无界算子在S-谱上的调和与多解析函数演算

FABRIZIO COLOMBO、ANTONINO DE MARTINO 和 STEFANO PINTON

arXiv:2304.09980v1 [math.SP] 19 Apr 2023

Abstract. 近期，人们为有界交换算子定义了调和与多解析函数演算。其定义基于切片超全纯函数的柯西公式，以及拉普拉斯算子关于柯西–富特算子$\mathcal{D}$ 及其共轭$\overline{\mathcal{D}}$的因式分解。借助富特延拓定理，当我们将算子$\mathcal{D}$ 作用于切片超全纯函数时，可得到调和函数；再通过切片超全纯函数的柯西公式，建立调和函数的积分表示。该积分公式用于定义 S-谱上的调和泛函演算。另一种做法是将柯西–富特算子的共轭作用于切片超全纯函数。在这种情况下，通过类似的过程，我们可以得到多解析函数类、其积分表示以及相应的多解析函数演算。本文旨在将调和与多解析函数演算推广到无界算子的情形，并证明其中一些最重要的性质。这两种函数演算属于四元数框架下 S-谱上的所谓精细结构。与克利福德代数相关的S-谱精细结构是一个新的研究领域，它深入联系了算子理论、调和分析和超复分析等不同研究方向。

美国数学学会分类：47A10，47A60
关键词： S-谱，调和泛函演算，多解析函数演算，精细结构。

Contents

1. 引言 1 2. 四元数算子的预备结果 7 3. 无界算子的调和函数演算 12 4. 无界算子的多解析函数演算 18 5. 总结性评论 24 参考文献 25

1. Introduction

研究四元数谱理论的主要动机之一可以在 G. Birkhoff 和 J. Von Neumann 的论文中找到，参见 [10], ，作者在文中表明，量子力学也可以使用四元数进行表述，但他们没有明确四元数线性算子的谱定义。四元数线性算子的 S-谱理论始于 2006 年，当时发现了 S-谱。尽管这一谱概念的存在是由四元数量子力学所暗示的，但它仅使用超复分析中的方法得到确立；有关更多细节，请参见著作 [22] 的引言。S-谱的概念还扩展到了克利福德代数框架中的算子，参见 [31, 32], ；但最近已有研究表明，四元数情形和 Clifford情形只是一个更一般框架中的特殊情形，在该框架中可以发展 S-谱理论，参见 [23, 25]。

利用 S-谱的概念，可以证明四元数线性算子的谱定理，参见 [1], 。该定理是量子力学表述中的一个核心定理。最近，谱定理又被推广到了 Clifford 算子，参见 [24]。

基于 S-谱的谱理论已在著作 [21, 22, 31] 中得到系统整理。如今，这一理论有多个研究方向。这里不求面面俱到，仅列举如下：切片超全纯施尔分析，见 [2], ；基于四元数线性算子分数幂的新型分数阶扩散问题，见 [22, 17, 18, 26]。关于分数幂的结果基于 H^∞-函数演算，见 [6, 20]。其他有趣的研究方向包括特征算子函数的研究，见 [3], ，以及四元数扰动理论和不变子空间，见 [12]。

近年来，基于 S-谱的谱理论发展出一个新的分支，称为 S-谱的精细结构。该分支由富特-塞定理所产生的函数空间及其积分表示构成，这些积分表示用于定义各种函数演算，见 [13, 16, 34, 35]。

给定精细结构的函数空间由富特-塞延拓定理中的二阶算子 T_{FS2} 的因式分解以及切片双全纯函数的柯西公式决定。精细结构各空间的积分表示对于定义与 S 谱上有界算子相关联的函数演算至关重要。这些函数演算包括调和、多重调和、多解析函数演算以及其他若干种。本文聚焦于包含两种重要精细结构的四元数框架。事实上，富特延拓定理中的第二个映射 T_{FS2} 在四维空间中等于拉普拉斯算子 Δ ，而 Δ 最重要的因式分解导出调和精细结构和多解析精细结构。

本文的目标是将调和函数演算和多解析函数演算扩展到无界算子，并证明它们的一些性质。

为了介绍我们的结果，我们需要进一步说明所采用的背景，因此将引用一些后文需要用到、且其证明可见于 [22] 的结果。首先固定四元数的记号，四元数定义为

$$\mathbb{H} := \{q = q_0 + q_1 e_1 + q_2 e_2 + q_3 e_3 \,|\, q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}\},$$

其中虚单位满足以下关系

$$e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = -1, \quad \text{and} \quad e_1 e_2 = -e_2 e_1 = e_3,\, e_2 e_3 = -e_3 e_2 = e_1,\, e_3 e_1 = -e_1 e_3 = e_2.$$

我们用 $\mathrm{Re}(q) = q_0$ 表示四元数的实部，用 $\underline{q} := q_1 e_1 + q_2 e_2 + q_3 e_3$ 表示其虚部。四元数 $q \in \mathbb{H}$ 的共轭定义为 $\bar{q} = q_0 - \underline{q}$ ，而 $q \in \mathbb{H}$ 的模为 $|q| = \sqrt{q\bar{q}} = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$. 。纯虚四元数的单位球面定义为

$$\mathbb{S} := \{\underline{q} = q_1 e_1 + q_2 e_2 + q_3 e_3 \,|\, q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1\}.$$

我们注意到，若 $J \in \mathbb{S}$ ，则 $J^2 = -1$。这意味着 J 的行为类似于虚单位，我们用

$$\mathbb{C}_J := \{u + Jv \,|\, u, v \in \mathbb{R}\}$$

复数的一个同构副本。考虑一个非实四元数 $q = q_0 + \underline{q} = q_0 + J_q|\underline{q}|$，其中 $J_q := \underline{q}/|\underline{q}|$。我们可以将由下式定义的二维球面与 q 关联起来

$$[q] := \{q_0 + J|\underline{q}| \,|\, J \in \mathbb{S}\}.$$

如果对于每个 $u + Iv \in U$，所有满足 $J \in \mathbb{S}$ 的元素 $u + Jv$ 都包含在 U 中，我们就称 $U \subset \mathbb{H}$ 为轴对称。此外，如果 $U \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$ ，并且对于每个 $J \in \mathbb{S}$， $U \cap \mathbb{C}_J$ 都是 $\mathbb{C}_J$ 中的一个域，则称集合 U 为切片域。

轴对称集是以下函数类的适当定义域。

定义 1.1（切片超全纯函数）。设 $U \subset \mathbb{H}$ 为一个轴对称开集，并且令

$$\mathcal{U} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \,|\, u + \mathbb{S}v \in U\}.$$

我们称形如 $f : U \to \mathbb{H}$ 的函数为

$$f(q) = f(u + Jv) = \alpha(u, v) + J\beta(u, v) \qquad (\text{resp. } f(q) = f(u + Jv) = \alpha(u, v) + \beta(u, v)J)$$

若 α 和 β 是四元数值函数，则其为左（分别为右）切片超全纯函数。

$$\alpha(u, v) = \alpha(u, -v), \qquad \beta(u, v) = -\beta(u, -v) \quad \text{for all} \quad (u, v) \in \mathcal{U}. \tag{1.1}$$

且如果函数 α 和 β 满足柯西-黎曼方程组

$$\partial_u \alpha(u, v) - \partial_v \beta(u, v) = 0, \qquad \text{and} \qquad \partial_v \alpha(u, v) + \partial_u \beta(u, v) = 0.$$

U 上的左（分别为右）切片超全纯函数类记作 $\mathcal{SH}_L(U)$（分别为 $\mathcal{SH}_R(U)$）。如果函数 α 和 β 为实值函数，那么我们讨论的是内在切片超全纯函数的子集。该函数集记作 $\mathcal{N}(U)$。通过由以下公式定义的左（分别为右）切片超全纯柯西核。

$$S_L^{-1}(s.q) = (s - \bar{q})(s^2 - 2q_0 s + |q|^2)^{-1}, \qquad \left(\text{resp.} \quad S_R^{-1}(s, q) = (s^2 - 2q_0 s + |q|^2)^{-1}(s - \bar{q})\right),$$

对于 $s \notin [q]$，可以为切片超全纯函数给出积分表示。首先，我们回顾切片柯西域的定义，该定义将在函数的积分表示中经常使用。

定义 1.2（切片柯西域）。如果对于任意 $J \in \mathbb{S}$， $U \subset \mathbb{H}$ 是 $\mathbb{C}_J$ 中的柯西域，则称轴对称开集 $U \subset \mathbb{H}$ 为切片柯西域。更确切地说，如果对于任意 $J \in \mathbb{S}$， $U \cap \mathbb{C}_J$ 的边界 $\partial(U \cap \mathbb{C}_J)$ 是 $\mathbb{C}_J$ 中有限条互不相交的分段连续可微 Jordan 曲线的并集，则 U 是切片柯西域。

定理 1.3（切片超全纯函数的柯西公式）。设 $U \subset \mathbb{H}$ 是一个有界切片柯西域，令 $J \in \mathbb{S}$ 并设 $ds_J = ds(-J)$。若函数 f 在包含 U 的集合上是左（分别为右）切片超全纯的，则对任意 $q \in U$，有

$$f(q) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial(U \cap \mathbb{C}_J)} S_L^{-1}(s, q) ds_J f(s), \qquad \left(\text{resp. } f(q) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial(U \cap \mathbb{C}_J)} f(s) ds_J S_R^{-1}(s, q)\right).$$

类似的公式对无界域也成立。我们将使用的另一类超全纯函数是所谓的轴向单变函数，参见 [36]。

定义 1.4（轴对称单变函数）。设 $U \subset \mathbb{R}^4$ 为一个轴对称切片域。若一个 $\mathcal{C}^1$ 类函数 $f : U \to \mathbb{H}$ 是单变的，即

$$\mathcal{D}f(q) = \partial_{q_0} f(q) + \sum_{i=1}^{3} e_i \partial_{q_i} f(q) = 0, \quad q \in U$$

且其形式为

$$f(q) = A(q_0, |\underline{q}|) + \underline{\omega} B(q_0, |\underline{q}|), \qquad \underline{\omega} := \frac{\underline{q}}{|\underline{q}|}, \tag{1.2}$$

其中，函数 A 和 B 满足奇偶条件 (1.1)。我们用 $\mathcal{AM}(U)$ 表示（左）轴向单变函数的集合。右轴向单变函数也可以类似定义，我们使用以下记号

$$f(q)\mathcal{D} = \partial_{q_0} f(q) + \sum_{i=1}^{3} \partial_{q_i} f(q) e_i = 0, \quad q \in U.$$

切片超全纯函数类与轴向单变函数类通过著名的富特映射定理联系起来，参见 [39]。

定理 1.5（Fueter 映射定理）。设 $f_0(z) = \alpha(u,v) + i\beta(u,v)$ 是在上半复平面的一个域（开且连通） D 内定义的全纯函数，并令

$$\Omega_D = \{q = q_0 + \underline{q}\,|\,(q_0, |\underline{q}|) \in D\}$$

为 $\mathbb{H}$ 中由 D 诱导的开集。则定义的切片算子为

$$f(q) = T_{F1}(f_0) := \alpha(q_0, |\underline{q}|) + \frac{\underline{q}}{|\underline{q}|}\beta(q_0, |\underline{q}|)$$

将全纯函数集映射到内在切片超全纯函数集。此外，该函数

$$\breve{f}(q) := T_{F2}\left(\alpha(q_0, |\underline{q}|) + \frac{\underline{q}}{|\underline{q}|}\beta(q_0, |\underline{q}|)\right),$$

其中 $T_{F2} := \Delta$ 是四个实变量中的拉普拉斯算子，是一个轴向单值函数。 $n.$

注 1.6. 在 Fueter 映射定理中，当施加奇偶条件 (1.1) 时，可以取消对全纯函数必须定义在复平面上半平面的限制。

Rem图 1.7。我们可以用下图概括 Fueter 构造

$$\mathcal{O}(D) \xrightarrow{T_{F1}} \mathcal{SH}(\Omega_D) \xrightarrow{T_{F2}=\Delta} \mathcal{AM}(\Omega_D), \tag{1.3}$$

其中， $\mathcal{O}(D)$ 是定义在 D 上的全纯函数集合。

$_{n-1}$备注 1.8。在克利福德代数框架中，算子 T_{F2} 等于 $\Delta_{n+1}^{\overline{2}}$，其中 Δ_{n+1} 是作用于 $n+1$ 个变量的拉普拉斯算子。若 n 为奇数，则 T_{F2} 是逐点微分算子，参见 [30, 44]。若 n 为偶数，则我们处理的是拉普拉斯算子的分数幂，参见 [43]。

切片超全纯函数的柯西公式可用于证明 Fueter 定理的积分形式，参见 [29]。

定理 1.9（Fueter 定理的积分形式）。设 $U \subset \mathbb{H}$ 是一个切片柯西域，令 $J \in \mathbb{S}$ 并设 $ds_J = ds(-J)$。若 f 是定义在集合 W 上的左（分别为右）切片超全纯函数，且 $^-$
满足 $U \subset W$，则轴向单变函数 $f(q) = \Delta f(q)$ 可表示为积分形式

$$\breve{f}(q) = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial(U\cap\mathbb{C}_J)} F_L(s,q)ds_J f(s), \qquad \left(\text{resp. } \breve{f}(q) = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial(U\cap\mathbb{C}_J)} f(s)ds_J F_R(s,q)\right).$$

前述积分变换的核为

$F_L(s,q) := \Delta S_L^{-1}($ $s,q) = -4(s-\bar{q})\mathcal{Q}_{c,s}(q)^{-2}$, $(\text{resp. } F_R(s,q) := \Delta S_R^{-1}(s,q) = -4\mathcal{Q}_{c,s}(q)^{-2}(s-\bar{x}))$,
其中 $\mathcal{Q}_{c,\ s}(q) := s^2 - 2q_0 s + |q|^2$ 是伪柯西核。
核 $F_L(s,q)$（分别地， $F_R(s,q)$）关于变量 s 是右切片超全纯（分别地，是左切片超全纯），并且关于变量 q 是左轴向单生成的（分别地，是右轴向单生成的）。

图 (1.3) 中出现的拉普拉斯算子可以通过以下两种不同方式进行因式分解。具体而言，若 $\mathcal{D} := \partial_{q_0} + \sum_{i=1}^3 e_i\partial_{q_i}$ 和 $\overline{\mathcal{D}} := \partial_{q_0} - \sum_{i=1}^3 e_i\partial_{q_i}$ 分别是柯西–富特算子及其共轭，则有

$$\Delta = \mathcal{D}\overline{\mathcal{D}} = \overline{\mathcal{D}}\mathcal{D}.$$

尽管算子 $\mathcal{D}$ 和 $\overline{\mathcal{D}}$ 可交换，但因式分解 $\mathcal{D}\overline{\mathcal{D}}$ 和 $\overline{\mathcal{D}}\mathcal{D}$ 会根据对切片超全纯函数应用 $\mathcal{D}$ 和 $\overline{\mathcal{D}}$ 的顺序，产生不同的函数空间。事实上，若我们首先将算子 $\mathcal{D}$ 应用于 $\mathcal{SH}(\Omega_D)$ 中的函数，则有：

$$\mathcal{O}(D) \xrightarrow{T_{F1}} \mathcal{SH}(\Omega_D) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{AH}(\Omega_D) \xrightarrow{\overline{\mathcal{D}}} \mathcal{AM}(\Omega_D),$$

其中， $\mathcal{AH}(\Omega_D)$ 是轴向调和函数类，即形如 (1.2) 且属于四个实变量中的拉普拉斯算子核的函数。在我们将$\overline{\mathcal{D}}$ 应用于$\mathcal{SH}(\Omega_D)$ 中的函数时，可得到

$$\mathcal{O}(D) \xrightarrow{T_{F1}} \mathcal{SH}(\Omega_D) \xrightarrow{\overline{\mathcal{D}}} \mathcal{AP}_2(\Omega_D) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{AM}(\Omega_D),$$

其中， $\mathcal{AP}_2(\Omega_D)$ 是二阶轴向多解析函数类，即形如 (1.2) 且属于算子 $\mathcal{D}^2$ 的核的函数。上述情形引出了以下定义。

定义 1.10（ S-谱上的谱理论精细结构）。我们将 Fueter 延拓定理中由算子 T_{F2} 的因子分解所诱导的函数空间集合及其相关函数演算，称为 S-谱上的谱理论精细结构。

在 [13, 34] 中，我们给出了轴向调和函数和二阶轴向多解析函数的积分表示；现在我们回顾这些积分表示。设 $W \subset \mathbb{H}$ 为一个开集。设 U 为一个切片柯西域，使得 $U \subset W$。对于 $J \in \mathbb{S}$ 和 $ds_J = ds(-J)$，我们有：

- 如果函数 f在 W中是左（分别为右）切片超全纯的，那么函数 $f(q) = \mathcal{D}f(q)$（分别为 $f(q)\mathcal{D}$）是调和的，并且对于 $q \in U$，它具有如下积分表示

$$\tilde{f}(q) = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial(U\cap\mathbb{C}_J)} \mathcal{D}S_L^{-1}(s,q)ds_J f(s) \quad \left(\text{resp. } \tilde{f}(q) = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial(U\cap\mathbb{C}_J)} f(s)ds_J S_R^{-1}(s,q)\mathcal{D}\right). \quad (1.4)$$

- 如果函数 f在 W中是左（分别为右）切片超全纯的，那么函数 $\breve{f}^0(q) = \overline{\mathcal{D}}f(q)$（分别为 $f(q)\overline{\mathcal{D}}$）是二阶多解析的，并且对于 $q \in U$，它具有如下积分表示

$$\breve{f}^0(q) = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial(U\cap\mathbb{C}_J)} \overline{\mathcal{D}}S_L^{-1}(s,q)ds_J f(s) \quad \left(\text{resp. } \breve{f}^0(q) = \int_{\partial(U\cap\mathbb{C}_J)} f(s)ds_J S_R^{-1}(s,q)\overline{\mathcal{D}}\right). \quad (1.5)$$

我们的主要结果是对 Riesz-Dunford 泛函演算的扩展，参见 [37] ，其中介绍了四元数精细结构上的函数类。具体而言，设 f 是定义在包含 Ω 的开集上的全纯函数，其中 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 是一个开集，包含复巴拿赫空间 $X_{\mathbb{C}}$上有界算子 B 的谱。全纯泛函演算 $f(B)$ 定义为

$$f(B) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} (\lambda\mathcal{I} - B)^{-1} f(\lambda)d\lambda.$$

为了定义无界算子 A 的函数演算，我们假设函数 f 在无穷远处以及闭线性算子 A 的谱 $\sigma(A)$ 上全纯，且其域包含于 $X_{\mathbb{C}}$。

假设预解集 $\rho(A)$ 非空。令 $\Phi(\lambda) := (\lambda - \alpha)^{-1}$, $\Phi(\infty) = 0$ 和$\Phi(\alpha) = \infty$，其中 $\alpha \in \rho(A)$。我们将无界算子的函数演算定义为 $f(A) :=\phi(B)$，其中 $\phi(\mu) = f(\Phi^{-1}(\mu))$ 且 $B := (A - \alpha\mathcal{I})^{-1}$. 。对于该函数演算，我们有如下积分表示

$$f(A) = f(\infty)\mathcal{I} + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\lambda\mathcal{I} - A)^{-1} f(\lambda)d\lambda, \quad (1.6)$$

其中 Γ 由有限条若尔当弧组成，这些弧围住谱 $\sigma(A)$ 和无穷远点。我们回顾一下，函数 f 必须在一个包含 Γ 及其内部的开集上全纯。此外，公式 (1.6) 表明， $f(A)$ 与参数 α无关。

有界且分量可交换的四元数算子的调和函数演算和多解析函数演算是在 [13, 34] 中引入的，其中考虑了形如 $T = T_0 + e_1T_1 + e_2T_2 + e_3T_3$ 的算子。算子 $\bar{T} = T_0 - e_1T_1 - e_2T_2 - e_3T_3$ 称为 T 的共轭。调和预解算子定义为

$$\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-1} := (s^2 - (T + \bar{T})s + T\bar{T})^{-1}, \quad s \in \rho_S(T),$$

结果证明它是著名的交换伪 S-预解算子。多解析（左）预解算子定义如下

$$P_2^L(s,T) = -F_L(s,T)s + T_0F_L(s,T), \quad \text{where} \quad F_L(s,T) = -4(s - \bar{T})\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-2}.$$

类似地，我们定义了多解析右预解算子。在 [13, 34] 中，我们证明了对于 $f \in \mathcal{SH}_L$（U），调和泛函演算（也称为 Q-泛函）由下式给出

$$\tilde{f}(T) = -\frac{1}{\pi}\int_{\partial(U\cap\mathbb{C}_J)} \mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-1} ds_J f(s),$$

以及 P_2-泛函演算，其定义如下

$$\breve{f}^{\circ}(T) := \frac{1}{2\pi}\int_{\partial(U\cap\mathbb{C}_J)} P_2^L(s,T) ds_J f(s),$$

由于积分不依赖于开集 U，也不依赖于 $J \in \mathbb{S}$，因此它们定义良好。这里，U 表示一个适当的开集，它具有光滑边界，且包含 T 的 S-谱。

本文旨在依照上文提及的闭算子的全纯泛函演算，为可交换无界算子定义调和泛函演算和 P_2-泛函演算。令 f 为一个适当的切片超全纯函数，并令 ψ 定义如下：

$$\tilde{\psi}(q) = \mathcal{D}(\phi(q)),$$

其中 $\phi(q) := (f \circ \phi_\alpha^{-1})(q)$，$q := \phi_\alpha(s) = (s-\alpha)^{-1}$，$\phi_\alpha(\infty) = 0$，$\phi_\alpha(\alpha) = \infty$。对于 $\alpha \in \rho_S \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$，我们令 $A := (T - \alpha\mathcal{I})^{-1}$。闭四元数算子的 Q-泛函演算定义如下

$$\tilde{f}(T) := (A\bar{A})\tilde{\psi}(A).$$

采用相同的记号，我们定义

$$\breve{\psi}^0(q) := \overline{\mathcal{D}}(q^2\phi(q)),$$

并且，通过该函数，我们定义闭算子的 P_2-函数演算

$$\breve{f}^0(T) := \breve{\psi}^0(A).$$

此外，我们给出了 $\tilde{f}(T)$ 和 $\breve{f}^0(T)$ 的积分表示，它们是 Riesz-Dunford 泛函演算公式 (1.6) 的对应形式。

这一事实并非必然在意料之中，因为 Q-函数演算和 P_2-函数演算是通过积分变换定义的，而 Riesz-Dunford 泛函演算则基于全纯函数的柯西公式。

本文提纲。本文共分为五节，第一节为引言。第二节简要回顾适用于具有可交换分量的有界和无界算子的 S-泛函演算与 F-泛函演算，并对这一演算提出一些新的见解。第三节建立并证明闭算子的调和泛函演算的主要性质。第四节定义闭算子的 P_2-泛函演算，并证明其主要性质。第五节包含一些总结性评论。

2. Preliminaries results on quaternionic operators

本节回顾有关有界和无界算子的 S-泛函演算与 F-泛函演算的一些结果，更多详情见 [22], , 以便全面呈现 S-谱的精细结构。

有界四元数线性算子。设 X 是形如 $X = X_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{H}$ 的双侧四元数巴拿赫模，其中 $X_{\mathbb{R}}$ 是实巴拿赫空间。我们用 $\mathcal{B}(X)$ 表示作用于 X 的所有有界右线性算子构成的巴拿赫空间。为了定义 S-预解集和 S-谱，我们定义算子

$$\mathcal{Q}_s(T) := T^2 - 2s_0T + |s|^2\mathcal{I}$$

适用于 $T \in \mathcal{B}(X)$。

定义 2.1. 设 $T \in \mathcal{B}(X)$。我们将 T 的 S-预解集 $\rho_S(T)$ 定义为

$$\rho_S(T) := \{s \in \mathbb{H} : \mathcal{Q}_s(T)^{-1} \in \mathcal{B}(X)\}.$$

S-谱 $\sigma_S(T)$ 定义为 T 的

$$\sigma_S(T) := \mathbb{H} \setminus \rho_S(T).$$

算子

$$\mathcal{Q}_s(T)^{-1} = (T^2 - 2s_0T + |s|^2\mathcal{I})^{-1}, \quad \text{for} \quad s \in \rho_S(T)$$

称为 T 在 s处的伪 S-预解算子。

由于缺乏交换性，存在两种不同的预解算子。

定义 2.2. 设 $T \in \mathcal{B}(X)$ 且 $s \in \rho_S(T)$。则左（分别为右） S-预解算子定义为

$$S_L^{-1}(s,T) = -\mathcal{Q}_s^{-1}(T)(T - \bar{s}\mathcal{I}), \qquad \left(\text{resp.} \quad S_R^{-1}(s,T) := -(T - \bar{s}\mathcal{I})\mathcal{Q}_s(T)^{-1}\right).$$

我们分别用 $\mathcal{SH}_L(\sigma_S(T))$、 $\mathcal{SH}_R(\sigma_S(T))$ 和 $\mathcal{N}(\sigma_S(T))$ 表示左切片超全纯函数、右切片超全纯函数和内在切片超全纯函数的集合，其中 $\sigma_S(T) \subset \mathrm{dom}(f)$。对于这些函数类，我们引入有界算子的 S-泛函演算。

定义 2.3（S有界算子的函数演算）。设 U 是一个包含 $\sigma_S(T)$ 的有界切片柯西域，并假设 $\overline{U}$包含于 f的域中。对于 $J \in \mathbb{S}$，令 $ds_J = (-J)ds$，并定义 $f \in \mathcal{SH}_L(\sigma_S(T))$（分别为 $\mathcal{SH}_R(\sigma_S(T))$）。

$$f(T) := \frac{1}{2\pi}\int_{\partial(U\cap\mathbb{C}_J)} S_L^{-1}(s,T)ds_J f(s), \quad \left(\text{resp. } f(T) := \frac{1}{2\pi}\int_{\partial(U\cap\mathbb{C}_J)} f(s)ds_J S_R^{-1}(s,T)\right). \quad (2.1)$$

对于有界算子的 S-函数演算是适定的，即式 (2.1) 中的积分既不依赖于 U，也不依赖于虚单位 $J \in \mathbb{S}$。关于 S-函数演算的标准参考文献包括著作 [21, 22, 31]。

现在，我们回顾 F-函数演算，它最早由 [29] 引入，并在 [19, 14, 15] 中得到了进一步发展。这是一种遵循 McIntosh 及其合作者相同思想的单变函数演算，参见 [40, 41], ，但它建立在 S-谱理论的基础之上。F-函数演算是通过积分形式的 Fueter 定理（参见定理 1.9）形式上将四元数 q 替换为适当的四元数算子 T 而得到的。

对于这一泛函演算，我们将考虑作用于实向量空间 $X_{\mathbb{R}}$ 上的具有可交换分量 T_i 的如下形式的有界算子 $T = T_0 + e_1T_1 + T_2e_2 + T_3e_3$，即对于 $i = 0$, 1、2、3，有 $T_i \in \mathcal{B}(X_{\mathbb{R}})$。由具有可交换分量 T_i 的算子 T 所构成的 $\mathcal{B}(X)$ 的子集将记为 $\mathcal{BC}(X)$。对于这些算子，我们以一种不同但等价的方式定义 S- 谱。

定义 2.4. 设 $T \in \mathcal{BC}(X)$。对于 $s \in \mathbb{H}$，我们定义

$$\mathcal{Q}_{c,s}(T) := s^2\mathcal{I} - s(T + \bar{T}) + T\bar{T},$$

其中 $\bar{T} := T_0 - T_1e_1 - T_2e_2 - T_3e_3$。我们将 F-预解集定义为

$$\rho_F(T) := \{s \in \mathbb{H} : \mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-1} \in \mathcal{B}(X)\},$$

以及 T 的 F-谱定义为

$$\sigma_F(T) = \mathbb{H} \setminus \rho_F(T).$$

在 [27] 中证明了，F-谱是 S-谱的交换版本，即对于$T \in \mathcal{BC}(X)$，有

$$\sigma_F(T) = \sigma_S(T).$$

算子 $\mathcal{Q}_{c,\ s}(T)^{-1}$，对于 $s \in \rho_F(T)$，称为 T 在 s 处的交换伪 S-预解算子。在 [27] 中，建立了有界算子的 S-函数演算的交换版本；在此情形下，我们需要处理以下预解算子。

定义 2.5。设 $T \in \mathcal{BC}(X)$ 且 $s \in \rho_S(T)$。我们将左（分别为右）交换S-预解算子定义为

$$S_L^{-1}(s,T) = (s\mathcal{I} - \bar{T})\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-1}, \quad \left(\text{resp.} \quad S_R^{-1}(s,T) = \mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-1}(s\mathcal{I} - \bar{T})\right).$$

注 2.6。为求简便，我们用与非交换情形相同的符号表示 S-预解算子的交换版本，因为下文中不会产生歧义。

借助上述预解算子，可以按照定义 2.3 定义交换的 S-函数演算。现在，我们已经具备了定义 F-函数演算所需的所有工具。

定义 2.7（F-预解算子）。设 $T \in \mathcal{BC}(X)$。我们将 $s \in \rho_S(T)$ 的左（分别为右） F-预解算子定义为:

$$F_L(s,T) = -4(s\mathcal{I} - \bar{T})\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-2}, \quad \left(\text{resp.} \quad F_R(s,T) = -4\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-2}(s\mathcal{I} - \bar{T})\right). \tag{2.2}$$

定义 2.8（有界算子的 F-函数演算）。设 U 是一个包含 $\sigma_S(T)$ 的切片柯西域，并假设 $\overline{U}$ 包含于 f 的域中。设 $T = T_1e_1 + T_2e_2 + T_3e_3 \in \mathcal{BC}(X)$，假设算子 T_ℓ、$\ell = 1$、2、3 具有实谱，并令 $ds_J = ds(-J)$，其中 $J \in \mathbb{S}$。对于满足 $f \in \mathcal{SH}_L(\sigma_S(T))$（分别为 $f \in \mathcal{SH}_R(\sigma_S(T))$）的 $\breve{f} = \Delta f(q)$，我们定义

$$\breve{f}(T) := \frac{1}{2\pi}\int_{\partial(U\cap\mathbb{C}_J)} F_L(s,T)ds_j f(s) \quad \left(\text{resp.} \quad \breve{f}(T) := \frac{1}{2\pi}\int_{\partial(U\cap\mathbb{C}_J)} f(s)ds_j F_R(s,T)\right). \tag{2.3}$$

除了 S-函数演算之外，F-函数演算也定义良好，因为式 (2.3) 中的积分既不依赖于 U，也不依赖于虚单位 $J \in \mathbb{S}$.

注释 2.9。由于 $f = \Delta f(q)$，我们注意到 Δ 有核，而关于核独立性的讨论见 [22]中的注释 7.1.13。通过应用 McIntosh 的单生成函数演算，可得到 F-函数演算与 ker(Δ) 无关；该演算要求算子 T_ℓ、$\ell = 0$、1、2、3 的实谱非空，并且其中一个 T_ℓ 必须是零算子。提出这一要求是为了避免单变预解集不连通，通常取 T_0 为零。

无界四元数线性算子。现在我们回顾针对无界算子的 S-函数演算和 F-函数演算的主要概念，这些概念引入于 [27, 28]。这些函数演算适用于一类特殊的算子，其定义如下。

定义 2.10. 设 X 为双侧巴拿赫空间。若右线性算子 T: dom(T) $\subset X \to X$ 的图在笛卡尔积 $X \times X$中是闭集，则称其为闭算子。

定义 2.11。设 T_ℓ: dom(T_ℓ) $\subset X \to X$ 是关于 $\ell = 0, \ldots, 3$ 的线性闭算子，使得$T_\ell T_k = T_k T_\ell$ 在 dom($T_\ell T_k$) $\cap$ dom($T_k T_\ell$) 上对 $\ell, k = 0, \ldots, 3$ 成立。于是，dom(T) $= \cap_{\ell=0}^{3}$dom(T_ℓ) 是四元数右线性算子 $T = T_0 + \sum_{\ell=1}^{3} e_\ell T_\ell$: dom($T$) $\subset X \to X$ 和$\bar{T} = T_0 - \sum_{\ell=1}^{3} e_\ell T_\ell$: dom($T$) $\subset X \to X$ 的域，因为 dom(T) $=$dom($\bar{T}$)。我们将这个具有可交换分量的闭右线性算子集合记为 $\mathcal{KC}(X)$。

现在，我们给出在此设定下 S-谱的概念。

定义 2.12。设 $T \in \mathcal{KC}(X)$。我们将 $\rho_S(T)$ 记为 T 的 S-预解集，定义为

$$\rho_S(T) := \{s \in \mathbb{H} : \mathcal{Q}_{c,s}^{-1}(T) \in \mathcal{B}(X)\},$$

with

$$\mathcal{Q}_{c,s}(T) := s^2\mathcal{I} - 2sT_0 + T\bar{T}, \quad \text{where} \quad \mathcal{Q}_{c,s}(T) : \mathrm{dom}(T\bar{T}) \to X.$$

我们将 T 的 S-谱 $\sigma_S(T)$ 定义为

$$\sigma_S(T) = \mathbb{H} \setminus \rho_S(T).$$

扩展的 S-谱定义为

$$\bar{\sigma}_S(T) := \sigma_S(T) \cup \{\infty\}.$$

注　　释 2.13。下文中我们将始终假设 S-预解集非空。

定义 2.14。设 $T \in \mathcal{KC}(X)$。对于 $s \in \rho_S(T)$，我们定义

$$\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-1} := (s^2 - s(T + \bar{T}) + T\bar{T})^{-1},$$

T 在 s 处的交换伪 S-预解算子，其中 $\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-1}$ 将 X 映射到 dom($T\bar{T}$)，对于 $s \in \rho_S(T)$。

定义 2.15（无界情形下的（交换） S-预解算子）。设 $T \in \mathcal{KC}(X)$。对于 $s \in \rho_S(T)$，我们将 T 在 s 处的左（分别为右） S-预解算子定义为

$$S_L^{-1}(s,T) = (s\mathcal{I} - \bar{T})\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-1} \quad \left(\text{reps.} \quad S_R^{-1}(s,T) = \mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-1}s - \bar{T}\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-1}\right).$$

注意，由于 $S_L^{-1}(s,T)$ 和 $S_R^{-1}(s,T)$ 的定义方式，它们将 X 映射到 dom(T)。

定义 2.16. 设 $T \in \mathcal{KC}(X)$。函数 f 在 $\overline{\sigma}_S(T)$ 中左切片超全纯，当且仅当 f 是左切片超全纯的，且 $\sigma_S(T) \subset$ dom(f)；此外，若某个 $r > 0$ 满足 $\mathbb{H} \setminus B_r(0) \subset$dom($f$)，且 $f(\infty) =\lim_{q\to\infty} f(q)$ 存在。我们将这类函数记为 $\mathcal{SH}_L(\overline{\sigma}_S(T))$。

类似地，我们可以定义 $\mathcal{SH}_R(\overline{\sigma}_S(T))$ 和 $\mathcal{N}(\overline{\sigma}_S(T))$ 中的函数。

定义 2.17. 对于 $\alpha \in \rho_S(T) \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$，我们定义同态 $\phi_\alpha : \overline{\mathbb{H}} \to \overline{\mathbb{H}}$ as

$$p = \phi_\alpha(s) = (s - \alpha)^{-1}, \qquad \phi_\alpha(\alpha) = \infty, \qquad \phi_\alpha(\infty) = 0. \tag{2.4}$$

命题 2.18. 设 A:=$(T - \alpha\mathcal{I})^{-1}$，对于如上所定义的 $\alpha \in \rho_S(T) \cap \mathbb{R}$和 ϕ_α，则映射 $f \mapsto f \circ \phi_\alpha^{-1}$在 $\mathcal{SH}_L(\overline{\sigma}_S(T))$（分别为 $\mathcal{SH}_R(\overline{\sigma}_S(T))$）与 $\mathcal{SH}_L(\sigma_S(A))$（分别为 $\mathcal{SH}_L(\overline{\sigma}_S(T))$）之间，以及在 $\mathcal{N}(\overline{\sigma}_S(T))$ 与 $\mathcal{N}(\sigma_S(A))$ 之间建立一一对应。具体而言，有

$$\begin{aligned}
\mathcal{SH}_L(\sigma_S(A)) &= \{f \circ \phi_\alpha^{-1} : f \in \mathcal{SH}_L(\overline{\sigma}_S(T))\},\\
\mathcal{SH}_R(\sigma_S(A)) &= \{f \circ \phi_\alpha^{-1} : f \in \mathcal{SH}_R(\overline{\sigma}_S(T))\},\\
\mathcal{N}(\sigma_S(A)) &= \{f \circ \phi_\alpha^{-1} : f \in \mathcal{N}_L(\overline{\sigma}_S(T))\}.
\end{aligned}$$

证明。由 [22, 推论 5.2.4] 可得。 □

定义 2.19（无界算子的 S-泛函）。设 $T \in \mathcal{KC}(X)$。假设 $\rho_S(T) \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$，并设 $f \in \mathcal{SH}_L(\overline{\sigma}_S(T))$。考虑 $\phi(p) = f(\phi_\alpha^{-1}(p))$ 以及算子

$$A := (T - \alpha\mathcal{I})^{-1}, \qquad \alpha \in \rho_S(T) \cap \mathbb{R}.$$

我们定义

$$f(T) := \phi(A). \tag{2.5}$$

我们注意到，可交换无界算子的 S-泛函演算是良定义的。这基于以下事实：$f(T) = \phi((T - \alpha\mathcal{I})^{-1})$ 不依赖于 α，这由下述定理保证。

定理 2.20。设 $T \in \mathcal{KC}(X)$，且 $\rho_S(T) \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$。假设 $f \in \mathcal{SH}_L(\overline{\sigma}_S(T))$，且 $f(T)$ 是式 (2.5) 中定义的算子。则

$$f(T) = f(\infty)\mathcal{I} + \frac{1}{2\pi}\int_{\partial(U \cap \mathbb{C}_J)} S_L^{-1}(s,T)ds_J f(s),$$

对于每个满足 $\sigma_S(T) \subset U$ 且 $\overline{U} \subset \mathrm{dom}(f)$ 的无界切片柯西域，以及每个虚单位 $J \in \mathbb{S}$，均有此结论。类似地，若 $f \in \mathcal{SH}_R(\overline{\sigma}_S(T))$ 且 $f(T)$ 是式 (2.5) 中定义的算子，则

$$f(T) = f(\infty)\mathcal{I} + \frac{1}{2\pi}\int_{\partial(U \cap \mathbb{C}_J)} f(s)ds_J S_R^{-1}(s,T),$$

对于每个满足 $\sigma_S(T) \subset U$ 且 $\overline{U} \subset \mathrm{dom}(f)$ 的无界切片柯西区域，以及任意虚单位 $J \in \mathbb{S}$。

为了证明上述定理，关键是回顾预解式 $S_L^{-1}(s,T)$ 与 $S_L^{-1}(p,A)$ 之间的关系，该关系由以下结果给出，见 [27, 定理 6.12]。

定理 2.21. 设 $\alpha \in \rho_S(T) \cap \mathbb{R}$。若 ϕ_α 按 (2.4) 定义，则 $\phi_\alpha(\overline{\sigma}_S(T)) = \sigma_S(A)$。此外，下列恒等式成立

$$S_L^{-1}(p,A) = p^{-1}\mathcal{I} - S_L^{-1}(s,T)p^{-2}, \tag{2.6}$$

其中，$S_L^{-1}(p,A)$ 是定义 2.15 中无界情形下的交换 S-预解算子。

现在，我们回顾无界算子的 S-泛函演算的若干性质，见 [27,定理 6.14]。

定理 2.22. 设 $T \in \mathcal{KC}(X)$，且 $\rho_S(T) \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$。

- 若 f、$g \in \mathcal{SH}_L(\overline{\sigma}_S(T))$ 且 $a \in \mathbb{H}$，则
$$(fa + g)(T) = f(T)a + g(T),$$
- *If* $f \in \mathcal{N}(\overline{\sigma}_S(T))$ 和 $g \in \mathcal{SH}_L(\overline{\sigma}_S(T))$ 或 $f \in \mathcal{SH}_R(\overline{\sigma}_S(T))$ 和 $g \in \mathcal{N}(\overline{\sigma}_S(T)$，该 n
$$(fg)(T) = f(T)g(T).$$
- 如果 $s, q \in \rho_S(T)$ 且 $s \notin [q]$，那么
$$\begin{aligned} S_R^{-1}(s,T)S_L^{-1}(q,T) &= [\left(S_R^{-1}(s,T) - S_L^{-1}(q,T)\right)q \\ &\quad -\bar{s}\left(S_R^{-1}(s,T) - S_L^{-1}(q,T)\right)](q^2 - 2s_0q + |s|^2)^{-1}. \end{aligned}$$

下述结果将 T 的交换伪 S-预解式与 A 的交换伪 S-预解式联系起来，参见 [22,定理 8.1.1]。

定理 2.23. 设 $T \in \mathcal{KC}(X)$，并假设存在一点 $\alpha \in \rho_S(T) \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$ 并令$A := (T-\alpha\mathcal{I})^{-1}$。对于 $p = \phi_\alpha(s) = (s-\alpha)^{-1}$，有

$$\mathcal{Q}_{c,p}(A)^{-1} = \left(A\overline{A}\right)^{-1} \mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-1}p^{-2}$$

and

$$\mathcal{Q}_{c,p}(A)^{-2} = \left(A\overline{A}\right)^{-2} \mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-2}p^{-4}.$$

现在，我们修订无界算子的 F-函数演算。

定义 2.24. 设 $T \in \mathcal{KC}(X)$。对于 $s \in \rho_S(T)$。我们将左（分别为右） F-预解算子定义为

$$F_L(s,T) = -4(s\mathcal{I}-\bar{T})\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-2}, \quad \left(\text{resp.} \quad F_R(s,T) = -4\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-2}s - \bar{T}\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-2}\right).$$

本文讨论的无界算子的 F-函数演算将基于 F-预解算子 $F_L(p,A)$ 与 $F_L(s,T)$ 之间的以下关系。与¯中定义的区别在于算子 AA 的幂次。

定理 2.25. 设 $T \in \mathcal{KC}(X)$，设 $\alpha \in \rho_S(T) \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$并定义 $A = (T-\alpha\mathcal{I})^{-1}$。对于 $s \in \rho_S(T)$ 和 $p = \phi_\alpha(s) = (s-\alpha)^{-1}$，有

$$(A\bar{A})F_L(p,A)p^4v = -4p\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-1}v - F_L(s,T)v, \quad v \in X. \tag{2.7}$$

证明。我们首先注意到，可以将 F-预解算子 $F_L(p,A)$ 写为

$$F_L(p,A) = -4S_L^{-1}(p,A)\mathcal{Q}_{c,p}(A)^{-1}.$$

利用公式 (2.6) 和定理 2.23，我们得到

$$F_L(p,A) = -4\left(p^{-1}\mathcal{I} - S_L^{-1}(s,T)p^{-2}\right)(A\bar{A})^{-1}\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-1}p^{-2}.$$

感谢关于 T 的假设以及由此关于 A 的假设，该算子

$$A\overline{A} = (\alpha^2\mathcal{I} - \alpha(T+\overline{T}) + T\overline{T})^{-1} : \ X \to \mathrm{dom}(T\overline{T})$$

不包含虚单位，以及

$$(A\overline{A})^{-1} = \alpha^2\mathcal{I} - \alpha(T+\overline{T}) + T\overline{T} : \ \mathrm{dom}(T\overline{T}) \to X.$$

这意味着，由于 $p = (s-\alpha)^{-1}$，我们可以使 $(A\overline{A})^{-1}$ 与 p^{-1} 及其各次幂交换。此外，$(A\overline{A})^{-1}$ 也与 S-预解集的交换版本交换。

$$S_L^{-1}(s,T) = (s\mathcal{I}-\bar{T})\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-1}.$$

关于算子的定义域，我们回顾如下：

$$\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-1} : X \to \mathrm{dom}(T\bar{T})$$

and

$$S_L^{-1}(s,T) : X \to \mathrm{dom}(T)$$

因此，我们有

$$S_L^{-1}(s,T)p^{-2}(A\bar{A})^{-1}\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-1}p^{-2}v = (A\bar{A})^{-1}S_L^{-1}(s,T)p^{-2}\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-1}p^{-2}v$$

对所有 $v \in X$，以及对所有 $s \in \rho_S(T)$。现在注意到，我们得到

$$\begin{aligned} F_L(p,A)v &= (A\bar{A})^{-1}[-4\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-1}p^{-3} + 4S_L^{-1}(s,T)\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-1}p^{-4}]v \\ &= (A\bar{A})^{-1}\left(-4\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-1}p^{-3} - F_L(s,T)p^{-4}\right)v \end{aligned}$$

且该关系对 $v \in X$ 成立。通过观察以下事实即可证明：

$$\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-2} : X \to \mathrm{dom}((T\bar{T})^2)$$

其中 $\mathrm{dom}((T\bar{T})^2) = \mathrm{dom}(T^4)$，因此 $-4\mathcal{Q}_{c,\ s}(T)^{-1}p^{-3} - F_L(s,T)p^{-4}$ 的值域包含于 $(A\bar{A})^{-1}$ 的定义域中。此外，$F_L(p,A)$ 的值域包含于 $A\bar{A}$ 的定义域中。由此可知，我们可以在左侧乘以 $A\bar{A}$，并在右侧乘以 $p^4\mathcal{I}$，从而得到所述结论。□

公式 (2.7) 适用于定义无界算子的 F-函数演算。值得注意的是，上述公式给出了 F-函数演算的一种定义，与文献中常用的定义略有不同，参见 [22]。

牢记 ϕ_α 的定义及其性质（参见定义 2.17 和命题 2.18），我们可以定义无界算子的 F-函数演算。

定义 2.26（无界算子的 F-函数演算）。设 $T \in \mathcal{KC}(X)$，并假设算子 T_ℓ, $\ell = 0, 1, 2, 3$ 的实谱非空，其中 T_ℓ 之一为零算子。设 $\rho_S(T) \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$，令 $\alpha \in \rho_S(T) \cap \mathbb{R}$，按 (2.4) 定义 ϕ_α，并令 $A := (T - \alpha\mathcal{I})^{-1}$。对于满足 $f(\alpha) = 0$ 的 $f \in \mathcal{SH}_L(\overline{\sigma}_S(T))$，我们考虑以下函数

$$\phi(q) = (f \circ \phi_\alpha^{-1})(q),$$
$$\breve{\phi}(q) = \Delta(q^2\phi(q))$$

并且对于 $f = \Delta f$，我们将算子 $f\breve{}(T)$ 定义为

$$\breve{f}(T) := (A\bar{A})\breve{\phi}(A), \tag{2.8}$$

其中，$\phi(A)$ 是通过有界 F-泛函演算定义的。对于满足 $f(\alpha) = 0$ 的 $f \in \mathcal{SH}_R(\overline{\sigma}_S(T))$，也有类似的定义。

定理 2.27。设 $T \in \mathcal{KC}(X)$，并假设算子 T_ℓ、$\ell = 0$、1、2、3 的实谱均存在，其中 T_ℓ 之一是零算子。设 $\rho_S(T) \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$，令 $\alpha \in \rho_S(T) \cap \mathbb{R}$，按 (2.4) 定义$\phi_\alpha$，并令 $A := (T - \alpha\mathcal{I})^{-1}$。对于满足 $f \in \mathcal{SH}_L(\overline{\sigma}_S(T))$ 且 $f(\alpha) = 0$ 的 $\breve{f} = \Delta f$，由 (2.8) 定义的$\breve{}$算子 $f(T)$ 满足

$$\breve{f}(T) = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial(U\cap\mathbb{C}_J)} F_L(s,T)ds_J f(s),$$

其中，U 是任意满足 $\sigma_S(T) \subset U$ 且 $\overline{U} \subset \mathrm{dom}(f)$ 的无界切片柯西域，J 是任意虚单位 $J \in \mathbb{S}$。对于满足 $f(\alpha) = 0$ 的 $f \in \mathcal{SH}_R(\overline{\sigma}_S(T))$，也有类似的积分表示。

证明。考虑到关系式 (2.7)，证明过程与 [22, 定理 8.2.3] 完全相同。□

我们注意到，与无界算子的 S-函数演算中的情况类似，无界算子的 F-函数演算同样不依赖于参数 α，并且注释 2.9 中的相关讨论也适用于无界情形。

3. Harmonic functional calculus for unbounded operators

众所周知，我们可以用柯西–富特算子 $\mathcal{D}$ 对拉普拉斯算子进行因式分解，并且有 $\Delta = \mathcal{D}\overline{\mathcal{D}} = \overline{\mathcal{D}}\mathcal{D}$。当我们将算子 $\mathcal{D}$ 或其共轭 $\overline{\mathcal{D}}$ 作用于一个切片超全纯函数时，会得到不同类别的函数。本节中，我们按照定义 1.10 的意义考察调和精细结构，另见 [13]。

定义 3.1（轴调和函数）。设 $\Omega \subset \mathbb{R}^4$ 是一个轴对称域。若函数 $f : \Omega \to \mathbb{H}$，且 $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$，则称其为轴调和函数，当且仅当

$$\Delta f(q) = \sum_{i=0}^{3} \partial_{q_i}^2 f(q) = 0$$

并且它具有形式 (1.2)，其中函数 A 和 B 满足奇偶条件 (1.1)。我们用符号 $\mathcal{AH}(\Omega)$表示这个函数空间。

当我们将算子 $\mathcal{D}$ 作用于切片超全纯函数 $f(q)$ 时，作为 Fueter 定理的直接推论，我们得到

$$\Delta\left(\mathcal{D}f(q)\right)=0.$$

这意味着函数 $\mathcal{D}f(q)$ 在定义 3.1 的意义下是轴向调和的，因此，调和精细结构的函数空间由下图给出

$$\mathcal{O}(D)\xrightarrow{T_{F1}}\mathcal{SH}(\Omega_D)\xrightarrow{\mathcal{D}}\mathcal{AH}(\Omega_D)\xrightarrow{\overline{\mathcal{D}}}\mathcal{AM}(\Omega_D), \tag{3.1}$$

本节旨在为精细结构 (3.1) 定义无界函数演算。为此，我们需要先回顾基于 S-谱的有界算子的调和函数演算（或 Q-函数演算）的定义，参见 [13]。

定义 3.2. 设 $T\in\mathcal{BC}(X)$，并假设算子 T_ℓ, $\ell=0,1,2,3$ 具有实谱，其中 T_ℓ 之一为零算子，并令 $ds_J=ds(-J)$，其中 $J\in\mathbb{S}$。对于每个满足 $f\in\mathcal{SH}_L(\sigma_S(T))$（分别为 $f\in\mathcal{SH}_R(\sigma_S(T))$）的函数 $f=\mathcal{D}\tilde{f}$（分别为 $f=f\mathcal{D}$），我们定义

$$\tilde{f}(T)=-\frac{1}{\pi}\int_{\partial(U\cap\mathbb{C}_J)}\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-1}ds_Jf(s),\quad\left(\text{resp.}\quad\tilde{f}(T)=-\frac{1}{\pi}\int_{\partial(U\cap\mathbb{C}_J)}f(s)ds_J\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-1}\right)$$

其中 U 是任意有界切片柯西域，满足 $\sigma_S(T)\subset U$ 且 $\overline{U}\subset\text{dom}(f)$，而 $J\in\mathbb{S}$ 是任意虚单位。

注 3.3。 Q-函数演算与 $\ker(\mathcal{D})$ 的独立性是通过使用 McIntosh 的单生成函数演算得到的。这要求算子 T_ℓ、 $\ell=0$、1、2、3 具有实谱，并且其中一个 T_ℓ 必须为零（对于无界算子的情形，另请参见命题 3.11 的证明）。

对于左（分别为右）切片超全纯函数， Q-函数演算是四元数˜右（分别为左）线性的。这意味着，如果我们考虑 $f=\mathcal{D}f$ 和 $\tilde{g}=\mathcal{D}g$ （分别为 $f=f\mathcal{D}$ 和 $\tilde{g}=g\mathcal{D}$），其中 f、$g\in\mathcal{SH}_L(\sigma_S(T))$（分别为 f、 $g\in\mathcal{SH}_R(\sigma_S(T))$ 和 $a\in\mathbb{H}$），则对于 $T\in\mathcal{BC}(X)$，我们有

$$(\tilde{f}a+\tilde{g})(T)=\tilde{f}(T)a+\tilde{g}(T),\quad\left(\text{resp.}\quad(a\tilde{f}+\tilde{g})(T)=a\tilde{f}(T)+\tilde{g}(T)\right). \tag{3.2}$$

在 [13] 中，引入 Q-泛函演算，以获得 F-泛函演算的乘积法则。此外，我们研究了适用于此泛函演算的预解方程，以便在此情形下生成黎斯投影，并得到以下乘积法则，见 [35]。

定理 3.4. 设 $T\in\mathcal{BC}(X)$，并假设算子 T_ℓ, $\ell=0,1,2,3$ 的谱为实谱，其中一个 T_ℓ 是零算子。我们假设 $f\in\mathcal{N}(\sigma_S(T))$ 和 $g\in\mathcal{SH}_L(\sigma_S(T))$，或者 $f\in\mathcal{SH}_R(\sigma_S(T))$ 和 $g\in\mathcal{N}(\sigma_S(T))$，则

$$\mathcal{D}(fg)(T)=f(T)(\mathcal{D}g)(T)+(\mathcal{D}f)(T)g(T)+(\mathcal{D}f)(T)\underline{T}(\mathcal{D}g)(T), \tag{3.3}$$

其中 $\underline{T}:=T_1e_1+T_2e_2+T_3e_3$。

为了引入无界算子的调和函数演算，我们需要使用定义 2.17 中引入的同胚 ϕ_α 及其在命题 2.18 中的性质。

定义 3.5（无界算子的调和泛函演算）。设 $T\in\mathcal{KC}(X)$，假设算子 T_ℓ, $\ell=0,1,2,3$ 具有实谱，其中一个 T_ℓ 是零算子。令 $\rho_S(T)\cap\mathbb{R}\neq\emptyset$，并假设 $\alpha\in\rho_S(T)\cap\mathbb{R}$。

对于 $f\in\mathcal{SH}_L(\overline{\sigma}_S(T))$，我们定义函数

$$\phi(q):=(f\circ\phi_\alpha^{-1})(q),$$

$$\widetilde{\psi}(q) := \mathcal{D}(\phi(q))$$

其中 $\mathcal{D}$ 是 th $\widetilde{\text{e}}$ 柯西–富特算子。调和泛函演算 $f(T)$ 的定义为 a s

$$\tilde{f}(T) := (A\bar{A})\tilde{\psi}(A), \tag{3.4}$$

$\tilde{}$其中 $f = \mathcal{D}f$。对于 $f \in \mathcal{SH}_R(\overline{\sigma}_S(T))$，也有类似的定义。

现在我们利用两个可交换的伪 S-预解算子 $\mathcal{Q}_{c,\ p}(A)^{-1}$ 和 $\mathcal{Q}_{c,\ s}(T)^{-1}$之间的关系，为无界算子的调和泛函演算提供一种积分形式。

我们可以证明，无界算子的调和泛函演算定义良好，因为它不依赖于点 $\alpha \in \rho_S(T)$。此外，我们还必须证明，取切片超全纯函数时，泛函演算与 $\mathcal{D}$ 的核无关。

定理 3.6。设 $T \in \mathcal{KC}(X)$，并假设算子 T_ℓ、 $\ell = 0$、1、2、3 的实谱，其中某个 T_ℓ 是零算子。设 $\rho_S(T) \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$，并假设 $\alpha \in \rho_S(T) \cap \mathbb{R}$。对于满足 $f \in \mathcal{SH}_L(\overline{\sigma}_S(T))$ 的

$\tilde{}$ $\tilde{f} = \mathcal{D}f$，由式 (3.4) 定义的算子 $f(T)$ 满足

$$\tilde{f}(T) = -\frac{1}{\pi}\int_{\partial(U\cap\mathbb{C}_J)} \mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-1} ds_J f(s), \tag{3.5}$$

$\bar{}$其中， U是任意一个满足 $\sigma_S(T) \subset U$且 $U \subset \text{dom}(f)$ 和 $J \in \mathbb{S}$的无界切片柯西域。对于 $f \in \mathcal{SH}_R(\overline{\sigma}_S(T))$，也有类似的积分表示。

证明。我们假设 $\alpha \notin U$。若不满足这一条件，我们可以用轴对称切片柯西域 $U \setminus B(\alpha)$ 替换集合 U，并取足够小的 $\varepsilon > 0$；根据柯西积分公式，这不会改变积分 (3.5) 的值。

令 $V = \phi_\alpha(U)$。这是一个有界切片柯西域，包含 $\sigma_S(A)$ 和 $\overline{V} \subset \text{dom}(f \circ \phi_\alpha^{-1})$。根据 $\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-1}$ 与 $\mathcal{Q}_{c,p}(A)^{-1}$ 之间的关系（见定理 2.23），并作变量替换 $p = \phi_\alpha(s)$，得到

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\pi}\int_{\partial(U\cap\mathbb{C}_J)} \mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-1} ds_J f(s) &= -\frac{(A\bar{A})}{\pi}\int_{\partial(V\cap\mathbb{C}_J)} \mathcal{Q}_{c,p}(A)^{-1} dp_J (f\circ\phi_\alpha^{-1})(p) \\ &= (A\bar{A})\widetilde{\psi}(A) \\ &= \tilde{f}(T). \end{aligned}$$

□

注 3.7。与 F-泛函演算的情形不同，我们不需要要求 $f(\alpha) = 0$。

在证明 Q-函数演算定义良好之前，我们需要以下引理。

引理 3.8. 设 $f, g \in \mathcal{SH}_L(\overline{\sigma}_S(T))$。那么我们有

$$\mathcal{D}(f-g) = 0 \quad \Rightarrow \quad f - g = c,$$

其中 c 是一个常数。

证明。我们注意到，由于 $f, g \in \mathcal{SH}_L(\overline{\sigma}_S(T))$，因此 $f - g \in \mathcal{SH}_L(\overline{\sigma}_S(T))$，所以特别地，它们属于 $\mathcal{C}^1$ 类。根据假设， $f - g$ 是一个单变函数，它

$$f(x_0, r) - g(x_0, r) = \big(A(x_0, r) + J\, B(x_0, r)\big) P_k(J), \quad r = |\underline{q}|, \tag{3.6}$$

其中， $P_k(J)$ 是依赖于角部分 $J \in \mathbb{S}$ 的适当多项式，而 A 和 B 是 $\mathbb{H}$ 值的连续可微函数，定义在极坐标 $\mathbb{R}^2$ 中，并由以下条件刻画

韦库亚型方程组

$$\begin{cases} \partial_{x_0} A - \partial_r B &= \dfrac{2k+m-1}{r}\, B \\ \partial_{x_0} B + \partial_r A &= 0. \end{cases} \tag{3.7}$$

形如 (3.6) 的单生成函数称为 k 次轴向单生成函数，参见 [36]。我们注意到，切片超全纯函数的系数 A 不依赖于 $P_k(J)$，这意味着 $k=0$，因此 $P_0(J)=1$。由于 f， $g \in \mathcal{SH}_L(\overline{\sigma}_S(T))$

$$f(x_0,r) = g(x_0,r) + A(x_0,r) + J\,B(x_0,r) \tag{3.8}$$

此外， $A(x_0,r)+J\,B(x_0,r)$ 必须满足柯西-黎曼方程组。因此我们得到 $B=0$、 $\partial_{x_0}A=0$ 和 $\partial_r A=0$。这意味着 A 是常数。□

注记 3.9. 下文中，我们将始终认为，在 $\overline{\sigma}_S(T)$ 的每个连通分支上，常数 c 彼此不同。

注记 3.10. 通过与引理 3.8 类似的论证，可以证明，对于 f， $g \in \mathcal{SH}_L(\sigma_S(T))$，有

$$\overline{\mathcal{D}}(f-g)=0 \quad \Rightarrow \quad f-g=c,$$

其中， c 为常数。

设 $f, f_* \in \mathcal{SH}_L(\overline{\sigma}_S(T))$ 满足 $\mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(f_*)$。根据引理 3.8，我们有 $f_* = f + c$。在下一个结果中，我们证明调和泛函演算对于 f 和 f_* 是等价的。

命题 3.11. 设 $T \in \mathcal{KC}(X)$，假设算子 T_ℓ, $\ell = 0, 1, 2, 3$ 具有实谱，其中一个 T_ℓ 是零算子。设 $\rho_S(T) \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$ 并且假设 $\alpha \in \rho_S(T) \cap \mathbb{R}$.˜对于每个函数 $f \in \mathcal{SH}_L(\overline{\sigma}_S(T))$，在 (3.4) 中定义的算子 $f(T)$ 不依赖于 $\alpha \in \rho_S(T) \cap \mathbb{R}$ 的选取。此外，如果我们将 f 替换为 $f+c$，其中 c 是一个四元数常数，那么 Q-函数演算不依赖于 c。当 $f \in \mathcal{SH}_R(\overline{\sigma}_S(T))$ 时，对于积分表示也有类似的结论。

证明。(3.4) 中定义的算子与参数 $\alpha \in \rho_S(T) \cap \mathbb{R}$ 无关，因为 (3.5) 中的积分不依赖于 α。对于陈述的第二部分，令 $f_* = f + c$，并考虑

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\pi}\int_{\partial(U\cap\mathbb{C}_J)} \mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-1} ds_J f_*(s) &= -\frac{1}{\pi}\int_{\partial(U\cap\mathbb{C}_J)} \mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-1} ds_J (f+c)(s) \\ &= -\frac{1}{\pi}\int_{\partial(U\cap\mathbb{C}_J)} \mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-1} ds_J f(s) - \frac{1}{\pi}\int_{\partial(U\cap\mathbb{C}_J)} \mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-1} ds_J c \\ &= (A\bar{A})\widetilde{\psi}(A) \\ &= \tilde{f}(T), \end{aligned}$$

其中我们使用了有界算子的调和泛函演算的定义，见定义 3.2，以及这样一个事实:

$$-\frac{1}{\pi}\int_{\partial(U\cap\mathbb{C}_J)} \mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-1} ds_J c = 0. \tag{3.9}$$

最后一个等式是由 F-预解算子和 Q-预解算子的两个性质推得的。第一个性质由左侧 F-预解方程 [22, 定理 7.3.1] 表示。

$$\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-1} = \frac{1}{4}\big(-F_L(s,T)s + TF_L(s,T)\big) \tag{3.10}$$

这意味着

$$-\frac{1}{\pi}\int_{\partial(U\cap\mathbb{C}_J)}\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-1}ds_J c=-\frac{1}{\pi}\int_{\partial(U\cap\mathbb{C}_J)}\frac{1}{4}\big(-F_L(s,T)s+TF_L(s,T)\big)ds_J c.$$

第二个性质是以下积分均为零:

$$\int_{\partial(U_i\cap\mathbb{C}_J)}F_L(s,T)sds_J=0\quad\text{and}\quad\int_{\partial(U_i\cap\mathbb{C}_J)}TF_L(s,T)ds_J=0,$$

其中， U_i 是 U 的连通分支，某些 $q\in\mathbb{N}$ 和 $i=1$、.....、q 亦然。这个事实是 McIntosh 及其合作者所发展的单生成函数演算的推论（参见 [41] 和 [22, 注 7.1.13 及引理 7.4.1]）。由于我们假设算子 T_ℓ、 $\ell=0$、1、2、3 的谱为实谱，且其中一个 T_ℓ 是零算子，因此可以应用这一演算。□

注 3.12. 在前一定理的假设下，如果我们令常数 c 在 U 的所有连通分支中都相同，就可以删去其中一个 T_ℓ 为零算子的要求。事实上，在这种情况下，要证明

$$-\frac{1}{\pi}\int_{\partial(U\cap\mathbb{C}_J)}\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-1}ds_J c=0,$$

只需对左切片超全纯向量值函数 $\mathcal{Q}_{c,\ s}(T)^{-1}$ 应用柯西积分定理。

本节最后，我们证明无界算子的 Q-函数演算具有线性性质和乘积法则。这些性质自然地源自有界算子的 Q-函数演算所具有的相应性质。

定理 3.13. 设 $T\in\mathcal{KC}(X)$，并假设算子 T_ℓ, $\ell=0,1,2,3$ 的实谱，其中 T_ℓ 之一为零算子。设 $\rho_S(T)\cap\mathbb{R}\neq\emptyset$，并假设 $\alpha\in\rho_S(T)\cap\mathbb{R}$ 和 $A:=(T-\alpha\mathcal{I})^{-1}$。

- (线性性) 若 $f,g\in\mathcal{SH}_L(\sigma_S(T))$ 且 $a\in\mathbb{H}$，则
$$(\tilde{f}a+\tilde{g})(T)=\tilde{f}(T)a+\tilde{g}(T).$$
类似地，若 $f,g\in\mathcal{SH}_R(\sigma_S(T))$ 且 $a\in\mathbb{H}$，则
$$(a\tilde{f}+\tilde{g})(T)=a\tilde{f}(T)+\tilde{g}(T).$$
- (乘积法则) 若 $f\in\mathcal{N}(\sigma_S(T))$ 且 $g\in\mathcal{SH}_L(\sigma_S(T))$，或 $f\in\mathcal{SH}_R(\sigma_S(T))$ 且 $g\in\mathcal{N}(\sigma_S(T))$，则
$$\mathcal{D}(fg)(T)=f(T)(\mathcal{D}g)(T)+(\mathcal{D}f)(T)g(T)+(A\bar{A})^{-1}(\mathcal{D}f)(T)\underline{A}(\mathcal{D}g)(T),$$
其中 $\underline{A}:=A_1e_1+A_2e_2+A_3e_3$。

证明。令 $\alpha\in\rho_S(T)\cap\mathbb{R}$，设 $A=(T-\alpha\mathcal{I})^{-1}$，并按照 (2.4) 定义 ϕ_α。由 (3.4) 和 (3.2) 可得

$$\begin{aligned}(\tilde{f}a+\tilde{g})(T) &= (A\bar{A})\mathcal{D}\left((fa+g)\circ\phi_\alpha^{-1}\right)(A)\\ &= (A\bar{A})\mathcal{D}(f\circ\phi_\alpha^{-1})(A)a+(A\bar{A})\mathcal{D}(g\circ\phi_\alpha^{-1})(A)\\ &= \tilde{f}(T)a+\tilde{g}(T).\end{aligned}$$

对于右切片超全纯函数，该结论可由（3.2）的第二个等式及类似的论证得出。

¯为了证明乘积法则，我们必须使用 (3.4)、(3.3) 和 (2.5)。由于算子 AA 是标量值的，我们得到

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(fg)(T) &= (A\bar{A})\mathcal{D}((fg)\circ\phi_\alpha)(A)\\ &= (A\bar{A})\mathcal{D}\left((f\circ\phi_\alpha^{-1})(g\circ\phi_\alpha^{-1})\right)(A)\\ &= (f\circ\phi_\alpha^{-1})(A)(A\bar{A})\mathcal{D}\left(g\circ\phi_\alpha^{-1}\right)(A)+(A\bar{A})\mathcal{D}(f\circ\phi_\alpha^{-1})(A)\left(g\circ\phi_\alpha^{-1}\right)(A)\\ &\quad +\mathcal{D}(f\circ\phi_\alpha^{-1})(A)\underline{A}(A\bar{A})\mathcal{D}(g\circ\phi_\alpha^{-1})(A)\\ &= f(T)(\mathcal{D}g)(T)+(\mathcal{D}f)(T)g(T)+(A\bar{A})^{-1}(\mathcal{D}f)(T)\underline{A}(\mathcal{D}g)(T).\end{aligned}$$

□

注 3.14。为了得到无界算子的多重调和函数演算，我们需要考虑至少在五维的克利福德代数框架中的 Fueter-Sce 定理。在这种情况下，我们可以对 Fueter 延拓进行因式分解，以涵盖任意阶的多重调和函数。

我们以算子 $\mathcal{Q}_{c,p}(A)^{-1}$, $\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-1}$ 和 $S_L^{-1}(s,T)$ 之间的一个关系作为本节的结束。这个关系本身也很有意义，并揭示了调和精细结构的预解算子之间的联系。

命题 3.15. 设 $T\in\mathcal{KC}(X)$，设 $\alpha\in\rho_S(T)\cap\mathbb{R}\neq\emptyset$，并定义 $A:=(T-\alpha\mathcal{I})^{-1}$。对于$s\in\rho_S(T)$ 和 $p=\phi_\alpha(s)=(s-\alpha)^{-1}$，有

$$A\mathcal{Q}_{c,p}(A)^{-1}p^3v=-S_L^{-1}(s,T)pv+\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-1}v,\quad v\in X.$$

证明。根据定理 2.23，由于我们假设 $T\in\mathcal{KC}(X)$，且存在一点 $\alpha\in\rho_S(T)\cap\mathbb{R}\neq\emptyset$，对于 $A:=(T-\alpha\mathcal{I})^{-1}$ 和 $p=\phi_\alpha(s)$，有

$$\mathcal{Q}_{c,p}(A)^{-1}=\left(A\overline{A}\right)^{-1}\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-1}p^{-2}.$$

因此，我们得到以下等式链

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_{c,p}(A)^{-1}&=A^{-1}(\overline{A})^{-1}\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-1}p^{-2}\\ &=A^{-1}(\overline{T}-\alpha\mathcal{I})\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-1}p^{-2}\\ &=A^{-1}(\overline{T}-s\mathcal{I}+s\mathcal{I}-\alpha\mathcal{I})\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-1}p^{-2}\end{aligned}$$

并且

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_{c,p}(A)^{-1}&=A^{-1}(-(s\mathcal{I}-\overline{T})+s\mathcal{I}-\alpha\mathcal{I})\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-1}p^{-2}\\ &=A^{-1}(-(s\mathcal{I}-\overline{T})\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-1}+(s-\alpha)\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-1})p^{-2}.\end{aligned}$$

回顾左 S-预解算子

$$S_L^{-1}(s,T)=(s\mathcal{I}-\bar{T})\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-1}$$

并在右侧乘以 p^2，我们得到

$$\mathcal{Q}_{c,p}(A)^{-1}p^2=A^{-1}\big(-S_L^{-1}(s,T)+\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-1}(s-\alpha)\big).$$

考虑到关系 $p=\phi_\alpha(s)$，我们得到

$$\mathcal{Q}_{c,p}(A)^{-1}p^2=A^{-1}\big(-S_L^{-1}(s,T)+\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-1}p^{-1}\big).$$

再在右侧乘以一次 p，最终得到

$$A\mathcal{Q}_{c,p}(A)^{-1}p^3v=-S_L^{-1}(s,T)pv+\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-1}v.$$

对 A 的操作是合理的，因为它是一个有界算子，并且上述关系对每个 $v\in X$ 都成立。□

4. Polyanalytic functional calculus for unbounded operators

正如我们在第 3 节中所讨论的，尽管 $\Delta = \mathcal{D}\overline{\mathcal{D}} = \overline{\mathcal{D}}\mathcal{D}$，但如果我们将共轭 Cauchy-Fueter 算子 $\overline{\mathcal{D}}$ 作用于切片超全纯函数 $f(q)$，则会得到一组不同于调和情形的函数。事实上，作为 Fueter 定理的直接推论，我们有

$$\mathcal{D}^2\left(\overline{\mathcal{D}}f(q)\right) = \Delta\mathcal{D}f(q) = 0.$$

由此，我们为四元数精细结构得到第二组函数空间

$$\mathcal{O}(D) \xrightarrow{T_{F1}} \mathcal{SH}(\Omega_D) \xrightarrow{\overline{\mathcal{D}}} \mathcal{AP}_2(\Omega_D) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{AM}(\Omega_D), \tag{4.1}$$

其中 $\mathcal{AP}_2(\Omega_D)$ 是二阶轴向多解析函数的集合。

定义 4.1（二阶轴向多解析函数）。设 $\Omega \subset \mathbb{R}^4$ 是一个轴对称切片域。若函数 $f : \Omega \to \mathbb{H}$ 满足 $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$，且

$$\mathcal{D}^2 f(q) = \left(\partial_{q_0} + \sum_{i=1}^{3} e_i \partial_{q_i}\right)^2 f(q) = 0,$$

此外， f 具有形式 (1.2)，且函数 A 和 B 满足奇偶条件 (1.1)。

现在，我们将重点研究这种精细结构的无界算子多解析函数演算。为此，我们需要了解有界算子函数演算的基本概念，更多详情请参见 [34] 。

定义 4.2（P_2-预解式）。设 $T = T_0 + \sum_{i=1}^{3} e_i T_i \in \mathcal{BC}(X)$，$s \in \mathbb{H}$，我们将左（分别为右） P_2-预解算子定义为

$$P_2^L(s,T) = -F_L(s,T)s + T_0 F_L(s,T), \quad \left(\text{resp.} \quad P_2^R(s,T) = -sF_R(s,T) + T_0 F_R(s,T)\right).$$

我们回顾一下，有界算子的多解析函数演算也称为 P_2-函数演算。

定义 4.3（有界算子的多解析函数演算）。设 $T \in \mathcal{BC}(X)$，假设算子 T_ℓ, $\ell = 0, 1, 2, 3$ 的实谱均为实数，其中 T_ℓ 中有一个是零算子，并且$\breve{\quad}$ $\overline{\quad}$ $\breve{\quad}$令 $ds_J = ds(-J)$，其中 $J \in \mathbb{S}$。对于每个满足 $f \in \mathcal{SH}_L(\sigma_S(T))$（分别满足 $f \in \mathcal{SH}_R(\sigma_S(T))$）的函数 $f^\circ = \mathcal{D}f$（分别为 $f^\circ = f\overline{\mathcal{D}}$），我们定义

$$\breve{f}^\circ(T) := \frac{1}{2\pi}\int_{\partial(U\cap\mathbb{C}_J)} P_2^L(s,T)\,ds_J\,f(s), \quad \left(\text{resp.} \quad \breve{f}^\circ(T) := \frac{1}{2\pi}\int_{\partial(U\cap\mathbb{C}_J)} f(s)\,ds_J\,P_2^R(s,T)\right),$$

其中， $F_L(s,T)$（分别为 $F_R(s,T)$）是式 (2.2) 中定义的左（分别为右）预解算子。

注 4.4. 与 Q-函数演算和 F-函数演算类似，多解析函数演算不依赖于 $\ker(\overline{\mathcal{D}})$，这一点可由 McIntosh 的单生成函数演算推出。这要求算子 T_ℓ、 $\ell = 0$、1、2、3 具有实谱，并且 T_ℓ 中有一个必须为零。

注 4.5. 与其他基于 S-谱的函数演算一样，多解析函数演算也具有线性性质。若 $\breve{f}^\circ = \overline{\mathcal{D}}f$ 和 $\breve{g}^\circ = \overline{\mathcal{D}}g$（分别地， $\breve{f}^\circ = f\overline{\mathcal{D}}$ 和 $\breve{g}^\circ = g\overline{\mathcal{D}}$）满足 f、 $g \in \mathcal{SH}_L$（σ_S（T））（分别地， f、 $g \in \mathcal{SH}_R$（σ_S（T））），且 $a \in \mathbb{H}$，则

$$(\breve{f}^\circ a + \breve{g}^\circ)(T) = \breve{f}^\circ(T)a + \breve{g}^\circ(T) \quad \left(\text{resp.} \quad (a\breve{f}^\circ + \breve{g}^\circ)(T) = a\breve{f}^\circ(T) + \breve{g}^\circ(T)\right). \tag{4.2}$$

考虑从无界算子 $T \in \mathcal{KC}(X)$ 到有界算子 A的变换，其定义为 $A := (T - \alpha\mathcal{I})^{-1}$。现在我们来证明预解式 $P_2^L(p,A)$ 与 $P_2^L(s,T)$ 之间的关系，这将引导我们给出合适的 P_2-函数演算定义。

定理 4.6. 设 $T \in \mathcal{KC}(X)$，对于 $\alpha \in \rho_S(T) \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$，我们定义 $A = (T - \alpha\mathcal{I})^{-1}$。假设 $s \in \rho_S(T)$ 且 $p = (s-\alpha)^{-1}$，则有

$$P_2^L(p, A)p^4 = P_2^L(s, T) - 4(s\mathcal{I} - \bar{T})\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-1}p + 4(T_0 - s\mathcal{I})\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-1}p + 4p^2\mathcal{I} \tag{4.3}$$

其中，(4.3) 在 X 上成立。

证明。由定理 2.23 可知，

$$\mathcal{Q}_{c,p}(A)^{-1} = \left(A\overline{A}\right)^{-1}\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-1}p^{-2}, \quad \text{for} \quad s \in \rho_S(T)$$

根据左 P_2-预解算子和 F-预解算子的定义，我们得到

$$\begin{aligned}
P_2^L(p, A) &= \frac{(A + \bar{A})}{2}F_L(p, A) - F_L(p, A)p \\
&= -4\frac{(A + \bar{A})}{2}\Big((p\mathcal{I} - \bar{A})\mathcal{Q}_{c,p}(A)^{-2}\Big) + 4\Big((p\mathcal{I} - \bar{A})\mathcal{Q}_{c,p}(A)^{-2}\Big)p \\
&= -4(p\mathcal{I} - \bar{A})\frac{(A + \bar{A})}{2}\Big((A\bar{A})^{-2}\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-2}p^{-4}\Big) + 4(p\mathcal{I} - \bar{A})\Big((A\bar{A})^{-2}\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-2}p^{-4}\Big)p \\
&= 4(A\bar{A})^{-1}(p\mathcal{I} - \bar{A})\left(-\frac{(A\bar{A})^{-1}(A + \bar{A})}{2} + p(A\bar{A})^{-1}\right)\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-2}p^{-4} \\
&= 4(A\bar{A})^{-1}(p\mathcal{I} - \bar{A})\left(-\frac{A^{-1} + \bar{A}^{-1}}{2} + p(A\bar{A})^{-1}\right)\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-2}p^{-4}.
\end{aligned}$$

我们观察到

$$Q_{c,s}(T)^{-2} : \ X \to \mathrm{dom}((T\overline{T})^2), \quad \text{for} \quad s \in \rho_S(T).$$

此外，我们回顾一下，$\mathrm{dom}(T) = \mathrm{dom}(\overline{T})$，因此 $\mathrm{dom}((T\overline{T})^2) = \mathrm{dom}(T^4)$，并且

$$(A\bar{A})^{-1} : \ \mathrm{dom}(T\overline{T}) \to X.$$

因此，对于 $s \in \rho_S(T)$，我们有

$$(A\bar{A})^{-1}\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-2} : \ X \to \mathrm{dom}(T\overline{T}),$$

and

$$\left(-\frac{A^{-1} + \bar{A}^{-1}}{2}\right)\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-2} : \ X \to \mathrm{dom}(T^3).$$

此外，我们还有：

$$(A\bar{A})^{-1}(p\mathcal{I} - \bar{A}) : \ \mathrm{dom}(T\overline{T}) \to X.$$

因此，对于 $s \in \rho_S(T)$，我们得到

$$P_2^L(p, A)v = 4(A\bar{A})^{-1}(p\mathcal{I} - \bar{A})\left(-\frac{A^{-1} + \bar{A}^{-1}}{2} + p(A\bar{A})^{-1}\right)\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-2}p^{-4}v, \quad \text{for all} \quad v \in X. \tag{4.4}$$

在 $\mathrm{dom}(T\overline{T})$ 上，它是 $(A\bar{A})^{-1}(p\mathcal{I} - \bar{A}) = (p\mathcal{I} - \bar{A})(A\bar{A})^{-1}$，因此根据假设 $p = \Phi_\alpha(s)$，我们有 $\alpha = s - p^{-1}$ 并且

$$\begin{aligned}
(A\bar{A})^{-1}(p\mathcal{I} - \bar{A}) &= (p\mathcal{I} - (\bar{T} - \alpha I)^{-1})(\bar{T} - \alpha\mathcal{I})(T - \alpha\mathcal{I}) \\
&= p(\alpha^2\mathcal{I} - \alpha(T + \bar{T}) + T\bar{T}) + \alpha\mathcal{I} - T \\
&= p(s^2\mathcal{I} + p^{-2}\mathcal{I} - 2sp^{-1}\mathcal{I} - s(T + \bar{T}) + p^{-1}(T + \bar{T}) + T\bar{T}) \\
&\quad + s\mathcal{I} - p^{-1}\mathcal{I} - T \\
&= p\mathcal{Q}_{c,s}(T) - (s\mathcal{I} - \bar{T}),
\end{aligned} \tag{4.5}$$

因此对于所有 $v \in \mathrm{dom}(TT)$，我们有

$$(A\bar{A})^{-1}(p\mathcal{I} - \bar{A})v = p\mathcal{Q}_{c,s}(T)v - (s\mathcal{I} - \bar{T})v,$$

$$P_2^L(p,A)v = 4\left(p\mathcal{Q}_{c,s}(T) - (s\mathcal{I} - \bar{T})\right)\left(-\frac{A^{-1}+\bar{A}^{-1}}{2} + p(A\bar{A})^{-1}\right)\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-2}p^{-4}v.$$

经过一些计算，我们得到

$$\left(-\frac{A^{-1}+\bar{A}^{-1}}{2} + p(A\bar{A})^{-1}\right) = -s\mathcal{I} + T_0 + p\mathcal{Q}_{c,s}(T), \tag{4.6}$$

该式在 $\mathrm{dom}(T\overline{T})$ 上成立。由公式 (4.5)、(4.4) 和 (4.6)，可得

$$P_2^L(p,T) = 4[p\mathcal{Q}_{c,s}(T) - (s\mathcal{I} - \bar{T})](-s\mathcal{I} + p\mathcal{Q}_{c,s}(T) + T_0)\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-2}p^{-4}.$$

现在，由于 $(-s\mathcal{I} + p\mathcal{Q}_{c,s}(T) + T_0)$ 和 $\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-2}$ 可交换，因此有

$$\begin{aligned}
P_2^L(p,T) &= 4(p\mathcal{Q}_{c,s}(T) - s\mathcal{I} + \bar{T})\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-2}(-s\mathcal{I} + T_0 + p\mathcal{Q}_{c,s}(T))p^{-4} \\
&= (4p\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-1} + F_L(s,T))(-s\mathcal{I} + T_0 + p\mathcal{Q}_{c,s}(T))p^{-4} \\
&= (-F_L(s,T)s + T_0F_L(s,T))p^{-4} + F_L(s,T)p\mathcal{Q}_{c,s}(T)p^{-4} \\
&\quad + 4(-s\mathcal{I} + T_0)\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-1}p^{-3} + 4p^{-2} \\
&= P_2^L(s,T)p^{-4} - 4(s\mathcal{I} - \bar{T})\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-1}p^{-3} + 4(-s\mathcal{I} + T_0)\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-1}p^{-3} + 4p^{-2}.
\end{aligned}$$

在等式右侧乘以 p^4，即可得到所述结论。 □

注4.7. 可以从另外两种不同的表示预解算子 $P_2^L(p,A)$ 的方式出发证明定理 4.6。第一种表示如下

$$P_2^L(p,A) = \frac{A+\bar{A}}{2}F_L(p,A) - F_L(p,A)p$$

另一种表示则是

$$P_2^L(p,A) = -4S_L^{-1}(p,A)\mathcal{Q}_{c,p}(A)^{-1}(A_0 - p\mathcal{I}).$$

为得到所需公式，在第一种情形下，只需使用关系 $F_L(p,A) = (A\bar{A})^{-1}(-4p\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-1} - F_L(s,T))p^{-4}$；而在第二种情形下，只需使用以下关系：$S_L^{-1}(p,A) = p^{-1}\mathcal{I} - S_L^{-1}(s,T)p^{-2}$ 以及 $\mathcal{Q}_{c,p}(A)^{-1} = (A\bar{A})^{-1}\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-1}p^{-2}$。

现在，我们可以为无界算子给出二阶多解析函数演算的定义。

定义4.8（无界算子的二阶多解析函数演算）。设 $T \in \mathcal{KC}(X)$，并假设算子 T_ℓ, $\ell = 0, 1, 2, 3$的实谱，其中 T_ℓ 之一是零算子。设 $\rho_S(T) \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$，假设 $\alpha \in \rho_S(T) \cap \mathbb{R}$，并令 $A := (T - \alpha\mathcal{I})^{-1}$。假设 ϕ_α 如（2.4）所述。对于满足 $f(\alpha) = 0$且 $\partial_\alpha f(\alpha) = 0$的 $f \in \mathcal{SH}_L(\bar{\sigma}_S(T))$，我们考虑以下函数

$$\phi(q) := (f \circ \phi_\alpha^{-1})(q)$$

$$\breve{\psi}^0(q) := \overline{\mathcal{D}}(q^2\phi(q))$$

并将算子 $\breve{f}^0(T)$定义为（其中$\breve{f}^0 = \overline{\mathcal{D}}f$）：

$$\breve{f}^0(T) := \breve{\psi}^0(A), \tag{4.7}$$

其中，$\breve{\psi}^0(A)$通过有界多解析函数演算定义。对于满足 $f(\alpha) = 0$且 $\partial_\alpha f(\alpha) = 0$的 $f \in \mathcal{SH}_R(\bar{\sigma}_S(T))$，也有类似的定义。

即使对于无界算子的多解析函数演算，我们也可以得到积分表示。

定理 4.9. 设 $T \in \mathcal{KC}(X)$，假设算子 T_ℓ, $\ell = 0, 1, 2, 3$ 的实谱均存在，其中一个 T_ℓ 是零算子。设 $\rho_S(T) \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$，假定 $\alpha \in \rho_S(T) \cap \mathbb{R}$，并令$A := (T - \alpha\mathcal{I})^{-1}$。对于满足 $f \in \mathcal{SH}_L(\bar{\sigma}(T))$ 且 $f(\alpha) = 0$ 和 $\partial_\alpha f(\alpha) = 0$ 的 $\breve{f}^0 = \overline{\mathcal{D}} f$，由 (4.7) 定义的算子满足

$$\breve{f}^0(T) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial(U \cap \mathbb{C}_J)} P_2^L(s, T)\, ds_J\, f(s) \tag{4.8}$$

其中，U是任意一个满足 $\bar{\sigma}_S(T) \subset U$且 $U \subset \mathrm{dom}(f)$ 的无界切片柯西区域，而 J是 $\mathbb{S}$中的任意一个虚单位。对于满足 $f(\alpha) = 0$且 $\partial_\alpha f(\alpha) = 0$的 $f \in \mathcal{SH}_R(\bar{\sigma}_S(T))$，也存在类似的积分表示。

证明。我们假设 $\alpha \notin U$。如果并非如此，我们可以将 U 替换为轴对称切片柯西域 $U \setminus \overline{B}_\epsilon(\alpha)$，其中 $\epsilon > 0$ 足够小，而根据柯西积分公式，积分的值不会改变。

集合 $V = \phi_\alpha(U)$ 是一个有界切片柯西域，其中 $\bar{\sigma}_S(T) \subset V$和 $\bar{V} \subset \mathrm{dom}(f \circ \phi_\alpha^{-1})$。利用 $P_2^L(p, A)$ 与 $P_2^L(s, T)$ 之间的关系（见公式 (4.3)），我们有

$$\begin{aligned} &\int_{\partial(U \cap \mathbb{C}_J)} (P_2^L(s, T) - 4(s\mathcal{I} - \bar{T})\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-1} p + 4(T_0 - s\mathcal{I})\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-1} p + 4p^2\mathcal{I})\, ds_J\, f(s) \\ &= \int_{\partial(V \cap \mathbb{C}_J)} P_2^L(p, A)\, dp_J\, p^2 \phi(p), \end{aligned} \tag{4.9}$$

其中我们回顾一下，s 和 p 之间满足关系 $p = \phi_\alpha(s) = (s - \alpha)^{-1}$。现在我们关注前一个等式的左侧，有

$$\begin{aligned} &\int_{\partial(U \cap \mathbb{C}_J)} (P_2^L(s, T) - 4(s\mathcal{I} - \bar{T})\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-1} p + 4(T_0 - s\mathcal{I})\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-1} p + 4p^2\mathcal{I})\, ds_J\, f(s) \\ &= \int_{\partial(U \cap \mathbb{C}_J)} P_2^L(s, T)\, ds_J\, f(s) - 4 \int_{\partial(U \cap \mathbb{C}_J)} (s\mathcal{I} - \bar{T})\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-1}\, ds_J\, pf(s) \\ &+ 4 \int_{\partial(U \cap \mathbb{C}_J)} p\, ds_J\, (T_0 - s\mathcal{I})\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-1} f(s) + 4 \int_{\partial(U \cap \mathbb{C}_J)} p^2\, ds_J\, f(s). \end{aligned} \tag{4.10}$$

我们考虑前一个方程左边的最后三项。利用 $p = (s - \alpha)^{-1}$ 这一事实，我们得到

$$\begin{aligned} &\int_{\partial(U \cap \mathbb{C}_J)} (s\mathcal{I} - \bar{T})\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-1}\, ds_J\, pf(s) \\ &= \int_{\partial(U \cap \mathbb{C}_J)} p\, ds_J\, s\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-1} f(s) - \bar{T} \int_{\partial(U \cap \mathbb{C}_J)} p\, ds_J\, \mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-1} f(s) \\ &= \int_{\partial(U \cap \mathbb{C}_J)} (s - \alpha)^{-1}\, ds_J\, s\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-1} f(s) - \bar{T} \int_{\partial(U \cap \mathbb{C}_J)} (s - \alpha)^{-1}\, ds_J\, \mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-1} f(s), \end{aligned}$$

由于算子 T 是闭的，因此它与积分可交换。注意，函数 $s \mapsto s\mathcal{Q}_{c,\,s}(T)^{-1}$ 和 $s \mapsto \mathcal{Q}_{c,\,s}(T)^{-1}$ 是算子值左切片超全纯函数。由向量值柯西公式 [22, 见定理 2.3。19] 可得

$$\begin{aligned} &\int_{\partial(U \cap \mathbb{C}_J)} (s\mathcal{I} - \bar{T})\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-1}\, ds_J\, pf(s) \\ &= \int_{\partial(U \cap \mathbb{C}_J)} S_L^{-1}(s, \alpha)\, ds_J\, s\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-1} f(s) - \bar{T} \int_{\partial(U \cap \mathbb{C}_J)} S_L^{-1}(s, \alpha)\, ds_J\, \mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-1} f(s) \\ &= (2\pi)\alpha\mathcal{Q}_{c,\alpha}(T)^{-1} f(\alpha) - (2\pi)\bar{T}\mathcal{Q}_{c,\alpha}(T)^{-1} f(\alpha). \end{aligned}$$

通过类似的论证可得

$$\begin{aligned}&\int_{\partial(U\cap\mathbb{C}_J)} p\,ds_J\,(T_0 - s\mathcal{I})\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-1}f(s)\\&= T_0\int_{\partial(U\cap\mathbb{C}_J)} S_L^{-1}(s,\alpha)\,ds_J\,\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-1}f(s) - \int_{\partial(U\cap\mathbb{C}_J)} S_L^{-1}(s,\alpha)\,ds_J\,s\mathcal{Q}_{c,s}(T)^{-1}\\&= (2\pi)T_0\mathcal{Q}_{c,\alpha}(T)^{-1}f(\alpha) - (2\pi)\alpha\mathcal{Q}_{c,\alpha}(T)^{-1}f(\alpha).\end{aligned}$$

为了处理（4.10）的最后一项，我们需要稍作不同的变形 s

$$\begin{aligned}\int_{\partial(U\cap\mathbb{C}_J)} p^2\,ds_J\,f(s) &= \int_{\partial(U\cap\mathbb{C}_J)} (s-\alpha)^{-2}\,ds_J\,f(s) = \partial_\alpha\int_{\partial(U\cap\mathbb{C}_J)} (s-\alpha)^{-1}\,ds_J\,f(s)\\&= \partial_\alpha\int_{\partial(U\cap\mathbb{C}_J)} S_L^{-1}(s,\alpha)\,ds_J\,f(s) = (2\pi)\partial_\alpha f(\alpha).\end{aligned}$$

恒等式（4.9）可改写为

$$\begin{aligned}&-(8\pi)\alpha\mathcal{Q}_{c,\alpha}(T)^{-1}f(\alpha) + (8\pi)\bar{T}\mathcal{Q}_{c,\alpha}(T)^{-1}f(\alpha) + (8\pi)T_0\mathcal{Q}_{c,\alpha}(T)^{-1}f(\alpha)\\&-(8\pi)\alpha\mathcal{Q}_{c,\alpha}(T)^{-1}f(\alpha) + 8\pi\partial_\alpha f(\alpha) + \int_{\partial(U\cap\mathbb{C}_J)} P_2^L(s,T)\,ds_J\,f(s) = \int_{\partial(U\cap\mathbb{C}_J)} P_2^L(p,A)\,dp_J\,p^2\phi(p).\end{aligned}$$

由于根据假设，我们有 $f(\alpha) = 0$和 $\partial_\alpha f(\alpha) = 0$，因此得到

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\partial(U\cap\mathbb{C}_J)} P_2^L(s,T)\,ds_J\,f(s) = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial(U\cap\mathbb{C}_J)} P_2^L(p,A)\,dp_J p^2\phi(p) = \breve{\psi}_0(A) = \breve{f}_0(T),$$

由此便得到了所述结论。 □

考虑 $f,\ f_*\in\mathcal{SH}_L(\overline{\sigma}_S(T))$，使得 $\overline{\mathcal{D}}(f) = \overline{\mathcal{D}}(f_*)$。根据注记 3.10，存在常数 c 使得 $f_* = f + c$。接下来的结果将证明， f 和 f_* 的多解析函数演算是等价的。

命题 4.10. 设 $T\in\mathcal{KC}(X)$，并假设算子 $T_\ell,\ \ell = 0, 1, 2, 3$ 的实谱，其中一个 T_ℓ 是零算子。设 $\rho_S(T)\cap\mathbb{R}\neq\emptyset$，并假设 $\alpha\in\rho_S(T)\cap\mathbb{R}$。对于每个满足 $f(\alpha) = 0$且 $\partial_\alpha f(\alpha) = 0$的函数 $f\in\mathcal{SH}_L(\overline{\sigma}_S(T))$，由（4.7）定义的算子 $\breve{f}^0(T)$不依赖于 $\alpha\in\rho_S(T)\cap\mathbb{R}$的选取。此外，若将 f替换为 $f_* = f + c$，其中c是四元数常数，并且满足 $f_*(\beta) = 0$及 $\partial_\beta f_*(\beta) = 0$，对于 $\beta\in\rho_S(T)\cap\mathbb{R}$，则$P_2$函数演算不依赖于 c。对于满足$f(\alpha) = 0$且 $\partial_\alpha f(\alpha) = 0$的 $f\in\mathcal{SH}_R(\overline{\sigma}_S(T))$，也有类似的结论。

证明。式 (4.7) 中定义的算子与参数 $\alpha\in\rho_S(T)\cap\mathbb{R}$ 无关，因为式 (4.8) 中的积分不依赖于 α。

考虑 $f_* := f + c$，其中 c 是一个一般的四元数。假设对于某个 $\beta\in\rho_S(T)\cap\mathbb{R}$，我们有 $f_*(\beta) = 0$ 且 $\partial_\beta f_*(\beta) = 0$。我们观察到 $\breve{f}_*^0 = \breve{f}^0$。由积分表示 (4.8) 可得

$$\begin{aligned}\breve{f}_*^0(T) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\partial(U\cap\mathbb{C}_J)} P_2^L(s,T)ds_J f_*(s) &(4.11)\\&= \frac{1}{2\pi}\int_{\partial(U\cap\mathbb{C}_J)} P_2^L(s,T)ds_J f(s) + \frac{1}{2\pi}\int_{\partial(U\cap\mathbb{C}_J)} P_2^L(s,T)ds_J c. &(4.12)\end{aligned}$$

由于 $P_2^L(s,T) = -F_L(s,T)s + T_0F_L(s,T)$，我们可以证明:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\partial(U\cap\mathbb{C}_J)} P_2^L(s,T)ds_J c = 0,$$

采用我们在命题 3.11 末尾证明等式 (3.9) 时所用的相同论证。于是得到

$$\breve{f}^0_*(T) = \breve{f}^0(T).$$

这意味着我们可以通过 β 而不是 α 来定义 $\breve{f}^0(T)$。 □

注 4.11. 正如我们在注 3.12 中观察到的，在前一定理的假设中，如果常数 c 在 U 的所有连通分支中都相同，我们就可以去掉要求其中一个 T_ℓ 为零算子的条件。事实上，在这种情况下，为了证明 that

$$-\frac{1}{\pi}\int_{\partial(U\cap\mathbb{C}_J)} P_2^L(s,T)ds_J c = 0,$$

只需对左切片超全纯向量值函数 $P_2^L(s,T)$ 应用柯西积分定理即可。

现在，我们证明 t 无界算子的 P_2-函数演算的两个重要性质 .

定理 4.12。设 $T \in \mathcal{KC}(X)$ 具有 $\rho_S(T) \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$。我们假设算子 T_ℓ、 $\ell = 0$、1、2、3 的谱为实谱，其中 T_ℓ 之一是零算子。

- (线性性) 若 $f, g \in \mathcal{SH}_L(\overline{\sigma}_S(T))$ 且 $a \in \mathbb{H}$，则

$$(\breve{f}^0 a + \breve{g}^0)(T) = \breve{f}^0(T)a + \breve{g}^0(T).$$

  类似地，若 $f, g \in \mathcal{SH}_R(\overline{\sigma}_S(T))$ 且 $a \in \mathbb{H}$，则

$$(a\breve{f}^0 + \breve{g}^0)(T) = a\breve{f}^0(T) + \breve{g}^0(T).$$

- (乘积法则) 若 $f \in \mathcal{N}(\overline{\sigma}_S(T))$ 且 $g \in \mathcal{SH}_L(\overline{\sigma}_S(T))$，或 $f \in \mathcal{SH}_R(\overline{\sigma}_S(T))$ 且 $g \in \mathcal{N}(\overline{\sigma}_S(T))$，则

$$\overline{\mathcal{D}}(fg)(T) = f(T)(\overline{\mathcal{D}}g)(T) + (\overline{\mathcal{D}}f)(T)g(T) - \mathcal{D}(f)(T)\underline{T}\mathcal{D}(g)(T)$$

证明。考虑 $\alpha \in \rho_S(T) \cap \mathbb{R}$ 和 $A = (T - \alpha\mathcal{I})^{-1}$。回顾一下， ϕ_α 在 (2.4) 中定义。由 (4.7) 和 (4.2) 可得

$$\begin{aligned}
(a\breve{f}^0 + \breve{g}^0)(T) &= \overline{\mathcal{D}}\left(q^2(fa+g)\circ\phi_\alpha^{-1}\right)(A) \\
&= \overline{\mathcal{D}}\left(q^2(f\circ\phi_\alpha^{-1})a + q^2(g\circ\phi_\alpha^{-1})\right)(A) \\
&= \overline{\mathcal{D}}(q^2(f\circ\phi_\alpha^{-1}))(A)a + \overline{\mathcal{D}}(q^2(g\circ\phi_\alpha^{-1}))(A) \\
&= \breve{f}^0(T)a + \breve{g}^0(T).
\end{aligned}$$

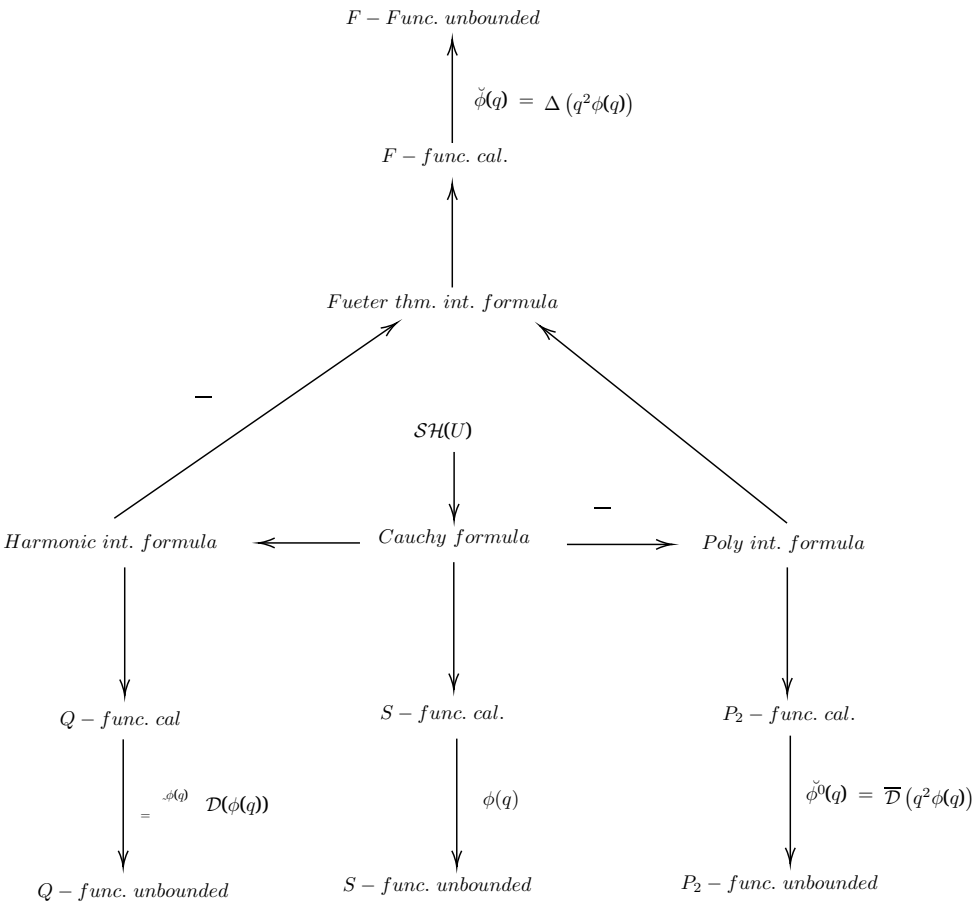
通过类似的论证，可以证明右切片超全纯函数的情形。

乘积法则可通过类似计算得到，这些计算用于推导有界算子的二阶多解析函数演算的乘积法则，见 [35，定理 4.6]。这些计算基于 S- 预解集方程，该方程对无界算子同样成立，见定理 2.22。□

多解析函数演算的定义和性质可以推广到由无界算子构成的 n-元组以及更高阶的多解析函数。为此，我们需要在至少五维的克利福德代数框架中使用 Fueter 定理，因为我们所涉及的因式分解会比 (3.1) 和 (4.1) 中考虑的更加复杂。

5. Concluding remarks

在 [13, 34], 中，基于因式分解 (3.1) 和 (4.1)，作者研究了基于 S-谱的调和函数演算和多解析函数演算。这些演算基于 (1.4) 和 (1.5) 中给出的积分变换。在有界算子和无界算子的情形下，由拉普拉斯算子通过柯西–富特算子及其共轭进行因式分解所诱导的四元数精细结构，可由下图概括呈现。



我们注意到，前面在Clifford框架下的图示要复杂得多。由于$_{n-1}$Fueter-Sce映射是 $T_{F2} = \Delta_{n+1}^{\frac{2}{}}$，且 n 为奇数，因此存在多种因式分解T_{F2} 的方式，并由此产生了更为复杂的精细结构，见 [16]。

文献中还有另一种研究无界算子泛函演算的方法：所谓的直接方法。这种方法直接基于无界域上的柯西公式。对于 S-泛函演算和Riesz-Dunford 泛函演算，这与本文第1节和第2节中回顾的方法是一致的，见 [21, 37]。在即将发表的论文中，我们旨在采用直接方法研究 F-泛函演算、 Q-泛函演算和 P_2-泛函演算的无界版本。此外，我们还旨在证明这些方法与本文所介绍的方法是一致的。

多解析函数类在文献中得到了广泛研究，无论是在复数情形下（参见[9], ），还是在非交换情形下（参见 [7, 8, 5, 11]）。研究这类函数的动机源于 Kolossov 和 Muskhelishvili 研究的一些弹性问题（参见 [42]）。

近来，这类函数也与一些时频问题的研究联系起来（参见 [33, 38]）。此外，一些著名的全纯函数空间也已推广到多解析情形（参见 [4, 45]）。

下表总结了为定义四元数精细结构的无界函数演算而对切片超全纯函数提出的条件：

函数演算	条件
S-函数	none
Q-函数	none
P_2-函数	$f(\alpha) = 0$ 和 $\partial_\alpha f(\alpha) = 0$
F-泛函	$f(\alpha) = 0$

References

[1] D. Alpay、F. Colombo 和 D.P. Kimsey。基于 S-谱的四元数无界正规算子的谱定理。 *J. Math. Phys.*, 57(2):023503，27，2016年。[2] D. Alpay、F. Colombo 和 I. Sabadini。 *Slice hyperholomorphic Schur analysis* 256 *Operator Theory:*，第 卷。 *Advances and Applications* ¨ 2016 巴塞尔：Birkhauser/Springer，。[3] D. Alpay、F. Colombo 和 I. Sabadini。 *Quaternionic de Branges spaces and characteristic operator function*。数学简明丛书。Springer，查姆，2020年。[4] D. Alpay、F. Colombo、K. Diki 和 I. Sabadini。关于非交换 de Branges–Rovnyak 空间与 Schur 分析的多解析方法。 *Integral Equations Operator Theory*，93(4):论文编号38，63，2021年。[5] D. Alpay、F. Colombo、K. Diki 和 I. Sabadini。多重切片单生成函数、柯西公式与 PS-函数演算。 *J. Operator Theory*，88 (8)，309-364，2022年。[6] D. Alpay、F. Colombo、T. Qian 和 I. Sabadini。用于四元数算子及 n个非交换算子元组的、基于 S-谱的 H^∞ 函数演算。 *J. Funct. Anal.*，271(6):1544–1584，2016年。[7] D. Alpay、K. Diki 和 I. Sabadini。更正：《关于四元数变量的切片多解析函数》。*Results Math.*，76(2):论文编号84，4，2021年。[8] D. Alpay、K. Diki 和 I. Sabadini。关于四元数变量的切片多解析函数。 *Results Math.*，74 1 17，25，2019 ( ):论文编号 。[9] M. B. Balk。 *Polyanalytic functions*, *Mathematical Research*第63卷。Akademie-Verlag，柏林，1991年。[10] G. Birkhoff 和 von J. Neumann。量子力学的逻辑。 *Ann. of Math. (2)*, 37(4):823–843，1936年。[11] F. Brackx。关于四元数变量的 (k *Function theoretic methods in differential*)-单生成函 *equations* 22 44 8 1976 数。载于 ，第 – 页。数学研究札记，第 号。。[12] P. Cerejeiras、F. Colombo、U. K ¨ *Trans.* ahler 和 *Amer. Math. Soc.* 372 5 3257 3281, 2019 I. Sabadini。四元数正规算子的扰动。，( ): – 。[13] F. Colombo、A. De Martino、S. Pinton 和 I. Sabadini。 S-谱上的轴向调和函数与调和泛函演算， *J. Geom. Anal. 33 (2)*, 2023年。[14] F. Colombo、A. De Martino 和 I. Sabadini。用于 $\mathcal{F}$函数演算的 $\mathcal{F}$-预解方程与黎斯投影， *Complex Anal. Oper. Theory*, doi.org/10.1007/s11785-022-01323-7(arXiv:2112.04830)。[15] F. Colombo、A. De Martino 和 I. Sabadini。迈向一般的 F *J.* -预解方程 *Math. Anal. Appl.* 517 2 126652, 2023 与黎斯投影。，( ): 。[16] F. Colombo、A. De Martino、S.Pinton 和 I. Sabadini。五维空间中 S-谱谱论的精细结构。预印本，2022年。[17] F. Colombo、D. Deniz Gonz´alez 和 S. Pinton。具有一阶边界条件的向量算子的分数幂。 *J. Geom. Phys.*，151:103618，18，2020年。[18] F. Colombo、D. Deniz Gonz´alez 和 S. Pinton。有界域与无界域中的非交换分数阶傅里叶定律。 *Complex Anal. Oper. Theory*。15(7):论文编号114，27，2021年。

[19] F. Colombo 和 J. Gantner。

F *Proc. Roy. Soc.*-函数演算的表述及其若干 *Edinburgh Sect. A* 146 3 509 545, 2016
推论。, ( ): – 。[20] F. Colombo 和 J Gantner。

S *Milan*-函数演算在分数阶扩散过 *J. Math.* 86 2 225 303, 2018
程中的应用。, ( ): – 。[21] F. Colombo 和 J. Gantner。 *Quaternionic closed operators, fractional powers and fractional diffusion processes*。《算子理论：进展与应用》，274。Birkh¨auser/Springer，查姆，2019年。viii +322 页。[22] F. Colombo、J. Gantner 和 D.P. Kimsey。 *Spectral theory on the S-spectrum for quaternionic operators*, *Operator Theory: Advances and Applications*第270卷。Birkh¨auser/Springer，查姆，2018年。[23] F. Colombo、J. Gantner、D. P. Kimsey、I. Sabadini。S-函数演算的普适性、非交换矩阵变量与 Clifford 算子， *Adv. Math.* 410 (2022)，论文编号108719，39页。[24] F. Colombo 和 D.P. Kimsey。Clifford 模上正规算子的谱定理。

Anal. Math., ( ):论文编号 。[25] F. *Phys.* 12 1 25, 92, 2022
Colombo、D. P. Kimsey、S. Pinton、I. Sabadini。通过 S-函数演算研究 Clifford 变量的切片单生成函数。
Proc. Amer. Math. Soc. Ser. B 8(2021)，281-296。[26] F. Colombo、M. M. Peloso 和 S. Pinton。非交换傅里叶定律分数幂的结构。
Math. Methods Appl. Sci.，42(18):6259–6276，2019年。[27] F. Colombo 和 I. Sabadini。

$\mathcal{F}$ $\mathcal{SC}$ *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect.*-谱与 -函数演算。, ( ): – 。 *A* 142 3 479 500, 2012
[28] F. Colombo 和 I. Sabadini。无界算子的

F 86 392 407,-函数演算。
2014
J. Geom. Phys., : – 。[29] F. Colombo、I. Sabadini 和 F. Sommen。积分形式的 Fueter 映射定理与 F-函数演算。
Math. Methods Appl. Sci.，33(17):2050–2066，2010年。[30] F. Colombo、I. Sabadini 和 D C. Struppa。 *Michele Sce's works in hypercomplex analysis — a translation with commentaries* ¨ 2020 。

Birkhauser/Springer，查姆，。[31] F. Colombo、I. Sabadini 和 D.C. Struppa。

Noncommutative functional calculus 289 *Progress in* , 第 卷。
Mathematics ¨ 2011
Birkhauser/Springer Basel AG，巴塞尔，。《切片超全纯函数的理论与应用》。[32] F. Colombo、I. Sabadini 和 D.C Struppa。非交换算子的一种新函数演算。 *J. Funct.*, *Anal.* 254 8 2255 2274, 2008
( ): – 。[33] A. De Martino 和 K. Diki。关于四元数框架中的多解析短时傅里叶变换

Commun., , , ( ), – 。[34] A. De *Pure Appl. Anal* 21 **11** 2022 3629 3665
Martino 和 S. Pinton。谱上的

2 S *Proc. Amer.* 阶多解析函数演算。, *Math. Soc.* 10 1090 16285, 2207 09125 2022
doi.org/ . /proc/ (arXiv: .) 。[35] A. De Martino 和 S. Pinton。 S-谱上多解析函数演算的性质。(arXiv 2211.09506)，2022年。[36] R. Delanghe、F. Sommen 和 V. Sou˘cek， *Clifford algebra and spinor-valued functions.*《数学及其应用》，53，Kluwer Academic Publishers Group，多德雷赫特，1992年。[37] N. Dunford、J. Schwartz。 *Linear operators part I: general theory*。J. Wiley and Sons, 1988年。[38] H.G. Feichtinger 和 L.D Abreu。多解析函数的函数空间。载于 *Harmonic and complex analysis and its applications* 1 38 ¨ 2014 ，《数学趋势》，第 – 页。

Birkhauser/Springer，查姆，。[39] R. Fueter。四个实变量的微分方程 $\Delta u = 0$ 与 $\Delta\Delta u = 0$ 的函数论。*Comment. Math. Helv.*, 7(1):307–330，1934年。[40] B. Jefferies。 *Spectral properties of noncommuting operators*， *Lecture Notes in Mathematics*第1843卷。Springer 出版社，柏林，2004年。[41] B. Jefferies、A. McIntosh、J. Picton-Warlow、 *The monogenic functional calculus*，《数学研究》，136 (1999)，99-119。[42] N. I. Muskhelishvili。 *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity*。Noordhoff International Publishing，莱顿，英文版，1977年。基本方程、平面弹性理论、扭转与弯曲，译自第四版（经修订和增补的俄文版），译者 J. R. M. Radok。[43] T. Qian。将 Fueter 结果推广到 R

$^{n+1}$ *Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend.* 。, ( ): – 。[44] M. Sce。 *Lincei (9) Mat. Appl.* 8 2 111 117, 1997
关于二次模中幂级数的观察。

Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis., : – 。[45] N. L. *Mat. Nat. (8)* 23 220 225, 1957
Vasilevski。关于 Bergman 空间和多重 Bergman 空间的结构。 *Integral Equations Operator Theory*，33 4 471 488，1999 ( ): – 。

(FC) Politecnico di Milano, Dipartimento di Matematica, Via E. Bonardi, 9, 20133 Milano, Italy
Email address: fabrizio.colombo@polimi.it(ADM) Schmid College of Science and Technology,
Chapman University One University DriveOrange, California 92866, USA*Email address*:
ademartino@chapman.edu(SP) Politecnico di Milano, Dipartimento di Matematica,
Via E. Bonardi, 9, 20133 Milano, Italy*Email address*: stefano.pinton@polimi.it