arXiv:2304.10012v1 [math.GR] 19 Apr 2023

相对于霍普夫子群的非霍普夫相对双曲群

JAN KIM 和 Donghi Lee

Abstract. 我们给出一个例子，表明相对于一族霍普夫子群双曲的有限生成群，不一定是霍普夫群。这以否定的方式回答了 Osin 的问题 [8, 问题 5.5] 。

1. Introduction

回忆一下，如果群 G 的每个满同态 $G \to G$ 都是自同构，那么它就是霍普夫群。还要回忆一下，如果对每个 $g \in G \setminus \{1\}$，都存在某个有限群 P 以及一个满同态 $\psi : G \to P$，使得 $\psi(g) \neq 1$，那么群 G 就是剩余有限的。受有关普通双曲群的著名问题的启发，Osin 在 [8, 问题 5.5 和 5.6] 中提出了以下问题。

- 如果有限生成群 G 相对于一族霍普夫子群 $\{H_1, \ldots, H_m\}$双曲，那么是否可推出 G 是霍普夫群?
- 如果一个群 G 相对于一族剩余有限子群$\{H_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$是双曲的，那么是否可以推出 G 是剩余有限的?

后来，Osin [11] 证明，第二个问题等价于 Gromov 提出的著名开放问题：每个双曲群是否都是剩余有限的。霍普夫性质与剩余有限性密切相关。具体而言，Mal'cev [7] 证明，每个有限生成的剩余有限群都是 Hopf 群。Mal'cev 的结果为证明某个有限生成群是非剩余有限群提供了一种有用工具。许多作者验证了无挠双曲群、环面相对双曲群、带挠元的双曲群、稀疏双曲群，以及有限表示 $C'(1/6)$或 $C'(1/4)$-$T(4)$小消去群的霍普夫性质（见 [2, 5, 12, 13, 15]）。与此相反，Wise [16] 构造了一个非 Hopf 的 $CAT(0)$-群。

另一方面，还有另一种与霍普夫性质相关的性质。若群 G中的每个方程组都有一个有限子系统，且该子系统具有相同的解集，则称该群为方程诺特群。众所周知，每个有限生成的方程诺特群都是 Hopf 群。Reinfeldt 和 Weidmann [12] 证明了每个双曲群都是方程诺特群。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号 20F65, 20F06。

此外，对于相对双曲群，Groves 和 Hull [6] 证明，若群 G相对于一族方程诺特子群双曲，则 G本身也是方程诺特群。然而，迄今仍不清楚，每个相对于一族 Hopf子群双曲的有限生成群是否都是 Hopf 群。

本文的主要结果如下。这以否定的方式回答了上文提到的 Osin 的第一个问题。

定理 1.1. 设 H_0 为由该群表示给出的群。

$$\mathbf{H}_0 = \langle b, c \,|\, b^2 = c^9 = 1,\ b^{-1}cb = c^{-1} \rangle, \tag{1}$$

并依次从 H_0 进行两次 HNN 扩张，如下所示：

$$\mathbf{H}_1 = \langle \mathbf{H}_0, s \,|\, s^{-1}bs = bc^{-3},\ s^{-1}cs = c \rangle; \tag{2a}$$

$$\mathbf{H}_2 = \langle \mathbf{H}_1, t \,|\, t^{-1}st = s^3 \rangle. \tag{2b}$$

接下来，构造自由积 $\mathrm{H} = \mathrm{H}_2 * \langle e, f \,|\, \emptyset \rangle$。最后，令 $\langle a \rangle$ 为一个无限循环群，按照以下方式，从 $\mathrm{H} * \langle a \rangle$ 依次进行两次多重 HNN 扩张：

$$\mathbf{K} = \langle \mathbf{H} * \langle a \rangle, u, v \,|\, u^{-1}(bacb^{-1})u = a,\ v^{-1}av = tst^{-1} \rangle; \tag{3a}$$

$$\mathbf{G} = \langle \mathbf{K}, x, y \,|\, x^{-1}ux = c^3ec^3e^{-1},\ y^{-1}vy = c^3fc^3f^{-1} \rangle. \tag{3b}$$

那么，G 是一个非 Hopf 群，它相对于 Hopf 子群 H 是双曲的。更具体地说，以下结论成立。

(i) K 相对于子群 H 双曲。(ii) G 相对于子群 H 双曲。
(iii) G 是非 Hopf 群。(iv) H_2 是 Hopf 群，因此 H 是
Hopf 群。

注1.2. (1) 群 G 可以看作相对于子群 H_2 的相对双曲群。理由如下。由于 H 是 H_2 与 $\langle e, f \rangle$ 的自由积，显然 H 相对于子群族 $\{\mathrm{H}_2, \langle e, f \rangle\}$ 双曲。这里，由于每个有限生成自由群都是双曲的，H 相对于子群 H_2 双曲。结合 (ii)，可得 G 相对于子群 H_2 双曲。

(2) 子群 H 是非剩余有限的。事实上，对于任意有限群 P 以及任意从 H 到 P 的满同态 ψ，$\psi(c^3) = 1$。原因如下。由 H 的定义关系 $t^{-1}st = s^3$ 可知，$\psi(s)$ 和 $\psi(s)^3$ 具有相同的阶，因此 $\psi(s)$ 的阶与 3 互素，设为 m。同样，由 H 的定义关系 $s^{-1}bs = bc^{-3}$ 可知，$b^{-1}sb = sc^3$ 在 H 中成立，因此 $\psi(sc^3)^m = 1$。这里，由于 $\psi(s)$ 与 $\psi(c)$ 彼此交换，$\psi(c^3)^m = 1$。另一方面，由于 $c^9 = 1$ 在 H 中成立，$\psi(c^3)^3 = 1$；结合 $\psi(c^3)^m = 1$，最终得到 $\psi(c^3) = 1$。

本文结构安排如下。第 2 节中，我们回顾本文将要用到的必要定义和已知结果。定理 1.1 的证明见第 3–6 节。第 3 节中，利用 Osin 关于相对双曲群中双曲元素的唯一极大初等子群的定理，我们首先证明自由积 H $*$ $\langle a\rangle$ 相对于子群族 {H $\langle a\rangle$, $\langle ac\rangle$} 是双曲的。随后，我们依次运用 Osin组合定理，证明 K 相对于 H 双曲。第 4 节中，我们再次利用 Osin 关于唯一极大初等子群的定理，证明 K 的外围结构可以扩展为子群族 {H $\langle u\rangle, \langle v\rangle$}。此时，通过两次运用 Osin组合定理，我们得到 G 相对于 H 双曲。第 5 节中，我们通过构造 G 的一个特定满射但非单射的自同态，证明 G 是非 Hopf 的。具体而言，由映射 $b \mapsto b$, $c \mapsto c^3$, $s \mapsto s^3$, $t \mapsto t$, $e \mapsto e$, $f \mapsto f$, $a \mapsto s$, $u \mapsto 1$, $v \mapsto 1$,$x \mapsto x$ 和 $y \mapsto y$ 诱导的 G 的自同态被证明是满射但非单射。最后，第 6 节致力于证明 H 是 Hopf 群，其中 Bass-Serre理论发挥着关键作用。

Acknowledgements

作者谨向匿名审稿人致以诚挚的谢意，感谢他们提出的宝贵意见和建议，这些意见和建议帮助作者改进了稿件的表述。特别是，审稿人建议在证明 \(H$_2$ \) 是 Hopf 群这一事实时使用 Bass-Serre理论，这使得许多论证得以大幅简化。此外，作者非常感谢审稿人提供另一种表述方式，因为这突显了一些作者此前未曾意识到的方面。第二作者获得了由韩国教育、科学与技术部资助的韩国国家研究基金会（NRF）基础科学研究计划项目（2020年R1F1A1A01071067）的资助。

2. Preliminaries

在本节中，我们将回顾本文中需要使用的定义、记号和已知结果。

2.1. 相对双曲群。本文采用 Osin 对相对双曲群的众多等价定义之一 [9]。

设 G 为一个群， $\mathbb{H} = \{H_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 为 G的子群集合， X 为 G的一个子集。假设 X 是 $(G, \mathbb{H})$ 的相对生成集，也就是说， G 由集合 $\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} H_\lambda\right) \cup X$ 生成（为方便起见，我们假设 $X = X^{-1}$）。那么 G可视为自由积的商群。

$$F = (*_{\lambda\in\Lambda}\tilde{H}_\lambda) * F(X),$$

˜其中，群 H_λ 是 H_λ 的同构副本，而 $F(X)$ 是由 X 生成的自由群。令 $\mathcal{H}$ 为不交并

$$\mathcal{H} = \bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} (\tilde{H}_\lambda \setminus \{1\}).$$

˜对于每个 $\lambda \in \Lambda$，我们用 S_λ 表示字母表 $H_\lambda \setminus \{1\}$ 上所有在 F 中表示单位元的字所构成的集合。令 $\mathcal{S}$ 为不交并

$$\mathcal{S} = \bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda.$$

于是，我们可以将 G 描述为一个相对表示

$$\langle X, \mathcal{H} \,|\, \mathcal{S}, \mathcal{R}\rangle \tag{4}$$

它是相对于子群族 $\{H_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 的，其中 $\mathcal{R} \subseteq F$。如果集合 $\mathcal{R}$ 和 X 都是有限的，则称相对表示 (4) 为有限相对表示，并称群 G 相对于子群族 $\mathbb{H}$ 是有限表示的。

对于字母表 $X \cup \mathcal{H}$ 上任意一个在群 G 中表示单位元的字 w，都存在一个表达式

$$w =_F \prod_{i=1}^{k} f_i^{-1} R_i f_i \tag{5}$$

其中等式在群 F 中成立，且对于 $i = 1$，.....，k，有 $R_i \in \mathcal{R}$ 和 $f_i \in F$。形式为 (5) 的表达式中 k 的最小可能值称为 w 的相对面积，记作 $Area^{rel}(w)$。

定义 2.1（相对双曲群）。若群 G 相对于子群族 $\mathbb{H}$ 双曲，即 G 存在一个关于 $\mathbb{H}$ 的有限相对表示 (4)，且满足线性相对等周不等式，则称群 G 相对于子群族 $\mathbb{H}$ 双曲。也就是说，存在常数 $C > 0$，使得对于字母表 $X \cup \mathcal{H}$ 上任意一个在 G 中表示单位元的循环约化字 w，都有

$$Area^{rel}(w) \le C\|w\|,$$

其中 $\|w\|$ 是单词 w的长度。该定义与（4）中有限相对生成集 X 和有限集 $\mathcal{R}$ 的选择无关。

2.2. 极大初等子群的唯一性。假设 G 是相对于一族子群 $\mathbb{H} = \{H_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$双曲的。那么，我们称集合$\mathbb{H}$ 为 G的外围结构，并称 $\mathbb{H}$ 中的任意元素为G的外围子群。

如果一个元素具有无限阶且不共轭于 G 的任何外围子群中的元素，则称其为双曲元素。由于 Osin [10], ，有一个广为人知的子群示例，可将其加入以扩充外围结构。

定理 2.2（[10, 定理 4.3，推论 1.7]）。设 G 是相对于一族子群 $\mathbb{H}$ 双曲的。那么对于任意双曲元素 $g \in G$，G 都相对于 $\mathbb{H} \cup \{E(g)\}$ 双曲，其中 $E(g)$ 是包含 g 的唯一极大初等子群，其定义如下:

$$E(g) = \{f \in G : fg^n f^{-1} = g^{\pm n} \text{ for some } n \in \mathbb{N}\}.$$

2.3. Osin组合定理。我们回顾 Osin 关于相对双曲群的一个组合定理。此前，Dahmani [3] 为有限生成群证明了以下组合定理。事实上，就本文的目的而言，应用 Dahmani 的组合定理已经足够，但为了与上文给出的相对双曲群定义相一致，我们介绍 Osin 的组合定理。

定理 2.3（[9, 推论 1.4]）。设群 G 相对于一族子群 $\mathbb{H} = \{H_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$双曲。进一步假设存在某个 $\mu \neq \nu \in \Lambda$对应的单同态 $\iota\colon H_\mu \to H_\nu$，且 H_μ 是有限生成的。那么，HNN 扩张

$$G^* = \langle G, t \,|\, t^{-1} h t = \iota(h),\ h \in H_\mu \rangle$$

相对于集合 $\mathbb{H} \setminus \{H_\mu\}$ 是双曲的。

2.4. HNN 扩张的 Bass-Serre 树。我们回顾 Bass-Serre理论的一些基本概念（见 [1, 14]）。群图（$\mathcal{A}, X$）由一个连通图 X 、以 X 的顶点和边为指标的一族群，以及从边群到相邻顶点群的一族单同态组成。对于 X 中的每棵生成树 T，都可以规范地关联一个唯一的群，称为基本群，记作 $\pi_1(\mathcal{A}, T)$。这里，基本群 $\pi_1(\mathcal{A}, T)$ 与生成树 T 的选择无关，因此我们简记为 $\pi_1(\mathcal{A})$，而不写作 $\pi_1(\mathcal{A}, T)$。基本群 $\pi_1(\mathcal{A})$ 在树 Γ 上有一个保定向作用，使得商图 $\mathcal{A}/\pi_1(\mathcal{A})$ 同构于 X。这样的树称为 $\mathcal{A}$ 的 Bass-Serre 树。

另一方面，给定一个群图 $(\mathcal{A}, X)$，其基本群为$G \cong \pi_1(\mathcal{A})$，其中 G 是一个 HNN 扩张，则可根据以下定理为 G构造一棵 Bass-Serre 树（例如，参见 [17]）。这一结果在命题 6.2 的证明中起着重要作用。

定理 2.4（HNN 扩张的 Bass-Serre 树）。设 G^* 是群 G的一个 HNN 扩张，其关联同构为 ι，定义在两个子群 H 和K之间，即

$$G^* = \langle G, t \,|\, t^{-1} h t = \iota(h),\ h \in H \rangle.$$

设 $\mathcal{A}$ 是一个群图，由一个环边 e、一个顶点 $v = o(e) = t(e)$、一个顶点群 G_v、一个边群 H 以及边界单同态$\alpha_e : H \to G$ 和 $\omega_e : H \to G$ 组成。那么 $\mathcal{A}$ 的基本群显然同构于 G^*。另一方面，设 Γ 是如下定义的图。

(i) 顶点集 V 由 $\{xG \mid x \in G^*\}$ 中的所有陪集组成。(ii) 边集 E 由 $\{xH \mid x \in G^*\}$ 中的所有陪集组成。(iii) 边 $xH \in E$ 连接 xG 和 xtG。

那么 Γ 是一棵树，且 G^* 通过左乘在 Γ 上无反转地作用，使得商图 Γ/G^* 与 X 同构，其中 X 是 $\mathcal{A}$ 的底层图。

3. 定理 1.1(i) 的证明

设 H 和 K 为定理 1.1 陈述中定义的群。本节旨在证明 K 关于子群 H 的相对双曲性。

我们从自由积 $\mathbf{H} * \langle a \rangle$ 开始，它显然相对于子群集合 $\{\mathbf{H}\ \langle a \rangle\}$ 双曲。回想一下，

$$\begin{aligned}\mathbf{H} * \langle a \rangle = \langle b, c, s, t, a \mid\ & b^2 = c^9 = 1,\ b^{-1}cb = c^{-1},\\ & s^{-1}bs = bc^{-3},\ s^{-1}cs = c,\ t^{-1}st = s^3\rangle.\end{aligned} \tag{6}$$

显然， ac 是一个双曲元素，其中 $\mathbf{H} * \langle a \rangle$ 被视为一个外围结构为 $\{\mathbf{H}\ \langle a \rangle\}$的相对双曲群。此外，我们可以证明如下结论。

Claim A. $\mathbf{H} * \langle a \rangle$ 的唯一极大初等子群 $E(ac)$ 恰好是无限循环子群 $\langle ac \rangle$。

证明。反设 $E(ac) \setminus \langle ac \rangle \neq \emptyset$。在 $E(ac) \setminus \langle ac \rangle$ 中所有这类元素中，取一个标准形元素，记为 f，使其音节长度最短。这里，音节长度指完全由 H 或 $\langle a \rangle$ 中的字母构成的极大子词的音节总数。对于这样的 f，显然 $f(ac)^{\pm n}f^{-1} = (ac)^n$，其中某个 $n \in \mathbb{N}$。此外， f 满足以下条件。

(i) 对任意 $1 \neq h \in \mathbf{H}$， f 的首项都不是 ah；对任意 $1 \neq a' \in \langle a \rangle$，其首项也不是 $c^{-1}a'$；(ii) 对任意 $1 \neq h \in \mathbf{H}$， f 的末项都不是 ha^{-1}；对任意 $1 \neq a' \in \langle a \rangle$，其末项也不是 $a'c$。

理由如下。首先，假设对于某个 $1 \neq h \in \mathbf{H}$， f 以 ah 开头，也就是说，$f \equiv ahf_1$ 是标准形。于是由等式 $f(ac)^{\pm n}f^{-1} = (ac)^n$ 可得

$$(ac)(c^{-1}hf_1)(ac)^{\pm n}(f_1^{-1}h^{-1}c)(c^{-1}a^{-1}) = (ac)^n,$$

使得

$$(c^{-1}hf_1)(ac)^{\pm n}(f_1^{-1}h^{-1}c) = (ac)^n;$$

因此 $c^{-1}hf_1 \in E(ac) \setminus \langle ac \rangle$。这里，由于 $c^{-1}h \in \mathbf{H}$，元素 $c^{-1}hf_1$ 的音节长度比 f 的更短。这与我们对 f的选择矛盾。接下来，假设 f 以某个 $c^{-1}a'$ 开头，其中 $1 \neq a' \in \langle a \rangle$，也就是说， $f \equiv c^{-1}a'f_2$ 处于标准形。那么

$$(c^{-1}a^{-1})(aa'f_2)(ac)^{\pm n}(f_2^{-1}a'^{-1}a^{-1})(ac) = (ac)^n,$$

因此

$$(aa'f_2)(ac)^{\pm n}(f_2^{-1}a'^{-1}a^{-1}) = (ac)^n.$$

这意味着 $aa'f_2 \in E(ac) \setminus \langle ac\rangle$。此外， $aa'f_2$ 的音节长度比 f 更短，因为 $aa' \in \langle a\rangle$。这也与我们对 f的选择矛盾。因此，(i) 得证。

对于 (ii)，注意到 $f^{-1} \in E(ac) \setminus \langle ac\rangle$，其音节长度与 f 的音节长度相同。此外，如果 f 以 ha^{-1} 结尾，其中 $1 \neq h \in$ 属于 H，或者以 $a'c$ 结尾，其中 $1 \neq a' \in \langle a\rangle$，那么 f^{-1} 就以 ah^{-1} 或 $c^{-1}a'^{-1}$ 开头。但根据在 (i) 的证明中应用于 f 的相同论证，我们便会得到矛盾。因此，(ii) 得证。

但根据自由积的正规形定理，表达式 $f(ac)^{\pm n}f^{-1}(ac)^{-n}$ 不可能表示 H $*\langle a\rangle$ 中的单位元。这一矛盾完成了该断言的证明。□

上述 Claim A 结合定理 2.2 得出，H $*\langle a\rangle$ 相对于子群集合 {H $\langle a\rangle, \langle ac\rangle$} 是双曲的。然后，根据定理 2.3，群 $\langle$H $*\langle a\rangle, u \,|\, u^{-1}b(ac)b^{-1}u = a\rangle$ 相对于子群集合 {H $\langle a\rangle$} 是双曲的。最后，根据定理 2.3，群 K $= \langle$H $*\langle a\rangle, u, v \,|\, u^{-1}(bacb^{-1})u = a,$ $v^{-1}av = tst^{-1}\rangle$ 再次相对于子群 H 是双曲的，从而完成定理 1.1(i) 的证明。

4. Proof of Theorem 1.1(ii)

设 H、K 和 G 为定理 1.1 的陈述中定义的群。本节的目的是证明 G 关于子群 H 的相对双曲性。根据第 3 节的结果，K 关于外围结构 {H} 是相对双曲的。

由于 K 是 H 的多重 HNN 扩张，稳定字母为 $*\langle a\rangle$ u 和 v，因此 u 显然是 K 中的双曲元素。此外，我们可以证明以下

Claim B. K 的唯一极大初等子群 $E(u)$ 恰为循环子群 $\langle u\rangle$。

证明。为求 $E(u)$，将 K 看作以 u 为稳定字母的 HNN 扩张

$$\mathbf{L} := \langle \mathbf{H} * \langle a\rangle, v\rangle \leq \mathbf{K}.$$

反设 $E(u) \setminus \langle u\rangle \neq \emptyset$。在所有这类属于 $E(u) \setminus \langle u\rangle$ 的元素中，取一个元素，记为 f，使其处于 u-约化形式且 $u^{\pm 1}$ 的数量最少。对于这样的 f，显然存在某个 $n \in \mathbb{N}$，使得 $fu^{\pm n}f^{-1} = u^n$。此外，f 满足以下条件。

(i) 对于任意 $h \in \langle bacb^{-1}\rangle$， f 都不以 hu 开头；对于任意 $a' \in \langle a\rangle$， f 也不以 $a'u^{-1}$ 开头；(ii) 对于任意 $h \in \langle bacb^{-1}\rangle$， f 都不以 $u^{-1}h$ 结尾；对于任意 $a' \in \langle a\rangle$， f 也不以 ua' 结尾。原因如下。首先，假设对于某个 $h \in \langle bacb^{-1}\rangle$， f 以 hu 开头，即 $f \equiv huf_1$（u-约化）。由等式 $fu^{\pm n}f^{-1} = u^n$ 可得:

$$\{(u^{-1}hu)f_1\}u^{\pm n}\{f_1^{-1}(u^{-1}h^{-1}u)\} = u^n,$$

以便使得

$$(a'f_1)u^{\pm n}(f_1^{-1}a'^{-1}) = u^n$$

对于某个 $a' \in \langle a \rangle$。因此 $a'f_1 \in E(u) \setminus \langle u \rangle$。但显然， $a'f_1$ 的$u^{\pm 1}$ 数量少于 f，这与 f 的选取矛盾。接下来，假设 f 以某个 $a'u^{-1}$ 开头，即 $f \equiv a'u^{-1}f_2$ (u-约化)。那么

$$\{(ua'u^{-1})f_2\}u^{\pm n}\{f_2^{-1}(ua'^{-1}u^{-1})\} = u^n,$$

因此

$$(hf_2)u^{\pm n}(f_2^{-1}h^{-1}) = u^n$$

对于某个 $h \in \langle bacb^{-1} \rangle$。因此， $hf_2 \in E(u) \setminus \langle u \rangle$。此外， hf_2 的 $u^{\pm 1}$ 数量少于 f，这也与 f的选取相矛盾。因此，(i) 成立。

对于（ii），注意到 $f^{-1} \in E(u) \setminus \langle u \rangle$，且其 $u^{\pm 1}$ 的数量与 f相同。此外，如果 f 以某个 $h \in \langle bacb^{-1} \rangle$的 $u^{-1}h$ 结尾，或者以任意 $a' \in \langle a \rangle$的 ua' 结尾，那么 f^{-1}就以 $h^{-1}u$ 或 $a'^{-1}u^{-1}$开头。但将（i）的证明中针对 f 所采用的相同论证应用于此处，便会得到矛盾。因此，（ii）成立。

但根据 Britton 引理，表达式 $fu^{\pm n}f^{-1}u^{-n}$不可能表示 K 中的单位元。这一矛盾完成了该断言的证明。□

根据 Claim B 和定理 2.2，可以将外围结构 K 扩展为 {H $\langle u \rangle$}。从这个角度来看， v 是 K 中的双曲元素，因为 v 具有无限阶，且它不与 H 中的任何元素共轭，也不与$\langle u \rangle$中的任何元素共轭。此外，K 的唯一极大初等子群 $E(v)$恰好是循环子群 $\langle u \rangle$。为说明这一点，将 K 视为一个 HNN 扩张，其稳定字母为 v,

$$\mathbf{M} := \langle \mathbf{H} * \langle a \rangle, u \rangle \leq \mathbf{K},$$

然后采用与 Claim B 的证明中类似的论证。结合定理 2.2，外围结构 K 又可以进一步扩展为子群集合 {H $\langle u \rangle, \langle v \rangle$}。

显然，存在单同态 $\iota\colon \langle u \rangle \to$ H 和 $\zeta\colon \langle v \rangle \to$ H，定义为 $\iota(u) = c^3ec^3e^{-1}$和 $\zeta(v) = c^3fc^3f^{-1}$。然后两次应用定理 2.3，最终得到 G $= \langle$K $x, y \,|\, x^{-1}ux = c^3ec^3e^{-1}, y^{-1}vy = c^3fc^3f^{-1} \rangle$相对于 H 双曲。这就完成了定理 1.1(ii) 的证明。

5. Proof of Theorem 1.1(iii)

设 G 为定理 1.1 的陈述中所定义的群。本节的目的是通过构造一个满射但非单射的 G 的自同态，证明 G 是一个非 Hopf 群。

设 ψ 为从以 $\{b,c,s,t,e,f,a,u,v$、x、$y\}$ 为基的自由群到 G 的唯一同态，该同态由映射诱导。

$$b\mapsto b,\quad c\mapsto c^3,\quad s\mapsto s^3,\quad t\mapsto t,\quad e\mapsto e,\quad f\mapsto f,$$
$$a\mapsto s,\quad u\mapsto 1,\quad v\mapsto 1,\quad x\mapsto x\quad \text{and}\quad y\mapsto y.$$

那么，很容易看出，表示式 (1)–(3b) 中的每个定义关系都通过 ψ 映射到 G 中的单位元。因此，ψ 诱导出 G 的一个自同态 ψ。

我们将证明，$\tilde{\psi}$ 是满射但不是单射属于了证明避表示 (3b)中的 x 关系和 y 关系可知，$u,v\in$ 属于 ψ。结合群表示 (3a)中的 v 关系，可得 $a\in$ 属于 ψ，因此由群表示 (3a) 中的 u 关系可知，$c\in$ 属于 ψ。因此，ψ 是 G 的一个满同态。

然而，$\tilde{\psi}$ 不是单射，因为 $c^3\in$ 是 $\tilde{\psi}$ 的核，但 $c^3\ \mathbf{G}\neq 1$。事实上，c^3 包含于 G 的有限子群 H_0 中；因此，如果 $c^3\ \mathbf{G}=1$，那么 $c^3\ \mathbf{H}\overset{0}{=}1$，这显然矛盾。

6. Proof of Theorem 1.1(iv)

设 H 为定理 1.1 的陈述中定义的群。本节的目的是证明 H 是一个 Hopf 群。由于两个有限生成 Hopf 群的自由积仍然是 Hopf 群（见 [4]），因此只需证明 H_2 是 Hopf 群。

在本节中，设 φ 是 H_2 的一个满同态。我们首先给出以下命题。

命题 6.1。我们可以假设 $\varphi(b)=b$ 以及 $\varphi(c)=c^k$，其中 $k\in\mathbb{Z}$。

证明。显然，$\varphi(\mathrm{H}_0)$ 是 H_2 的一个有限子群。由于 H_0 是 H_2 的极大有限子群，$\varphi(\mathrm{H}_0)$ 包含于 H_0 的某个共轭子群中。因此，通过将 φ 替换为 φ 与 H_2，的一个适当内自同构的复合，我们可以假设 $\varphi(\mathrm{H}_0)\subseteq\mathrm{H}_0$，，从而 $\varphi(b)\ \ \varphi(c)\in\mathrm{H}_0$。

首先考虑 $\varphi(c)$。注意，H_0 中的每个元素都可以写成 c^k 或 bc^k，其中 $k\in\mathbb{Z}$。由于 $c^9=1$ 属于 H_2，$\varphi(c)^9=\varphi(c^9)=1$。但由于对于每个$k\in\mathbb{Z}$，$(bc^k)^2=1$，因此必有某个 $k'\in\mathbb{Z}$使得 $\varphi(c)=c^{k'}$。

接下来考虑 $\varphi(b)$。由于 $b^2=1$ 属于 H_2，$\varphi(b)^2=\varphi(b^2)=1$。如上所述，$\varphi(b)=1$，否则 $\varphi(b)=bc^m$ 属于 H_2，其中某个 $m\in\mathbb{Z}$。假设 $\varphi(b)=1$。那么，由于 φ 是满射且 $\varphi(c)=c^{k'}$，我们有

$$\langle\varphi(s),\varphi(t)\rangle/\langle\langle c\rangle\rangle_{\mathbf{H}_2}=\langle\varphi(b),\varphi(c),\varphi(s),\varphi(t)\rangle/\langle\langle c\rangle\rangle_{\mathbf{H}_2}=\mathbf{H}_2/\langle\langle c\rangle\rangle_{\mathbf{H}_2}.$$

这意味着商群 $\mathbf{H}_2/\langle\langle c\rangle\rangle_{\mathbf{H}_2}$ 可以由两个元素生成。但是，

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_2/\langle\langle c,\, s^2,\, t^2,\, t^{-1}btb^{-1}\rangle\rangle_{\mathbf{H}_2} &\cong \langle\bar{b}\rangle \times \langle\bar{s}\rangle \times \langle\bar{t}\rangle \\ &\cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2\end{aligned}$$

也可以由两个元素生成，这与假设矛盾。因此， $\varphi(b) \neq 1$，从而 $\varphi(b) = bc^m$。

现在令 ρ 为从以 $\{b, c, s, t\}$ 为基的自由群到 $\mathbf{H}_2$ 的唯一同态，该同态由映射诱导。

$$\rho : b \mapsto bc^{-m},\quad c \mapsto c,\quad s \mapsto s \quad \text{and} \quad t \mapsto t.$$

于是，表示（1）–（2b）中的每个定义关系在经 ρ 映射后，都被映到 $\mathbf{H}_2$ 的单位元。因此， ρ 诱导出 $\mathbf{H}_2$ 的一个自同态 $\tilde{\rho}$。此外，由于 m 是任意整数，存在一个 $\mathbf{H}_2$ 的自同态 $\tilde{\rho}'$，由 $b \mapsto bc^m$、 $c \mapsto c$、 $s \mapsto s$ 和 $t \mapsto t$ 定义。显然， $\tilde{\rho} \circ \tilde{\rho}' = id_{\mathbf{H}_2}$ 且 $\tilde{\rho}' \circ \tilde{\rho} = id_{\mathbf{H}_2}$。这意味着 $\tilde{\rho}$ 是 $\mathbf{H}_2$ 的一个自同构。进一步将 φ 替换为复合映射 $\tilde{\rho} \circ \varphi$ 后，我们最终可以假设 $\varphi(b) = b$ 且 $\varphi(c) = c^{k'}$，其中 $k' \in \mathbb{Z}$，如所求。□

命题 6.2. 在假设 $\varphi(b) = b$ 且 $\varphi(c) = c^k$ （其中 $k \in \mathbb{Z}$）下，我们还可以进一步假设 $\varphi(s) = s^{\pm 3^p}$ （其中 $p \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$），并且

$$\varphi(t) \equiv t^{\epsilon_1} w_1 \cdots t^{\epsilon_h} w_h \quad (t\text{-reduced}),$$

其中 $h \geq 1$、 $\epsilon_i = \pm 1$ 和 $w_i \in \mathbf{H}_1$ 对每个 $i = 1, \ldots, h$ 都成立。

证明。令 Γ 为 $\mathbf{H}_2$ 的 Bass-Serre 树，其中 $\mathbf{H}_2$ 被视为 $\mathbf{H}_1$ 的 HNN 扩张（见定理 2.4）。记 v 为标记为陪集 $\mathbf{H}_1$ 的顶点。由于$\varphi(\mathbf{H}_0) \subseteq \mathbf{H}_0 \subseteq \mathbf{H}_1$，，显然 $\varphi(\mathbf{H}_0)$ 固定 v。我们将证明 $\varphi(s)$ 也固定 v。反设 $\varphi(s)v \neq v$。显然， $\varphi(s)\varphi(\mathbf{H}_0)\varphi(s)^{-1}$ 固定 $\varphi(s)v$。它也固定 v，因为

$$\varphi(s)\varphi(\mathbf{H}_0)\varphi(s)^{-1} = \varphi(s\mathbf{H}_0 s^{-1}) = \varphi(\mathbf{H}_0) \subseteq \mathbf{H}_1.$$

由于 $\varphi(s)v \neq v$，且由于 T 是一棵树， $\varphi(s)\varphi(\mathbf{H}_0)\varphi(s)^{-1}$ 固定了 Γ中的一条边，因此它是 Γ的某个边稳定子的子群。但由于Γ 的每个边稳定子都与 $\langle s\rangle$ 共轭，而后者是一个无限循环群，并且由于 $\varphi(s)\varphi(\mathbf{H}_0)\varphi(s)^{-1}$是有限的，唯一的可能性是 $\varphi(\mathbf{H}_0) = \{1\}$，这是不可能的。因此，$\varphi(s)$固定了 v，也就是说， $\varphi(s) \in \mathbf{H}_1$。

现在考虑 $\varphi(t)$。由于 φ 是满射，因此 $\varphi(t) \notin \mathbf{H}_1$。这意味着 $\varphi(t)v \neq v$。由于 $st = ts^3$ 属于 $\mathbf{H}_2$， $\varphi(s)\varphi(t) = \varphi(t)\varphi(s)^3$，，因此

$$\varphi(s)\varphi(t)v = \varphi(t)\varphi(s)^3 v = \varphi(t)v.$$

这意味着 $\varphi(s)$ 固定了 $\varphi(t)v$。由于 $\varphi(t)v \neq v$， $\varphi(s)$ 固定了 Γ 中的一条边。特别地， $\varphi(s)$ 固定了 Γ 中测地线 $[v, \varphi(t)v]$ 上的每一条边。

此时，将 $\varphi(t)$ 写作

$$\varphi(t) \equiv w_0 t^{\epsilon_1} w_1 \cdots t^{\epsilon_h} w_h \quad (t\text{-reduced}),$$

其中，对每个 $i = 1,\dots,h$， $h \geq 1$, $\epsilon_i = \pm 1$，且对每个 $j = 0,\dots,h$， $w_j \in \mathbf{H}_1$。因此，将 φ 替换为 φ 与由 $w_0{}^{-1}$ 给出的 $\mathbf{H}_2$ 的内自同构的复合后，我们可以假设 $\varphi(b) = bc^m$, $\varphi(c) = c^{k'}$, $\varphi(s) \in \mathbf{H}_1$ 并且

$$\varphi(t) \equiv t^{\epsilon_1} w_1 \cdots t^{\epsilon_h} w_h{}' \quad (t\text{-reduced}),$$

其中，对任意 $i = 1$， $h \geq 1$, $\epsilon_i = \pm 1$，....., h；并且，对任意 $j =1$，....., $h-1$, w_h', $w_j \in \mathbf{H}_1$。接着，进一步将 φ 替换为复合映射 $\tilde{\rho} \circ \varphi$，其中 $\tilde{\rho}$ 是 $\mathbf{H}_2$ 的自同构（见命题 6.1 的证明），其定义为

$$\tilde{\rho} : b \mapsto bc^{-m}, \quad c \mapsto c, \quad s \mapsto s \quad \text{and} \quad t \mapsto t,$$

我们可以进一步假设 $\varphi(b) = b$ 和 $\varphi(c) = c^{k'}$, $\varphi(s) \in \mathbf{H}_1$ 以及 $\varphi(t)$ 与上述情况相同。

现在回想一下， $\varphi(s)$ 固定了 Γ 中测地线 $[v, \varphi(t)v]$ 上的每条边。特别地，$\varphi(s)$ 属于测地线 $[v, \varphi(t)v]$ 上第一条边的稳定子。由于 $\varphi(t)$ 以字母 t 或 t^{-1} 开头，测地线 $[v, \varphi(t)v]$ 上的第一条边标记为 $\langle s \rangle$ 或 $t^{-1}\langle s \rangle$。因此，前者的稳定子是 $\langle s \rangle$，后者的稳定子是 $t^{-1}\langle s \rangle t = \langle s^3 \rangle$。无论哪种情况， $\varphi(s) \in \langle s \rangle$，也就是说，对于某个 $r \in \mathbb{Z}$， $\varphi(s) = s^r$。

写作 $r = \pm 3^p q$，其中 $p, q \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$ 且 $\gcd(3, q) = 1$。我们将证明 $q = 1$。显然，$s^r = s^{\pm 3^p q} \in \langle\langle s^q \rangle\rangle_{\mathbf{H}_2}$。假设 $q \neq 1$，即 $q \geq 2$。由于 φ 是满射，且 $\varphi(b) = b$ 以及 $\varphi(c) = c^k$，我们有

$$\langle \varphi(t) \rangle / \langle\langle b, c, s^q \rangle\rangle_{\mathbf{H}_2} = \langle \varphi(b), \varphi(c), \varphi(s), \varphi(t) \rangle / \langle\langle b, c, s^q \rangle\rangle_{\mathbf{H}_2} = \mathbf{H}_2 / \langle\langle b, c, s^q \rangle\rangle_{\mathbf{H}_2}.$$

这意味着商群 $\mathbf{H}_2 / \langle\langle b, c, s^q \rangle\rangle_{\mathbf{H}_2}$ 仅由一个元素生成。但这是矛盾的，因为

$$\mathbf{H}_2 / \langle\langle b, c, s^q \rangle\rangle_{\mathbf{H}_2} \cong \langle \bar{s} \rangle \times \langle \bar{t} \rangle \cong \mathbb{Z}_q \rtimes \mathbb{Z}.$$

因此， $q = 1$，即 $\varphi(s) = s^{\pm 3^p}$，如所求。 □

命题6.3。在假设 $\varphi(b) = b$, $\varphi(c) = c^k$, $\varphi(s) = s^{\pm 3^p}$ and$\varphi(t) = t^{\epsilon_1} w_1 \cdots t^{\epsilon_h} w_h$ (t-reduced) 的情况下，其中 $k, p \in \mathbb{Z}$ with $p \geq 0$, $h \geq 1$, $\epsilon_i = \pm 1$，且对于每个 $i = 1, \dots, h$， $w_i \in \mathbf{H}_1$，我们可以进一步假设 $\varphi(c) = c$ and$\varphi(s) = s$。

证明。我们首先证明 $\varphi(c) = c^k$ 满足 $k \equiv \pm 1$ (模 3)。反设不然。则 $\varphi(c) = 1$ 或 $\varphi(c) = c^{\pm 3}$，因为 $c^9 = 1$。由于 φ 是满射，我们有

$$\langle \varphi(t) \rangle / \langle\langle b, c^3, s \rangle\rangle_{\mathbf{H}_2} = \langle \varphi(b), \varphi(c), \varphi(s), \varphi(t) \rangle / \langle\langle b, c^3, s \rangle\rangle_{\mathbf{H}_2} = \mathbf{H}_2 / \langle\langle b, c^3, s \rangle\rangle_{\mathbf{H}_2}.$$

这意味着商群 $\mathbf{H}_2 / \langle\langle b, c^3, s \rangle\rangle_{\mathbf{H}_2}$ 仅由一个元素生成。但是，由于

$$\mathbf{H}_2 / \langle\langle b, c^3, s \rangle\rangle_{\mathbf{H}_2} \cong \langle \bar{c} \rangle * \langle \bar{t} \rangle \cong \mathbb{Z}_3 * \mathbb{Z}, \tag{7}$$

我们得出矛盾。

因此 $\varphi(c) = c^k$ 满足 $k \equiv \pm 1$ （模 3）。令 k' 为一个整数，使得 $kk' \equiv 1$ （模 9）。对于这样的 k'，显然 $c^{-3k'} = c^{-3}$ 或 $c^{-3k'} = c^3$。此外， $c^{-3k'} =$

c^{-3k}。首先假设 $c^{-3k'} = c^{-3k} = c^{-3}$。令 ρ 和 ρ' 为从以 $\{b, c, s, t\}$ 为基的自由群到 H_2 的唯一同态，它们由以下映射诱导

$$\rho : b \mapsto b, \quad c \mapsto c^{k'}, \quad s \mapsto s, \quad t \mapsto t, \quad \text{and}$$
$$\rho' : b \mapsto b, \quad c \mapsto c^{k}, \quad s \mapsto s, \quad t \mapsto t.$$

因此，在表示式 (1)–(2b) 中，每个定义关系在经由 ρ 和 ρ' 映射后，都会被映射到 H_2 中的单位元。因此，分别由 ρ 和 ρ' 诱导出 H_2 的自同态 $\tilde{\rho}$ 和 $\tilde{\rho}'$。对于这样的 $\tilde{\rho}$ 和 $\tilde{\rho}'$，显然有 $\tilde{\rho} \circ \tilde{\rho}' = id_{\mathbf{H}_2}$ 和 $\tilde{\rho}' \circ \tilde{\rho} = id_{\mathbf{H}_2}$，这意味着 $\tilde{\rho}$ 是 H_2 的一个自同构。通过用 $\varphi \circ \tilde{\rho}$ 替换 φ，我们可以假设 $\varphi(b) = b$、$\varphi(c) = c$ 且 $\varphi(s) = s^{\pm 3^p}$。

接下来假设 $c^{-3k'} = c^{-3k} = c^3$。令 τ 和 τ' 为从以 $\{b, c, s, t\}$ 为基的自由群到 H_2 的唯一同态，它们由这些映射诱导得到。

$$\tau : b \mapsto b, \quad c \mapsto c^{k'}, \quad s \mapsto s^{-1}, \quad t \mapsto t, \quad \text{and}$$
$$\tau' : b \mapsto b, \quad c \mapsto c^{k}, \quad s \mapsto s^{-1}, \quad t \mapsto t.$$

再次，由于表示（1）–（2b）中的每个定义关系子在 τ 和 τ'作用下都映射到 H_2 中的单位元~，因此 τ和 τ'分别诱导出 H_2 的端同态 $\tilde{\tau}$ 和 τ'。对于这样的 $\tilde{\tau}$和 $\tilde{\tau}'$，显然 $\tilde{\tau} \circ \tilde{\tau}' = id_{\mathbf{H}_2}$和 $\tilde{\tau}' \circ \tilde{\tau} = id_{\mathbf{H}_2}$，这意味着 $\tilde{\tau}$是 H_2 的自同构。将 φ 替换为 $\varphi \circ \tilde{\tau}$后，我们还可以假设 $\varphi(b) = b$，$\varphi(c) = c$ 且 $\varphi(s) = s^{\pm 3^p}$。

现在考虑 $\varphi(s)$。由表示（2a）中的定义关系 $s^{-1}bs = bc^{-3}$ 可知，$\varphi(s)^{-1}\varphi(b)\varphi(s) = \varphi(b)\varphi(c)^{-3}$。这里，由于 $\varphi(b) = b$、$\varphi(c) = c$ 且$\varphi(s) = s^{\pm 3^p}$，我们得到

$$s^{\mp 3^p} b s^{\pm 3^p} = bc^{-3}. \tag{8}$$

但由群表示 (2a) 中的定义关系，我们得到 $sbs^{-1} = bc^3$ 且对于任意 $i \geq 1$，都有 $s^{\mp 3^i} b s^{\pm 3^i} = b$。结合 (8)，可得 $c^6 = 1$ 或 $c^3 = 1$，这与 c 的阶为 9 矛盾。因此，避免矛盾的唯一可能是 $\varphi(s) = s$，如所求。□

命题 6.4. 在假设 $\varphi(b) = b$、$\varphi(c) = c$、$\varphi(s) = s$ 且$\varphi(t) = t^{\epsilon_1} w_1 \cdots t^{\epsilon_h} w_h$($t$-约化)成立的情况下，其中 $\epsilon_i = \pm 1$ 且对于每个 $i = 1$，都有 $w_i \in \mathrm{H}_1$，....., h，我们还可以假设 $\varphi(t) = t^{\epsilon_1} w_1 \cdots w_{h-1} t^{\epsilon_h}$。

证明。定义从以 $\{b, c, s, t\}$为基的自由群到 H_2 的唯一同态 ρ，它由如下映射诱导:

$$\rho : b \mapsto b, \quad c \mapsto c, \quad s \mapsto s \quad \text{and} \quad t \mapsto t w_h^{-1}.$$

于是，表示（1）–（2b）中的每个定义关系都被 ρ 映射到 H_2 中的单位元，因为 $\rho(t)^{-1} s \rho(t) s^{-3} \equiv w_h t^{-1} s t w_h^{-1} s^{-3} \overset{\mathbf{H}}{=} w_h s^3 w_h^{-1} s^{-3} \overset{\mathbf{H}}{=} 1$。因此，$\rho$ 诱导出 H_2 的一个自同态 $\tilde{\rho}$。同理，存在由 $b \mapsto b$、$c \mapsto c$、$s \mapsto s$ 和 $t \mapsto t w_h$ 定义的 H_2 的自同态 $\tilde{\rho}'$。那么显然 $\tilde{\rho} \circ \tilde{\rho}' = id_{\mathbf{H}_2}$

以及 $\tilde{\rho}' \circ \tilde{\rho} = id_{\mathbf{H}_2}$。因此， $\tilde{\rho}$ 是 H_2 的一个自同构。通过将 φ 替换为复合映射 $\varphi \circ \tilde{\rho}$，我们可以假设 $\varphi(b) = b$、 $\varphi(c) = c$ 且 $\varphi(s) = s$，并且 $\varphi(t) = t^{\epsilon_1} w_1 \cdots w_{h-1} t^{\epsilon_h}$，正如所期望的那样。□

命题 6.5. 在假设 $\varphi(b) = b$, $\varphi(c) = c$, $\varphi(s) = s$ and$\varphi(t) = t^{\epsilon_1} w_1 \cdots w_{h-1} t^{\epsilon_h}$ (t-约化) 的情况下，其中 $\epsilon_i = \pm 1$ 对每个 $i = 1, \ldots, h$ 都成立，且 $w_j \in \mathrm{H}_1$ 对每个 $j = 1, \ldots, h-1$ 都成立，我们最终可以假设 $\varphi(t) = t$。

证明。由群表示 (2b) 中的定义关系 $t^{-1} s t = s^3$ 以及假设可得

$$(t^{-\epsilon_h} {w_{h-1}}^{-1} \cdots {w_1}^{-1} t^{-\epsilon_1}) s (t^{\epsilon_1} w_1 \cdots w_{h-1} t^{\epsilon_h}) s^{-3} = 1. \tag{9}$$

根据 Britton 引理，这个表达式不是 t-循环约化的。

假设 $\epsilon_1 = -1$。那么部分 $t^{-\epsilon_1} s t^{\epsilon_1}$ 已经是 t-约化的。因此，唯一的t-约化只能从部分 $t^{\epsilon_h} s^{-3} t^{-\epsilon_h}$ 开始依次进行。假设 t-约化只能进行到 $t^{\epsilon_j}(w_j \cdots (t^{\epsilon_h} s^{-3} t^{-\epsilon_h}) \cdots w_j^{-1}) t^{-\epsilon_j}$ 为止。此处，若$j \geq 2$，则根据 Britton 引理，等式 (9) 不可能成立，矛盾。此外，若$j = 1$，则完成所有 t-约化后，$t^{\epsilon_1}(w_1 \cdots (t^{\epsilon_h} s^{-3} t^{-\epsilon_h}) \cdots w_1^{-1}) t^{-\epsilon_1}$ 变为 s^k ，其中 $k \in \mathbb{Z}$。特别地，由于 $\epsilon_1 = -1$， k 是 3 的倍数。但由等式 (9) 可得 $s^{k+1} = 1$ ，这与 s 是无限阶元素这一事实矛盾。

因此 $\epsilon_1 = 1$。另一方面，由于 φ 是满射，存在一个约化字 $z(b, c, s, t)$ 属于 $\{b, c, s, t\}$ ，使得

$$t \overset{\mathbf{H}_2}{=} z(b, c, s, \varphi(t)). \tag{10}$$

我们可以将 $z(b, c, s, t)$ 写成如下形式:

$$z(b, c, s, t) \equiv z_0 t^{\delta_1} z_1 \cdots z_{\ell-1} t^{\delta_\ell} z_\ell \quad (t\text{-reduced}),$$

其中， z_0、 …、 z_ℓ 是 $\{b, c, s\}$、 δ_1、 …、 $\delta_\ell = \pm 1$ 中的约化字，并且当 z_i 在 H_1 中不是单位元时， $z_i \notin \langle s \rangle$ ，前提是 $\delta_i = -1$ 或 $\delta_{i+1} = 1$。

断言。即使在右手表达式中完成所有 t-约化之后

$$z(b, c, s, \varphi(t)) = z_0 \varphi(t)^{\delta_1} z_1 \cdots z_{\ell-1} \varphi(t)^{\delta_\ell} z_\ell,$$

对于任意 $i = 1, \ldots, \ell$，至少有一个 $t^{\pm 1}$ in $\varphi(t)^{\delta_i}$ 未被约简。

断言的证明。让我们考虑每个 $\varphi(t)^{\delta_i} z_i \varphi(t)^{\delta_{i+1}}$ 中所有可能的 t-约化。首先，如果 $\delta_i = -1$ 和 $\delta_{i+1} = 1$，则由事实 $\epsilon_1 = 1$ 可知， $\varphi(t)^{-1} z_i \varphi(t)$ 中不存在 t-约化，因为在这种情况下 $z_i \notin \langle s \rangle$ 。

接下来，如果 $\delta_i = -1$ 和 $\delta_{i+1} = -1$同时成立，或者 $\delta_i = 1$ 和 $\delta_{i+1} = 1$同时成立，那么根据我们的假设 $z_i \notin \langle s \rangle$ ，无论哪种情况，$\varphi(t)^{\mp 1} z_i \varphi(t)^{\mp 1}$中都不存在 t-约化。

最后，假设 $\delta_i = 1$ 和 $\delta_{i+1} = -1$。在这种情况下， $\varphi(t) z_i \varphi(t)^{-1}$ 中可能存在 t-约简。即使 $\varphi(t) z_i \varphi(t)^{-1}$ 中存在 t-约简，也并非所有 $t^{\pm 1}$ 都能被

已约化。原因如下。假设 $t^{\pm 1}$ in $\varphi(t) z_i \varphi(t)^{-1}$ 中的所有部分都可以约化。由于 $\varphi(t)$ 的首字母是带有 $\epsilon_1 = 1$ 的 t^{ϵ_1}，因此 $\varphi(t) z_i \varphi(t)^{-1}$ 中最后一次 t-约化的形式为 $t z_i' t^{-1}$，其中 $z_i' \in \langle s^3 \rangle$。于是，在完成所有 t-约化后，$\varphi(t) z_i \varphi(t)^{-1}$ 成为 s 的幂。但由等式 $\varphi(t)^{-1} s \varphi(t) = s^3$in H_2，可得 $z_i \in \langle s^3 \rangle$。这与假设 $z(b, c, s, t)$ 是 t-约化的矛盾。

因此，只有在 $\delta_i = 1$ 和 $\delta_{i+1} = -1$, t-约化能够在 $\varphi(t)^{\delta_i} z_i \varphi(t)^{\delta_{i+1}}$中发生的情形下才会如此。但即使在这种情形下，$\varphi(t)^{\delta_i} z_i \varphi(t)^{\delta_{i+1}}$中的 $t^{\pm 1}$也并非都能约化。因此，断言得证。□

根据断言，为使等式 (10) 成立，我们看到唯一的可能性是 $\ell = 1$，从而 $z(b, c, s, \varphi(t)) = z_0 \varphi(t)^{\delta_1} z_1$。结合 (10)，得到

$$t \overset{\mathbf{H}_2}{=} z_0 \varphi(t)^{\delta_1} z_1. \tag{11}$$

由于 $\varphi(t)$ 写成了 a t-约化形式，(11) 的右手表达式已经是 t-约化的。由 Britton 引理可知，若要使 (11) 中的等式成立，右手表达式中只能出现一个字母表 t，且同时不能出现字母表 t^{-1}。此处，由于 $\varphi(t) = t^{\epsilon_1} w_1 \cdots w_{h-1} t^{\epsilon_h}$与 $\epsilon_1 = 1$，我们看到这仅在 $\delta_1 = 1$ 且 $\varphi(t) = t$时发生，从而完成命题 6.5 的证明。□

综上，我们得到如下

推论 6.6。群 H_2 是 Hopf 群。

证明。设 φ 是 H_2 的一个满同态。命题 6.1–6.5 表明，将 φ 与 H_2 的适当自同构复合后，可得到 H_2，上的单位映射，因此 φ 确实是 H_2 的一个自同构。这意味着 H_2 是 Hopf 群。□

References

[1] H. Bass, *Covering theory for graphs of groups*, 《纯粹与应用代数杂志》89(1–2) (1993), 3–47。[2] R.Coulon 和 V. Guirardel, *Automorphisms and endomorphisms of lacunary hyperbolic groups*, 《群、几何与动力系统》13(2019年), 131–148。[3] F. Dahmani, *Combination of convergence groups*, 《几何与拓扑》7 (2003年), 933–963。[4] I.M. S. Dey 和 H. Neumann, *The Hopf property of free products*, 《数学杂志》117 (1970), 325–339。[5] D. Groves, *Limit groups for relatively hyperbolic groups, II: Makanin-Razborov diagrams*, 《几何与拓扑》10 (2010), 1807–1856。[6] D.Groves 和M. Hull, *Homomorphisms to acylindrically hyperbolic groups I: Equationally noetherian groups and families* **372** 10 2019 7141 7190 。《美国数学会汇刊》( ) ( ), –。[7] A. I.Mal'cev, *On the faithful representation of infinite groups by matrices*, 《数学文集》8 (50)(1940), 405–422。[8] D. V. Osin, *Relatively hyperbolic groups: Intrinsic geometry algebraic properties and algorith-* , 《美国数学会回忆录》( ), 第 vi 页。[9] D. V. Osin, *mic problems* **179** 2006 843, +100 *Relative Dehn functions of amalgamated products and HNN-extensions*, 《当代数学》394 (2006年), 209–220。

[10] D. V. Osin, *Elementary subgroups of relatively hyperbolic groups and bounded generation*, 《国际代数与计算杂志》16（2006年），第1期，99–118页。[11] D. V. Osin, *Peripheral fillings of relatively hyperbolic groups* **167** 2007 2, , 295 326 《数学发明》（），第 – 期。[12] C. Reinfeldt 和 R. Weidmann, *Makanin-Razborov diagrams for hyperbolic groups*, 布莱兹·帕斯卡数学年刊 26（2019年），119–208页。[13] Z. Sela, *Endomorphisms of hyperbolic groups. I. The Hopf property*, 《拓扑学》38（1999年），301–321页。[14] J. P. Serre, *Trees*, 施普林格数学专著，施普林格出版社，柏林，2003年，由 John Stillwell 根据法文原版翻译，1980年英文译本的修订版第2次印刷。[15] R. Strebel, *Appendix. Small cancellation groups*, 载于《论 Mikhael Gromov 之后的双曲群》，1988年在伯尔尼举行的瑞士双曲群研讨会论文集，E. Ghys 和 P. de la Harpe（编），《数学进展》第83卷，Birkhäuser Boston Inc.，波士顿，马萨诸塞州，1990年。[16] D. T. Wise, *A non-Hopfian automatic group*, 《代数杂志》180（1996年），845–847页。[17] W. Yang, *Notes on geometric group theory*, 预印本，2020年，网址：http://faculty.bicmr.pku.edu.cn/∼wyang/ggt/GGTnotes.pdf
Department of Mathematics, Pusan National University, San-30 Jangjeon-Dong,Geumjung-Gu, Pusan, 609-735, Korea*Email address*: jankim@pusan.ac.krDepartment of Mathematics, Pusan National University, San-30 Jangjeon-Dong,Geumjung-Gu, Pusan, 609-735, Korea*Email address*: donghi@pusan.ac.kr