比关于缝合核的[AZ22，定理 12]更强。

通过使用双倍内核，我们证明：若 M 是一个具有 3 个尖点的双曲三维流形，且 $H_2(M, \partial M)$ 中的每个元素都是 libroid 类，并且 $Vol(M) < 2V_8$，则 Thurston 球面上存在一个顶点 z 满足定理 1.2的条件。因此我们证明了定理 1.3。

定理 1.3. 设 M 是一个具有 3 个尖点的有限体积可定向双曲三维流形，使得 $H_2(M, \partial M)$ 中的每个元素都是 libroid 类。那么 $\mathrm{Vol}(M) \geq 1.5V_8$.

注意，3 链环的体积 C_3 补空间 $= 5.33\ldots < 5.49\ldots = 1.5V_8$。因此，如果一个具有 3 个尖点的可定向双曲三维流形 M 的体积小于 5.33.....，那么在 $H_2(M, \partial M)$ 中存在一个元素 z，使得 $\Gamma(z)$ 包含一个无柱的 taut 缝合流形。

如果我们沿一个三穿孔球面切开链环补空间，就会得到图N_3中的γ所示的无柱缝合流形（1）。我们可以将其视为以缝合线为 pared 轨迹的 pared 流形。

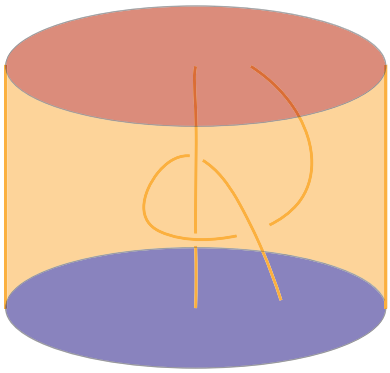


FIGURE 1. 无柱缝合流形（N_3, γ）。

这个无柱缝合流形的体积为 5。33。。。。(参见[Thu79，例 6.8。1]中的图）。我们对此提出一个猜想。

猜想 1.4.（N_3, γ）是一个除定向外具有最小体积的无柱紧 taut 缝合流形。

根据定理2.3，我们实际上证明了

定理 1.5。假设猜想*1.4* 成立。那么，3 尖点可定向双曲流形中的最小体积等于 3 链环的体积。

本文基于作者博士论文第 2 章的内容，并在此基础上进行了扩展[Zha20]。

结构安排。
第2 节回顾 pared 流形和 pared guts。
在第 3节中，我们对内部为有限体积双曲流形的流形中的缝合核进行了分类。此外，我们还证明了缝合核的一些性质，这些性质与 Thurston 范数的一个顶点元素有关。

在第 4 节中，我们引入缝合丛和图书馆丛的定义，并用其证明在双曲流形中，我们不能无限多次交换缝合核分支（引理 4.7）。我们还定义了具有相容的缝合流形结构和 pared 流形结构的 pared 缝合流形，这有助于找到图书馆缝合流形的缝合核。

在第5节中，我们证明，对于有限体积的三尖点双曲流形，存在一列与不同的二阶同调类相关的缝合核的缝合分解。

在第6节中，我们分析非同痕条件下三尖点双曲流形的不同情形，并估计其体积，如定理1.2所述。

在第7节中，我们定义二阶同调类的双倍内核。在定理7.7中，我们证明，对于某一类可定向双曲三维流形，双倍内核在任意开瑟斯顿锥中均保持不变。 Δ 利用双倍内核，我们将定理1.3 推广到第6节所述的情形。

致谢。
我衷心感谢我的博士生导师 Ian Agol，在本文及我的论文撰写过程中给予我的指导、支持和悉心教诲。他向我介绍了关于最小体积双曲流形的问题，并建议采用三维流形中的内核这一方法。此外，他提出了宝贵的建议，并指出了先前稿件中的问题，这些都对本工作的完成至关重要。我还要感谢 Ken'ichi Yoshida、Jason DeBlois、Sadayoshi Kojima 和 David Gabai，感谢他们提出的有益意见并与我进行交流。

2. Pared Manifolds, Pared Guts and Volume Estimation

我们将其中的核心部分称为[Ago10] *pared guts* 因为这一概念源自 pared 流形的特征流形。

定义 2.1. pared 流形是一个有序对 (M, P)，其中

- M 是一个紧致、可定向、不可约的三维流形，并且
- $P \subset \partial M$ 是 M中的本质环带和环面的并集，

使得

- $\pi_1(M)$ 的每个阿贝尔非循环子群都是相对于 P 而言的外围子群（即与P某个分支的基本群的子群共轭），并且
- 每个在基本群上是单射的映射 $\varphi : (S^1 \times I, S^1 \times \partial I) \to (M, P)$，作为对偶映射都可变形至 P。

P称为 pared 流形（M, P）的抛物线轨迹。我们用 $\partial_0 M$ 表示曲面 $\partial M - int(P)$。

引理 2.2 ([Ago10，引理 3.2])。 设 M 是一个可定向紧流形，使得 $int(M)$ 是有限体积双曲的，并且 $P = \partial M$ 是M的 pared 轨迹。设 $X \subset M$是一个本质曲面。那么 $(M\backslash\backslash X,\ P\backslash\backslash\partial X)$是一个 pared 流形。

设 (M, P) 是一个 pared 流形，使得 $\partial_0 M$ 不可压缩。存在一个规范的本质环带集合 $(A, \partial A) \subset (M, \partial_0 M)$，称为特征环带，使得 $(P, \partial P) \subset (A, \partial A)$；它们（在同痕意义下）由如下性质刻画：它们是非平行本质环带的极大集合，并且每个其他本质环带 $(B, \partial B) \subset (M, \partial_0 M)$ 都可以通过相对同痕变为环带 $(B', \partial B') \subset (M, \partial_0 M)$，使得 $B' \cap A = \emptyset$。每个补空间分支 $L \subset M\backslash\backslash A$ 都属于以下类型之一：

(1) $T^2 \times I$， P的一个环面分支的邻域，(2) $(S^1 \times D^2, S^1 \times D^2 \cap \partial_0 M)$，一个边界上带有环带的实心环面，(3) $(I - bundles, \partial I - subbundles)$，其中边界上的 I丛是 A的子集，或者(4) $(L, \partial_0 M \cap L)$中的所有本质环带在 L 中均平行于 $L \cap A$($\partial(L \cap A)$)。

类型为 (3) 的分支的并集，记为 $(W, \partial_0 W) \subset (M, \partial_0 M)$，称为 $(M, \partial_0 M)$ 的窗口。它在成对同痕意义下是唯一的。

类型 4 的各个分支的并集称为 M 的 pared guts，记作 $Guts(M, P)$（与 [Ago10] 略有不同）。注意，$Guts(M, P)$ 的抛物线轨迹将由特征环带组成。如果 M 是紧致可定向的，且 $int(M)$ 具有有限体积度量，并且 $(X, \partial X) \subset (M, \partial M)$ 是一个本质曲面，则定义 $Guts(M, X) = Guts(M\backslash\backslash X, \partial M\backslash\backslash \partial X)$。类型 (4) 的分支是无柱的 pared 流形，它们具有带测地边界 [Mor84] 的有限体积完备双曲结构。我们用 Vol$(Guts(M, P))$ 表示这一双曲度量的体积。如果 $D(M, P)$ 是通过取 M 的两个副本并沿相应曲面 $\partial_0 M$ 将它们粘合而得到的，那么 Vol$(Guts(M, P))$ =1 2 Vol$(D(M, P))$，其中 Vol$(D(M, P))$ 是 $D(M, P)$ 的单纯体积，即几何分解中双曲部分的体积之和。

在本文中，我们大量使用以下定理来估计有限体积双曲流形的体积。

定理 2.3 ([CFW10，定理 5。5], [ADST05，定理 9。1])。 设 M 是一个有限体积可定向双曲流形，且 $S \subset M$ 是一个本质曲面。则

$$\mathrm{Vol}(M) \geq \mathrm{Vol}(Guts(M, S)) \geq \frac{V_8}{2} |\chi(\partial Guts(M, S))|.$$

定理 $Guts(M, S)$) 中 Vol(2.3 的估计可由以下定理推出。

定理 2.4 ([Miy94，定理 5.2])。 设 M 为具有全测地边界的双曲流形。那么 体积(M) $\geq \frac{V_8}{2}|\chi(\partial M)|$。此外，当等号成立时， M可由理想正八面体沿其面粘合而得到。

以下两个结果来自[Yos13] 该文研究的是具有四个尖点的最小体积可定向双曲三维流形。我们也将利用它们来估计一些 pared guts 的体积。

引理 2.5 ([Yos13，引理 3.2]) 。设 L 是一个具有测地边界 S、带有环形尖点 k..... A_1以及环面尖点 $n-k$.....T_{k+1}的可定向双曲三维流形，其中 $1 \leq k \leq 3$ 且 $n \geq 4$。假设 $\chi(S)$ $= -2$。那么存在一个本质曲面 $Y \subset L$，使得 $Y \cap S = \emptyset$ 且 $[\partial Y] \neq 0 \in H_1(\partial L; \mathbb{Z})$ 】【。

定理 2.6 ([Yos13，定理 4.1])。 设 L 是一个边界为测地边界 S的可定向双曲三维流形。假设存在一个本质曲面 $Y \subset L$ 使得$Y \cap S = \emptyset$ 且 $[\partial Y] \neq 0 \in H_1(\partial L;\ \mathbb{Z})$。那么存在一个本质曲面 Y' 使得 $\chi(\partial \text{Guts}(L \backslash\backslash Y')) \leq -4$ 且 $\text{vol}(L) \geq 2V_8$。

定理 2.7. 设 L 是一个具有测地边界S的可定向双曲三维流形，具有 k 个环形尖点 A_1，...，A_k，并具有 $n-k$ 个环面尖点 T_{k+1}，...，T_n，其中$1 \leq k \leq 3$ 且 $n \geq 4$。则 vol(L) $\geq 2V_8$。

证明. 由于沿着 S 对 L 作双重后的欧拉示性数为 0， $\chi(S) = 2\chi(L)$。若$\chi(S) \leq -4$，根据定理 2.3，Vol(L) $\geq 2V_8$。若 $\chi(S) = -2$，根据引理 2.5，存在一个本质曲面 $Y \subset L$，使得 $Y \cap S = \emptyset$ 且 $[\partial Y] \neq 0 \in H_1(\partial L; \mathbb{Z})$。于是根据定理 2.6，vol($L$) $\geq 2V_8$。□

我们还陈述了[Ago10] 中环带压缩的定义，这将有助于估计体积。

设 $(X, \partial X) \subset (M, \partial M)$ 是一个适当嵌入的本质曲面。对于 X，压缩环带是一个嵌入

$$i : (S^1 \times I, S^1 \times \{0\}, S^1 \times \{1\}) \hookrightarrow (M, X, \partial M)$$

满足

- i_* 在 π_1 上是单射，
- $i(S^1 \times I) \cap X = i(S^1 \times \{0\})$，并且
- $i(S^1 \times \{0\})$ 在 X 中不同痕于 ∂X。

$(X, \partial X) \subset (M, \partial M)$ 的一次环带压缩，是沿压缩环带 i 进行的手术：对于 X，$(S^1 \times I$, $S^1 \times \{0\}, S^1 \times \{1\}) \hookrightarrow (M, X, \partial M)$。

令 U为 $M \backslash\backslash X$中 $i(S^1 \times I)$ 的正则邻域，令 $\partial_1 U$为 $M \backslash\backslash X$中U的前沿，并令 $\partial_0 U = \partial U \cap (X \cup \partial M)$。然后令 $X' = (X - \partial_0 U) \cup \partial_1 U$。曲面 X' 是 X的环带压缩。我们指出，如果 X 是本质的，那么 X' 也是。

3. Sutured Manifolds and Sutured Guts

我们将 [AZ22] 缝合核 中定义的核称为缝合核，因为它们与缝合流形有关。本节将为缝合分解和缝合核理论建立一些记号和术语。

我们对有限体积双曲流形的缝合核分支进行分类。

定义 3.1. 如果缝合流形 (N, R_+, R_-, γ) 是无环面的，且 $(N, R_+ \cup R_-)$ 中的每个本质环带都在 N 中相对于 $R_+ \cup R_-$ 平行地进入 $(\gamma, \partial\gamma)$，则称其为无柱的。

命题 3.2 （参见 [Ago10]）。 设 M 是一个具有环面边界的紧致三维流形，其内部是一个有限体积的双曲流形。相对于某个面片曲面的每个 guts 分支都属于以下类型之一：

(1) 一个 $T \times I$，其中一个边界分支是缝合环面，另一个边界分支上有两个环带作为缝合线；(2) 一个实心环面，其边界上有两条非经向缝合线；(3) 一个实心环面，其边界上有四条纵向缝线；或(4) 一个无柱的紧 taut 缝合流形。

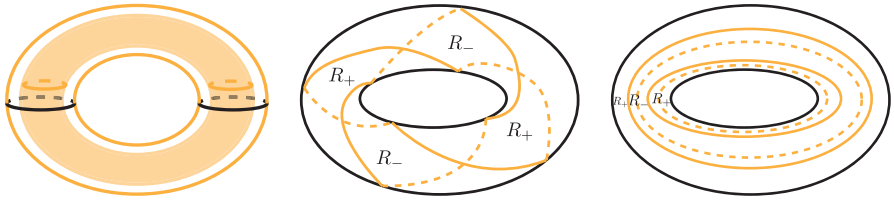


Figure 2. $T \times I$，2-ST 和 4-ST。

证明。设（G， R_+， R_-， γ）是相对于面片曲面 F的一个 guts 分支。由于 [AZ22，引理 3。6]， G 是约化的且水平素的。因此，它没有本质乘积环带。

假设存在一个非乘积环带 A。不失一般性，设其边界位于 G的 R_+ 上。然后，我们沿着 A对 R_+ 进行剪切粘贴手术，得到 R'。由于 R'在 $H_2(G, \gamma; \mathbb{Z})$中与 R_+同调，并且 $\chi_-(R') = \chi_-(R_+)$，因此R' 是 G中的水平曲面。由于 G 是水平素的， R' 与R_-平行。于是， ∂A 生成连接 R_+ 和 R_- 的乘积环带，且这些环带与 G的缝合线平行。因此， R_+ 由两个环带副本组成，而 G 是带有4条纵向缝线的实心环面。

在下文中，我们考虑 G 无柱的情形。因此，根据[Ago10第 2]节关于 G 特征环带的论述， $T^2 \times I$ 是一个

∂M的一个分支的邻域、边界上带有环带的实心环面，或无柱的 pared 流形。

如果 G 是一个 $T^2 \times I$， G 在一个边界分支上不能有超过 2 条环带缝合线。否则，就存在一个水平曲面，它是一个环带且不平行于边界。见图3。因此 G 有一个边界分支作为环面缝合线，而另一个边界分支上有两个环带作为环带缝合线。

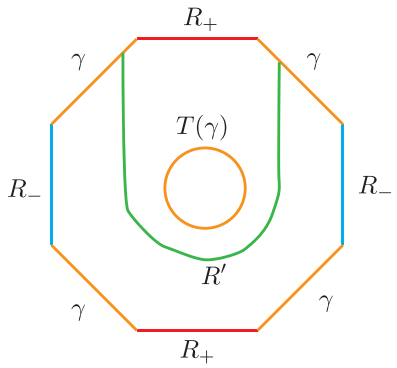


FIGURE 3. $T \times I$的横截面。 R' 是一个环带，且不平行于边界

令 G 为一个实心环面。如果 G 有超过 2 条缝合线，就存在一个非平凡的水平曲面，它是一个环带，如 $T^2 \times I$的情形。由于 G 不是乘积缝合流形， ∂G 上的缝合线不是 G的经线。因此 G是一个边界上带有 2 条非经向缝合线的实心环面。□

下文中，我们有时用环带的核心来表示该环带。

定义 3.3. 我们将边界上带有 2 条非经向缝合线的实心环面称为 2-ST，将边界上带有 4 条纵向缝线的实心环面称为 4-ST。

定义 3.4. 如果 $H_2(M, \partial M)$ 中的一个元素是 Thurston 球面上某个顶点的倍数，则称其为 Thurston 范数的顶点元素。

我们关注与顶点元素相关的缝合核，因为它具有最复杂的结构。

引理 3.5. 表示 Thurston 范数的一个本原顶点元素的范数极小曲面 S 是连通的。

证明。若 S 不连通，则 S 由两个曲面 S_1 和 S_2 组成。因此 $x_M(S_i) \leq \chi^+(S_i)$，并且

$$x_M(S) \leq x_M(S_1) + x_M(S_2) \leq \chi^+(S_1) + \chi^+(S_2) = \chi^+(S) = x_M(S)$$

这意味着 S_1 和 S_2 是范数极小曲面。对于任意 $a \geq b \geq 0$, $ax_M(S_1)+bx_M(S_2) \geq x_M(aS_1+bS_2) \geq x_M(a(S_1+S_2)) - x_M((a-b)S_2) = ax_M(S_1) + bx_M(S_2)$，这意味着 $x_M(aS_1+bS_2) = ax_M(S_1) + bx_M(S_2)$。类似地，该方程对 $a < b$ 也成立。然而，这违反了 $[S]$ 是 Thurston 面的顶点元素这一条件。□

根据引理 3.5 和 [AZ22，引理 3.7],可得以下引理。

引理 3.6. 若 S 是 Thurston 范数的某个顶点元素对应的面片曲面，则 $M\backslash\backslash S$ 的每个分支恰好包含一个 guts 分支。

s定义 3.7. 我们用记号 $M \rightsquigarrow N$ 表示对 M 沿 S 进行缝合分解，并舍弃乘积缝合流形分支，从而得到 N。若 M 和 N 是紧 taut 的，则称其为紧 taut 缝合分解。

若存在一个由 k 个非平凡紧 taut 缝合分解构成的序列，我们称紧 taut 缝合流形 M_0 的深度为 k

$$M_0 \overset{S_1}{\rightsquigarrow} M_1 \rightsquigarrow \cdots \overset{S_k}{\rightsquigarrow} M_k.$$

4. Sutured Bundles and Library Bundles

本节中，我们引入一些一般性的设置，以帮助分析双曲流形的体积。

定义 4.1. 设 M 是一个可定向、不可约且 ∂-不可约、具有环面边界的流形， F 是一个适当的范数极小曲面，代表 Thurston 范数的一个本原元素的倍数。那么，对某个正整数 k，有 $[F] = kz$ 。

取一个基点 p。对于 $M\backslash F$ 中的一点 q，我们将势函数 $\Phi(q)$ 定义为连接 p、 q 和 F 的曲线的交数，模 k。势函数 $\Phi: M\backslash F \to \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ 定义良好，并且我们可以给 $M\backslash\backslash F$ 的每个分支赋予 $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ 中的一个数（参见 [G+86，引理 3]）。于是，对于 $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ 中的一个数 i ，我们称第 i 层为 $M\backslash\backslash F$ 中取值 i 的点的并集，其中 Φ 的值为 i。我们将一层视为一个缝合流形，其中 $R_\pm$ 是 F 的若干分支之并，并记作 $\mathcal{L}_i(F)$。

我们称此处定义的结构为相对于 F 的 M 缝合丛结构。我们将 $\mathcal{L}_i(F)$ 的 R_- 部分记为 Σ_i，并称其为缝合丛的水平曲面。于是 $F = \cup_{i=0}^{k-1}\Sigma_i$。

定义 4.2 (参见 [AD15，第 6 节。3])。 设 $\{\mathcal{L}_j(F)|0 \leq i \leq k-1\}$ 是关于 M 的一个缝合丛结构。我们记 F为 G_i 的缝合核分量。我们称 $\mathcal{L}_i(F)$ 中 G_i 的并为缝合丛的 脊 。我们

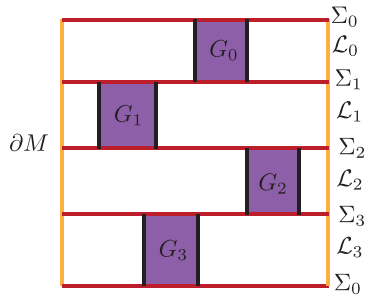


FIGURE 4. 缝合丛结构与水平曲面

称 Σ_i 是从 G_{i-1} 到 G_i 的水平曲面。如果每个 G_i 都是实心环面和 $T \times I$ 的并集，则称 F 为 M 提供了图书馆丛结构。

对于一个层 $\mathcal{L}_i(F)$，它与一个作为 4-ST 的 guts G_i 相关，$\mathcal{L}_i(F)$ 是 G_i 与一个乘积缝合流形的并。我们取 R' 中两个环带的并 G_i，使得 R'，γ 并且 R_- 界定一个乘积缝合流形 $R_- \times I$。此外，R' 和 R_+ 界定一个加厚环带。见图5。

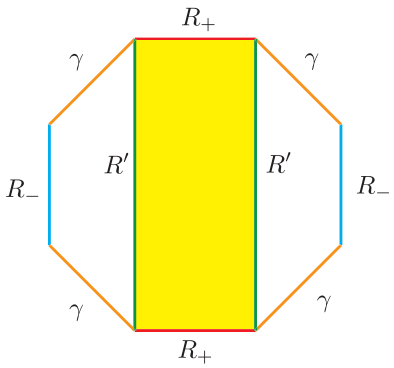


FIGURE 5. 一个 4-ST 的横截面。

因此，该层是通过沿 $\Sigma_i \times \{1\}$（或 $\Sigma_{i+1} \times \{0\}$）将一个加厚环带粘合到 $\Sigma_i \times I$（或 $\Sigma_{i+1} \times I$）上得到的。此外，环带的两条边界曲线是 Σ_i（或 Σ_{i+1}）上的非平行闭曲线。事实上，环带的两条边界曲线是 G_i 的 R_+ 部分（或 G_i 的 R_- 部分）的核心。

对于与一个 GUTS 相关的层 G_i，它是一个 2-ST 或一个 $T \times I$，可按如下方式构造。我们选取一条非平凡闭曲线 c_i 于 Σ_i 上，并对其进行 β_i 德恩手术$\xi_i = c_i \times \{1/2\}$，在 $\Sigma_i \times I$ 中，其中 $\beta_i = q_i/p_i$ 当 $|q_i| \geq 2$ 时，G_i 是一个 2-ST 或 $\beta_i = \infty$ 当 G_i 是一个 $T \times I$（参见 [AZ22，例 7。1]）。

注 4.3. 设 $\{\mathcal{L}_j(F)|0 \le i \le k-1\}$ 是关于 F 的 M 缝合丛结构。如果 $\mathcal{L}_i(F)$ 的 GUTS G_i 与 $\mathcal{L}_{i+1}(F)$ 的 GUTS G_{i+1} 不相交，我们可以将 G_i 的每个缝合环带的一个边界分支延伸至 $\mathcal{L}_{i+1}(F)$，并将新环带的并记为 A。然后，沿着 A 切割 $\mathcal{L}_i(F(z)) \uplus \mathcal{L}_{i+1}(F(z))$，即可得到 G_i 及其补空间（相差一个同胚）。

定义 4.4。我们认为 $R_+(G_i)$ 和 $R_-(G_{i+1})$ 都是 Σ_{i+1} 的子曲面。如果 $R_+(G_i)$ 与 $R_-(G_{i+1})$ 不相交，我们可以对 F 进行剪切粘贴操作，得到一个新的 F'：用 $\Sigma_{i+1}\backslash(R_-(G_{i+1}) \cup R_+(G_i))$ 替换 Σ_{i+1}，并通过 $(R_+(G_{i+1}) \cup R_-(G_i))$ 以及 $(\gamma(G_{i+1}) \cup \gamma(G_i))$ 的环形分支粘合。我们可以相对于 F' 重新标记 GUTS，使其依次为 $G_0, \dots, G_{i+1}, G_i, \dots, G_{k-1}$。下文中，我们所说的交换 G_i 和 G_{i+1}，是指通过这一特定操作进行交换。若可以交换 G_i 和 G_{i+1}，则称 G_i 和 G_{i+1} 可交换。

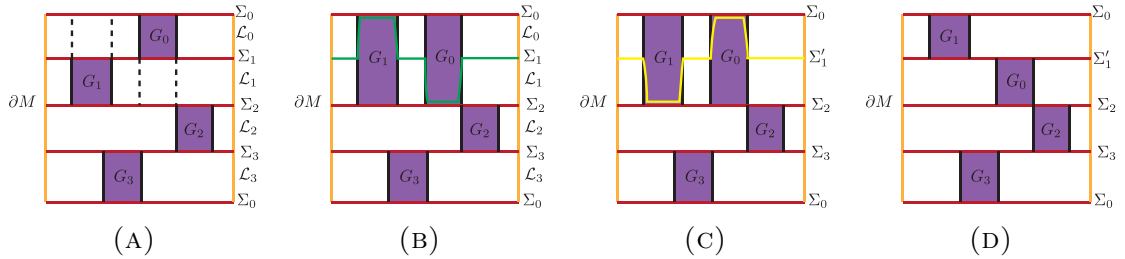


FIGURE 6. 交换 G_0 和 G_1 的示意图。

对于关于 F 的缝合丛结构，我们称一个缝合核分支G 与另一个 G' 相邻，如果 $\Phi(G') = \Phi(G) + 1$，即 G_{i+1} 与 G_i 相邻，其中我们将 G_k 视为 G_0。如果在将它们同伦变形为在 Σ_{i+1} 中以最小方式相交时，G_i 与 G_{i+1} 在 Σ_{i+1} 中相交于 $R_+(G_i)$ 与 $R_-(G_{i+1})$，则称 G_i 与 G_{i+1} 相交。

我们定义一个映射，用于关联紧 taut 缝合流形的 R_+ 和 R_-。

定义 4.5. 设 $(M, R_\pm, \gamma)$ 是一个紧 taut 缝合流形，且 $\{G_i|0 \le i \le k-1\}$ 是 M 的缝合核分支。设 X 是 R_- 中的一个子曲面。若对于每个 i，X 或包含 $R_-(G_i)$，或与 $R_-(G_i)$ 不相交，则称 X 是阶梯曲面。由于 $M\backslash G$ 是一个乘积缝合流形，因此存在从其 R_- 到其 R_+ 的自然投影。令 X_1' 为 $X\backslash R_-(G)$ 在此投影下的像，并将 X_1' 与包含在 X 中的 $R_+(G_i)$ 粘合，得到 X'。我们定义 $\psi(X) \triangleq X'$，并称其为 M 的升高映射 ψ。注意，ψ 保持欧拉示性数和亏格。

定义 4.6. 设 $\{\mathcal{L}_j(F)|0 \le i \le k-1\}$ 是关于 F 的 M 的缝合丛结构。对于一组层 $\{\mathcal{L}_j(F)|j \in J\}$，我们将 $\uplus_{j\in J}\mathcal{L}_j(F(z))$ 记为

如果它们来自 F 的同一分支，则通过沿 $R_\pm$ 粘合这些 $\mathcal{L}_j(F)$ 所得到的缝合流形。

我们有如下引理，可用于构造一些复杂的 pared guts。

引理 4.7. 设 M 为一个有限体积双曲流形。给定关于 F 的 M 的缝合丛结构，对于一个具有 $0 \le i \le k-1$ 的 i，我们可以依次有限次地将 G_i 与 G_{i+1}、……、G_{k-1}、G_0、G_1、…… 进行交换，使得在新的缝合丛结构中，G_i 与紧邻 G_i 的 guts 分支相交。

证明。无妨设 G_i 是 G_0。假设该引理对 G_0 不成立。由于我们可以交换 G_0 和 G_1，这意味着 $R_+(G_0)$ 与 $R_-(G_1)$ 不相交。因此，我们可以延伸 G_0 和 G_1 的缝合环带，使其具有 A，从而其边界落在 Σ_0 和 Σ_2 上。若沿着 A 切开 $\mathcal{L}_0(F) \uplus \mathcal{L}_1(F)$，我们将得到 G_0、G_1 以及一些乘积缝合流形。接着，我们可以用由 $R_-(G_0)$ 粘合的 $\Sigma_2 \backslash (R_+(G_0))$ 替换 Σ_1，以交换 G_0 和 G_1。由于我们仍然可以交换 G_0 和 G_2，……，G_{k-1}，我们可以延伸 G_0 的环带缝合线，使其边界落在 Σ_0 上；这意味着我们在 $M \backslash\backslash \Sigma_0$ 中有一个乘积环带的并 A_0，它将 G_0 与其补空间分隔开。

令 $\mathcal{L}_{-1}(F)$ 为通过粘合 $\mathcal{L}_1(F) \ldots, \mathcal{L}_{k-1}(F)$ 得到的缝合流形，即 $M \backslash\backslash \mathcal{L}_0(F)$ 和 G_{-1} 是 $\mathcal{L}_{-1}(F)$ 的 GUTS。若依次交换 G_0 与 G_1，$\ldots, G_{k-1}$，则我们相对于 $\Sigma_0 \cup \Sigma_1$ 将 G_0 与 G_{-1} 交换。

令 $\mathcal{L} \triangleq M \backslash\backslash \Sigma_0$ 和 ψ 是定义 4.5 中的递增映射。于是，$\mathcal{L}$ 的 GUTS 为 G_0 和 G_{-1}。令 $R_{\pm,\ i}$ 和 A_i 分别为 G_i 的 $R_\pm$ 和缝合环带，其中对应于 $i = 0$、-1。那么，经过同痕，Σ_1 为 $(\Sigma_0 \backslash R_{-,\ 0}) \cup (\psi(R_{-,\ 0}) \cup A_0) = (\Sigma_0 \backslash R_{-,\ 0}) \cup (R_{+,\ 0} \cup A_0)$。

我们考虑循环覆盖 $\tilde{\mathcal{L}}^0$ 是 $\mathcal{L}$ 的 $M \backslash\backslash \Sigma_0$ 在 $\tilde{M}$ 中的一个提升。对于 $i = 0$、-1，我们分别令 $\tilde{G}_i^0$、$\tilde{R}_{\pm,\ i}^0$ 和 $\tilde{A}_i^0$ 为 G_i、$R_{\pm,\ i}$ 和 A_i 在 $\tilde{\mathcal{L}}^0$ 中的提升。选取甲板变换 π，使得 π 将 $\tilde{\mathcal{L}}^0$ 的 R_- 映至 $\tilde{\mathcal{L}}^0$ 的 R_+。这里我们认为所有 R_- 和 R_+ 都是 Σ_0 的提升的子曲面。然后，我们分别定义 $\tilde{\mathcal{L}}^j$、$\tilde{G}_i^j$、$\tilde{R}_{\pm,\ i}^j$ 和 $\tilde{A}_i^j$ 为 $\pi^j(\tilde{\mathcal{L}}^0)$、$\pi^j(\tilde{G}_i^0)$、$\pi^j(\tilde{R}_{\pm,i}^0)$ 和 $\pi^j(\tilde{A}_i^0)$。令 $\tilde{K}^j$ 为 $\tilde{\mathcal{L}}^j$ 的 R_-，且令 $\tilde{W}^j$ 为 $\tilde{\mathcal{L}}^j \backslash (\tilde{G}_0^j \cup \tilde{G}_{-1}^j)$。因此，$\{\tilde{K}^j\}$ 是 Σ_0 的提升，而 $\tilde{W}^j$ 是一个缝合乘积流形。

定义 4.8. 设 X 是 $\tilde{K}^j$ 中的一个曲面。若 X 包含 $\tilde{R}_{-,\ i}^j$ 或与 $\tilde{R}_{-,\ i}^j$ 不相交，且满足 $i = 0$、-1，则称其为阶梯曲面。

~定义 4.9. 设 X 是 M 中的一个曲面。若 X 可以分解为以下几部分：$\tilde{L}^j$ 中对应于 $j \in \mathbb{Z}$ 的乘积环带，以及 $\tilde{K}^j$ 中对应于 $j \in \mathbb{Z}$ 的阶梯曲面，则称 X 为阶梯曲面。我们称 X 的高度为使得 $X \cap \tilde{K}^j$ 非空的最大 j。

我们令 ψ_j 为 $\tilde{\mathcal{L}}^j$ 的上升映射，如定义 4.5所述。

如果我们交换 G_0 与 G_{-1}，实际上就是用另一个曲面 $\Sigma_1' \triangleq R_{-,0} \cup A_0 \cup \psi(\Sigma_0 \backslash R_{-,0})$ 替换 Σ_1。令 $\tilde{\Sigma}_0$ 为 $\tilde{K}^0$，$\tilde{\Sigma}_1$ 为 $\tilde{R}^0_{-,0} \cup \tilde{A}_0 \cup \psi_0(\tilde{\Sigma}_0 \backslash \tilde{R}^0_{-,0})$。那么 $\tilde{\Sigma}_0$ 和 $\tilde{\Sigma}_1$ 是 Σ_0 和 Σ_1' 的提升。此外，Σ_0 和 $\pi(\Sigma_0)$ 围成 $\mathcal{L}$ 的一个提升，其中包含 $\tilde{\Sigma}_1$。在 $\tilde{\Sigma}_0$ 与 $\tilde{\Sigma}_1$ 之间有一个 guts 分支 $\tilde{G}_0^0$；在 $\tilde{\Sigma}_1$ 与 $\pi(\tilde{\Sigma}_0)$ 之间有一个 guts 分支 $\tilde{G}_{-1}^0$。

由于我们可以无限次地交换 G_0 与 G_{-1}，因此得到一列分解曲面 $\Sigma_0, \Sigma_1', \Sigma_2', \ldots$，其中 Σ_i', Σ_{i+1}' 将 M 切成两个缝合流形，它们分别包含缝合核 G_0 和 G_{-1}。

现在，我们进行一系列剪切粘贴操作，得到一列阶梯曲面 $\Sigma_0, \Sigma_1, \ldots$，其中 Σ_{i+1} 由 Σ_i 经过一次剪切粘贴操作得到。这列曲面具有如下性质：Σ_i 是 Σ_i' 的一个提升（这里 $\Sigma_0' = \Sigma_0$），Σ_i' 的高度为 i；在 $\tilde{\Sigma}_{i+1}$ 和 $\pi(\tilde{\Sigma}_i)$ 之间有一个 guts 分支 $\tilde{G}_0^0$，在 $\pi(\tilde{\Sigma}_i)$ 和 $\pi(\tilde{\Sigma}_{i+1})$ 之间也有一个 guts 分支 $\tilde{G}_{-1}^{i+1}$。见图 7。

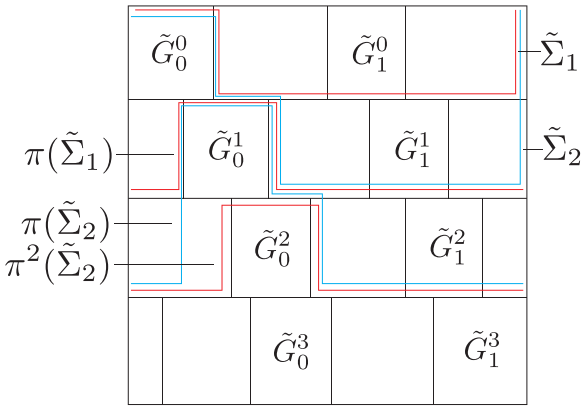


FIGURE 7. 阶梯曲面。

令序列中包含 Σ_i, Σ_{i+1}。我们将从 Σ_{i+1}构造 Σ_{i+2}。由于关于 $\Sigma_i' \cup \Sigma_{i+1}'$，$G_0$和 G_{-1}可以互换，因此 $\tilde{G}_0^0$和 $\tilde{G}_{-1}^{i+1}$也可以互换。于是，$\tilde{G}_0^0$ 的缝合环带可以延伸至与 $\pi(\tilde{\Sigma}_{i+1})$ 相交，而这些延伸后的环带的并集 A_{i+1} 将 Σ_{i+1} 与 $\pi(\Sigma_{i+1})$ 之间的缝合流形分解为两个子集 G 和 G'，其中 G 是与$\tilde{G}_0^0$等价的缝合流形。此外，在 $\pi(\tilde{\Sigma}_{i+1})$ 中，$R_+(G)$ 与 $R_+(\tilde{G}_{-1}^{i+1})$ 不相交。令 $\tilde{\Sigma}_{i+2}$ 为 $(\Sigma_{i+1} \backslash R_-(G')) \cup A_{i+1} \cup R_+(G')$，并将其同痕变形为阶梯曲面。由于 $R_+(G')$ 位于 $\pi(\tilde{\Sigma}_{i+1})$ 中，且 $R_+(\tilde{G}_{-1}^{i+1}) \subset R_+(G')$，所以 $R_+(G')$ 的高度为 $i+2$。由于 $\tilde{\Sigma}_{i+2} \cap \tilde{K}^{i+2} =$

$R_+(G') \cap \tilde{K}^{i+2}$, $\tilde{\Sigma}_{i+2}$ 的高度也为 $i+2$。由于 $R_-(G)$ 包含 $R_-(\tilde{G}_0^0)$，因此 $\tilde{\Sigma}_{i+2} \cap \tilde{K}^0$非空。

因此，我们有一个无限序列 $\tilde{\Sigma}_0, \tilde{\Sigma}_1, \ldots$，使得 $\tilde{\Sigma}_i$ 具有高度 i 和 $\tilde{\Sigma}_i \cap \tilde{K}^0 \neq \emptyset$。由于 $\chi(\tilde{\Sigma}_i) = \chi(\tilde{\Sigma}_0) \triangleq C$是常数，因此至多有 $|C|$种选择 j，使得$\tilde{\Sigma}_i \cap \tilde{K}^j$ 不是环带的并。对于任意整数 n，我们取 $i > (n+2)|C|$。于是存在一个整数 m，使得当 $m \leq j \leq m+n$ 时，每个 $\tilde{\Sigma}_i \cap \tilde{K}^j$ 都是环带的并。令 $\tilde{A}_j$ 为 $\tilde{\mathcal{L}}^j$ 中关于 $m \leq j \leq m+n$ 的一个乘积环带，使得$\tilde{A}_m, \tilde{A}_{m+1}, \ldots, \tilde{A}_{m+n}$可以连接成一个环带。因为 Σ_i 是$\tilde{\Sigma}_i$的一个提升，$\tilde{A}_m, \tilde{A}_{m+1}, \ldots, \tilde{A}_{m+n}$在投影到 M下的像是 $\mathcal{L}$中的不相交乘积环带。由于紧曲面中不相交且不同痕的闭曲线只有有限条，当 n 足够大时，存在 A_{m+d_1} 和 A_{m+d_2} 彼此平行。于是，通过粘合 $A_{m+d_1}, \ldots, A_{m+d_2-1}$，我们得到 M 中的一个本质环面，这与 M 的非环面性矛盾。

因此，我们证明引理 4.7。

□

定义 4.10（[AD15，第 6.3] 节）。如果存在一个紧曲面 $(\Sigma, \partial\Sigma) \subset (M, \eta(\gamma))$，使得 $[\Sigma] = n[R_+] \in H_2(M, \eta(\gamma); \mathbb{Z})$ 对某个 $n \geq 0$ 成立，并且缝合流形 $M \backslash \Sigma$ 是由 I-丛组成的书，则称紧缝合流形 $(M, R_\pm, \gamma)$ 为图书馆缝合流形。我们称 Σ 为 M 的搁板曲面，并称 M 的高度为 $(n+1)$。

与定义 4.1 一样，选取一个靠近 R_- 的基点 p，对于 $M \backslash \Sigma$ 中的一个点 q，我们将 $\Phi(q)$ 定义为连接 p、q 和 Σ 的曲线的交数模 k。势函数 $\Phi: M \backslash \Sigma \to \mathbb{Z}$ 是良定义的，因此我们可以为 $M \backslash\backslash \Sigma$ 的每个分支赋予 $\mathbb{Z}$ 中的一个数值。于是，对于 $\mathbb{Z}$ 中的一个数值 i，我们称第 i 层为 $M \backslash\backslash \Sigma$ 中满足 Φ 的值为 i 的点的并集。我们将该层视为一个缝合流形，其中 $R_\pm$ 是 Σ 的若干分支的并集，并将其记为 $\mathcal{L}_i(\Sigma)$。我们令 Σ_i 为 $\mathcal{L}_i(F)$ 的 R_- 部分，并称其为图书馆缝合流形的一个水平曲面。

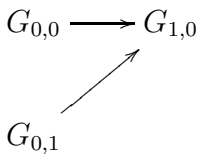
给定一个带有搁板曲面的图书馆 M Σ，我们将 G_i 称为 $\mathcal{L}_i(\Sigma)$的缝合核分支。我们称 G_i 的并集为缝合丛的脊。

定义 4.11。在一个 3-流形 M中，如果 $M \backslash S$是图书馆缝合流形，则称紧曲面 $S \subset M$ 为叶状纤维型曲面。若存在一个叶状纤维型曲面代表 z，则称 $H_2(M, \partial M)$ 中的元素 z是叶状纤维型的。这等价于说，$\Gamma(z)$由实心环面和 $T \times I$构成。

定义 4.12. 我们使用一种称为图书馆图的图示来表示图书馆缝合流形 M 中的缝合核与架曲面 Σ之间的关系。设 $\mathcal{L}_i(\Sigma)$ 为层，$G_{i,j}$ 为 $\mathcal{L}_i(\Sigma)$ 的内部部分组件。对于每个 i，我们将所有 $G_{i,j}$ 垂直放置，并且如果 $G_{i,j}$ 与 $G_{i+1,j'}$相交，则从 $G_{i,j}$ 向.....绘制一条箭头。

$G_{i+1,\ j'}$。值得一提的是，不存在从 $G_{i,\ j}$ 指向 $G_{i+1,\ j'}$的箭头，并不意味着 $G_{i,\ j}$ 与 $G_{i+1,\ j'}$是否相交。

例如，在下图中，$G_{0,0}$ 和 $G_{0,1}$ 位于同一层，而$G_{0,0}$ 与$G_{1,0}$相交。



同样，我们也可以使用图书馆图来表示图书馆丛 M 中缝合核相对于 F的关系。

定义 4.13 ([AD15，第4节。3])。我们称紧 taut 缝合流形 $(M,\ R_{\pm},\ \gamma)$ 为一个由 I-丛构成的书，如果 M 的缝合核由实心环面和 $T \times I$构成。

在求取图书馆缝合流形的 pared guts 时，我们将频繁使用以下定义。

定义 4.14. 设 S 为紧曲面，X 为 S 的子曲面。如果 ∂X 的任何分支都不在 S 中围成圆盘，则称 X 为本质的。对于 S 的子集 Y，如果 X 为本质的且包含 Y，并且在所有此类曲面中具有最大的欧拉示性数、最小的亏格，继而具有最多的边界分支数，则称 X 为包含 Y 的最小本质子曲面。

定义 4.15. pared 缝合流形 $(M, P, R_{\pm}, \gamma)$ 是一个紧致定向流形，带有两个集合 P and γ，它们分别由两两不相交的环带和环面组成，使得$\gamma \subset P \subset \partial M$。此外，$(M, R_{\pm}, \gamma)$ 是一个缝合流形，而 (M, P) 是一个 pared 流形。

下面的引理讨论图书馆缝合流形的 pared guts。

引理 4.16. 设 $(M, R_{\pm}, \gamma)$ 是一个高度为 n 的图书馆缝合流形，其脊由 2-ST、四缝线实心环面和 $T \times I$'s 组成。此外，若将 γ 视为 pared 轨迹，则 M 是一个 pared 流形。令 $\mathcal{L}_i$ 为第 i 层，G_i 为 $\mathcal{L}_i$ 关于 $0 \leq i \leq n-1$ 的缝合核。令 $\Sigma_0, \ldots, \Sigma_n$ 为水平曲面，ψ_i 为 $\mathcal{L}_i$ 的上升映射，如定义 4.5 中所述。假设对于 $0 \leq i \leq n-1$，$R_-(G_i)$ 的分支（$R_+(G_i)$ 的分支）在 Σ_i（Σ_{i+1}）中彼此不同痕。

(1) $n = 2$。令 X 为 Σ_1 中最小本质子曲面的负欧拉示性数分支之并，其中包含 $R_+(G_0)$ 和 $R_-(G_1)$。那么 M 的 pared guts 是一个 pared 缝合流形 $(N, P, R_{\pm}, \gamma)$，其中 N 是 $X \times I$，$\gamma = \partial \times I$，$R_- = X \times \{0\}$，且 pared 轨迹 P 由 γ、$(R_+(G_0) \cap X)$ 和 $(R_-(G_1) \cap X)$ 组成。

(2) $n = 3$。假设 R_- 的每个 G_1 分支都与 $R_+(G_0)$ 相交，并且 R_+的每个 G_1 分支都与 $R_-(G_2)$ 相交。令 Z 为 Σ_1 中的最小本质子曲面，使得 $R_+(G_0) \cup R_-(G_1) \subset Z$ 且 $R_+(G_1) \cup R_-(G_2) \subset \psi_1(Z)$。取 X 为Z的负欧拉示性数分支的并。则 M 的 pared guts 是一个 pared 缝合流形 $(N, P, R_\pm, \gamma)$，其中R_- 为 X, $R_+ = \psi_1(X)$， γ 为连接 ∂R_+ 与∂R_- 的乘积环带以及来自 G_1的 $T \times I$ 分支的环面之并，而 P为 $\gamma \cup (R_+(G_0) \cap R_-) \cup (R_-(G_1) \cap R_+)$。

(3) $n = 4$。假设对于每个 i， G_i 是一个 4-ST，并且 G_i 与 G_{i+1} 相交。令 Z 为 Σ_2 中满足 $R_+(G_1) \cup R_-(G_2) \subset Z$、$R_+(G_2) \cup R_-(G_3) \subset \psi_2(Z)$ 以及 $R_+(G_0) \cup R_-(G_1) \subset \psi_1^{-1}(Z)$ 的最小本质子曲面。取 X 为 Z 的负欧拉示性数分支之并。M 的 pared guts 是一个 pared 缝合流形（N， P， $R_\pm$， γ），其中 N 是由加厚环带在两侧分别经由 $R_+(G_1)$ 和 $R_-(G_2)$ 胶合的乘积流形 $X \times I$，并且两侧分别带有来自 $R_+(G_0)$ 和 $R_-(G_3)$ 的环形尖点。

证明。令 X 如引理陈述中所述。

由于 G_0 由实心环面和 $T \times I$ 组成， G_0 中的 R_+ 与缝合环带的并集 $R_+(G_0) \cup A(G_0)$ 是本质环带的并集， $R_-(G_{n-1}) \cup A(G_{n-1})$ 也是如此。我们首先沿 $R_+(G_0) \cup A(G_0)$ 和 $R_-(G_{n-1}) \cup A(G_{n-1})$ 切开 M，得到一个新的 pared 缝合流形 $(M', P', R'_\pm, \gamma')$，其中 $M' = \uplus_{i=1}^{n-1} \mathcal{L}_i$（如果 $i = 2$, M' 是乘积流形 $\Sigma_1 \times I$）、 $\gamma' = \gamma$ 以及 $P' = \gamma \cup R_+(G_0) \cup R_-(G_{n-1})$。然后我们沿着来自 ∂X 的乘积环带切开，得到引理 4.16 中所述的 pared 缝合流形 $(N, P, R_\pm, \gamma)$ 以及一些乘积缝合流形。

只需证明(N, P)是无柱的。设 A 是一个满足 $\partial A \subset P$的本质环带。若 A 是一个乘积环带，则根据 X的极小性， A 与$R_+(G_0)$相交于$\cup R_-(G_{n-1})$，这是不可能的。因此，我们假设 A的两条边界曲线都位于 $R_-(N)$或 $R_+(N)$上。不失一般性，假设它们都位于 $R_-(N)$上。

在 $n = 2$的情形（1）中，$(N, R_\pm, \gamma)$是一个乘积缝合流形。由于 $R_+(G_0)$的各个分支在 Σ_1中并不平行，任何本质环带都是乘积环带。

在 $n = 3$ 的情形 (2) 中，沿 A 对 Σ_1 进行剪切粘贴手术，使其得到 S'。那么 S' 是与 Σ_1 同调的紧曲面，而 S' 与 Σ_1 之间的内核 G 是一个 4-ST，其面为 A 的双重。由于 $(N, R_\pm, \gamma)$ 的水平素内核是 G_1，根据 [AZ22，推论 3.20]，G 是 G_1 的一个分支，而 ∂A 在同痕意义下是 $R_-(G)$ 的核心之并。因为 G_1 的每个分支的 R_- 都与 $R_+(G_0)$ 相交，所以不可能有 $\partial A \subset P$，矛盾。

在 $n = 4$ 的情形（3）中，我们对 A 做同痕，使其与 X 的交数达到最小。然后 X 将 A 分解为若干环带片。令 A_0 为 $A\backslash X$ 的一个分支，使得 A_0 不是乘积环带。通过与上一段相同的论证，∂A_0 在同痕意义下是 $R_-(G_i)$ 的核心之并，其中 $i = 1$ 为 1 或 2。由于 $R_+(G_1)$ 与 $R_-(G_2)$ 相交，若 ∂A_0 是 $R_-(G_2)$ 的核心之并，则 A_0 不可能在 $\mathcal{L}_1$ 中由环带连通。因此我们知道 A_0 位于 $\mathcal{L}_1$ 中。由于 $R_+(G_0)$ 与 $R_-(G_1)$ 相交，不可能有 $\partial A \subset P$，矛盾。

□

5. 3-Cusped Hyperbolic Manifolds

设 M 是一个具有 3 个尖点的可定向有限体积双曲流形。应用以下“半数生存，半数消亡”引理可知，$H_2(M, \partial M)$ 的秩至少为 3。

引理 5.1 ([Hat, 引理 3.5]). 若 M 是一个紧致可定向三维流形，则边界映射 $H_2(M, \partial M) \to H_1(\partial M)$ 的像的秩等于 $H_1(\partial M)$.

引理 5.2。设 M 是一个具有 3 个尖点的可定向双曲流形，z 是 M的 Thurston 球面的一个顶点。假设 $\Gamma(z)$ 由实心环面和 $T \times I$组成。那么 $\Gamma(z)$ 的深度至少为 2。

此外，设 e 是一个开 Thurston 面，其闭包包含 z，且 f 是一个开 Thurston 面，其闭包包含 e。那么，对于 e 中的任意元素 y 和 f 中的任意元素 y'，我们可以取开线段 (z, y) 上的 u 和开线段 (u, y') 上的 v，使得 $\Gamma(z)$ 有一个由 2 个缝合分解组成的序列

$$\Gamma(z) \overset{S_1}{\rightsquigarrow} \Gamma(u) \overset{S_2}{\rightsquigarrow} \Gamma(v).$$

其中 S_1 和 S_2 是 M 中适当的范数极小曲面。此外，$[S_1]$ 位于 (z, y) 中，且 $[S_2]$ 位于 (u, y') 中。

证明。根据 [AZ22 定理 1.4], ，我们可以在（z，y）中取一个元素 w，使得 $\Gamma(z)$ 可沿一张适当的范数极小曲面 S_1 进行分解。所得的缝合流形实际上是一个曲面 X 的缝合核与若干乘积缝合流形的并，其中该曲面代表（z，y）中 u 的一个倍数。由于 $\Gamma(z)$ 的每个分支要么保持不变，要么被分解为乘积缝合流形，因此缝合核 $\Gamma(M, X)$ 应由 $\Gamma(z)$ 的若干分支组成。此外，根据命题 3.2，$\Gamma(M, X)$ 中不存在其他不平行于边界的紧曲面。因此，$\Gamma(M, X)$ 实际上就是 $\Gamma(u)$，于是我们得到：

$$\Gamma(z) \overset{S_1}{\rightsquigarrow} \Gamma(u).$$

类似地，我们可以在（u，y）中取一个元素 v，使得 $\Gamma(z)$ 有一个由 2 次缝合分解构成的序列

$$\Gamma(z) \overset{S_1}{\rightsquigarrow} \Gamma(u) \overset{S_2}{\rightsquigarrow} \Gamma(v).$$

□

定义 5.3. 设 M 是一个有 3 个尖点的可定向双曲三维流形，且 z 是 $H_2(M,\partial M)$ 中的一个类。存在一个自然的边界映射 $\partial\colon H_2(M,\partial M) \to H_1(\partial M)$，它来自 $(M,\partial M)$ 的长正合列。若 ∂z 在 $H_1(\partial M)$ 的 $H_1(P)$ 直和项中为 0，我们称 z 在 M 的一个边界分支 P 上消失。

由引理 5.2，我们可以推导出以下引理。

引理 5.4. 设 M 是一个具有有限体积和 3 个尖点的可定向双曲三维流形，z 是 Thurston 球面的一个顶点，同时也是一个叶状纤维型类。若 $H_2(M,\partial M)$ 中不存在在两个边界分支上消失的类，则存在 $\Gamma(z)$ 的两个缝合核分支 G_0 和 G_1，使得 $s(G_0)$ 和 $s(G_1)$ 的每个分支都是同调非平凡的，并且 $s(G_0)$ 的一个分支在 $H_1(M)$ 中不同调于 $s(G_1)$ 的任何倍数分支。

证明。否则，假设存在一个非平凡的 1-同调类 c in $H_1(M)$，使得对于 $\Gamma(z)$ 的每个缝合核分支 G，$s(G)$ 的任意分支要么是同调平凡的，要么与 c 的某个倍数同调。我们将第一类和第二类 guts 分支的并分别记为 Γ_1 和 Γ_2。

根据庞加莱对偶，存在一个类 y 属于 $H_2(M,\partial M)$，使得代数交数 $\langle y,c\rangle \neq 0$. 由于 [AZ22定理 13]，$z$ 在$H_2(\Gamma(z)\ \partial\Gamma(z))$ 中是平凡的。因此 z 不是 y的倍数。

设 e 和 e' 是两个余维为 1 的开 Thurston 面，其闭包包含 z，且二者方向并非相反。则由 e 和 e' 张成的子空间是 $H_2(M,\partial M)$。由于 $\langle y,c\rangle \neq 0$，$e$ 和 e' 之一中存在一个元素 w，不妨设为 e，使得 $\langle w,c\rangle \neq 0$。

令 f 为一个开 Thurston 面，其闭包包含 e。由引理 5.2，我们可以取 u 位于开线段 $(z,\ w)$ 中，并取 v 位于 f 中，使得 $\Gamma(z)$ 有一个由 2 次缝合分解构成的序列

$$\Gamma(z) \overset{S_1}{\rightsquigarrow} \Gamma(u) \overset{S_2}{\rightsquigarrow} \Gamma(v).$$

其中 S_1 和 S_2 是 M中的真范数极小曲面。此外，$[S_1]$位于 (z,w) 中，而 $[S_2]$ 位于 f 中。

由于 $\langle[S_1],c\rangle$ 是 $\langle w,c\rangle$, $[S_1]$ 的倍数，因此对于每个 guts 分支 G，它在 $H_2(G,\partial G)$ 中是非平凡的。所以根据 [Gab83，第 4] 节，或 [FK14，定理 3.5]，S_1 对每个 guts 分支 G of Γ_2 作非平凡分解。此外，由于 S_1 与 c 有非平凡交集，且 $\Gamma(z)$ 的每个分支都是 2-ST、4-ST 或 $T\times I$，因此 S_1 将 Γ_2 分解为乘积缝合流形的并。因此，$\Gamma(u)$ 是 Γ_1 的非空子集。由于

对于 $\Gamma(u)=\Gamma_1$ 的每个 guts 分支 G'，其每条缝合线都是同调平凡的，S_2 应当与 $\partial G'$ 相交于平行于这些缝合线的曲线。因此，如果 G' 是 2-ST 或 4-ST，那么 $S_2\cap G'$ 是一个平凡分解曲面。由于 $\Gamma(u)\overset{S_2}{\rightsquigarrow}\Gamma(v)$ 是一个非平凡的缝合分解，因此在 Γ_1 中存在一个 $G'=T\times I$。根据 Γ_1 的定义，其缝合线在 $H_1(M)$ 中是同调平凡的。设 η 是 $\partial M\cap\partial(T\times I)$ 上的一条闭曲线，使得 η 与 G' 的缝合线同痕。于是，$[\eta]$ 在 $H_1(M)$ 中为 0。设 b 是 $H_1(\partial M)$ 中的一个 $[\eta]$。由长正合列可得：

$$\cdots\to H_2(M,\partial M)\xrightarrow{\partial}H_1(\partial M)\to H_1(M)\to\cdots,$$

由于 b在 $H_1(M)$中映射为 0，我们知道存在一个类 z'，属于 $H_2(M,\partial M)$，使得 $\partial z'=b$，因此 z' 在 M 的两个边界分支上消失，而 M 与η 不相交，这与假设矛盾。□

6. Volume of Library Bundles

现在我们开始估计图书馆丛的体积，并证明定理 1.2。对于面片曲面 $F(z)$ 位于 M中，我们有一个缝合丛结构，其对象为 M，其中S_i 作为水平曲面。在本节中，若 Σ_{i+1} 满足 Σ_i 与 Σ_{i+1} 平行，我们就略去它，并将其余部分的并集 Σ_i 视为面片曲面 $F(z)$。因此 Σ_i 彼此不同痕。

令 M 和 z 如定理 1.2所述。我们采用第 4 节中图书馆丛的记号，因此有水平曲面 Σ_i 和层 $\mathcal{L}_i(F(z))$。

6.1. $\Gamma(z)$中只有两个缝合核分支，其中一个为 $T\times I$。我们首先考虑 $\Gamma(z)$由两个 $T\times I$或 4-ST 组成，且其中至少一个是 $T\times I$的情形。

引理 6.1. 设 M 是一个具有 3 个尖点的可定向双曲三维流形，且 z 是 $H_2(M,\partial M)$中的一个类。若满足以下条件之一：

(1) $\Gamma(z)$由两个 $T\times I$组成；或 (2) z 是 Thurston 球面上的一个顶点元素，且 $\Gamma(z)$由一个 $T\times I$ 和一个 4-ST 组成，并且 $H_2(M,\partial M)$中不存在在 M的两个边界分支上消失的类，

则 $\mathrm{Vol}(M)\geq 2V_8$.

备注 6.2. 在这种情况下，Borromean 环补空间上的不等式是尖锐的。参见 [AZ22，例 7。3]。

证明。 我们将寻找一个理想的本质曲面，从而得到良好的估计（参见 [Ago10，定理 3。4]）。

令一个 guts 分支 G_0为一个 $T\times I$，另一个 G_1为一个 4-ST 或一个 $T\times I$。根据引理 4.7，将 G_0 与 G_1 交换有限次后，我们可以假设 G_0 与 G_1 相交，并仍将新的面片曲面视为 $F(z)$。

注意到 $\partial G_0\cap\partial M$ 是一个环面。我们沿着从 Σ_0 到 $\partial G_0\cap\partial M$的垂直环带，对 Σ_0 进行环带压缩。将 Y_1 记为新曲面。注意，Y_1 不是缝合分解曲面。然而， Y_1 是本质的，并且根据引理 2.2， $M\backslash\backslash Y_1$是一个 pared 流形（$N_1, P_1$）。然后，通过在$\mathcal{L}_1$（$F$（$z$））的 R_- 和 R_+ 上分别添加两个 pared 环带，得到 $M\backslash\backslash Y_1$；它们的核心分别记为 c_0 和 e_1，且 $M\backslash\backslash Y_1$由 $\mathcal{L}_1$（F（z））得到。这里以及下文中，我们用闭曲线表示其在曲面中的正则邻域。见图 8。

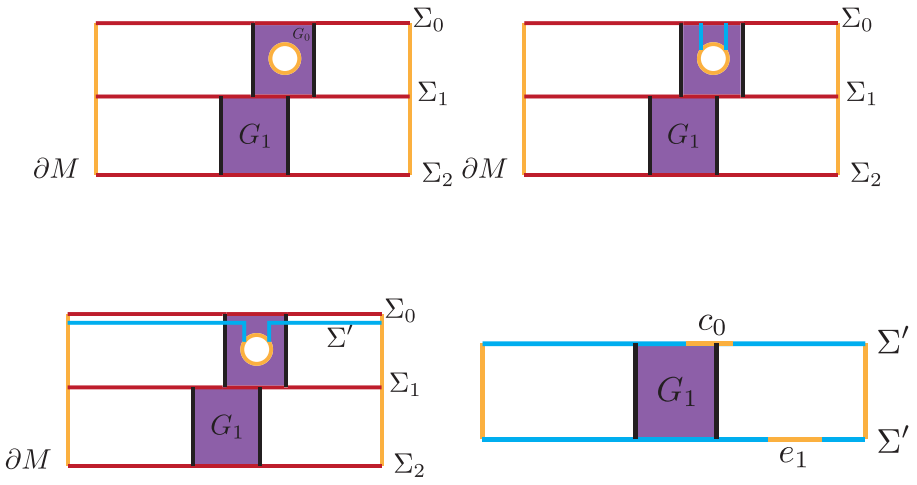


FIGURE 8. 对 Σ_0进行环带压缩

由于 G_0 与 G_1相交，因此 c_0 与 R_-相交（G_1）。如果 e_1 与 R_+不相交（G_1），则存在一个环带 A_1，其一个边界分支为 e_1，另一个边界分支位于 Y_1上。如果 $\partial A_1\cap Y_1$ 与 c_0不相交，我们可以沿着 A_1 对 Y_1 再做一次环带压缩，得到一个新的曲面 Y_2。于是，新的 pared 流形（N_2， P_2）$\triangleq M\backslash\backslash Y_2$可由以下操作得到：从 N_1中移除环带尖点 e_1，沿着 A_1 切开，并在 e_1同一侧添加一个新的 pared 环带 e_2。这里我们将来自 A_1 的环带视为 pared 环带。然后，通过沿着缝合环带的某些分支粘合 G_1 和乘积缝合流形 W_2，即可得到其底层流形 N_2。见图9。

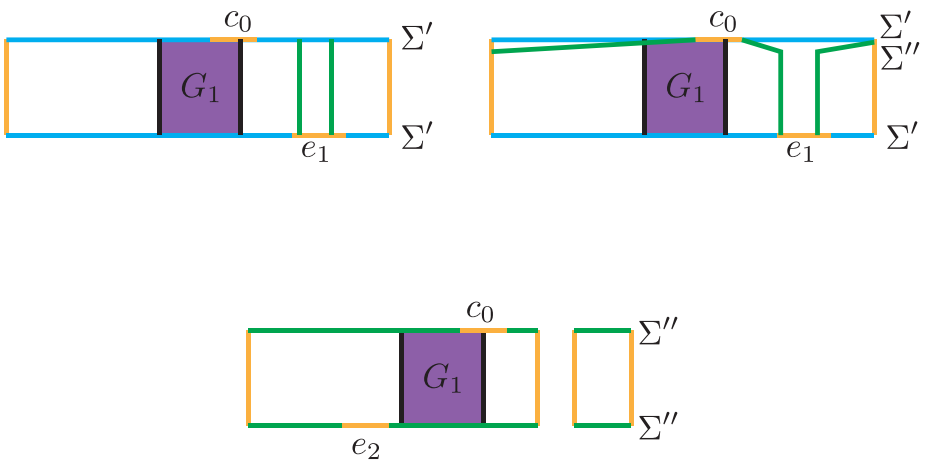


FIGURE 9. Σ'的另一种环带压缩

设有 Y_i、$(N_i,\ P_i)$ 和 e_i，使得 $M\backslash\backslash Y_i$ 是一个 pared 缝合流形 $(N_i,\ P_i,\ R_\pm,\ \gamma)$。$(N_i,\ R_\pm,\ \gamma)$ 是通过沿着缝合环带的某些分支粘合 G_1 和乘积缝合流形 W_i 得到的。带刻痕轨迹 P_i 的环带分支为 c_0、e_i 和 γ。此外，它们具有性质（D）：e_i 与 R_+不相交（G_1），连接 e_i 和 Y_i 的垂直环带 A_i 与c_0不相交。然后，我们沿着 A_i 对 Y_i 进行环带压缩，得到 Y_{i+1}。新的 pared 流形 $(N_{i+1},\ P_{i+1})$ $\triangleq M\backslash\backslash Y_{i+1}$ 可由以下操作得到：从 N_i中移除环形尖点 e_i，沿着 A_i 切开，并在 e_i 同一侧添加一个新的 pared 环带 e_{i+1}。这里我们将来自 A_i 的环带视为 pared 环带。通过沿着缝合环带的某些分支粘合 G_i和乘积缝合流形 W_{i+1}，即可得到 N_{i+1}。

如果 (N_{i+1}, P_{i+1}) 和 e_{i+1} 具有性质（D），我们可以重复此操作。因此，我们得到一个由 Y_i、(N_i, P_i) 和 e_i组成的序列。由于 $\chi\left(Y_{i+1}\right) = \chi\left(Y_i\right)$，且 Y_{i+1} 比 Y_i 多两个边界分支，环带压缩的次数有限。因此，在某个阶段，我们有 Y_n、(N_n, P_n) 和 e_n，使得 e_n 与 R_+（G_1）相交，或者连接 e_n 和 Y_n 的垂直环带 A_n 与 c_0相交。

如果 G_1 是一个 $T \times I$，则 $M\backslash\backslash Y_n$ 是通过从乘积流形 $X_n \times I$ 中钻除一条曲线 c_1，并分别在 $X_n \times \{0\}$和 $X_n \times \{1\}$ 上添加 pared 环带 c_0 和 e_n 得到的。此外，在投影到 X_n下，c_0 与 c_1 相交，且 e_n 与 c_0 或 c_1相交。设 X 为包含c_0、c_1和 e_n的最小本质子曲面。那么，$M\backslash\backslash\Sigma_n$的 pared guts（$G$，$P$）是一个 I束 $X \times I$，两侧各有两个 pared 环带 c_0 和 e_n，并且在 $X \times \{1/2\}$中钻除了一条曲线 c_1。

此外， $\partial X \times I$ 也是 pared 环带。由于 M 有三尖点，而且只有两个缝合核 $T \times I$ 在 $\Gamma(z)$ 中， X_n 有非空边界，因此 X 也有边界。因此，这个核中至少有 3 个环形尖点和 1 个环面尖点。根据定理2.7，pared guts 的体积 G 至少为 $2V_8$ ，因此根据定理2.3，Vol$(M) \geq 2V_8$。

若 G_1 是一个 4-ST，则 $M\backslash\backslash Y_n$ 由 $X_n \times I$ 通过沿两条不平行的闭曲线 l_1、l_2 将一个加厚环带粘到 $X_n \times \{1\}$ 上得到，并且两侧分别有 2 个 pared 环带，其核心分别为 c_0 和 e_n。此外，或者 e_n 与 l_1、l_2相交，或者连接 e_n 与 $X_n \times \{0\}$ 的环带与 c_0 相交。由于 M 有 3 个尖点，且 $\Gamma(z)$中只有一个缝合核分支 $T \times I$ ，因此 Y_n 有边界，进而 X_n 也有边界。如引理 4.16 所示，取该 pared 流形的 pared guts，可得一个 pared gut (G, P)，它是一个 pared 缝合流形，由一个 I-丛 $X \times I$ 沿 l_1、l_2经加厚环带粘合而成。注意， X包含 c_0、e_n、l_1、l_2。由于 G 是无柱的， X 的每个分支都有负欧拉示性数。若 $\chi(X) = -1$，则 X 是连通的。由于 X 中有一对曲线 (c_0, l_i) 相交非平凡， X 的亏格至少为 1，因此 X 是一个穿孔环面。由于 X中有两条不相交且不平行的曲线 l_1、l_2 ，我们可以假设 l_1 与 c_0 相交，此时 l_2 必与 X的边界平行。因此， l_2在 $H_1(M)$中是同调平凡的。由于 l_2 与 $s(G_1)$的每个分支同痕， $s(G_1)$的每个分支在 $H_1(M)$中都是同调平凡的，这与引理 5.4 矛盾。因此，我们有 $\chi(X) \leq -2$。于是，根据定理 2.3，guts 的体积也至少为 $2V_8$ 。□

6.2. $\Gamma(z)$ 中多于两个缝合核分支。接下来考虑 $\Gamma(z)$ 由多于两个实心环面和 $T \times I$'s 组成的情形。

引理 6.3. 设 M 是一个有 3 个尖点的可定向双曲三维流形，且 z 是 Thurston 球面上的一个顶点元素，使得 $\Gamma(z)$ 由多于 2 个实心环面和 $T \times I$'s 组成。假设在 $\Gamma(z)$ 中存在两个 4-ST 或 $T \times I$'s，即 G 和 G'，并且以下条件之一成立：

（1） G 和 G' 的每条缝合线在 $H_1(M)$ 中都是同调非平凡的，并且 G 的每条缝合线都不同痕于 G' 的任何缝合线；或（2） G 和 G' 是两个 $T \times I$；或（3） G 是一个 $T \times I$，并且 $\Gamma(z)$ 无法划分为两个集合，使得每个集合中所有缝合核分支的缝合线在 $H_1(M)$ 中按重数同调。则 Vol(M) $\geq 2V_8$.

证明。设 G_i 为层 $\mathcal{L}_i(F)$ 的 GUTS，且 G_0 为引理 G 中的6.3。此外，若 G 与 G' 不同时为四缝线实心环面，我们假设 G 是一个 $T \times I$。由引理4.7，不妨设 G_0 与 G_1相交。取另一个 G_i ，使得 $i > 1$。

我们将 G_i 与 G_{i+1}、G_{i+2}、$\cdots$ 交换，直到它与某个 j 对应的 G_j 相交。我们仍将新的面片曲面称为 $F(z)$，并考虑与 $F(z)$ 相关的新图书馆丛结构。我们考虑以下不同情形。

(1) 若 $j=0$, M 是一个图书馆丛，其图书馆图为

$$\cdots \qquad G_i \longrightarrow G_0 \longrightarrow G_1 \qquad G_2 \qquad \cdots$$

我们沿着 M 一组将 S' 与其他 pared guts 分隔开的水平曲面 $G_i \cup G_0 \cup G_1$ 进行切割。根据引理 4.16(2)，对于包含 $M\backslash\backslash S'$ 的分支 $G_0 \cup G_1 \cup G_i$，其 pared guts（N, P）由 G_0 与一个乘积缝合流形 W_2 沿缝合环带的若干分支粘合而成。此外，P 在 R_+ 和 R_- 上的 pared 环带分支分别来自G_1 和 G_i。

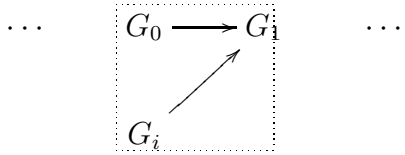
- 若 G_0 是一个 $T \times I$，则（N, P）是通过沿 $c \times \{1/2\}$钻去一条本质曲线而得到的，$X \times \{0\}$ 和 $X \times \{1\}$上各有环形尖点。若 X 有边界，则 G 至少有三个环形尖点和一个环面尖点。因此，根据定理 2.7，Vol(G) $\geq 2V_8$。若 X 是闭的，由于 M的非环面性，X 的亏格至少为 2，因此 $\chi(X) \leq -2$。根据定理 2.3，我们仍有 Vol(M) $\geq 2V_8$。
- 若 G_0 是一个 4-ST，则其底流形 N 由一个 $X \times I$经加厚环带粘合而成 A。若 $\chi(X) = -1$，X 是一个穿孔环面，而 A 的一个分支是 X 的边界，该边界在 $H_1(M)$ 中同调平凡。然而，这意味着 G_0 的缝合线同调平凡，违反了该条件。因此 $\chi(X)$，且根据定理 ≤ -2，Vol(M) $\geq 2V_8$。2.3。

(2) 若 $j \geq 2$, M 是图书馆丛，其图书馆图为

$$\cdots \qquad G_0 \longrightarrow G_1 \qquad \cdots \qquad G_i \longrightarrow G_j \qquad \cdots$$

我们沿着一组水平曲面 M 切开 S'，该曲面将 $G_0 \cup G_1$、$G_i \cup G_j$及其他 pared guts 分隔开。于是由引理 4.16(1)，对于包含 $M\backslash\backslash S'$的 $G_0 \cup G_1$ 分支，其 pared guts 的欧拉示性数为负，因此由定理 2.3，其体积为 $\geq V_8$。与 $G_i \cup G_j$相关的 pared guts 也如此。因此，Vol(M) $\geq 2V_8$。

(3) 如果 $j=1$，这意味着 G_i 可与 G_0互换。M 是一个图书馆丛，其图书馆图为



我们沿着一组水平曲面 S' 切割 M，这些曲面将 $G_0 \cup G_1 \cup G_i$ 与其他 pared guts 分隔开。根据引理 4.16(1)，对于包含 $G_0 \cup G_1 \cup G_i$ 的 $M \backslash\backslash S'$ 分支，其 pared guts（N， P）是一个 pared 缝合流形（N， P， $R_{\pm}$， γ），满足 $N = X \times I$，其中 R_- 上至少有两个 pared 环带，分别来自 R_+（G_i）和 R_+（G_0），它们在投影到 X 后与 R_-（G_1）的某些分支非平凡相交。如果 χ（X）≤ -2，根据定理 2.3，Vol（M）$\geq 2V_8$。因此我们假设 Vol（M）$< 2V_8$，从而 χ（X）$= -1$。由于 X 中存在彼此非平凡相交的闭曲线， X 是一个穿孔环面。由于 R_+（G_0）和 R_+（G_i）的分支不相交， R_+（G_0）的一个分支与 R_+（G_i）的一个分支在 X 中平行。

我们考虑引理 6.3的条件下的不同情形:

- G 和 G' 的每条缝合线在 $H_1(M)$中都是同调非平凡的，而 G的每条缝合线都不同痕于 G'中的任意缝合线。我们选择一个 G_i，使得 G_1 和 G_i 之一在引理 6.3中是 G'。由于 $R_+(G_0)$的一个分支与 $R_+(G_i)$的一个分支在 X中平行， G_i 不是 G'，因此G_1 是 G'。根据引理 4.7，我们可以沿相反方向将 G_i 与另一个缝合核分支交换，使得 G_i 与 G'_j相交。如果 $j' = 1$，则估计同情形 (1)；如果 $j' \geq 2$，则估计同情形 (2)。因此我们假设 $j' = 0$。与情形 (3)中的前述讨论类似，我们有pared guts，如 $X' \times I$所示。我们假设 $\chi(X') = -1$，因此 $s(G_1)$的一个分支与 $s(G_i)$的一个分支在X'中平行。于是 $s(G_0)$的一个分支与 $s(G_1)$的一个分支同痕，这与假设矛盾。因此，根据定理 2.3， $\chi(X') \leq -2$，且 Vol$(M) \geq 2V_8$。
- G 和 G' 是两个 $T \times I$。那么 G_0 是一个 $T \times I$，而 R_+（G_0）是一个环带。设 A 为连接 R_+（G_0）与 R_+（G_i）的一个分支的环带。我们可以沿 A 对 ∂（G_0）$\cup \partial$（G_i）进行剪切粘贴手术，得到一个环面 T，将 $G_0 \cup G_i$ 与其他 GUTS 分隔开。由于 M 无环面，T 围成一个区域 N，它是一个实心环面或一个 $T \times I$。由于 F（z）的每个分支都是非分离的， N 必定包含 $G_0 \cup G_i$，这意味着 N 是通过沿 s（G_0）和 s（G_i）各一个分支粘合 $G_0 \cup G_i$ 而得到的。我们选取一个 G_i，使得 G_1 和 G_i 之一是引理 6.3 中的 G'。如果 G_i 是 $T \times I$ 或 2-ST，那么 N 不是实心环面或 $T \times I$。因此， G_i 是一个 4-ST。于是 G_1 是 G'，也就是一个 $T \times I$。

  与前一种情况一样，我们可以反向用其他缝合核分支替换 G_i，使得 G_i 与 G'_j相交。并且我们可以假设 $j' = 0$。然而，这意味着 Vol$(M) \geq 2V_8$，或者 $s(G_0)$ 的一个分支与 $s(G_1)$ 的一个分支同痕。如果后一种情况成立，由于 $s(G_i)$ 的任意一个分支都与一条位于不同边界分支中的曲线 C_i 同痕

分别对于 $i=0$， M 的边界分支 1，我们知道 C_0 与 C_1 同痕，这与 M 的双曲性相矛盾。

- G 是一个 $T\times I$，且无法将 $\Gamma(z)$分成两组，使得每组中所有缝合核分支的缝合线在 $H_1(M)$中至多相差一个倍数而同调。由于有一条环带连接 $R_+(G_0)$和$R_+(G_i)$，这意味着 $s(G_0)$的一个分支与 $s(G_i)$的一个分支同调。因为我们可以任意选择满足 $i>1$的 G_i，所以我们知道可以将 $\Gamma(z)$分成两组： $\{G_1\}$ 和 $\{G_i|i\neq 1\}$，这违反了该条件。

□

根据前面的讨论，我们得到一个有用的引理：

引理6.4. 设 M 是一个具有有限体积和 3 个尖点的可定向双曲三维流形，且 $H_2(M,\partial M)$中的每个类都是叶状纤维型。假设 z 是 Thurston 球面的一个顶点。若 Vol(M) $<2V_8$，则存在 $\Gamma(z)$的两个缝合核分支 G_0和 G_1，使得 $s(G_0)$和 $s(G_1)$的任意分支都非平凡同调，并且 $s(G_0)$的一个分支不同调于 $s(G_1)$任一分支的任何倍数。

证明。 若在 $H_2(M,\partial M)$ 中不存在在两个边界分支上消失的类，由引理 5.4可知结论成立。因此我们假设存在一个类 y属于 $H_2(M,\partial M)$，它在两个边界分支上消失。于是 $\Gamma(y)$ 含有两个$T\times I$，由引理 6.1 和 6.3，可知 Vol(M) $\geq 2V_8$，矛盾。 □

6.3. $\Gamma(z)$ 中带有 4 条纵向缝线的两个实心环面。我们尚未考虑的唯一情况是 $\Gamma(z)$ 由两个 4-ST 组成。对于这种情况，我们也有一个估计。

引理6.5.设 M 是一个具有有限体积和3 个尖点的可定向双曲三维流形，使得 $H_2(M,\partial M)$ 中的每个类都是叶状纤维型的。若 z 是 Thurston 球面的一个顶点元素，使得 $\Gamma(z)$ 由两个 4-ST 组成，则体积(M) $\geq 1.5V_8$.

证明。 我们采用第 4节中关于图书馆丛的记号。令 z 为 Thurston 球面上的一个顶点元素，使得 $\Gamma(z)$ 由两个四缝线实心环面 G_0 和 G_1组成。

根据引理 4.7，不失一般性，我们可以假设 G_0 与 G_1 在 Σ_1 上相交。于是，若沿 Σ_0 切开 M，则 $M\backslash\backslash\Sigma_0$ 将成为一个 $X\times I$，其两侧各粘有一个加厚环带。根据引理 4.16(1)， $M\backslash\backslash\Sigma_0$ 的 pared guts 是 $Y\times I$，其 $Y\times\{0\}$ 和 $Y\times\{1\}$ 上各有一个带刻痕环带；其中， Y 是 Σ_1 中包含 $R_+(G_0)$ 和 $R_-(G_1)$ 的最小本质子曲面的负欧拉示性数分支之并。若 $\chi(Y)\leq -2$，根据定理 2.3，我们有 Vol(M) $\geq 2V_8$。因此得到以下引理：

引理 6.6. 若 Σ_1 中包含 $R_+(G_0)$ 和 $R_-(G_1)$ 的最小本质子曲面的欧拉示性数为 ≤ -2, 则 $\mathrm{Vol}(M) \geq 2V_8$。

注意，由于 $R_+(G_0)$ 的两个分支彼此不同痕，若 $R_+(G_0)$ 的两个分支与 $R_-(G_1)$ 相交，则 $\chi(Y) \leq -2$。

Let $\tilde{M}$ 是关于 $\tilde{\Sigma}_0$的 M 二重覆盖。令 $\tilde{\Sigma}_0, \tilde{\Sigma}_1, \tilde{\Sigma}_2, \tilde{\Sigma}_3$ 依次为 $\tilde{\Sigma}_0$的 Σ_1 提升，且 G_0、$\cdots$、G_3 为 G_0的提升 G_1。因此， Σ_0、Σ_2 被投影到 Σ_0，而 Σ_1、Σ_3 被投影到 Σ_1。令 $F(z)$ 为 $F(z)$ 的提升之并。则 $F(z) = \bigcup \Sigma_i$ 是 M中的一个面片曲面。$M \backslash\backslash F(z)$ 是一个 I束之书，即 M 是一个图书馆丛，其中 Σ_i 为水平曲面， G_i 之并为脊。此外，当 $i = 0$为 1 时， G_{2i} 与 G_{2i+1} 相交，因为 G_0 与 G_1相交。见图 10。

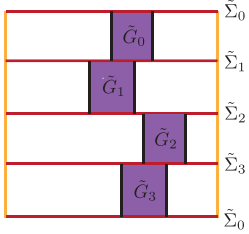


FIGURE 10. M 关于 Σ_0的二重覆盖

在估算体积之前，我们先介绍一些有用的事实。

引理 6.7. 设 A 为一个嵌入环带，它由 $M \backslash\backslash F(z)$中的一组乘积环带粘合而成。如果 $s(G_i)$的一个分支 α 通过 A 与 $s(G_{i+2})$的一个分支 β 相连，且 i成立，那么 α 和 β 都可以在 $F(z)$中同伦变形为 $F(z)$的一个边界分支。

证明。不失一般性，假设 A 连接 $s(G_2)$ 和 $s(G_0)$。我们将 A既视为环带，也视为乘积环带的并。设 $p: M \to M$ 为覆盖映射。那么 $A \triangleq p(\tilde{A})$ 的两个边界分支都位于 $s(G_0)$ 中。我们对A 作同伦变形，使自交的分支数最小，并对 A 作双曲线和，得到一个嵌入曲面 A'。由于两个乘积环带的双曲线和仍是乘积环带的并，因此 A' 是乘积环带的并。由于双曲线和不改变欧拉示性数，$\chi(A') = 0$ 和 A' 由环带和环面组成。由于 A的边界是 $s(G_0)$ 的两个分支的并，因此存在 A' 的一个环带分支 A_0 ，使得$\partial A_0 = \partial A$ 和 A_0 是乘积环带的并。

由于 G_0 是一个 4-ST，我们可以将 A_0 与 ∂G_0 中的环带 A' 粘合，从而得到一个嵌入的环面 T_0。由于 M 的内部是双曲的， T_0 要么界定一个实心环面

，要么界定一个 $T \times I$。假设是前一种情况，则一个水平曲面非平凡地与该实心环面相交，因此 A' 可由一个圆盘压缩，这与假设矛盾。因此， T_0 界定一个 $T \times I$；通过考察其与 F（z）的交，每个边界分支 A_0 都可以在 F（z）中通过同痕变为 F（z）的一个边界分支。将该同痕提升到 M，引理得证。

□

引理 6.8。 $H_1(M)$ 中的任一分支都不是同调平凡的，也不与其中 $s(G_{i\pm1})$ 的某个分支的倍数同调。

证明。 首先，假设 $s(G_i)$ 的某个分支在 $H_1(M)$ 中是同调平凡的。那么存在一个浸入曲面 H，其边界是 $s(G_0)$ 的一个分支。通过将 H 投影到 M，可得一个浸入曲面 H，其边界是 $s(G_0)$ 的一个分支，即该分支是同调平凡的，这与引理 6.4矛盾。

接下来，假设 $H_1(M)$ 中的某个分支与 $s(G_{i\pm1})$ 中某个分支的倍数同调。那么，存在一个浸入曲面 H，它通过 $s(G_0)$ 的一个分支和 $s(G_1)$ 的某个分支的倍数连接 G_0 与 G_1。通过将 H 投影到 M，可得一个浸入曲面 H，连接 G_0 与G_1，这意味着 $s(G_0)$ 的某个分支与 $s(G_1)$ 中某个分支的倍数同调，这与引理6.4矛盾。

□

引理 6.9. 设 X 是一个四穿孔球面， α 和 β 是两条闭曲线。若 α 与 β 相交不为零，则 α 和 β 各自将两个孔与另外两个孔分隔开。

证明. 如果一条闭曲线将一个穿孔与其余穿孔分隔开，那么它与 X 的一个边界分支平行。□

现在我们继续证明引理 6.5。设 Vol(M) $< 2V_8$。我们定义一个称为过程（E）的过程如下：

(1) 将 G_3 与 G_0 互换，
(2) 将 G_2 与 G_0 互换，
(3) 将 G_3 与 G_1 互换，
(4) 将 G_2 与 G_1 互换。

我们断言，过程（E）不可能无限次重复。否则我们假设该过程可以无限次重复。我们沿着 M $\Sigma_0 \cup \Sigma_2$ 进行切割，使得 $M \backslash\backslash (\Sigma_0 \cup \Sigma_2)$有两个分支： N_0 包含 G_0, G_1，而 N_1 包含 G_2, G_3。令 Γ_0 为 N_0 的缝合核， Γ_1 为N_1的缝合核。于是，该过程将得到一个新的面片曲面 $F'(z)$，并且实际上将

Γ_0 和 Γ_1 替换 $\Sigma_0 \cup \Sigma_2$ 为新的 $\Sigma_0 \cup \Sigma_2$ 中的 $F'(z)$。因此，这一假设意味着我们可以无限次地交换 Γ_0 和 Γ_1，这与引理4.7矛盾。

因此，我们可以有限次地重复过程（E），直到某一步无法继续为止。这实际上等价于尽可能多次交换 Γ_0 和 Γ_1，然后执行过程（E）的前几步。

我们仍将新的面片曲面称为 $\tilde{F}(z)$，并沿用原有记号。

请注意，交换 guts 后，新交换 guts 之前的旧 $M\backslash\backslash F(z)$ 中若干乘积环带的并。因此引理 6.7 对于新的面片曲面 $F(z)$ 仍然成立。注意，由引理 6.7 和 6.8，$s(G_i)$ 与 $s(G_j)$ 之间不存在非周边乘积环带。因此，引理 4.16 的假设在任何情况下都成立。

由于在过程（E）的某一步中我们无法再进一步交换 GUTS 分支，因此有4种可能的情况：

(1) 它在过程（E）的第一步停止，即 G_3 与 G_0相交。M 是一个带有图书馆图的图书馆丛。

$$\tilde{G}_2 \longrightarrow \tilde{G}_3 \longrightarrow \tilde{G}_0 \longrightarrow \tilde{G}_1$$

我们陈述一个引理，它可以帮助我们排除一些情形，其证明见本节末尾。

引理6.10。设 Σ_0 是从 G_3 到 G_0 的水平曲面。如果在 Σ_0 中包含 $R_+(G_3)$ 和 $R_-(G_0)$的最小本质子曲面的欧拉示性数为 ≤ -2，则 M 的体积至少为 $3V_8$。

我们沿着一个 M 水平曲面 S' 从 G_1 切到 G_2。在这个图书馆丛结构中。从图书馆图可知，对于每对相邻的层，它们的 guts 非平凡地相交。根据引理 4.16(3)，配边 $\mathrm{guts}(N,P)$ 是 $M\backslash\backslash S'$ 由乘积流形 $X \times I$通过两侧各自的加厚环带沿 $R_-(G_0)$ 和 $R_+(G_3)$粘合而成，并且两侧分别有来自 G_3 和 G_2 的环带尖点 G_1。

令 α_1、α_2 为 R_+ 的分支，β_1 是 $R_-(G_0)$ 的分支。

将 Y 记为包含 $R_+(G_3)$ 和 $R_-(G_0)$ 的 X 中的最小本质子曲面的负欧拉示性数分支的并集。

假设 $\mathrm{Vol}(\tilde{M}) < 3V_8$。由引理 6.10，$\chi(Y) \geq -1$。因为 $R_+(G_3)$ 与 $R_-(G_0)$相交，$\chi(Y) = -1$ 且 Y 是一个穿孔环面。不失一般性，假设 α_1 与 β_1相交。那么 α_1 和 β_1 位于 Y中。

由于我们通过 α_1 和 α_2 将加厚环带粘合到 X 上，α_1 的每个边界分支都与 N 的边界中 α_2 的一个边界分支平行。

由于 G_2 与 G_3相交， α_2 至少有一个边界分支与 $R_+(G_2)$相交。因此， α_2 不包含在引理4.16(3)中被丢弃的某些分支内。由于 α_2 是同调非平凡的，与α_1不平行且不相交，我们知道 α_2 与 Y 不相交， β_2也如此。

如果 $\chi(X) \leq -3$， M 的体积至少为 $3V_8$ （根据定理 2.3）。因此我们假设 $\chi(X) \geq -2$。由于 $\Gamma(z)$ 不包含 $T \times I$的尖点，我们知道Σ_i，因此 X有非空边界。

我们首先考虑 X 连通的情形。由于 $\chi(X) \geq -2$， X的亏格为 0 或 1。但 X 包含 Y，其亏格为 1，因此 X 的亏格不可能为 0，故其亏格为 1。由于 X 有非空边界， X 是一个二孔环面。于是 $X \backslash Y$ 是一个包含 α_2 和 β_2的裤子曲面。然而，根据引理 6.8， α_2 和 β_2 彼此不与对方的倍数同调，也不是同调平凡的，这不可能。

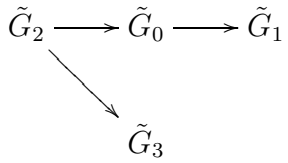
接下来我们假设 X 不连通。那么 X 是由两个曲面 Y 和 Y' 组成的并集，它们的欧拉示性数均为 -1。由于 β_2 与 Y 不相交， β_2 位于 Y' 中。

在构造 (N, P) 时，我们分别将一个加厚环带粘合到 $X \times \{0\}$和 $X \times \{1\}$上。由此得到一个缝合流形，其 R_+ 部分记为 X'，它是将 X 沿 β_1, β_2 切开，再粘回两个环带A_1, A_2 而得到的，其中 $A_1 \cup A_2$ 实际上是 $R_+(G_0)$。

如果 Y' 是一个穿孔环面，由于 β_2 在 M 中并非同调平凡， β_2 是 Y' 中的一条非分离曲线。那么 X' 是一个二孔环面，且 A_1、 A_2 的核心是两条斜率相同的非分离曲线。因此，如果我们令 A' 为 X' 中 $R_-(G_1)$ 的一个分支，且该分支与 A_1、 A_2、 A' 中的一条相交，那么它必与两者都相交。由于 A_1、 A_2 和 A' 位于核 Γ_1 中，将它们投影到 M 上， X' 的投影是包含 $R_+(G_0)$ 和 $R_-(G_1)$ 的最小本质子曲面的负欧拉示性数分支之并。因此，根据引理 6.6， M 的体积至少为 $2V_8$。

若 Y' 是三穿孔球面， β_2 平行于 Y' 的一个边界，且 X'是四穿孔球面。由于 A_1 或 A_2 与 $R_-(G_1)$的一个分支相交，根据引理 6.9，包含 $R_+(G_0)$ 和 $R_-(G_1)$ 的最小本质子曲面是四穿孔球面 X'。同样，将它们投影到 M上， X' 的投影是包含 $R_+(G_0)$ 和 $R_-(G_1)$ 的最小本质子曲面的负欧拉示性数分支之并。因此，根据引理 6.6， M 的体积至少为 $2V_8$。

(2) 它在过程（E）的第二步停止，即 G_2 与 G_0相交。M 是一个图书馆丛，其图书馆图为

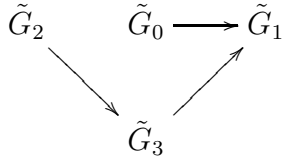


我们沿着一条水平曲面 S' 从 G_1 切开 M，切至 G_2。如果 G_3 可与 G_1交换，我们就将 G_3 移至第三层。否则，我们将其留在相同的位置。令 X 如引理 4.16(2)所述。那么， $M\backslash\backslash S'$ 的 pared guts 是一个 pared 缝合流形（$N, P, R_{\pm}, \gamma$），其 R_- 为 X。令 α_1, α_2 为 R_-（G_0）的核心。由于 α_1, α_2 在 R_+（N）上的投影平行，且 G_0 与 G_1相交， X 包含 α_1, α_2。由于 G_2 与 G_3相交， X 分别至少包含 R_-（G_3）和 R_+（G_2）的一个分支，记为 β 和 δ，使得 β 与 δ相交。由引理 6.8， $\alpha_1, \alpha_2, \beta$ 是X 中的三条互不相交的曲线，且它们彼此不平行。此外， α_1, α_2之一（不妨设为 α_1）与一条来自 R_+（G_2）的曲线相交。

我们首先考虑 X 连通的情形。由于 α_1 和 β 同调非平凡且不同调平行，它们的并是一对曲线，将 X 分解为两个裤子曲面。于是 α_2 是 X 的边界，并且α_1、 α_2、 β 围成一个裤子曲面。由于 G_0 是一个 4-ST， α_1 在同调意义下与在 α_2 中同调， M 因此 β 在 α_1 中同调于 M的某个倍数，这与引理 6.8矛盾。

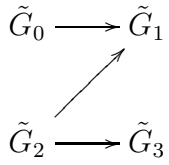
假设 X 不连通。那么 X 是两个曲面 X_1 和 X_2的并，且它们的欧拉示性数均为 -1。由于 α_1 和 β 分别与R_-（G_2）的一个分支相交，且它们同调非平凡且不平行，X_1 和 X_2 是带孔环面，而 α_1 和 β 分别位于 X_1 和 X_2 中。于是 α_2 是 X_1 或 X_2 的边界，这与引理 6.8矛盾。

(3) 它在过程（E）的第二步停止，此时，M 是一个图书馆丛，其图书馆图为 G_3 相交 G_1.



我们沿着水平曲面 S' 从 G_1 切开 M G_2。然后，如果将此处的 G_0、G_1、G_2、G_3 分别视为情形 (2) 中的G_3、G_2、G_1、G_0，就能得到与情形 (2) 相同的估计。

(4) 它在过程（E）的第四步停止，即 G_2 与 G_1相交。M 是一个图书馆丛，其图书馆图为



我们选取一族 F'由两个 Σ_i组成，它们将 $G_0\cup G_2$与 $G_1\cup G_3$分隔开。于是 M相对于 F'构成一个图书馆丛，其脊为 $G_0\cup G_2$, $G_1\cup G_3$。在这一新的图书馆丛结构中，我们沿着一个水平曲面 S' 切割 M，该曲面来自 $G_1\cup G_3$，并来自 $G_0\cup G_2$。根据引理 4.16(1)，$M\backslash\backslash S'$的 pared guts 包含一个乘积流形 $X\times I$，其在 $X\times\{0\}$ 上的环形尖点来自 $R_+(G_0)$ $R_+(G_2)$，而在 $X\times\{1\}$ 上的环形尖点来自 $R_-(G_1)$ $R_-(G_3)$。

由于 G_0 与 G_1 相交，我们知道，G_0 与 $\tilde{G}_3$ 相交 $\tilde{G}_2$ 和 G_1相交。由于我们已经将 G_3 与 G_0交换，因此 $R_+(G_0)$与 $R_-(G_3)$不相交。于是，在 X 中存在一条曲线 c_3，它与 c_2 相交，与 c_0 不相交，并且 c_0 与 c_1彼此相交，其中 c_0、c_1、c_2、c_3 分别是 $R_+(G_0)$ $R_-(G_1)$ $R_+(G_2)$ $R_-(G_3)$的一个分支的核心。由引理 6.7，c_1 与 c_3在 X 中不平行，c_0与 c_2也不平行。

因为 Vol(M) $< 1.5V_8$，根据定理 2.3，$\chi(X)\geq -2$。

由于我们尽可能多次地交换 Γ_0 和 Γ_1，然后执行过程（E）中的前 3 个步骤，因此实际上可以逆转最后 3 次操作，而不会影响 R_+(G$_0$) 和 $R_-(G_1)$ 的交叉模式。令Y 为包含 c_0 和 c_1的最小本质子曲面。由于 $R_+(G_0)$和 $R_-(G_1)$ 位于 GUTS Γ_0 中，通过将它们投影到 M 上，Y 的投影是包含 $R_+(G_0)$ 和$R_-(G_1)$ 的最小本质子曲面的一个子曲面。

由于 Vol(M) $< 1.5V_8$，根据引理 6.6，Y 的欧拉示性数为-1，因此 Y 是一个穿孔环面。这意味着代数交数 $\langle c_0,\ c_1\rangle \neq 0$ 同理，$\langle c_2,\ c_3\rangle \neq 0$。因此 c_0，c_1，c_2，c_3 在 $H_1(X,\ \partial X)$中是同调非平凡的。

首先，假设 X 是连通的。那么 X 至多是一个二孔环面。由于 c_1 和 c_3 在 $H_1(X,\partial X)$ 中不相交且同调非平凡，X 是一个二孔环面，并且它们将两个孔彼此分隔开。因此，在 $H_1(X,\partial X)$ 中有 $[c_1]=\pm[c_3]$，从而 $\langle c_0,\ c_3\rangle=\langle c_0,c_1\rangle\neq 0$，这与 c_0 和 c_3不相交这一事实矛盾。

如果 X 是不连通的，由于 c_0 与 c_3不相交，X 是由带有 c_0 和 c_1 的 X_1 与 c_2 以及带有 c_3 的 X_2组成的孔环面的并。因为 G_2

与 R_-（G_1）相交，因此 R_+（G_2）的一个分支 c_2' 与 R_-（G_1）的一个分支c_1' 在 X_1 或 X_2中相交。然而，根据引理 6.7 和引理 6.8， c_2' 既不同痕于 c_0 ，也不是同调非平凡的。因此 c_2' 不在 X_1中。同理， c_1' 不在 X_2中。所以 c_2' 不可能与 c_1'相交。

因此，我们完成了引理6.5的证明。

□

引理 *6.10*的证明。 根据引理 4.7，我们交换 G_2和 G_1、 G_0、 G_3..... 沿相反的 方向，直到它与某个 G_i相交。

- 如果 $i=1$，则图书馆图为 $\tilde{G}_3 \longrightarrow \tilde{G}_0 \longrightarrow \tilde{G}_1 \longrightarrow \tilde{G}_2$ 我们沿着两个水平曲面的并集 S' 切开 M，这两个曲面将 $G_1 \cup G_2$ 与 $G_0 \cup G_3$ 分隔开。由于在 Σ_0 中包含 $R_+(G_3)$ 和 $R_-(G_0)$ 的最小本质子曲面的欧拉示性数为 ≤ -2，根据引理 4.16(1)，与 G_3 和 G_0 相关的 pared guts 的欧拉示性数至多为 -2，因此其体积为 $\geq 2V_8$。此外，包含 $G_1 \cup G_2$ 的 $M \backslash\backslash S'$ 的 pared guts 的体积为 $\geq V_8$。因此，Vol(M) $\geq 3V_8$。

- 如果 $i=0$，图书馆图为

$$\begin{tikzcd} \tilde{G}_3 \arrow[r] & \tilde{G}_0 \arrow[r] & \tilde{G}_1 \\ & & \tilde{G}_2 \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

我们沿着水平曲面 S' 从 $G_1 \cup G_2$ 到 G_3 切开 M。然后我们得到一个具有 3 层的图书馆缝合流形 $M \backslash\backslash S'$，其中包含 G_3、 G_0 和 $G_1 \cup G_2$。由引理 4.16(2)，$M \backslash\backslash S'$的 pared sutured guts (N, P) 可由乘积流形 $X \times I$ 通过加厚环带得到：沿着位于 $X \times \{1\}$ 上的两条曲线 α_1、 α_2粘合，这两条曲线来自 G_0，且两侧各有环形尖点。根据该引理的假设， $\chi(X) \leq -2$。令 X' 为 N的 R_+ 侧。那么 $\chi(X') = \chi(X) \leq -2$。

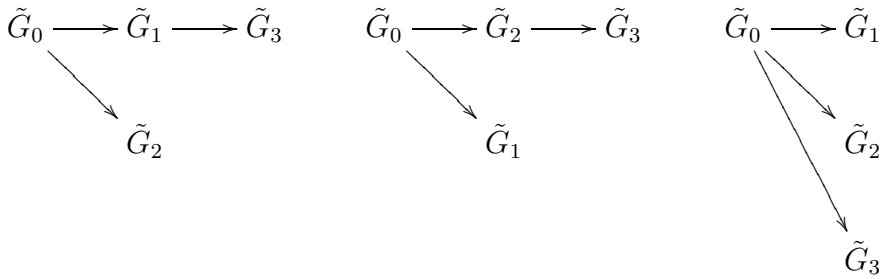
在 N 文中，我们根据定理 *2.3*，我们知道 即 Vol(N) $\leq 3V_8$，$\chi(X') = -2$。

(1) 我们首先考虑 X' 是连通的情形。如果 X' 的亏格为 1，那么 X' 就有 2 个边界分支，即 X' 是一个 2-穿孔环面。根据引理 6.6，我们可以假设包含 R_+（G_0）和 R_-（G_1）的最小本质子曲面的欧拉示性数为 -1。因此， β （G_1）的一个分支与 R_- 中的 α_1 （G_0）恰好相交于一个分支，并且包含β和 α_1 的最小本质子曲面是一个穿孔环面。令 α_2 为G_0（ R_+）的另一个分支，并令 δ 为 G_2（ R_-）中与 R_+（G_0）相交的一个分支。

由于 α_2 与 α_1、β 不相交且非同调平凡，因此 α_2 与 X'的一个边界分支平行。所以 δ 与 α_1相交。由 δ与 β 不相交这一事实及引理 6.8，β 和 δ 将 X'中的两个穿孔分隔开。因此，δ、β 和 α_2 围成一个裤子曲面。将它们投影到 M上，我们得到 $s(G_1)$的一个分支，以及 $s(G_0)$的一个分支的两个拷贝（不考虑定向），它们的并围成一个浸入曲面。于是，$s(G_0)$的一个分支要么是同调平凡的，要么 $s(G_1)$与 $s(G_0)$的某个倍数同调，这与引理6.4矛盾。

如果 X' 的亏格为 0，X' 有 4 个边界分支，即 X' 是一个四穿孔球面。令 α 为 $R_+(G_0)$ 的一个分支，它与 $R_-(G_1)$ 的一个分支 β 相交。根据引理 6.9，α_1 和 β 各自都是一条将 2 个穿孔与其余穿孔分隔开的闭曲线。同样，$R_-(G_2)$ 的一个分支 δ 与 α 相交，因此 δ 也将 2 个穿孔与其余穿孔分隔开。由于 β 和 δ 不相交，它们彼此平行，这与引理 6.8 矛盾。

(2) 如果 X' 不连通且 $\chi(X') = -2$，那么 X' 是由 2 个曲面组成的并集：X'_1 和 X'_2，其欧拉示性数为 -1。由于 $R_+(G_0)$ 的一个分支 α_1 与 $R_-(G_1)$ 的一个分支 β 相交，我们令 X'_1 为包含 α_1 和 β 的穿孔环面。令 δ 为 $R_-(G_2)$ 的一个分支，它与 $R_+(G_0)$ 相交。根据引理 6.8，δ 和 β 不同调。因此，δ 与 $R_+(G_0)$ 的另一个分支 α_2 在 X'_2 中相交，而 X'_2 也是一个穿孔环面。接着，我们沿相反方向重复交换 G_3 和 $G_1 \cup G_2$，G_0，直到 G_3 与一个 G_i 相交。于是我们得到以下其中一种图书馆图：



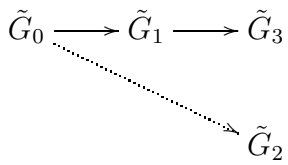
我们沿着一条水平曲面 S' 从 G_3 到 G_0 切开，并取其补空间的 pared guts。

我们首先考虑第一个图。

如果 G_2 也与 G_3相交，则由引理 4.16(2)，pared sutured guts（N，P）的 $M \backslash\backslash S'$ 可由乘积流形 $X'' \times I$ 粘合两个.....得到

~ ~加厚环带位于 $X'' \times \{1\}$ 上，来自 G_1 和 G_2，且两侧各有环形尖点。此外， X'' 包含 X' 以及~ ~$R_-(G_1)$ 和 $R_-(G_2)$ 的分支。

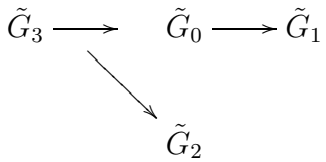
~ ~ ~如果 G_2 与 G_3不相交，我们就按如下方式将 G_2 移至图书馆图的第三层。



那么，该图书馆结构满足引理4.16(2)的条件。~因此， N, P的 pared sutured guts（ $M \backslash\backslash S'$可由乘积流形 $X'' \times I$ 通过在其上粘接一个加厚环带而得到， $X'' \times \{1\}$~该环带来自 G_1 ，且两侧各有环形尖点。此外， X''~包含 X' 以及 $R_-(G_1)$ 的分支。

~因此，在这两种情况下，由于 $R_-(G_1)$ 中不同于 β 的分支是同调非平凡的，它不可能属于 X'。所以 $\chi(X'') \leq \chi(X') - 1 = -3$~并且根据定理2.3，$\mathrm{Vol}(M) \geq 3V_8$。

同样，第二个图也适用相同的估计。
对于第三个图，根据引理 4.16(1)， $M \backslash\backslash S'$ 的 pared sutured guts~(N, P) 是一个乘积流形 $X'' \times I$，其两侧都有环形尖点。此外， X'' 包含 X'、 α_1、 α_2、 β 和 δ。令 ζ 为 $R_-(G_3)$ 的一个分支~，它与 α_1 或 α_2 相交。根据引理 6.7 和 6.8，ζ 是同调平凡的，且不平行于 β 或 δ。因此，它不可能位于 X' 中。所以 $\chi(X'') \leq \chi(X') - 1 = -3$，再由定理 2.3，$\mathrm{Vol}(M) \geq 3V_8$。

- 如果 $i = 3$，则图书馆图为 

此情形的证明与引理6.5证明中的情形 (2) 几乎相同。只需修改两处：

(1) 交换和~是 $R_+(G_3)$的~个分支~和~因此 β 当是 X 连通时，α_1、 α_2、 β 围成一个裤子曲面。这里我们将它们投影到 M 上，因此可以知道， $s(G_0)$ 的一个分支的三个副本（不考虑定向）围成了 M中的一个浸入曲面。因此

这个分支的 $s(G_0)$ 在 $H_1(M)$ 中同调平凡，这与引理 6.4 相矛盾。

□

最后，我们可以证明定理 1.2。

定理 1.2 的证明。若在 $H_2(M,\partial M)$ 中不存在一个在 M 的两个边界分支上取值为零的类，则 $\Gamma(z)$ 至少包含一个 4-ST。根据引理 6.1(2)、引理 6.5 和引理 6.3(1)，定理得证。若在 $H_2(M,\partial M)$ 中存在一个类y，它在 M 的两个边界分支上取值为零，则缝合核$\Gamma(y)$含有两个 $T\times I$，因此由引理 6.1(1) 和引理 6.3 的情形 (2)， M 的体积至少为 $2V_8$。
□

7. Volume of Orientable Hyperbolic 3-Manifolds with 3 Cusps as Library Bundles

本节将证明定理 1.3。在证明该定理之前，我们需要做一些准备。

引理 7.1. 设 M 是定理 *1.3*中的流形。如果 M中存在非分离闭曲面，则 $M \geq 2V_8$。

证明。由条件可知，存在元素 z in $H_2(M,\partial M)$，使其在 M 的每个边界分支上都消失。因此，我们可以选取一个面片曲面$F(z)$，并得到缝合核 $\Gamma(z)$。由于 $F(z)$ 与 ∂M 不相交， $\partial\Gamma(z)$ 包含∂M，即这三个缝合环面。因为 $\Gamma(z)$ 仅由实心环面和 $T\times I$ 组成，$\Gamma(z)$ 包含三个 $T\times I$。因此，由引理 6.1，$\mathrm{Vol}(M) \geq 2V_8$。□

定义 7.2. 设 M 是一个具有环面边界的 3-流形，且 P 是 M 的某些边界分支的并。我们将 $D_P(M)$ 记作沿 P 将 M 加倍所得的结果，并将 $D_P(X)$ 记作沿 P 将 X 加倍所得的结果，其中 X 是 M 的任意子集。对于 $H_2(M,\partial M)$ 中的第二同调类 z，我们可以令 $D_P(z)$ 为 $H_2(D_P(M)\ \partial D_P(M))$ 中 $D_P(z)$ 的同调类，其中 S 表示 $H_2(M,\partial M)$ 中的 z。

具体来说，当 $P=\partial M$ 时，我们省略 P，使用 $D(M)$、 $D(X)$ 和 $D(z)$。

定义 7.3. 设 M 是一个具有环面边界的紧致可定向三维流形，且 z 是 $H_2(M,\partial M)$ 中的一个元素。令 $\Gamma(z)$ 为 z 的缝合核。我们沿着 $D(\Gamma(z))$ 中互不平行的水平曲面的一个极大集合进行切割，然后沿着极大的乘积环带和环面进行切割。我们称 z 的双倍内核为所得缝合流形的非乘积分支，即 $D(\Gamma(z))$ 的水平素内核（见 AZ22，定义 3.19]）。

引理7.4. 设 M 是一个具有环面边界的紧致可定向三维流形， P是 M的若干边界分支之并。设 z是 $H_2(M,\partial M)$中的一个元素。若 S 是代表 z的范数极小曲面，则 $D_P(S)$也为范数极小。

证明。假设 $D_P(S)$不是范数最小化的。于是存在一个曲面 U，它代表 $D_P((z)$，属于 $D_P(M)$，且 $\chi_-(U) < \chi_-(D_P(S)) = 2x(z)$。令 $D_P(M)$为$M \cup M'$，其中 M'是 M的镜像副本。于是，$\chi_-(U \cap M)$或 $\chi_-(U \cap M')$小于 $x(z)$。注意，$U \cap M$以及 M 中 $U \cap M'$的镜像副本在 $H_2(M, \partial M)$中代表z。这与Thurston范数的定义矛盾。□

引理7.5. 设 M 是一个有限体积的可定向双曲三维流形，并且 $H_2(M, \partial M)$中的每个元素都是叶状纤维型 libroid 类。设 z是 $H_2(M, \partial M)$中的一个元素，且 P是 M的一个边界分支。那么，$D_P(\Gamma(z))$的水平素内核等价于 $D_P(M)$中 $D_P(z)$的内核。

证明。注意到 P是 $D_P(M)$ 中唯一的本质环面，且它是零同调的。因此，$D_P(M)$ 的 Thurston 范数是非退化的。因此，根据 [AZ22，定理 1.1]，中 $D_P(z)$ 在 $D_P(M$中的 GUTS 定义良好。

令 $F(z)$ 为表示 z 的面片曲面。则 $D_P(F(z))$ 将是一个范数最小化曲面族，在 $D_P(M)$ 中表示 $D_P(z)$。由引理 3.6，$M \backslash\backslash F(z)$ 的每个分支都包含 $\Gamma(z)$ 的一个分支，因此 $D_P(M) \backslash\backslash D_P(F(z))$ 的每个分支都包含 $\Gamma(z)$ 的一个分支的双重。

令 G 为 $\Gamma(z)$ 的一个分支，并令 N 为包含 G 的 $M \backslash\backslash F(z)$ 的分支。

若 G 是一个在某个边界分支上有 2 条缝合线且具有缝合环面边界的 $T \times I$，则 $D_P(G)$ 是一个在每个边界分支上各有 2 条同痕缝合线的 $T \times I$。我们取一个与 $D_P(G)$ 的 R_+ 部分同调的紧曲面 S'_N，使其将 $D_P(G)$ 分解为两个 4-ST。若 G 是一个 4-ST 或 2-ST，我们也可以取 S'_N，使其将 $D_P(G)$ 分解为两个 4-ST 或 2-ST。于是，$D_P(G)$ 的水平素内核是这两个实心环面的并。通过将 S'_N 延拓到乘积缝合流形 $D_P(N) \backslash D_P(G)$，我们得到一个表示 z 的紧曲面 S_N。此外，$\{S_N\}$ 是 $D_P(N)$ 中表示 z 且与 $R_\pm(N)$ 非同痕的紧曲面的极大集合。

$D_P(F(z))$ 与 S_N对 $M \backslash\backslash F(z)$ 的每个分支 N 的并集是一个面片曲面 $F(D_P(z))$，代表 $D_P(M)$ 中的 $D_P(z)$。由于 $F(D_P(z))$ 的内核等价于 $D_P(\Gamma(z))$ 的水平素内核，因此我们知道该引理成立。

□

引理7.6。设 M 是一个有限体积的可定向双曲三维流形，且 $H_2(M, \partial M)$ 中的每个元素都是叶状纤维型类。设 y、z 属于 M 的一个开瑟斯顿锥 Δ，且 y 恰好在 M 的一个边界分支上取值为零。那么，在开线段 (y, z) 中存在一个 w，使得对于 $[y, w]$ 中的每个元素 u，y 的双倍内核与 $D(M)$ 中 u 的双倍内核等价。

证明。令 y 在边界分支 P 上消失。我们取足够小的 w，使得 $[w, y]$ 中的每个元素在除 P 之外的任何边界分支上都不消失。

注意， P 是 $D_P(M)$ 中唯一的本质环面，且它是零同调的。因此， $D_P(M)$ 的 Thurston 范数是非退化的。由于 y 和 w 位于同一个开瑟斯顿锥中，存在一个类 w'，使得对于某个正数 k，有 $\chi_-(ky) = \chi_-(w') + \chi_-(w)$ 和$w' = ky - w$。因此， $\chi_-(kD(y)) = \chi_-(D(v)) + \chi_-(D(w))$。由引理7.4可知， $D_P(y)$ 和 $D_P(w)$ 均位于 $D_P(M)$ 的某个开瑟斯顿锥中。此外，该开瑟斯顿锥中存在一条包含 $D(y)$ 和 $D(w)$ 的开线段（a, b），且 a 和 b 在每个边界分支上的限制定向并非相反。根据 [AZ22, Theorem 1.2], ，对于 $[y, w]$ 中的每个元素 u， $D_P(y)$ 的 GUTS 与 $D_P(M)$ 中 $D_P(u)$ 的 GUTS 等价。

根据引理7.5，我们知道， $D_P(\Gamma(y))$ 的水平素内核等价于 $D_P(\Gamma(u))$ 的水平素内核。分别令 $S_P(y)$ 和 $S_P(u)$ 表示 $D_P(\Gamma(y))$ 和 $D_P(\Gamma(z))$ 中互不平行的水平曲面的一个极大集合之并。沿除 P 以外的边界分支彼此粘合后，我们分别在 $D(\Gamma(y))$ 和 $D(\Gamma(z))$ 中得到互不平行的水平曲面之并 $S(y)$ 和 $S(u)$。由于 y 和 u 在除 P 以外的任何边界分支上都不消失，我们知道，每个 $S(y)$ 和 $S(u)$ 都是互不平行的水平曲面的一个极大集合之并。因此， $D(\Gamma(y))$ 的水平素内核等价于 $D(\Gamma(u))$ 的水平素内核。

□

根据引理7.6 和 [AZ22，定理 1。2],可得以下定理。

定理7.7。设 M 是一个有限体积的可定向双曲三维流形，使得 $H_2(M, \partial M)$ 中的每个元素都是一个叶状纤维型类，并且 Δ 是一个开瑟斯顿锥。若 Δ 中没有元素在两个边界分支上消失，则对于 Δ 中的两个类 y、 z， y 的双倍内核等价于 $D(M)$ 中 z 的双倍内核。

证明。令（v， w）是包含 y， z的一个开线段，它位于 Δ中。我们用有限多个点划分（v， w），使得每个所得的开分支都不包含两个在某个边界分支上的限制具有相反定向的元素。根据[AZ22，定理 1。2], ，每个开线段内二阶同调类的内核保持不变。根据引理7.6，我们知道（v， w）中的每一点在（v， w）中都有一个邻域，使得该邻域内二阶同调类的双重内核保持不变。综合以上结果，我们知道定理7.7 成立。□

现在开始证明定理1.3。

定理 *1.3* 的证明。 根据双曲三维流形体积的良序性（参见 [Thu79，定理 5.12。1]），存在一个满足定理 1.3中条件的可定向三尖点流形M_{book}，且其体积在所有此类三维流形中最小。设 Vol(M_{book}) $< 2V_8$。

存在一个关于 $(M_{book}, \partial M_{book})$ 的长正合列:

$$\cdots \to H_2(M_{book}) \to H_2(M_{book}, \partial M_{book}) \xrightarrow{\partial} H_1(\partial M_{book}) \to \cdots$$

由引理 7.1 可知， M_{book}中不存在非分离闭曲面，因此从 $H_2(M_{book})$ 到 $H_2(M_{book}, \partial M_{book})$ 的映射为 0。所以映射 ∂ 是单射。由引理 5.1， ∂ 的像的秩为 3，故 $H_2(M_{book}, \partial M_{book})$ 是 3 维的。由于 M_{book} 的贝蒂数为 3，且对于每个边界分支 P， $H_1(P) = \mathbb{Z}^2$，在 $H_2(M_{book}, \partial M_{book})$ 中存在一个元素 z，使得 $\partial z = 0$ 属于 $H_1(\partial M_{book})$ 的 $H_1(P)$ 直和项；也就是说， z 在 P 上为零。

如果存在一个 z 属于 $H_2(M_{book}, \partial M_{book})$，在两个边界分支上为零，那么缝合核 $\Gamma(z)$ 包含 $2\ T \times I$个。由引理 6.1，$\mathrm{Vol}(M_{book}) \geq 2V_8$。因此我们假设不存在这样的类。

令 $\partial_1 M_{book}$、$\partial_2 M_{book}$、$\partial_3 M_{book}$ 为 ∂M_{book} 的分支，并将 y_i 记作 $H_2(M_{book}, \partial M_{book})$ 中的一个类，它在 $\partial_i M_{book}$ 上对 $1 \leq i \leq 3$ 消失。那么 $\Gamma(y_i)$ 包含一个 $T \times I$。

如果 y_i 是 Thurston 球面上的一个顶点，根据引理6.4，存在两个 $\Gamma(y_i)$ 的缝合核分支 G_0 和 G_1，使得 $s(G_0)$ 和 $s(G_1)$ 的任意分支都是同调非平凡的，并且 $s(G_0)$ 的一个分支不同调于 $s(G_1)$ 的任意倍数的一个分支。由于 $\mathrm{Vol}(M_{book}) < 2V_8$，根据引理 6.3(3)，我们可以将 $\Gamma(y_i)$ 分成两组 Γ_0 和 Γ_1，使得每组中所有缝合核分支的缝合线在相差一个倍数的意义下同调。根据 G_0 和 G_1 的性质，我们可以假设 Γ_0 包含 G_0，而 Γ_1 包含 G_1。根据引理 6.3(2)， $\Gamma(y_i)$ 中只有一个 $T \times I$ 分支。令 $T \times I$ 位于 Γ_0 中。根据引理 5.2，我们可以在 Thurston 球面的一条边上取 u，使 y_i 为该边的一个端点，并在与该边相交的一个面内取 v，使得 $\Gamma(y_i)$ 有一个由 2 次缝合分解组成的序列。

$$\Gamma(y_i) \overset{\Sigma_1}{\rightsquigarrow} \Gamma(u) \overset{\Sigma_2}{\rightsquigarrow} \Gamma(v).$$

其中， Σ_1 和 Σ_2 是 M中的真范数极小曲面。

与引理 5.4 的证明中一样，我们可以选择 e，使得 Σ_1 与 $s(\Gamma_1)$ 的一个分支相交。由于 Γ_1 所有缝合核分支的缝合线在允许重数的意义下同调， Σ_1 将 Γ_1 分解为一组乘积缝合流形。由于$\Gamma(u) \overset{\Sigma_2}{\rightsquigarrow} \Gamma(v)$ 是一个非平凡的缝合分解， Σ_1 不会与 $s(\Gamma_0)$的某个分支相交。因此， Σ_1 要么避开 $T \times I$，要么与边界相交，且该边界平行于 $T \times I$的缝合线。如果 Σ_1 与边界相交，且该边界平行于 $T \times I$的缝合线，那么 Σ_1将 $T \times I$ 分解为一个 4-ST，其缝合线同痕于 $\partial_i M$上的曲线 C_i。

这意味着，对于每个边界分支 $\partial_i M_{book}$，无论 y_i 是 Thurston 球面的一个顶点，还是位于一条开边或一个开面内，都存在一个元素 z_i 属于 $H_2(M_{book}, \partial M_{book})$，使得 z_i 位于一条开边或一个开面内，并且 $\Gamma(z_i)$ 包含一个缝合核分支，其形式为 $T \times I$ 或带有与曲线 C_i 同痕的缝合线的 4-ST，该曲线位于 $\partial_i M$ 上。

由于一个在某个边界分支上有 2 条缝合线的 $T \times I$ 的双重是一个在每个边界分支上有 2 条平行缝合线的 $T \times I$，沿着一个极大水平曲面集合将其切开后，我们得到两个四缝线实心环面。因此，一个 $T \times I$ 的双重的水平素内核是两个四缝线实心环面的并。对于四缝线实心环面或 2-ST，其双重的水平素内核是两个自身副本的并。因此，如果 $H_2(M, \partial M)$ 中 u 的双倍内核包含一个缝合线与 $\partial_i M$ 上某条曲线 C_i 同痕的四缝线实心环面，我们就知道，$\Gamma(u)$ 的内核包含一个 $T \times I$ 或一个缝合线与 $\partial_i M$ 上某条曲线 C_i 同痕的四缝线实心环面。

设 z_i 位于一条开边上，e 该开边与一个顶点 v相交。根据定理 7.7，我们知道，开瑟斯顿锥中元素的双倍内核在 $D(M)$ 中在等价意义下保持不变。因此，e 中每个元素的双倍内核都包含一个 4-ST，从而其缝合核包含一个 $T \times I$ 或 4-ST，记为 G。此外，C_i 与 $T \times I$ 或 4-ST 的每条缝合线同痕。

根据引理 5.2，这意味着 v 的缝合核也包含一个 $T \times I$ 或 4-ST，其缝合线与 C_i同痕。取一个 $kv - z_i$，使得 $kv - z_i$ 位于一条开边 e'上，该开边与 v 相交，并且 $\Gamma(v)$可以通过曲面 Σ 分解为具有 $\Gamma(kv - z_i)$。由于z_i 和 v 在同调意义下不与 C_i 相交，我们知道 $kv - z_i$ 也不与C_i 相交。因此，$\Gamma(kv - z_i)$有一个分支是 $T \times I$ 或 4-ST，其缝合线与一条曲线 C_i同痕。根据定理7.7，我们知道，e' 中的每个元素的缝合核都包含一个 $T \times I$ 或 4-ST，其缝合线与 C_i同痕。

继续这样做，我们知道存在一个经过 z_i 和 v 的二维子空间 V_i，使得对于 V_i 中的每个非零元素 u，$\Gamma(u)$ 都包含一个 $T \times I$，或包含一个缝合线与 C_i 同痕的 4-ST。

如果 z_i 位于一个开面中，我们可以对经过 z_i 的任意二维子空间 V_i 运用同样的论证。我们为 z_i 选取一个 V_i。

由于 V_1 和 V_2 是二维子空间，而 $H_2(M_{book}, \partial M_{book})$ 是一个三维空间，$V_1 \cap V_2$ 至少是一维的。令 z 为 $V_1 \cap V_2$ 中的一个非零元素。那么 $\Gamma(z)$ 包含 G_i，它是一个 $T \times I$ 或 4-ST，且对于 $i = 1, 2$，C_i 与 G_i 的每条缝合线同痕。由于 M_{book} 是无柱的，C_1 与 C_2 不同痕，因此 G_1 与 G_2 不相同。我们可以选取一个顶点 v，使得包含 z 的开边或开面与 v 相交。于是根据引理 5.2，$\Gamma(v)$ 包含 G_1、G_2，且深度至少为 2。注意，G_1 和 G_2 的缝合线不同痕。于是根据定理 1.2，M_{book} 的体积至少为 $1.5V_8$。□

References

[AD15] Ian Agol 和 Nathan M Dunfield，通过 sl (2, c)-扭曲同调验证 Thurston 范数，arXiv 预印本 arXiv:1501.02136（2015）。[ADST05] Ian Agol、Nathan M Dunfield、Peter A Storm 和 William P Thurston，双曲 Haken 三维流形体积的下界，arXiv 预印本 math/0506338（2005）。

[Ago10] Ian Agol，可定向双尖点双曲三维流形的最小体积，《美国数学会会刊》138（2010），第 10 期，3723–3732。[AZ22] Ian Agol 和 Yue Zhang，缝合分解中的 GUTS 与 Thurston 范数，arXiv 预印本 arXiv:2203.12095（2022）。[CFW10] Danny Calegari、Michael Freedman 和 KevinWalker，三维中的普适配对正性，《美国数学会杂志》23（2010），第 1 期，107–188。[CM01] Chun Cao 和 G Robert Meyerhoff，最小体积的可定向尖点双曲三维流形，《数学发明》146（2001），第 3 期，451–478。[FK14] Stefan Friedl 和 Takahiro Kitayama，三维流形的虚纤维化定理，《数学纪事》60（2014），第 1–2 期，79–107。MR 3262436[G+86] David Gabai 等，交错链环的亏格，《杜克数学杂志》53（1986），第 3 期，677–681。[Gab83] David Gabai，叶状结构与三维流形拓扑，《微分几何杂志》18（1983），第 3 期，445–503。MR 723813[GMM09] David Gabai、Robert Meyerhoff 和 Peter Milley，最小体积的尖点双曲三维流形，《美国数学会杂志》22（2009），第 4 期，1157–1215。[Hat] Allen Hatcher，三维流形拓扑基础笔记。[Miy94] Yosuke Miyamoto，具有测地边界的双曲流形体积，《拓扑学》33（1994），第 4 期，613–629。[Mor84] John W Morgan，关于三维流形 Thurston 均匀化定理的第五章，《纯粹与应用数学》，第 112 卷，Elsevier，1984 年，第 37–125 页。[Thu79] William P Thurston，《三维流形的几何与拓扑》，普林斯顿大学，普林斯顿，新泽西州，1979 年。[Yos13] Ken'ichi Yoshida，具有四个尖点的可定向双曲三维流形的最小体积，《太平洋数学杂志》266（2013），第 2 期，457–476。[Zha20] Yue Zhang，GUTS、Dehn 填充与双曲流形的体积，加利福尼亚大学伯克利分校，2020 年。

University of California, Berkeley电
子邮箱：yue zhang@berkeley.edu