arXiv:2304.10017v1 [math.MG] 20 Apr 2023

最小化边长多面体

ASGEIR VALFELLS

摘要。Zdzislaw Melzak 于 1957 年提出猜想：棱长总和最小的单位体积多面体是直三棱柱，其棱长为 $2^{2/3}3^{11/6}$。本文提出了极小化体必须满足的一系列局部条件。对于凸多面体，我们证明所有顶点的度都必须为三，三角形面的数量至多为 14，并描述了四边形面趋于任意小时的情形。

1. 引言

1.1. 基本历史。 1965 年，Zdzislaw Melzak 提出猜想：棱长总和最小的单位体积凸多面体是直三棱柱，其棱长为 $2^{2/3}3^{11/6} \approx 11.896$[6]。时至今日，极小化体是否存在仍不得而知。此后（事实上，此前亦然），这一问题的研究进展一直寥寥无几；对于一个早在古代就可能被提出的问题而言，这令人意外。目前的成果来自两个方面：变分论证和紧致性论证。

对于真正的多面体情形，已知结果可通过直接的变分计算得到。Melzak 本人证明，正四面体在所有四面体中最优；Berger[4]则证明，三棱柱在棱柱、正多面体和棱锥这一类多面体中最优。更值得关注的是 Berger 通过紧性论证研究凸多面体问题的方法。他纳入了广义候选对象，使凸多面体空间得以紧化，并证明在这个更广的空间中存在极小化体，同时得到相应的正则性结果。后来，Scott [8] 将这项工作推广到了更高维度。

1.2. 方法与结果。 沿着 Melzak 的思路，我们将从变分的角度研究这个问题。在 Melzak 和 Berger 的著作中，多面体被视为由一组顶点构成，然后对这些顶点进行扰动。在一般情形下，这会带来问题，因为大多数扰动都会使受扰动的顶点不再与原先和它共享面的顶点共面。直接的补救办法是调整相邻面（如图所示），但这会引入一条新棱；而我们正在尝试最小化棱长，因此这并不理想。

本章将主要采用一种广义上可称为对面的扰动的方法。我们发现，Besicovitch 和 Eggleston [5] 在解决一个多面体棱长最小化问题时也采用了这一策略；该问题的约束条件不是体积，而是要求多面体能够容纳一个单位球。

为了让问题稍微更容易处理，我们做一个表面上的改动。我们将寻求最小化棱长的立方，并对泛函按体积进行归一化，使任何多面体都符合条件。设 $e(P)$ 为多面体 P 的棱长，$v(P)$ 为我们试图

最小化的泛函 $m(P) = e(P)^3/v(P)$。注意， m 在本文中称为梅尔扎克比，它具有尺度不变性。本文中，我们将“梅尔扎克问题”称为这样一类问题：在某一类多面体对象中最小化梅尔扎克比，这类对象可以是所有多面体、广义多面体、面数受到限制的多面体、凸多面体，或受其他任何几何限制的多面体。

对某个多面体 P_0 进行扰动后，$\mathcal{P} = \{P_t\}_{t\in[0,\epsilon]}$ 我们可以定义函数 $E_{\mathcal{P}}(t)$、$V_{\mathcal{P}}(t)$、 $M_{\mathcal{P}}(t)$，分别为 $e(P_t)$ $v(P_t)$ $m(P_t)$。省略 $\mathcal{P}$ 的书写，并假设 E 和 V 均可微，注意：

$$M'(t) = \frac{3E(t)^2}{V(t)}E'(t) - \frac{E(t)^3}{V(t)^2}V'(t)$$

在任意给定的类别中，极小化体 P_0 不可能存在满足 $M'(0) < 0$ 的扰动。我们的目标是通过选择 $\mathcal{P}$，提取极小化候选体的局部判据。对于凸多面体，我们将得到最强的结果，因此以下序列会很有帮助。

命题 1.1. 存在一个凸多面体序列 P_n ，满足：*i*）在凸多面体中使梅尔扎克比最小；*ii*）若 $P_n \neq P_{n+1}$ （相差一个缩放因子），则 P_n 的面数更少；*iii*） P_n 在面数相同的凸多面体中使梅尔扎克比最小。

证明。 首先令 P_1 为正四面体。已知梅尔扎克证明， [7] 在所有四面体中使梅尔扎克比达到最小。为了得到 P_{n+1} ，我们首先选择具有最少面数 k的多面体 P，使得P 的梅尔扎克比低于 P_n。由于具有 k 个面且棱长有界的单位体积多面体空间是紧致的，因此我们令 P_{n+1} 为其中使梅尔扎克比达到最小的多面体。□

1.3. **结果总结**。 尽管我们怀有雄心勃勃的目标，希望找到某种梅尔扎克问题表述下的极小化体，或证明其存在性，但这些目标尚未实现。不过，我们确实找到了关于极小化体的局部判据。最容易处理的表述是凸多面体的情形。对于 1.1 节中的各项内容，我们能够证明若干判据。其中最完整的结果见 2.3、3.2 和 3.9 节。具体而言，我们能够指出，所有顶点的度都必须为 3；能够给出三角形面的数量上界；还能够描述较小四边形面必须满足的必要性质。

虽然我们无法获得适用于所有多面体的梅尔扎克问题的全局数据，但我们确实描述了局部数据。上述结果尽可能推广到了不一定是凸的多面体。除了将凸多面体的局部判据推广到非凸情形外，我们还证明，对于局部凸的顶点，潜在极小化体上的顶点度数受该顶点处曲率的限制。

2. 顶点度数界

定义 2.1. 若顶点 H 包含在某个开邻域 U_H 中，且 P 在该邻域内是凸的，则称其为暴露的。

定义 2.2。 如果一个面 F 包含在某个开邻域 U_F 中，使得 $U_F \cap P$是凸的，则 P 的面 F 是暴露的。等价地，如果一个面 F 的所有顶点都是暴露的，则 P 的面 F 是暴露的。

2.1. **暴露面**。

定理 2.3。 如果 P 有一个暴露面 F，且该面有一个度大于 *3* 的顶点，我们可以扰动 P以降低梅尔扎克比。

证明。 我们的策略是构造两种扰动，并由此推出结果。第一种扰动 $\mathcal{P}$，可以定性地描述为沿向外方向滑动一个暴露面。更准确地说，对于一个暴露面 F，我们可以选取 U_F，使得 $U \cap P_0$ 是若干闭半空间（其中一个为开半空间）的交集。将与面 F 对应的半空间沿外法线方向平移 t，然后用这个新的交集替换 $U_F \cap P$，便得到 P_t，同时注意使 t 足够小。我们将相应的面称为 F_t。

求得 $M'(0)$ 需要两个观察。首先，对于 F_0 的每个顶点 H，令 H_t 为 F_t 上对应的顶点。当 $t > 0$ 时，我们立即看到 H_t 的度为 3，其沿着 F_t 的棱具有单位向量 $u_{1,\ t,\ H}$ 和 $u_{2,\ t,\ H}$，以及向量 v_H，使得 H_t 与 H_s 之间的向量为 $(t-s)v_H$。随后，我们可以将 $E'_{\mathcal{P}}(t)$ 归因于作出贡献的顶点。

$$E'_{\mathcal{P}}(t) = \sum_H E'_{\mathcal{P},H}(t) = \sum_H < v_H, u_{1,H,t} + u_{2,H,t} > + ||v_H||$$

.

接下来，令 t 趋于 0，可以看出体积的变化趋近于一个底面为 F_0 、高为 t的棱柱，因此 $V'(0)$ 等于 F_0的面积。综合起来

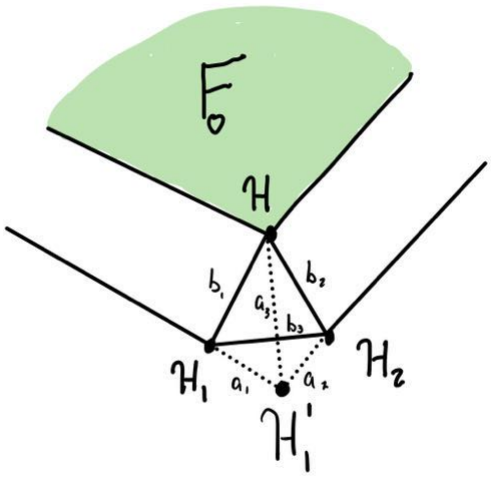
$$M'_{\mathcal{P}}(0) = \frac{3E(0)^2}{V(0)} \left(\sum_H ||v_H|| - < v_H, u_{1,H,0} + u_{2,H,0} > \right) - \frac{E(0)^3}{V(0)^2} A(F_0)$$

现在我们构造第二种扰动 $\mathcal{Q}$：与将对应于 F_0 的半空间向朝外方向平移不同，这里我们将其向朝内方向平移。此时，我们无法保证 F_0 的顶点与 F_t的顶点之间存在一一对应关系。事实上，如果 H 的度为 k，那么 F_t 有 $k-2$ 个对应顶点。令 $H_{\cdot,t}$ 为这些对应顶点，其中 $v_{H,\cdot}$ 是先前扰动中与 $-v_H$ 对应的向量。与先前的扰动一样，我们得到 $V'_{\mathcal{Q}}(0) = -A(F_0)$。

如果所有顶点的度均为 3，那么按照计算 $M'\mathcal{P}(0)$ 的方法，可得 $M'\mathcal{P}(0) = -M'\mathcal{Q}(0)$。然而，设其中一个 H 的度为 k。那么我们可以将棱长的以下变化率归因于 H，并在 $t = 0$处求值：

$$E'_{\mathcal{Q},H}(0) = < v_{H_1}, u_{1,H,0} > + < v_{H_{k-2}}, u_{2,H,0} > + \sum_{n=1}^{k-2} -||v_{H_n}|| + \sum_{n=1}^{k-3} ||v_{H_n} - v_{H_{n+1}}||$$

现在我们要证明 $E'_{\mathcal{Q},\ H}(0) < -E'_{\mathcal{P},\ H}(0)$。为此，我们将使用一个小小的几何技巧，如图 2.1 所示。注意，标签 a，b 表示棱长，a 表示虚线棱，b 表示实线棱，并且这些标签都是新的：



再次将 U_F 视为半空间的交集，我们注意到，移除沿着面 H，$H_{1,\ t}$，$H_{2,\ t}$ 的半空间会产生一个标记为 $H'_{1,\ t}$ 的新顶点。对所有 $n > 3$ 重新编号 $H_{n,\ t} = H'_{n-1,\ t}$ 后，我们得到：

$$< v_{H'_1}, u_{1,H,0} > + < v_{H'_{k-2}}, u_{2,H,0} > + \sum_{n=1}^{k-3} -||v_{H'_n}|| + \sum_{n=1}^{k-4} ||v_{H'_n} - v_{H'_{n+1}}|| =$$

$$< v_{H,\ 1},\ u_{1,\ H,\ 0} > + < v_{H,\ k-2},\ u_{2,\ H,\ 0} > + \sum_{n=1}^{k-2} -||v_{H,\ n}|| + \sum_{n=1}^{k-3} ||v_{H,\ n} - v_{H,\ n+1}|| + a_1 + a_2 + b_1 + b_2 - a_3 - b_3$$

因此，三角不等式告诉我们 $a_1 + a_2 + b_1 + b_2 - a_3 - b_3 > 0$。重复这一过程，我们得到一个单独的顶点 H'_t，即 $H_t - tv_H$。综上所述，我们得到：

$$-E'_{\mathcal{P},H}(0) = < v_{H'_1}, u_{1,H,0} > + < v_{H'_{k-2}}, u_{2,H,0} > - ||v_{H'}|| =$$

$$< v_{H,1}, u_{1,H,0} > + < v_{H,k-2}, u_{2,H,0} > + \sum_{n=1}^{k-2} -||v_{H,n}|| + \sum_{n=1}^{k-3} ||v_{H,n} - v_{H,n+1}|| + \sum a_{\cdot} + \sum b_{\cdot} >$$

$$< v_{H,1}, u_{1,H,0} > + < v_{H,k-2}, u_{2,H,0} > + \sum_{n=1}^{k-2} -||v_{H,n}|| + \sum_{n=1}^{k-3} ||v_{H,n} - v_{H,n+1}|| = E'_{\mathcal{Q},H}(0)$$

得到我们想要的结果 $M'_{\mathcal{Q}}(0) < -M'_{\mathcal{P}}(0)$。

现在，要么 $M'_{\mathcal{P}}(0) < 0$，要么 $M'_{\mathcal{Q}}(0) < 0$。有趣的是，我们的扰动不会改变 P 上的面数，尽管它可能会改变 F 上的顶点数。□

虽然能够在多面体的梅尔扎克问题中规定这一局部条件当然很好，但它最适用于凸 Melzak 问题。

推论 2.4. 序列 *1.1* 中的所有元素，其顶点的度都为 *3*。

事实上，要求面是暴露的这一条件过于严格。我们可以放宽条件，并对 2.3 稍作推广。

定理 2.5. 若 P 有一个面 F，其除2 个相邻顶点外，其余顶点均暴露，且有一个度大于 *3* 的暴露顶点，那么我们可以对 P 进行扰动，以减小梅尔扎克比。

证明. 证明的思路与 2.3 相同，不过我们的扰动是使面绕着连接那两个不一定暴露的顶点的棱旋转，其中$\mathcal{P}$ 使面向外旋转，$\mathcal{Q}$ 使面向内旋转。只有一个细微的技术差异，但这完全不会改变证明 2.3 的论证。

$$v_H = \lim_{t \to 0^+} \frac{H_t - H}{t}$$

□

2.2. **暴露的顶点.** 如果我们只知道某个顶点是暴露的，就无法再对多面体的面进行任何扰动。相反，我们要做的事可以定性地描述为：削去角上无限小的一块。在开始之前，我们先介绍离散微分几何中的一些工具和观察结果。

定义 2.6. 如果 H 是 P 的一个顶点，那么该顶点 H 处的高斯像是通过将每个面映射到 S^2 中各自的外向法向量，并在对应于相邻面的点之间绘制测地线来得到的。

注。 如果 P是凸的，那么取 P每个顶点的高斯像，就得到一个位于 S^2上的P 的对偶图。

注。 高斯曲率的离散化是顶点处的角亏，即 $2\pi - \sum \alpha_i$其中 α 是相邻面在该顶点处的角。这对应于顶点处高斯像的代数面积，这是离散微分几何中的经典结果，在凸情形下[1]在一般情形下也成立[3]。

注。 测地线的长度给出我们 π 减去（定向）面之间的二面角。因此，点到测地线的距离同样对应于相应棱与面之间的角。

定义 2.7。 如果 H 是暴露的，那么 $g(H)$ 就是一个凸球面多面体。取 $g(H)$ 中的内切圆，我们可以确定其内心 $c_H \in S^2$ 和内切半径 $\theta_H \in (0, 2\pi)$。

定理 2.8。 如果 P 有一个暴露的顶点 H，使得 $deg(H) > \frac{2\pi}{tan\ \theta()}$，那么可以对 P 进行扰动，使其梅尔扎克比降低且多出一个面。

证明。 与我们在 2.3 中的构造类似，我们取 $U_H \cap P$，将其与一个法向于 c_H 且与 H 相交的半空间求交，并向内平移 t；随后用这个交集替换 $U_H \cap P$，得到 P_t。

这一构造明确告诉我们，在 P_t 处，每条边 $g(H)$ 都对应一个顶点 $H_{i,\ t}$，其向量长度 v_{H_i} 由 $t/sin(\theta_i)$ 给出，其中 θ_i 是到该

$g(H)$ 对应边的距离。很容易看出，经过这次扰动后，我们得到 $\Delta|V(t)| < ct^2$，因此 $V'(0) = 0$，总计：

$$M'(0) = \frac{3E(0)^2}{V(0)}\left(\sum_i ||v_{H_i} - v_{H_{i+1}}|| - ||v_{H_i}||\right)$$

最后我们注意到：

$$\sum_i ||v_{H_i} - v_{H_{i+1}}|| < \frac{2\pi}{\tan(\theta_H)} \text{ and } \sum_i ||v_{H_i}|| > deg(H) - 2 + \frac{2}{\sin\theta_H}$$

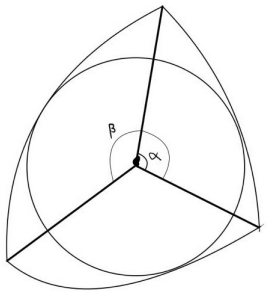
.

根据假设 $deg(H) > \quad {}^{2\pi}\cancel{\tan(\theta_H)}$，即可得到所需结果。 □

若要用 H 处的角亏来重新表述这一点，可以使用以下引理。

引理 2.9. $g(H)$ 的面积分别有上界和下界，分别为 θ_H 和 $4\theta_H$，以及 $2\pi(1 - cos(\theta_H))$。

证明。 第一个界显然，因为内切圆内的面积必小于 $g(H)$ 的面积，具体而言，Area($g(H)$) $> 2\pi($ $1 - cos(\theta_H))$。第二个界基于这样一个事实：内切圆要么与位于相对两侧的两条测地线相切，要么与至少三条测地线相切。前一种情况下，Area($g(H)$) $\leq 4\theta_H$，当内切圆内接于双边形时取等号。后一种情况下，取α, β，如图所示，并利用球面余弦定理计算，结果相差一个常数：



$$\text{面积}(g(H)) = 2\,(arccos(sin(\alpha/2)cos(\theta_H)) + arccos(sin((\beta-\alpha)/2)cos(\theta_H))) + C$$

对 α 求导得：

$$\frac{d}{d\alpha}\text{Area}(g(H)) = \frac{cos(\theta_H)cos(\frac{\beta-\alpha}{2})}{2\sqrt{1-cos^2(\theta_H)sin^2(\frac{\beta-\alpha}{2})}} - \frac{cos(\theta_H)cos(\frac{\alpha}{2})}{2\sqrt{1-cos^2(\theta_H)sin^2(\frac{\alpha}{2})}}$$

我们可以验证，当 $\alpha < \beta/2$ 时，该值为负。因此，当 $g(H)$ 趋近于一个双边形时，面积达到最大值。□

推论 2.10. 令 α 为 H 处的角亏，则在条件$deg(H) > \frac{1-\frac{\alpha}{2\pi}}{\sqrt{1-(1-\frac{\alpha}{2\pi})^2}}$下，2.8 成立。

证明。 我们知道 $\alpha > 2\pi(1 - cos(\theta_H))$，并且由于 $arccos$ 是递减的，我们还知道 $\theta_H < arccos(1 - \frac{\alpha}{2\pi})$。同样，$\frac{2\pi}{tan}(\cdot)$ 是递减的，因此我们得出：

$$\frac{2\pi}{tan(\theta_H)} > \frac{2\pi}{tan(arccos(1 - \frac{\alpha}{2\pi}))} > \frac{2\pi - \alpha}{\sqrt{1 - (1 - \frac{\alpha}{2\pi})^2}}$$

□

我们还可以对条件稍作推广。具体而言，如果 P^C 在 H 处有一个暴露的顶点，我们也能得到类似的结果。为了使用更自然的术语，我们称该顶点为 负向暴露的。

引理 2.11。 如果 P 有一个负向暴露的顶点 H，且满足 $deg(H) > \frac{2\pi}{tan(\theta_{HC})}$，我们可以对 P 进行扰动，从而得到更低的梅尔扎克比和多一个面。

证明。 我们首先取 $U_H \cap P^C$，并再次通过高斯映射将 P^C 的相邻面映射到 S^2。与之前一样，我们取内心 c_H的中心，并用一个法向量为 c_H、向内平移 t 的半空间与 $U_H \cap P^C$相交，得到 R_t。最后，将$(U_H \cap P)$替换为$U_H \setminus R_t$，得到 P_t。

与 2.8 $V'(0)$ 中一样，$= 0$ 和 $E'(0)$ 将以完全相同的方式定义，因此只要让 $deg(H)$ 足够大，我们就能再次得到所需的结果。□

注。 事实上，我们可以直接通过反转扰动，沿用定理 2.5（并隐含地沿用定理 2.3）的证明，就像我们在定理 2.11 的证明中所做的那样。这里省略具体构造和计算；只需指出，我们得到的最广泛推广如下。

定理 2.12。 作为定理*2.5*、*2.8*和*2.11*的补充，若 P 有一个面，其中除两个相邻顶点外，其余顶点均为负向暴露的，那么除这两个顶点外的所有顶点都必须是度为 *3*；否则，我们可以扰动 P，使梅尔扎克比得到改善。

3. 几何界

上一节我们探讨了极小化候选体顶点度数的局部判据；本节则尝试对候选体的面进行类似研究。我们首先考察暴露三角形，然后研究凸问题中的二面角界，最后讨论若干四边形情形。

注。 我们知道，对于任何多面体，高度数的面受低度数的面所限制，具体而言为 $\sum_F$（deg（F）-6） $\leq -6\chi$（P）。若能在任意类别中将低度数面界定到 6，就能轻易证明极小化体存在。即便只能在更有限的范围内给出界，也可能帮助我们排除构造三角棱柱竞争体的可能性。

3.1. 三角形面。我们回顾一下，在极小候选体上，一个暴露面只能含有度为 3 的顶点。为了帮助理解接下来的扰动，我们设想将一个顶点 H 沿着不位于该三角形面上的第三条棱的方向（负向）滑动。若将每种扰动看作移动三角形的顶点，就会发现它们都是沿诱导出的向量滑动单个顶点的线性组合。具体来说，我们将采用 2.5 节中针对$\mathcal{P}$ 描述的同一种扰动，固定除一个顶点 H_1之外的所有顶点。

定理 3.1。 如果 P 有一个外露三角面 F，且 F 各顶点的角亏之和（此处指与 F相关的角亏）小于或等于 $\pi/2$，我们就可以对 P 进行扰动，使其变为另一个梅尔扎克比更小且面数相同的多面体。

证明。 令$\gamma_{1,\ 2}$表示 v_{H_1} 与从 H_1 到 H_2 的直线之间的角，并使用上文所述的$\mathcal{P}$，可得:

$V'(0) > 0$ and $E'(0) = ||v_{H_1}||- < v_{H_1}, u_{1,H_1,0} + u_{2,H_1,0} >= ||v_{H_1}||(1 - \cos(\gamma_{1,2}) - \cos(\gamma_{1,3}$ $M'(0) \geq 0$ 我们是否需要 $1 > \cos(\gamma_{1,2}) + \cos(\gamma_{1,3}))$。求和后，所有 $H.$ 给出的是

$$3 > \sum_{i,j\in\{1,2,3\}} \cos(\gamma_{i,j})$$

现在我们可以观察到，与 F 相关联的角亏为:

$$\sum_{i,j\in\{1,2,3\}} \gamma_{i,j} - \pi > \frac{\pi}{2}$$

当 γ 趋近于交替出现的 0 和 $\pi/2$ 时，该不等式在代数意义上达到紧致（注意：这在几何上是不可能的，因此该不等式远非最优）。因此，如果相关的角亏小于或等于 $\pi/2$，则上述某个 M 满足 $M'(0) < 0$。□

注意，在这个证明中，我们还得到了一个关于三角形面上暴露的顶点的小条件：$1 > \cos(\gamma_{1,2}) + \cos(\gamma_{1,3}))$。遗憾的是，我们无法进一步加强这个条件，因为在足够小的三角形面上， $V'(0)$ 可能变得任意小。

结合 2.3，我们可以对梅尔扎克问题作出一个有限性结论。

C推论 3.2. 如果 P 属于 *1.1* 中的序列，那么 P 至多有 14 个三角形面 .

证明。 当 P 是多面体时，所有顶点的度都必须为 3，因此，三个三角形面共用一个顶点的唯一情形是四面体。多面体高斯-博内定理 [2] 告诉我们，与三角形相邻的所有顶点（实际上是所有顶点）的角亏均为 4π，因此由 3.1 可知，与三角形面相邻的顶点至多有 30 个，故三角形至多有 15 个。注意到其中有一个三角形不与其他三角形相邻，因此其顶点的角亏大于 $\pi/2$，我们便可将上界进一步收紧至 14 个三角形面。□

不出所料，我们也可以对负暴露三角形作出类似的论述。虽然无法由此得到任何有用的推论，但我们仍应提及这一点。

命题 3.3。 如果 P 有一个负向暴露三角面 F，且 F 各顶点处的角亏之和大于或等于 π，我们可以扰动 P，将其变为另一个梅尔扎克比更小且面数相同的多面体。

证明。 如同对暴露三角形所做的那样，我们注意到所有顶点的度都必须为 3，然后沿任意一条棱应用类似于 2.5 中的扰动。明确地说，如 2.11 中所述：将$U_F \cap P^C$ 取为半空间的交集，我们取沿着 F 的半空间，并使其绕三角形的一条指定棱远离 P 旋转，然后再次取补集。替换 $U_F \cap P$，根据 t 适当选择旋转后，我们得到一个具有以下性质的扰动$\mathcal{P}$:

$V'(0) > 0$ and $E'(0) = -||v_{H_1}||- < v_{H_1}, u_{1,H_1,0} + u_{2,H_1,0} >= ||v_{H_1}||(-1 - \cos(\gamma_{1,2}) - \cos(\gamma_{1,3}))$

这里，$_{,\ 2}$ 是 v_{H_1} 与从 H_1 到 H_2 的直线之间的角。若 $M'(0)$ 始终为正，则我们需要 $E'(0)$ 为正。与 2.11 中一样，我们对所有顶点求和，以得到角亏:

$$\sum_{i,j\in\{1,2,3\}} -cos(\gamma_{i,j}) > 3 \text{ and } \sum_{i,j\in\{1,2,3\}} \gamma_{i,j} - \pi < \pi$$

当所有 γ 趋近于 $\pi/3$ 时，不等式取等号。因此，若相应的角亏大于或等于 π，则上述 M 之一满足 $M'(0) < 0$。□

值得注意的是，在处理外露三角面时，我们能够扰动一个顶点来形成一个面；当然，任意三个顶点都位于同一平面上。遗憾的是，对于度数更高的面，情况并非如此：我们的扰动受到更多限制，而且我们能够对四边形施加的几何条件要弱得多。

3.2. 四边形面。我们先说明，首先要讨论的二面角界并无特别之处，从几何上看也显而易见；不过，在处理四边形面时会用到它。与其他界的证明类似，我们先证明一个简单的二面角界，再将其推广为稍强一些的界。我们将讨论的第一个二面角界在几何上显而易见：如果 P 是一个梅尔扎克比很小的凸多面体，那么两个相邻面之间的二面角不可能很小。不过，我们会用到一个广义二面角界的存在性，因此谨慎起见，还是给出证明。

为介绍一些后文将用到的术语，若 P 是一个凸多面体，则 P 可表示为若干半空间 $\bigcap S_i$的（非平凡）交集；我们将与面 F_i对应的平面称为 P 的极限平面。

命题 3.4。若 P是凸的，且具有 $M(P) \le B$，则P 中两个相邻面之间的二面角至少为 $2arctan(\frac{27}{4B^3})$。

证明。由于 P是凸的，我们可以取二面角最小的一对相邻面的极限平面，α，并考虑它们之间的关系。通过选择坐标，我们可令这两个平面的交集位于 $\mathbb{R}\times\{0\}\times\{0\}$ 上，并令 $\{0\}\times\mathbb{R}\times\{0\}$ 为平分该二面角的正交轴。现在将 P 归一化，使其体积为 1，并令 W_1, W_2, W_3 分别表示 P 在这些坐标轴上的点之间的最大距离。以下事实显然成立：

$$\frac{W_1W_2W_3}{2} \ge 1 \qquad \frac{W_3}{2W_2} \le tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \qquad W_1 + W_2 \le E(P)$$

综合起来可得 $W_1W_2^2tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \ge 1$和 $W_1 + W_2 \le B$。前一个不等式的左边在 $W_2 = \frac{2}{3}B$和 $W_1 = \frac{1}{3}B$时达到最大值，从而得到 $B^3tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \ge \frac{27}{4}$。□

注意，对于 1.1 中详细说明的极小化序列中的任意元素，我们都可得到二面角下界 $2arctan(\frac{1}{8\cdot 3^{5/2}}) \approx 0.016$。这个结果并无特别启发性，但重要的是它为正。

更重要的二面角界涉及的两个面并不相邻，只是彼此接近。稍作说明：我们想要控制的可能情况是，极小化序列找不到不动点。这意味着面的数量会趋于无穷，面的尺寸会迅速缩小（更多详情请见 [4]），而这些小面会有彼此接近的邻面。因此，放宽二面角界，就能控制我们想要处理的情形中几乎所有面周围的极限平面之间的二面角。

引理 3.5。设 P为一个满足 $M(P) \leq B$的凸多面体。取 P的两个极限平面，其对应的面沿一个公共面相距至多 d，则这两个平面之间的二面角有一个非零下界，该下界随 d 增大，并取决于 B。

证明。证明的开头相同：先整理坐标轴并定义我们的 $W_\cdot$，不同之处在于我们将定义从 $\mathbb{R} \times \{0\} \times \mathbb{R}$ 到 P 的距离。这里我们看到 $W_2' \leq \frac{d}{2tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$。与 3.4 中所用不等式类似的不等式如下：

$$W_1 W_2 W_3 \geq 1 \qquad \frac{W_3}{2(W_2 + W_2')} \leq tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \qquad W_1 + W_2 \leq E(P)$$

像前面那样重新整理，可得 $(W_1 W_2^2 + W_1 W_2 W_2')tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \geq \frac{1}{2}$ 和 $W_1 + W_2 \leq B$。然后在后一不等式的约束下分别优化各个加数，可得：

$$\frac{4}{27} B^3 tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{4} d B^2$$

由此可以按要求分离出 $\alpha \geq C_{B,\ d}$。 □

由此我们可以开始推导第一个也是最简单的四边形界，该界适用于凸多面体的矩形面。原则上，我们将采用类似于 3.1 证明中的扰动：固定两个相邻顶点，将极限平面朝远离多面体的方向旋转；并再次注意到，任何使体积显然增加的扰动都可表示为这类扰动之和。这里有若干复杂之处，首要的一点是，暴露的四边形面并不能由高斯映射下相邻面的像唯一确定。

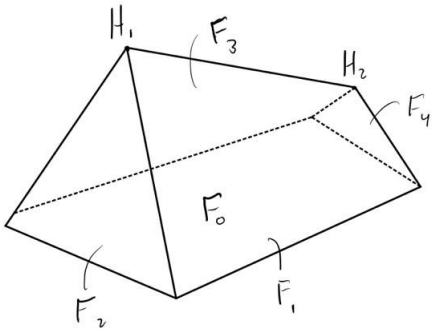
首先，我们来提取证明 3.1 中的关键部分，并将其应用于四边形面。这是确保在上述扰动下棱长不增加的条件。一个有用的观察是，如果 $P = \bigcap S_i$ 是凸的，且具有一个矩形面 F_j，那么 $P_j^* = \bigcap_{i \neq j} S_i$ 就是 P 与一个楔体的并集。我们将位于 F_j 处的这个突出多面体 P_j'（或者在这里称为突出楔体）。

命题 3.6. 设 P 为一个多面体，其具有暴露的四边形面 F w。顶点 $H_\cdot$ 和向量 v_{H_i} 是突出多面体中从 H_i 出发的非底面棱，位于 F 处。若下式非正，则我们可以扰动 P，使梅尔扎克比变小：

$$||v_{H_1}|| - < v_{H_1}, u_{1,H_1} + u_{2,H_1} > + ||v_{H_1}|| - < v_{H_2}, u_{1,H_1} + u_{2,H_2} >$$

引理 3.7。设 P' 为一个楔体，其某个矩形底面上的所有二面角均为锐角（称为良好楔体），且底面上最长的棱长为 1。此外，给 P' 的二面角设定一个下界。远离底面的顶点处的曲率有一个非零下界，该下界仅取决于二面角界和 P' 的高。

证明。固定 P' 的高度，我们将证明，由 P' 远离底面的四个极限平面的像所诱导的球面四边形不可能任意小。虽然接下来我们会以较为定性的方式进行证明，但按照图示，为楔体 $F_\cdot'$ 的面、沿底面的相关棱 $L_\cdot'$ 以及顶部的两个顶点 $H_\cdot'$ 命名会很有帮助。



我们用以 $-g(F_0')$ 为天顶的球坐标来描述高斯映射的像。固定的高将 $g(F_i')$ 的极角限定在某个下界之上，适用于 $i \neq 4$。若 $g(H_1')$ 要任意小，这意味着这些 $g(F_i')$ 的极角必须全部彼此任意接近，或者其中一对的方位角任意接近，而第三个的方位角与其相差 π 后任意接近。

在前一种情形下，通过令 $g(H_1') + g(H_2')$ 足够小，我们可以确保 L_2' 和 L_4'尽可能接近平行。将二面角界应用于 F_2' 和 F_4'，便会对这种四边形面的存在构成阻碍。

后一种情形稍微复杂一些。如果 $g(F_2')$ 是那个相距较远的孤立顶点，那么这就归结为前一种情形。否则，由于可以选择 $g(H_1')$ 的一条棱，使其尽可能接近天顶，这意味着 H_1' 和 H_2' 之间的棱可以具有任意小的坡度，因此 H_2' 的高度有下界，从而 $g(F_4')$ 的极角也有下界，所以它在方位角上必定接近另一个顶点。这里需要分成两种子情形讨论。

如果有两对顶点在方位角上任意接近，那么通过令 $g(H_1') + g(H_2')$ 足够小，我们可以确保 L_2' 和 L_4' 尽可能接近平行。将二面角界应用于 F_2' 和 F_4'，便会对这种四边形面的存在构成阻碍。

如果 $g(F_1')$ $g(F_2')$ $g(F_4')$ 的方位角可以任意接近，那么对 F_1' 和 F_3' 应用相同的策略，就会构成一个障碍，阻碍此类四边形面的存在。□

请注意，前一个引理几乎可以肯定早已为人所知，或者对几何学造诣较深的人来说完全显而易见，但我们在入门教材中没有看到它，因此在此证明。接下来，我们要分析这些凸出多面体。对于凸 Melzak 问题的极小化体，我们只需要对这些面数量有一个有限上界，因此只考虑尺寸任意小且具有相应曲率的面上的凸出多面体。

推论 3.8. 对于任意给定的 $h, B \in \mathbb{R}$，存在 $C_{h,B} \in \mathbb{N}$，使得对于任意凸多面体$M(P) < B$， P至多有 $C_{h,B}$ 个四边形面，其中凸出归一化良好楔体的高大于 h。

证明。 直接由 3.5 和 3.7 得出。 □

我们用于三角形面的策略并不能很好地用于四边形面。相反，我们将沿着极小化序列 1.1 取四边形面，对其突出的楔形进行归一化，并考察一个收敛子序列的极限。由此，我们将提取关于足够小的四边形面的数据。有趣的是，这一策略对三角形面并不奏效。

具体而言，从 1.1 中取一个子序列，其中具有良好凸出楔形的四边形面的数量不断增加。通过从这些多面体中各选取一个面，构造一个面序列，使其大小及相关曲率都趋于 0。将这些面的凸出楔形归一化，使最长底面棱的长度为 1。归一化楔形的空间是紧致的，因此存在一个收敛子序列，其极限为 P'。将收敛的楔形子序列记为 P_i'，我们构造相应的多面体序列 P_i （1.1 的一个子序列）及其对应的面 F_i。

定理 3.9. 设 *1.1* 中具有良好凸出楔形的四边形面数量无界。于是我们知道以下结论：*(i)* P' 是退化的，且高为 0。*(ii)* 对于 P'的所有棱，表达式 *3.6* 都等于0 。*(iii)* P' 是一个棱锥。

证明. 结论 (i) 直接由 3.7 得出。

为方便记号，我们将该表达式记为 $R(\cdot', L)$，即凸出楔形沿棱 L 按 3.6 所述发生扰动时，其棱长的负瞬时变化。由 1.1 的构造可立即看出， $R(P_i', \cdot)$ 必为正；由连续性可知，对于 P'的任意棱，该值均非负。

如果 $R(P', L) > 0$为正，那么当 i足够大时，我们有 $R(P_i', L) > R(P', L)/2$。现在对处于 F_i的 P_i 应用逆扰动，回想前文：

$$M'(0) = \frac{3E(0)^2}{V(0)} E'(0) - \frac{E(0)^3}{V(t)^2} V'(0)$$

这里， $E'(0)$ 为负值，其大小随 F_i 的直径变化；而 $V'(0)$ 则与 F_i 直径的平方成正比。对于足够小的一个面，这与 1.1 中的构造相矛盾，从而证明了命题 (ii)。

对于命题 (iii)，我们应用命题 (ii)。当 i足够大时， $R(P_i', L)$ 会变得任意小，因此将 P_i 替换为 P_i^*，会使棱长减少约 $|H_1' - H_2'|$ 倍的 F_i直径。于是，1.1 的构造保证 $H_1' = H_2'$。□

注。 我们知道， P' 是一个退化棱锥，因此可以改写条件 (ii)。将 P' 的底面顶点视为四个向量 $p_i \in \mathbb{R}^2$，并将顶点置于 0 处。

$$F(i) := |p_i| \left(1 - \frac{< p_i - p_{i+1}, p_i >}{|p_i||p_{i+1} - p_i|} - \frac{< p_i - p_{i-1}, p_i >}{|p_i||p_{i-1} - p_i|}\right)$$

令 $p_0 = p_4$，则可将 (ii) 写为 $F(1) = -F(2) = F(3) = -F(4)$。

推论 3.10. 对于任意 c，*1.1* 中元素上具有良好凸出楔形且有两个相邻角小于 $\pi/2 - c$ 的四边形面的数量有界。

证明. 若情况如此，我们可以选取 P'，使其有两个相邻锐角，这与 3.
2 □ 矛盾。

推论 3.11. *1.1* 中元素上具有良好凸出楔形且有两个相邻角大于 $\pi/3$ 的四边形面的数量有界。

证明. 同上。 □

尽管我们当然可以将针对三角形面的策略应用于许多特殊情形的四边形面（例如适当的近似矩形面），但这并不能让我们显著接近排除四边形面数量无界的可能性。我们将此留作一个几乎肯定很容易回答、但我们尚未解决的猜想：

猜想 3.12。只有当 $F(i) = 0$ 时，才能满足 3.2 中的条件。

参考文献

1. 凸多面体, Springer Berlin Heidelberg, 柏林, Heidelberg, 2005. 2. Thomas Banchoff, 嵌入多面体的临界点与曲率, 微分几何杂志 **1** (1967), no. 3-4, 245 – 256. 3. Thomas F. Banchoff and Felix Günther, 多面体顶点星的高斯映射, 2019年. 4. Scott Byron Berger, 使棱长最小化的多面体。, 博士论文 , 2002. 5. A. S. Besicovitch and H. G. Eggleston, 多面体棱的总长度 , The Quar- terly Journal of Mathematics**8** (1957), no. 1, 172–190. 6. Z. A. Melzak, 与凸性相关的问题, 《加拿大数学通报》 **8** (1965), no. 5, 565–573. 7. Z.A. Melzak, 四面体的一个等周不等式, 《加拿大数学通报》 **9**(1966), no. 5, 667–669. 8. R.C. Scott, 使凸的单位体积多面体的余维二骨架质量最小化, 《印第安纳大学数学杂志》 **61** (2012), no. 4, 1513–1564.

数学系，莱斯大学，美国德克萨斯州休斯敦市，邮编 77005电子邮件地址：
Asgeir@rice.edu