三维枢转模块化机器人的重构

HugoA. Akitaya马萨诸塞大学洛厄尔分校，美国

Frederick Stock马萨诸塞大学洛厄尔分校，美国

摘要

我们研究了一种新型的三维菱形十二面体（RD）模块化自重构机器人模型。通过扩展该模型二维对应模型的相关结果，我们刻画了枢转移动所需的自由空间需求，并研究了重构问题，即给定两个构型 s和 t，是否存在一系列移动可将 s 变换为 t? 我们证明，在受限枢转模型中，RD 模块的重构问题是 PSPACE 困难的。在更一般的模型中，我们证明 RD 构型并非总能重构，尽管其二维对应模型具有这一性质 [Akitaya 等人，SoCG 2021]。此外，我们提出了一类新的 RD 构型，并称之为超刚性构型。这类构型即使作为任何更大构型的子集，仍保持刚性；而在二维情形中不存在此类构型。

2012 ACM 学科分类 计算理论 → 计算几何

关键词与短语 模块化可重构机器人、枢转模型、重构

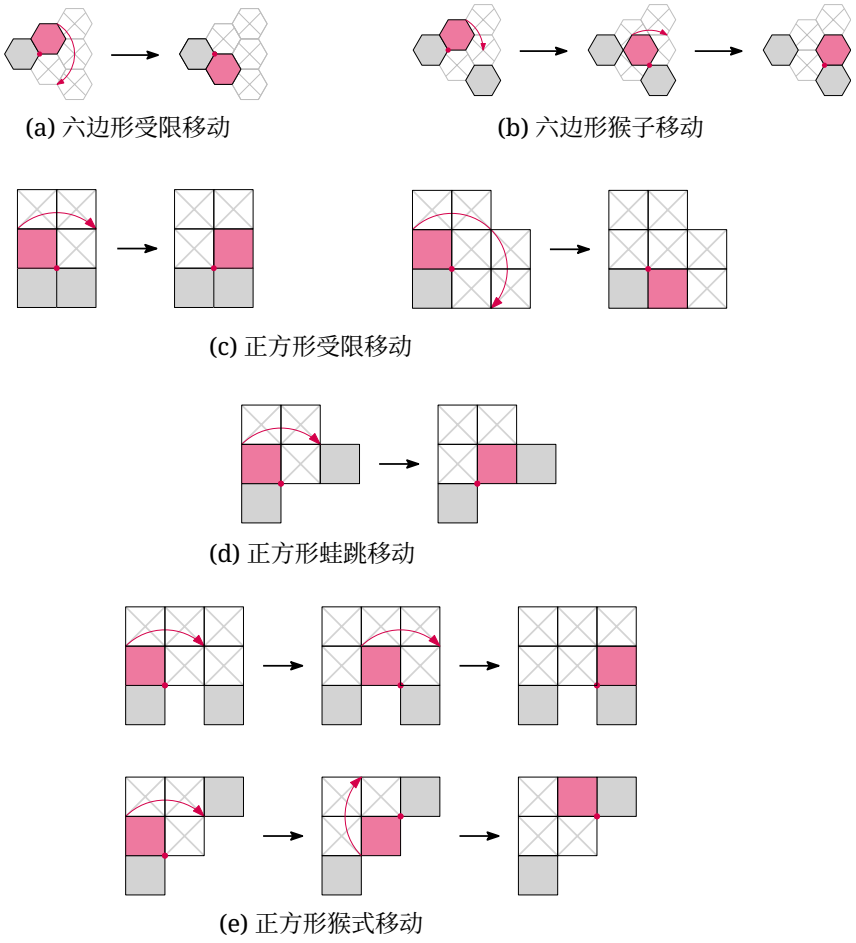
arXiv:2304.09990v1 [cs.CG] 19 Apr 2023

1 引言

可编程物质 指能够按需改变其物理属性（例如形状）的物质。实现此类系统的一种常见方法是采用模块化自重构机器人系统 （MSR），其中称为模块 的小型机器人单元可以彼此连接和分离、相互通信，并相对移动，从而改变系统的形状。我们要求构型连通，即模块的邻接图是连通的（这称为单骨架条件 [3]）。移动 是通过改变单个模块的位置，将一个构型转换为另一个构型的操作。我们关注枢转模型，其中移动模块围绕一个静止模块旋转。该模型与许多硬件实现类似 [5, 6]，但从算法视角来看颇具挑战，因为一次枢转移动可能与多个模块发生碰撞。

如果禁止某些局部构型，则存在多项式时间算法，可针对正方形、六边形和立方体模块计算一系列枢转移动，将一个构型转换为另一个构型 [4, 7]。Akitaya 等人 [1, 2] 对正方形模块的三类枢转移动和六边形模块的两类枢转移动进行了分类，并说明了它们所需的空闲空间，见图 1。受限六边形模型 仅使用受限移动，而猴式六边形模型 同时使用受限移动和猴子移动。已有研究证明，受限六边形模型中的一般问题是 PSPACE 困难 [1]。然而，[1] 还为猴式六边形模型提供了一种通用重构算法；对于由 n 个机器人组成的构型，该算法生成的移动序列长度为 $O(n^3)$。

关于三维模型中一般重构的研究还不多。菱形十二面体（RD）是将六边形模块推广到三维的一种候选形状。类 RD 模块已有实际实现 [5]，，但尚未像 [1, 2]中那样描述这类模块进行枢转移动时的自由空间约束。我们提出这类自由空间约束，以便描述此类模型的三维构型及其移动。随后，我们将 [1] 中的 PSAPCE 困难性证明推广到 RD 枢转模型。最后，我们证明，RD 的某些构型即使是更大构型的子集也具有刚性，这意味着 RD 的构型空间是不连通的。



(a) 六边形受限移动 (b) 六边形猴子移动

(c) 正方形受限移动

(d) 正方形蛙跳移动

(e) 正方形猴式移动

图 1 二维的（a、c）受限移动、（d）蛙跳，以及（b、e）猴式移动。

2 自由空间

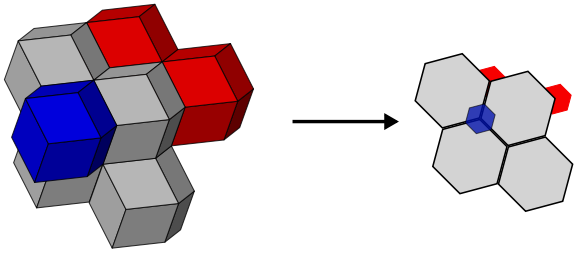
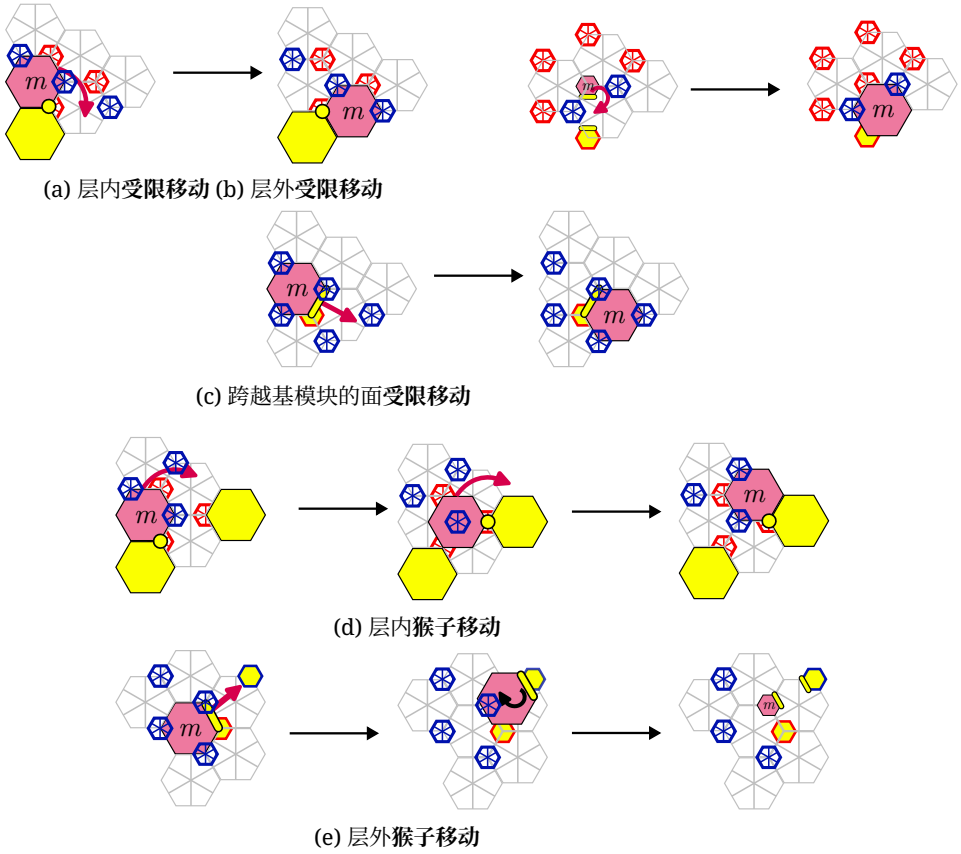


图 2 菱形十二面体与六边形之间的等价性。为便于阅读，红色和蓝色模块绘制得较小，但实际上它们与中央灰色模块一样大。

RD 晶格可表示为堆叠的六边形层（图 2）；RD 是空间填充多面体，因此在逻辑上可视为六边形模块化自重构机器人的三维类比。我们按照 [1]中的定义，定义受限移动和猴式移动。在枢转移动过程中，RD 模块可能与位于其运动平面相邻层中的模块发生碰撞，因此需要用三层模块来描述其自由空间要求，如图 3 所示。RD 晶格是

由于是 3-循环，底层和顶层的自由空间要求可能会根据模块的晶格位置或移动方向而互换，因此图 3 以不失一般性（w.l.o.g.）的方式给出。



(a) 层内**受限移动** (b) 层外**受限移动**

(c) 跨越基模块的面**受限移动**

(d) 层内**猴子移动**

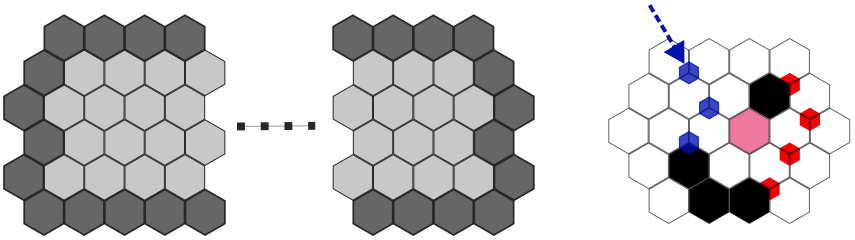
(e) 层外**猴子移动**

图3 三维 RD 移动。正在移动的模块 m 为粉色，m 绕其旋转的模块和边以黄色突出显示。所需的空闲晶格位置（分别是顶部和底部）用灰色（蓝色、红色）星号标记。

3 重构是 PSPACE 困难的

▶**定理1.** *RD* 在受限移动下的一般重构是 *PSPACE* 困难的。

我们使用图 4 中的构型，将 Akitaya 等人 [1]使用的构件从二维扩展到三维。屋顶构型是一个包含在单层中的构件，由一个模块环、边界以及边界所围住的所有位置构成。封顶构型将一条模块路径的一端固定为刚性。我们通过在屋顶边界上的每个模块处连接一条模块路径，并以封顶构型封住路径末端，利用封顶构型使屋顶具有刚性。将屋顶构型的实例放置在构件上方和下方各两层处后，模块便无法上下移动到其他层，从而实质上将构件限制在二维空间中。类似的方法可以将 [1] 中的正方形结果扩展为：在受限移动、蛙跳移动和猴式移动下，立方体的重构同样是 PSPACE 困难的。详细内容将在即将发表的完整版中给出。



(a) RD 屋顶构型 (b) 菱形十二面体帽盖构型

图 4 菱形十二面体的屋顶和帽盖构型。

4 菱形十二面体具有超刚性

本节定义一类新的构型，称为超刚性。

▶**定义 2.** 如果对于任意一个构型 C，其中 G 是一个子构型， G 中的模块都无法移动，则称构型 G 为超刚性。

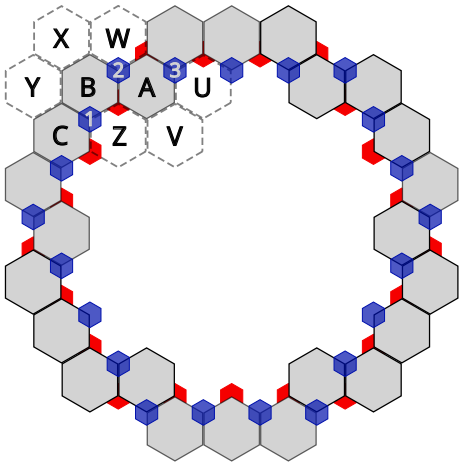
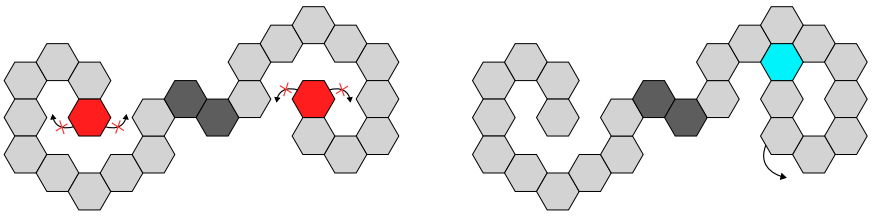


图5 一个超刚性构型，位置 U、V、W、X、Y 和 Z 均为空



(a) 刚性构型 (b) 可动构型

图6 在（b）中，添加蓝色模块使构型（a）变为可移动状态

其中，构型 C 的子构型 是指通过从 C中移除任意数量的模块而得到的任意连通构型。据我们所知，超刚性构型是新颖的，而且可能只有在移动模块会在其运动平面之外发生碰撞的 MSR模型中才有可能实现。此前已知的刚性构型

（包括所有二维刚性构型）都类似于图 6 中的构型 (a)：只需添加一个新模块（蓝色），该构型就会变为可移动状态 (b)。

▶**定理 3.** 图 *5* 中的构型在受限移动和猴式移动下是超刚性的。

证明（附录 B）利用图 3 中的自由空间要求，验证 G 中没有模块可以移动，也无法通过向 G 添加任何模块使其移动。由此产生的一个令人惊讶的结果是，包含图 5 的实心“立方体”无法重构为一列模块。

▶**推论 4.** 菱形十二面体 *MSR* 模型在受限移动或猴式移动下并非普适可重构。

参考文献

1 Hugo A. Akitaya、Erik D. Demaine、Andrei Gonczi、Dylan H. Hendrickson、Adam Hester- berg、Matias Korman、Oliver Korten、Jayson Lynch、Irene Parada 和 Vera Sacristán。《刻画模块化枢轴机器人普适可重构性》。载于第 37 届计算几何国际研讨会（SoCG 2021），莱布尼茨国际信息学论文集第 189 卷，第 10:1–10:20 页，德国 Dagstuhl，2021 年。Schloss Dagstuhl – Leibniz-Zentrum für Informatik。网址：https://drops.dagstuhl.de/opus/volltexte/2021/13809, doi:10.4230/LIPIcs.SoCG.2021.10。 2 Hugo A. Akitaya、Esther M. Arkin、Mirela Damian、Erik D. Demaine、Vida Duj- movic、Robin Y. Flatland、Matias Korman、Belén Palop、Irene Parada、André van Renssen 和 Vera Sacristán。通过枢轴对面连接模块化机器人进行普适重构：O(1) 火枪手。Algorithmica，83(5):1316–1351，2021 年。doi:10.1007/s00453-020-00784-6。 3 Adrian Dumitrescu、Ichiro Suzuki 和 Masafumi Yamashita。变形系统的运动规划：可行性、可判定性与分布式重构。《IEEE 机器人与自动化汇刊》，20(3):409–418，2004 年。 4 Daniel Feshbach 和 Cynthia Sung。枢轴式模块化立方体机器人中非凸孔洞的重构。《IEEE 机器人自动化快报》，6(4):6701–6708，2021 年。 doi:10.1109/LRA.2021.3095030。 5 Benoit Piranda 和 Julien Bourgeois。为大型模块化机器人设计准球形模块，以创造可编程物质。《Autonomous Robots》，42:1619–1633，2018 年。 6 John W Romanishin、Kyle Gilpin 和 Daniela Rus。M-blocks：动量驱动的磁性模块化机器人。载于 2013 年 IEEE/RSJ 智能机器人与系统国际会议，第 4288–4295 页。IEEE，2013 年。 7 Cynthia R. Sung、James M. Bern、John Romanishin 和 Daniela Rus。枢轴式模块化立方体机器人的重构规划。载于 2015 年 IEEE 机器人与自动化国际会议（ICRA 2015），美国华盛顿州西雅图，2015 年 5 月 26–30 日，第 1933–1940 页。IEEE，2015 年。doi:10.1109/ICRA.2015.7139451。

扩展的 PSPACE 构造讨论

这种构造由两个部分组成：屋顶和帽盖；它们的立方体和 RD 变体见图 4。屋顶构型是一个包含在单层中的构件，由模块环、边界以及边界所围住的所有位置构成。封顶构型可以放置在模块路径的末端，使其具有刚性。一般

而言，立方体和 RD 的封顶构型概念相同。一列模块从一端进入（以虚线箭头表示），随后该构型环绕自身，使最后一个模块无法移动，且其他模块若要移动就必须使该构型断开。

在立方体帽盖中，一条模块路径形成一个环，然后将其末端模块（粉色）放置到合适位置，使顶面四周都被其他模块包围。因此，该模块无法移动，否则就会撞到其他模块。RD 帽盖也类似，不过环并未将末端模块完全包围，而是在其正上方和正下方各放置一个模块，位于末端模块彼此相对的两侧。这两个模块将其锁定在原位，因为任何可能的移动都会撞上其中一个模块。

由于四周都被包围的模块显然无法移动，屋顶中唯一可能移动的模块就是边界上的模块（以深灰色显示）。我们在每个边界模块上连接一条远离屋顶延伸的模块路径。这些路径需要在相邻的边缘模块之间交替：一条路径水平远离屋顶，下一条则垂直远离屋顶，依此类推……这样一来，任何路径都不会包含与另一条路径相邻的模块，从而避免邻接图中出现可能导致模块移动的环。经过任意选定的常数长度后，我们以封顶构型结束每条路径。这样，每个边界模块都连接着一组模块；若要移动它们，就必须使所连接的模块断开。路径中的每个模块要么无法移动，要么移动时会使路径末端断开。最后，屋顶构型中的内部模块都被包围，因此无法移动，所以整个屋顶构型无法移动。

B 超刚性情形分析

我们证明，无法向图 5 所示的构型中添加任何模块（称其为G），使其变为可移动构型。由于灰色层具有对称性，只需考虑 3 个模块：A、B 和 C。此外，红色层与蓝色层互为镜像，因此可以将情形分析简化为蓝色层，并且只需进一步考虑模块 1 和 2。

模块 1 和 C： 这两个模块的两侧各有一个直接相对的邻居。像这样被夹在中间的模块，除非其中一个邻居先移动，否则永远无法移动。因此，无论采用受限移动还是猴式移动，都不存在可以添加模块、使它们能够移动的位置。

模块 B： 灰色层中有 4 个与 B 相邻的位置。如果在 Z 或 X 处添加模块，B 不会获得新的移动方式，因为 A 和 C 会阻止任何层内旋转，而红色和蓝色模块会阻止任何可能的层外移动。如果在 Y 或 W 处添加模块，B 就会有两个直接相对的相邻模块，即 $\{A, Y\}$ 或 $\{C, W\}$，从而使 B 无法移动。因此，剩下的唯一可能是层外移动或猴子移动。由于 1 和 2 的存在，B 无法向任何方向进行猴子移动。受限移动也无法使 B 旋转到层外，因为 1 和 2 阻止它向上或向下移动一层。如果 B 试图向下移动到红色层，灰色层中的邻居会阻止这一移动。A 和 C 的存在也会阻止 B 进行任何可能的面移动。

模块 A： 如果在 Z 或 U 处添加一个模块，A 就会在正对的两侧各有一个相邻模块，导致 A 无法移动。如果在 W 处添加一个模块，A 将无法绕其在层内旋转，因为灰色层中的相邻模块会造成阻碍。与 B 类似，2 和 3 会阻止 A 使用位于灰色层或蓝色层中的基座上下移动一层。如果 A 使用位于红色层中的基座向下移动一层，灰色层中的相邻模块就会阻止这次移动。其

n灰色层中的相邻模块会阻止这样的移动。最后，A 永远无法进行一次
m猴子移动，因为它在上方和下方的层中各有两个邻居，这违反了
b两种猴子移动的自由空间要求。
模块 2： 灰色层中模块 2 下方的模块阻止了模块 2 可能进行的任何受限移动。模块 2 无法跨越其下方模块的面移动，因为模块 1 和模块 3 是非相邻邻居，这会立即阻止这种移动。模块 1 和模块 3 也阻止了以蓝色层为基底向上移动。灰色层中的模块还阻止了使用层外基底向上或向下移动。最后，模块 1 和模块 3 再次阻止了任何猴子移动，因为它们是模块 2 的两个非相邻邻居。

由于不存在可添加模块的位置来使 G 能够移动，因此不存在以 G 为子构型且至少处于锁定状态（如果不是刚性的）的构型。因此，G 是一个超刚性构型。