arXiv:2304.10094v1 [math.CO] 20 Apr 2023

广义彼得森图与树的笛卡尔积的最优无线电标号

Payal Vasoya古吉拉特邦技术大学，艾哈迈达巴德 -383 824，古吉拉特邦（印度）电子邮箱：prvasoya92@gmail.com

Devsi Bantva卢克迪尔工程学院，莫尔维 -363 642，古吉拉特邦（印度）电子邮箱：devsi.bantva@gmail.com

摘要

图 G 的无线电标号是一个函数 f：$V(G) \to \{0,1,2,\ldots\}$，满足 $|f(u) - f(v)| \geq \mathrm{diam}(G) + 1 - d(u, v)$，对每一对不同顶点 u，v（属于图 G）均成立。图 G 的无线电数记为 $\mathrm{rn}(G)$，是满足条件 G 具有无线电标号 f 且 $\max\{f(v) : v \in V(G)\} = k$ 的最小数 k。本文给出了广义彼得森图与树的笛卡尔积的无线电数下界，并提出了达到该下界的两个充要条件和另外三个充分条件。利用这些结果，我们确定了佩特森图与星图的笛卡尔积的无线电数。

关键词：无线电标号、无线电数、图的笛卡尔积、广义彼得森图、树。

1 引言

Hale 在 [11]，中提出的信道分配问题，旨在为无线电发射机分配信道，使任意两台发射机之间满足干扰约束，并将所用信道的跨度降至最低。两台发射机之间的干扰主要取决于它们之间的距离。两台发射机距离越近，干扰越强，反之亦然。最初只考虑两个级别的干扰，即轻微干扰和严重干扰，因此将两台发射机分为相近和非常接近两类。

利用图模型研究发射机的信道分配问题：在该模型中，发射机由图的顶点表示；若两个对应发射机之间存在严重干扰，则相应顶点相邻；若存在轻微干扰，则相应顶点的距离为二。假设在图模型中，距离为二的顶点之间不存在干扰。Roberts[16] 提出，存在轻微干扰的一对发射机必须分配不同的信道，而存在严重干扰的一对发射机所分配的信道至少相差两个。受此启发，Griggs 和 Yeh[10]引入了 $L(2,1)$-标记，也称为距离二标记，定义如下：图 $G = (V(G)\ E(G)$ 的 $L(2,1)$-标记（或距离二标记）是一个函数 f：$V(G) \to \{0,1,2,...\}$，使得每一对不同的顶点 u 和 v 都满足以下条件：

$$|f(u) - f(v)| \geq \begin{cases} 2, & \text{if } d(u,v) = 1, \\ 1, & \text{if } d(u,v) = 2. \end{cases}$$

其中， $d(u,v)$是 G中 u与 v之间的距离。 f的跨度定义为 span(f) =max$\{|f(u) - f(v)|: u, v \in V(G)\}$；而 G的 λ-数（或λ_2,1-数），记作 $\lambda(G)$（或λ_2,1(G)），是 G的 $L(2,1)$-标记的最小跨度。若 G的 $L(2,1)$-标记 f满足 span(f) $= \lambda(G)$，则称其为最优标记。关于图 G的 $L(2,1)$-标记的最新结果，读者可参阅综述文章 [6] 和 [20] 。

研究发现，发射机之间的干扰可能超过两个层级。无线电标号将 $L(2,1)$-标号中考虑的干扰层级从两个扩展到最大可能值——G 的直径。受此启发，Chartrand 等人[7, 8] 如下定义了图的无线电标号：

定义 1.1. 图 G的无线电标号 是一个映射 $f: V(G) \to \{0,1,2,\ldots\}$，满足对于 G 中任意一对不同的顶点 u, v，

$$|f(u) - f(v)| \geq \operatorname{diam}(G) + 1 - d(u,v).$$

整数 $f(u)$ 称为 u 在 f 下的标签，而 f 的跨度 定义为

$$\operatorname{span}(f) = \max\{|f(u) - f(v)| : u, v \in V(G)\}.$$

G 的无线电数 定义为

$$\operatorname{rn}(G) = \min_f \operatorname{span}(f)$$

其中，最小值取遍 G 的所有无线电标号 f。如果 span(f) = rn(G)，则称 G 的无线电标号 f 为最优 。若 diam(G) $= 2$，则 G 的无线电标号与 G 的 $(2,1)$-标号相同。

无线电标号总是为某个顶点赋予标签 0，此时所用的最大标签即为跨度(f)。求图的无线电数是一项有趣且富有挑战性的任务。多位作者对树的无线电标号问题进行了深入研究，参见 [3, 12, 13, 14, 15]。除树以外，只有少数图族的无线电标号问题得到研究。Benson 等人在 [4] 中确定了所有阶为 n 且直径为 $n-2$ 的图的无线电数。Cada 等人在 [5] 中研究了距离图的无线电数。Saha 和 Panigrahi 分别在 [17] 和 [18], 中研究了环面网格和图的平方的无线电数。Bantva 和 Liu 在 [1]中给出了块图无线电数的一个下界，并提出了达到该下界的三个充要条件。这些作者还讨论了作为块图的树的线图的无线电数。Das 等人在 [9] 中给出了一种求图的无线电数下界的方法。在 [21], 中，Zhou 讨论了以凯莱图建模的网络的无线电信道分配问题。Bantva 和 Liu 在 [2]中讨论了两棵树的笛卡尔积的无线电数。

本文结构如下。第 2 节定义本文所需的术语和符号。第 3 节给出广义彼得森图与树的笛卡尔积的无线电数下界。我们给出两个必要且充分条件，以及另外三个充分条件，用于判定下界何时取紧。最后，利用这些结果，我们确定彼得森图与星图的笛卡尔积的无线电数。

2 预备知识

本节定义本文将用到的术语和符号。标准图论定义和符号遵循 [19] 。图 G中两个顶点u和 v之间的距离，记作 $d(u,v)$，是图 G中连接 u和 v 的最短路径长度。图 G 的直径为 $\mathrm{diam}(G) = \max\{d(u,v): u,v \in G\}$。从顶点 $u \in V(G)$到图 G 的权定义为 $w_G(u) = \sum_{v\in V(G)} d(u,v)$。若顶点$c \in V(G)$满足 $w_G(c) = \min\{w_G(u): u \in V(G)\}$，则称其为图 G 的权中心。图 G的权记作 $w(G)$，定义为 $w(G) = w_G(c)$，其中 c 是图G的权中心。用 $W(G)$表示图 G 的所有权中心组成的集合。树 T 是一个简单连通无环图。关于树 T的权中心，以下结论已为人所知。

引理 2.1. *[15]*若 w 是树 T的一个权中心，则 $T-w$ 的每个连通分支至多包含 $|V(T)|/2$ 个顶点。

引理 2.2. *[15]* 每棵树 T 有一个或两个权中心； T 有两个权中心，记为 $W(T) = \{w, w'\}$，当且仅当 ww' 是 T的一条边，且 $T-ww'$ 由两个大小相等的连通分支组成。

对于以 r 为根的树 T，若 x 位于 $r-y$ 路径上，则称 x 为 y 的祖先，称 y 为 x 的后代。注意，树 T 的根是每个顶点的祖先，而每个顶点都是其自身的祖先和后代。

若 $W(T) = \{w\}$，则我们将树 T 视为以 w 为根；若 $W(T) = \{w, w'\}$，则我们将树 T 视为以 w 和 w' 为根。设 u 是与 T 的权中心相邻的任意顶点，则由 u 及其所有后代诱导的子树称为树 T 的一个分支。若两个分支由与同一权中心相邻的不同顶点诱导，则称它们为不同分支；若它们由与不同权中心相邻的不同顶点诱导，则称它们为相对分支。若 u 和 v 满足以下任一条件，则称它们位于不同分支中： u 和 v 位于不同分支中；或者其中一个是 T 的权中心，另一个位于由与该权中心相邻的顶点诱导的 T 的分支中。若 $W(T) = \{w, w'\}$，则当 u 和 v 属于 $T-ww'$ 的不同连通分支时，称它们位于相对分支中。定义层级函数 L_T: $V(T) \to \{0,1,2,\ldots\}$ 为

$$L_T(x) := \min\{d(x,w) : w \in W(T)\}.$$

$L_T(x)$ 的值称为 T 中顶点 x 的层级。 T 的总层级记作 $L(T)$，定义为

$$L(T) := \sum_{x\in V(T)} L_T(x).$$

对于任意两个顶点 x， $y \in V(T)$，定义

$$\phi_T(x,y) = \max\{L_T(z) : z \text{ is a common ancestor of } x \text{ and } y\},$$

$$\delta_T(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{if } |W(T)| = 2 \text{ and, } x \text{ and } y \text{ are in opposite branches,} \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

定义

$$\varepsilon(T) = \begin{cases} 1, & \text{if } |W(T)| = 1, \\ 0, & \text{if } |W(T)| = 2. \end{cases}$$

观察 2.3。 设 T为一棵树，且 $x, y \in V(T)$，则

(1) $0 \leq \phi_T(x, y) <$最大$\{L_T(v) : v \in V(T)\}$,

(2) $\phi_T(x, y) = 0$ 当且仅当 x 和 y 位于相对的分支或不同的分支中,

(3) $d_T(x, y) = L_T(x) + L_T(y) + \delta_T(x, y) - 2\phi_T(x, y)$.

定义 2.4. 对于整数 $m \geq 3$ 和 $k \geq 1$，广义彼得森图 $P_{m,k}$ 是一个图，其顶点集为 $V(P_{m,k}) = \{u_i, v_i : i \in Z_m\}$，边集为 $E(P_{m,k}) = \{u_i u_{i+1}, u_i v_i, v_i v_{i+k} : i \in Z_m\}$。

定义 2.5. 设 G 和 H 是任意两个简单连通图。G和 H 的笛卡尔积记作 $G\Box H$，其顶点集为 $V(G) \times V(H)$，其中，若且唯若 g 和 g' 在 G 中相邻且 $h = h'$ 在 H中；或者 h 和 h'在 H 中相邻且 $g = g'$ 在 G中，则顶点 (g, h) 和 (g', h')在 $G\Box H$ 中相邻。

观察 2.6. 设 G 是一个阶为 m 、直径为 d_1 的任意图，且 H 是一个阶为 n 、直径为 d_2 的任意图，则

(1) $|V(G\Box H)| = mn$,

(2) $\text{diam}(G\Box H) = d_1 + d_2$,

(3) 对于 $G\Box H$ 中任意两个顶点 (g_1, h_1) 和 (g_2, h_2),

$$d_{G\Box H}((g_1, h_1), (g_2, h_2)) = d_G(g_1, g_2) + d_H(h_1, h_2).$$

3 主要结果

本节继续使用上一节定义的术语和符号。注意，图 G 的无线电标号 f 诱导出 $V(G)$ 的一个序 $O(V(G)) := z_0, z_1, \ldots, z_{|V(G)|-1}$，使得

$$0 = f(z_0) < f(z_1) < \ldots < f(z_{p-1}) = \text{span}(f).$$

定理 3.1. 设 $P_{m,k}$ 是一个阶为 $2m$ 的广义彼得森图， T 是一个阶为 n 的树。记 直径$(P_{m,k}\Box T) = d_G$、直径 $(P_{m,k}) = d_p$、直径 $(T) = d_t$ 和 $\varepsilon(T) = \varepsilon$。则

$$\text{rn}(P_{m,k}\Box T) \geq (2mn - 1)(d_t + \varepsilon) - 4mL(T). \tag{1}$$

此外，当且仅当存在一个 $V(P_{m,k}\Box T)$ 的排序 $O(V(P_{m,k}\Box T)) := z_0, z_1, \ldots, z_{2mn-1}$，其中 $z_t = (x_{i_t}, y_{j_t})$ 满足以下条件对所有 $0 \leq t \leq 2mn - 2$ 均成立时，式 (1) 中的等号成立:

(a) $d_{P_{m,k}}(x_{i_t}, x_{i_{t+1}}) = d_p$,

(b) $L_T(y_{j_0}) + L_T(y_{j_{2mn-1}}) = 0$,

(c) y_{j_t} 与 $y_{j_{t+1}}$ 位于不同分支，当 $|W(T)| = 1$；当 $|W(T)| = 2$ 时，二者位于相对分支,

(d) 由 $f(z_0) = 0$和 $f(z_{t+1}) = f(z_t) + d_t + \varepsilon - L_T(y_{j_t}) - L_T(y_{j_{t+1}})$ 在 $O(V(P_{m,k}\Box T))$ 上定义的映射 f 是 $P_{m,k}\Box T$ 的无线电标号。

证明。记 $G = P_{m,k}\square T$。只需证明，任意无线电标号 f of$G$ 的跨度不小于（1）右侧的值。令 f 为$P_{m,k}\square T$ 的任意无线电标号，其中$0 = f(z_0) < f(z_1) < \ldots < f(z_{2mn-1})$ =跨度(f)。由于 f是无线电标号，我们有 $f(z_{i+1}) - f(z_i) \geq d_G + 1 - d_G(z_i, z_{i+1}) = d_p + d_t + 1 - d_G(z_i, z_{i+1})$，对 $0 \leq i \leq 2mn-2$成立。将这些 $2mn-1$ 不等式相加，得到

$$\mathrm{span}(f) = f(z_{2mn-1}) \geq (2mn-1)(d_p + d_t + 1) - \sum_{i=0}^{2mn-2} d_G(z_i, z_{i+1}) \tag{2}$$

对 $0 \leq t \leq 2mn-1$，记 $z_t = (x_{i_t}, y_{j_t})$，其中 $x_{i_t} \in V(P_{m,k})$ 且 $y_{j_t} \in V(T)$。由观察 2.3 和 2.6，得

$$\begin{aligned}
\sum_{t=0}^{2mn-2} d_G(z_t, z_{t+1}) &= \sum_{t=0}^{2mn-2} [d_{P_{m,k}}(x_{i_t}, x_{i_{t+1}}) + d_T(y_{j_t}, y_{j_{t+1}})] \\
&\leq \sum_{t=0}^{2mn-2} [d_p + L_T(y_{j_t}) + L_T(y_{j_{t+1}}) + \delta_T(y_{j_t}, y_{j_{t+1}}) - 2\phi_T(y_{j_t}, y_{j_{t+1}})] \\
&= (2mn-1)d_p + 2\sum_{t=0}^{2mn-1} L_T(y_{j_t}) - L_T(y_{j_0}) - L_T(y_{j_{2mn-1}}) \\
&\qquad + \sum_{t=0}^{2mn-2} [\delta_T(y_{j_t}, y_{j_{t+1}}) - 2\phi_T(y_{j_t}, y_{j_{t+1}})] \\
&= (2mn-1)d_p + 4mL(T) - L_T(y_{j_0}) - L_T(y_{j_{2mn-1}}) \\
&\qquad + \sum_{t=0}^{2mn-2} [\delta_T(y_{j_t}, y_{j_{t+1}}) - 2\phi_T(y_{j_t}, y_{j_{t+1}})]. \qquad (3)
\end{aligned}$$

我们考虑以下两种情况。

情况 1：$|W(T)| = 1$。

在这种情况下，对于所有 $0 \leq t \leq 2mn-2$，$\delta_T(y_{j_t}, y_{j_{t+1}}) = 0$，$\phi_T(y_{j_t}, y_{j_{t+1}}) \geq 0$，且 $L_T(y_{j_0}) + L_T(y_{j_{2mn-1}}) \geq 0$。将这些结果代入 (3)，得

$$\sum_{t=0}^{2mn-2} d_G(z_t, z_{t+1}) \leq (2mn-1)d_p + 4mL(T). \tag{4}$$

将 (4) 代入 (2)，得到

$$\mathrm{span}(f) = f(z_{2mn-1}) \geq (2mn-1)(d_t + 1) - 4mL(T).$$

情形 2：$|W(T)| = 2$。

在这种情况下，对于所有的 $0 \leq t \leq 2mn-2$，$0 \leq \delta_T(y_{j_t}, y_{j_{t+1}}) \leq 1$, $\phi_T(y_{j_t}, y_{j_{t+1}}) \geq 0$ 以及 $L_T(y_{j_0}) + L_T(y_{j_{2mn-1}}) \geq 0$。将这些全部代入（3），得到

$$\sum_{t=0}^{2mn-2} d_G(z_t, z_{t+1}) \leq (2mn-1)d_p + 4mL(T) + (2mn-1). \tag{5}$$

将 (5) 代入 (3)，得到

$$\mathrm{span}(f) = f(z_{2mn-1}) \geq (2mn-1)d_t - 4mL(T).$$

由上述情形 1 和情形 2 易知，当且仅当附加部分中的条件成立时，(1) 中的等号成立，证明至此完成。 □

定理 3.2. 设 $P_{m,k}$ 为一个阶为 $2m$ 的广义彼得森图， T 为一个阶为 n 的树。记 $P_{m,k}\Box T = G$、$\mathrm{diam}(P_{m,k}\Box T) = d_G$、$\mathrm{diam}(P_{m,k}) = d_p$、$\mathrm{diam}(T) = d_t$ 和 $\varepsilon(T) = \varepsilon$。则

$$\mathrm{rn}(P_{m,k}\Box T) = (2mn-1)(d_t+\varepsilon) - 4mL(T) \tag{6}$$

当且仅当存在 $O(V(P_{m,k}\Box T)) := z_0, z_1, \ldots, z_{2mn-1}$ 对 $V(P_{m,k}\Box T)$ 的一个排序，其中 $z_t = (x_{i_t}, y_{j_t})$ 满足以下条件，且对所有 $0 \le t \le 2mn-2$ 均成立：

(a) $d_{P_{m,k}}(x_{i_t}, x_{i_{t+1}}) = d_p$,

(b) $L_T(y_{j_0}) + L_T(y_{j_{2mn-1}}) = 0$,

(c) 对于任意 $z_a = (x_{i_a}, y_{j_a})$ 和 $z_b = (x_{i_b}, y_{j_b})$ $0 \le a < b \le 2mn-1$，距离 $d_{P_{m,k}}(x_{i_a}, x_{i_b})$和 $d_T(y_{j_a}, y_{j_b})$ 满足

$$d_T(y_{j_a}, y_{j_b}) + d_{P_{m,k}}(x_{i_a}, x_{i_b}) \ge \sum_{t=a}^{b-1}(L_T(y_{j_t}) + L_T(y_{j_{t+1}}) - d_t - \varepsilon) + d_t + d_p + 1. \tag{7}$$

证明。 必要性：假设 (6) 成立。根据定理 3.1，存在一个无线电标号 f of $P_{m,k}\Box T$，满足 $0 = f(z_0) < f(z_1) < \ldots < f(z_{2mn-1}) = \mathrm{rn}(P_{m,k}\Box T)$，其中 $z_t = (x_{i_t}, y_{j_t})$ $x_{i_t} \in V(P_{m,k})$ 且 $y_{j_t} \in V(T)$，使得定理 3.1 中的条件 (a)-(d) 成立。因此，条件 (a) 和 (b) 均成立。对于任意两个顶点 z_a 和 z_b $(0 \le a < b \le 2mn-1)$，根据定理 3.1 中的条件 (d)，有

$$f(z_b) - f(z_a) = \sum_{t=a}^{b-1}(d_t + \varepsilon - L_T(y_{j_t}) - L_T(y_{j_{t+1}})).$$

由于 f是一个无线电标号， $f(z_b) - f(z_a) \ge d_G + 1 - d_G(z_a, z_b) = d_p + d_t + 1 - d_T(y_{j_a}, y_{j_b}) - d_{P_{m,k}}(x_{i_a}, x_{i_b})$。将其代入上式，得到

$$\sum_{t=a}^{b-1}(d_t + \varepsilon - L_T(y_{j_t}) - L_T(y_{j_{t+1}})) = f(z_b) - f(z_a) \ge d_p + d_t + 1 - d_T(y_{j_a}, y_{j_b}) - d_{P_{m,k}}(x_{i_a}, x_{i_b}).$$

因此，条件 (c) 得以满足。

充分性：设 $O(V(P_{m,k}\Box T)) := z_0, z_1, \ldots, z_{2mn-1}$ 是 $V(P_{m,k}\Box T)$ 的一个满足假设条件 (a)–(c) 的阶。我们证明 (6) 成立；为此，只需证明定理 3.1 中的条件 (c) 和 (d) 成立。取 (7) 中的 $a = t$ 和 $b = t+1$，则有$d_T(y_{j_t}, y_{j_{t+1}}) \ge L_T(y_{j_t}) + L_T(y_{j_{t+1}}) + 1 - \varepsilon$，这意味着当 $|W(T)| = 1$ 时，y_{j_t} 和 $y_{j_{t+1}}$ 位于不同分支；当 $|W(T)| = 2$ 时，它们位于相对分支。因此，定理 3.1 中的条件 (c) 得证。设 f 定义为 $f(z_0) = 0$，且对 $0 \le t \le 2mn-2$ 有 $f(z_{t+1}) = f(z_t) + d_t + \varepsilon - L_T(y_{j_t}) - L_T(y_{j_{t+1}})$。我们证明 f 是一个无线电标号。任取两个顶点 z_a 和 z_b $(0 \le a < b \le 2mn-1)$。于是

$$\begin{aligned} f(z_b) - f(z_a) &= \sum_{t=a}^{b-1}(d_t + \varepsilon - L_T(y_{j_t}) - L_T(y_{j_{t+1}})) \\ &\ge d_p + d_t + 1 - d_{P_{m,k}}(x_{i_a}, x_{i_b}) - d_T(y_{j_a}, y_{j_b}) \\ &= d_G + 1 - d_G(z_a, z_b). \end{aligned}$$

因此， f 是一个无线电标号。于是定理 3.1 的条件 (d) 得证。证明完毕。

□

在下一个结果中，我们给出三个充分条件，以达到广义彼得森图 $P_{m,k}$ 与树的笛卡尔积的无线电数下界。

定理 3.3。设 $P_{m,k}$ 为阶为 $2m$ 的广义彼得森图，且 T 为阶为 n 的树。记 直径$(P_{m,k}) = d_p$、直径$(T) = d_t$ 和 $\varepsilon(T) = \varepsilon$。那么

$$\mathrm{rn}(P_{m,k}\Box T) = (2mn-1)(d_t+\varepsilon) - 4mL(T) \tag{8}$$

如果存在一个排列 $O(V(P_{m,k}\Box T)) := z_0, z_1, \ldots, z_{2mn-1}$，其元素为 $V(P_{m,k}\Box T)$，其中 $z_t = (x_{i_t}, y_{j_t})$，使得以下条件对所有 $0 \le t \le 2mn-2$ 均成立。

（a）$d_{P_{m,k}}(x_{i_t}, x_{i_{t+1}}) = d_p$ 且对于 $b \ge a+2$,

$$d_{P_{m,k}}(x_{i_a}, x_{i_b}) \ge \begin{cases} d_p - (b-a-1), & if\ |W(T)| = 1; \\ d_p - (b-a-2), & if\ |W(T)| = 2. \end{cases}$$

(b) $L_T(y_{j_0}) + L_T(y_{j_{2mn-1}}) = 0$,

(c) y_{j_t} 与 $y_{j_{t+1}}$ 在不同分支中，当 $|W(T)| = 1$；在相对分支中，当$|W(T)| = 2$,

且以下条件之一成立。

(d) $\min\{d_T(y_{j_t}, y_{j_{t+1}}) d_T(y_{j_{t+1}}, y_{j_{t+2}})\} \le (d_t+1-\varepsilon)/2$ 对所有 $0 \le t \le 2mn-3$,

(e) $d_T(y_{j_t}, y_{j_{t+1}}) \le (d_t+1+\varepsilon)/2$ 对所有 $0 \le t \le 2mn-2$,

(f) 对所有 $0 \le t \le 2mn-1$，当 $|W(T)| = 1$ 时，$L_T(y_{j_t}) \le (d_t+1)/2$；当 $|W(T)| = 2$ 时，$L_T(y_{j_t}) \le (d_t-1)/2$；并且对于 $z_a = (x_{i_a}, y_{j_a})$，$z_b = (x_{i_b}, y_{j_b})$ $(0 \le a < b \le 2mn-1)$，如果y_{j_a}和 y_{j_b} 在 T 的同一分支中，那么 $b-a \ge d_t + d_p$。

证明。我们证明，对于排序 $O(V(P_{m,k}\Box T)) := z_0, z_1, \ldots\ldots, z_{2mn-1}$ of $V(P_{m,k}\Box T)$，其中 $z_t = (x_{i_t}, y_{j_t})$；$0 \le t \le 2mn-1$ 如果 (a)-(c) 以及 (d)-(f) 中的一个条件成立，则定理 3.2 的 (a)-(c) 成立。由于定理 3.2 和定理 3.3 中的条件 (a) 和 (b) 完全相同，我们只验证定理 3.2 的条件 (c)。设 $z_a = (x_{i_a}, y_{j_a})$ 和 $z_b = (x_{i_b}, y_{j_b})$ $0 \le a < b \le 2mn-1$ 是任意两个顶点。将 (7) 的右侧记为 $E(a, b)$。我们考虑以下两种情况。

情况-1：$|W(T)| = 1$。在此情况下，根据 δ 的定义，回忆 $\varepsilon(T) = 1$ 以及 $\delta_T(y_{j_t}, y_{j_{t+1}}) = 0$ 对所有 $0 \le t \le 2mn-2$ 均成立。

子情形 1.1：假设 (a)–(d) 成立。由 (b) 和 (d)，我们有 $L_T(y_{j_0}) = L_T(y_{j_{2mn-1}}) = 0 < d_t/2$，且对所有 $1 \le t \le 2mn-2$，$L_T(y_{j_t}) \le \min\{L_T(y_{j_{t-1}}) + L_T(y_{j_t}) L_T(y_{j_t}) + L_T(y_{j_{t+1}})\} = \min\{d_T(y_{j_{t-1}}, y_{j_t}) d_T(y_{j_t}, y_{j_{t+1}})\} \le d_t/2$。如果 $z_a = (x_{i_a}, y_{j_a})$ 和 $z_b = (x_{i_b}, y_{j_b})$，且 y_{j_a} 和 y_{j_b} 位于不同分支中，则注意到 $d_T(y_{j_a}, y_{j_b}) = L_T(y_{j_a}) + L_T(y_{j_b})$。因此，我们有

$$\begin{aligned} E(a,b) &= L_T(y_{j_a}) + L_T(y_{j_b}) + 2\sum_{t=a+1}^{b-1} L_T(y_{j_t}) - (b-a-1)d_t - (b-a) + d_p + 1 \\ &\le L_T(y_{j_a}) + L_T(y_{j_b}) + 2(b-a-1)(d_t/2) - (b-a-1)d_t + (d_p - b + a + 1) \\ &= L_T(y_{j_a}) + L_T(y_{j_b}) + (d_p - b + a + 1) \le d_T(y_{j_a}, y_{j_b}) + d_{P_{m,k}}(x_{i_a}, x_{i_b}). \end{aligned}$$

如果 $z_a = (x_{i_a}, y_{j_a})$ 和 $z_b = (x_{i_b}, y_{j_b})$，且 y_{j_a} 和 y_{j_b} 位于 T 的同一分支中，则注意到 $b - a \geq 2$。如果 $b - a \geq 4$，那么 $\min\{L_T(y_{j_t}) + L_T(y_{j_{t+1}}) \; L_T(y_{j_{t+1}}) + L_T(y_{j_{t+2}})\} \leq d_t/2$，因为 $\min\{d_T(y_{j_t}, y_{j_{t+1}}) \; d_T(y_{j_{t+1}}, y_{j_{t+2}})\} \leq d_t/2$，且 $\max\{L_T(y_{j_t}) + L_T(y_{j_{t+1}}) \; L_T(y_{j_{t+1}}) + L_T(y_{j_{t+2}})\} \leq d_t$。因此，我们有

$$\begin{aligned} E(a,b) &\leq (2(d_t/2) + 2d_t) - 3d_t - 4 + d_p + 1 = d_p - 3 = d_p - b + a + 1 \\ &\leq d_{P_{m,k}}(x_{i_t}, x_{i_{t+1}}) \leq d_{P_{m,k}}(x_{i_t}, x_{i_{t+1}}) + d_T(y_{j_t}, y_{j_{t+1}}). \end{aligned}$$

如果 $b = a + 3$，则有两种可能：(i) $d_T(y_{j_a}, y_{j_{a+1}}) \leq d_t/2, d_T(y_{j_{a+1}}, y_{j_{a+2}}) > d_t/2$ 和 $d_T(y_{j_{a+2}}, y_{j_{a+3}}) \leq d_t/2$；(ii) $d_T(y_{j_a}, y_{j_{a+1}}) > d_t/2, d_T(y_{j_{a+1}}, y_{j_{a+2}}) \leq d_t/2$ 和 $d_T(y_{j_{a+2}}, y_{j_{a+3}}) > d_t/2$。在 (i) 的情况下，$L_T(y_{j_a}) + L_T(y_{j_{a+1}}) \leq d_t/2, L_T(y_{j_{a+1}}) + L_T(y_{j_{a+2}}) \leq d_t$ 和 $L_T(y_{j_{a+2}}) + L_T(y_{j_{a+3}}) \leq d_t/2$。因此，

$$\begin{aligned} E(a,b) &\leq (d_t/2 + d_t + d_t/2) - 2d_t - 3 + d_p + 1 = d_p - 2 \\ &\leq d_{P_{m,k}}(x_{i_a}, x_{i_b}) \leq d_{P_{m,k}}(x_{i_a}, x_{i_b}) + d_T(y_{j_a}, y_{j_b}). \end{aligned}$$

在 (ii) 的情况下，我们有 $d_t/2 < L_T(y_{j_a}) + L_T(y_{j_{a+1}}) \leq d_t$，$L_T(y_{j_{a+1}}) + L_T(y_{j_{a+2}}) \leq d_t/2$ 和 $d_t/2 < L_T(y_{j_{a+2}}) + L_T(y_{j_{a+3}}) \leq d_t$。因此，

$$\begin{aligned} E(a,b) &= L_T(y_{j_a}) + L_T(y_{j_{a+3}}) + 2(L_T(y_{j_{a+1}}) + L_T(y_{j_{a+2}})) - 2d_t - 3 + d_p + 1 \\ &\leq L_T(y_{j_a}) + L_T(y_{j_{a+3}}) + 2(d_t/2) - 2d_t + d_p - 2 \\ &= L_T(y_{j_a}) + L_T(y_{j_{a+3}}) - 2(d_t/2) + d_p - 2 \\ &\leq L_T(y_{j_a}) + L_T(y_{j_{a+3}}) - 2\phi_T(y_{j_a}, y_{j_{a+3}}) + d_p - 2 \\ &\leq d_T(y_{j_a}, y_{j_b}) + d_{P_{m,k}}(x_{i_a}, x_{i_b}). \end{aligned}$$

如果 $b = a+2$，那么要么（i）$d_T(y_{j_a}, y_{j_{a+1}}) \leq d_t/2$ 且 $d_T(y_{j_{a+1}}, y_{j_{a+2}}) \leq d_t/2$，要么（ii）$d_T(y_{j_a}, y_{j_{a+1}}) \leq d_t/2$ 且 $d_T(y_{j_{a+1}}, y_{j_{a+2}}) > d_t/2$。在情形（i）下，$L_T(y_{j_a}) + L_T(y_{j_{a+1}}) \leq d_t/2$ 且 $L_T(y_{j_{a+1}}) + L_T(y_{j_{a+2}}) \leq d_t/2$，因此，$E(a,b) \leq (d_t/2 + d_t/2) - d_t - 2 + d_p + 1 = d_p - 1 \leq d_{P_{m,k}}(x_{i_a}, x_{i_{a+2}}) \leq d_{P_{m,k}}(x_{i_a}, x_{i_{a+2}}) + d_T(y_{j_a}, y_{j_{a+2}})$。在情形（ii）下，$L_T(y_{j_a}) + L_T(y_{j_{a+1}}) \leq d_t/2$ 且 $L_T(y_{j_{a+1}}) + L_T(y_{j_{a+2}}) > d_t/2$，即 $L_T(y_{j_{a+1}}) \leq d_t/2 - L_T(y_{j_a})$。因此，

$$\begin{aligned} E(a,b) &= L_T(y_{j_a}) + 2L_T(y_{j_{a+1}}) + L_T(y_{j_{a+2}}) - d_t - 2 + d_p + 1 \\ &\leq L_T(y_{j_a}) + 2(d_t/2 - L_T(y_{j_a})) + L_T(y_{j_{a+2}}) - d_t + d_p - 1 \\ &= L_T(y_{j_a}) + L_T(y_{j_{a+2}}) - 2L_T(y_{j_a}) + d_p - 1 \\ &\leq L_T(y_{j_a}) + L_T(y_{j_{a+2}}) - 2\phi_T(y_{j_a}, y_{j_{a+2}}) + d_p - 1 \\ &= d_T(y_{j_a}, y_{j_{a+2}}) + d_{P_{m,k}}(x_{i_a}, x_{i_{i+2}}). \end{aligned}$$

子情形 1.2：假设 (a)-(c) 和 (e) 成立。那么对于所有的 $0 \leq t \leq 2mn-2$, $L_T(y_{j_t}) + L_T(y_{j_{t+1}}) \leq (d_t + 2)/2$，当 $d_T(y_{j_t}, y_{j_{t+1}}) \leq (d_t + 2)/2$ 且 y_{j_t} 和 $y_{j_{t+1}}$ 位于不同分支时，若 $b = a + 1$，则 $E(a,b) = L_T(y_{j_a}) + L_T(y_{j_b}) + d_p = d_T(y_{j_a}, y_{j_b}) + d_{P_{m,k}}(x_{i_a}, x_{i_b})$。若 $b = a + 2$，则

$$\begin{aligned} E(a,b) &= L_T(y_{j_a}) + 2L_T(y_{j_{a+1}}) + L_T(y_{j_b}) - d_t - 1 + d_p \\ &\leq L_T(y_{j_a}) + L_T(y_{j_b}) + 2((d_t + 2)/2 - L_T(y_{j_a})) - d_t - 1 + d_p \\ &= L_T(y_{j_a}) + L_T(y_{j_b}) - 2(L_T(y_{j_a}) - 1) + d_p - 1 \\ &\leq L_T(y_{j_a}) + L_T(y_{j_b}) - 2\phi_T(y_{j_a}, y_{j_b}) + d_p - 1 \\ &\leq d_T(y_{j_a}, y_{j_b}) + d_{P_{m,k}}(x_{i_a}, x_{i_b}). \end{aligned}$$

若 $b-a\geq 3$，则

$$\begin{aligned}
E(a,b) &= L_T(y_{j_a})+L_T(y_{j_b})+2\sum_{t=a+1}^{b-1}L_T(y_{j_t})-(b-a)(d_t+1)+d_t+d_p+1\\
&\leq L_T(y_{j_a})+L_T(y_{j_b})+2(b-a-1)((d_t+2)/2)-(b-a-1)(d_t+1)+d_p\\
&\leq L_T(y_{j_a})+L_T(y_{j_b})+2((d_t+2)/2)-2d_t-2+d_p\\
&= L_T(y_{j_a})+L_T(y_{j_b})-2((d_t-2)/2)+d_p-2\\
&\leq L_T(y_{j_a})+L_T(y_{j_b})-2\phi_T(y_{j_a},y_{j_b})+d_p-2\\
&\leq d_T(y_{j_a},y_{j_b})+d_{P_{m,k}}(x_{i_a},x_{i_b}).
\end{aligned}$$

子情形-1.3：假设 (a)-(c) 和 (f) 成立。如果 $z_a=(x_{i_a},y_{j_a})$ 和 $z_b=(x_{i_b},y_{j_b})$，且 y_{j_a} 和 y_{j_b} 位于不同分支。假设 d_t 为偶数，则对所有 $0\leq t\leq 2mn-1$，$L_T(y_{j_t})\leq d_t/2$。因此，我们得到

$$\begin{aligned}
E(a,b) &\leq L_T(y_{j_a})+L_T(y_{j_b})+2\sum_{t=a+1}^{b-1}L_T(y_{j_t})-(b-a-1)(d_t+1)+d_p\\
&\leq L_T(y_{j_a})+L_T(y_{j_b})+2\sum_{t=a+1}^{b-1}(d_t/2)-(b-a-1)(d_t+1)+d_p\\
&= L_T(y_{j_a})+L_T(y_{j_b})+d_p-(b-a-1)\\
&\leq d_T(y_{j_a},y_{j_b})+d_{P_{m,k}}(x_{i_a},x_{i_b}).
\end{aligned}$$

假设 d_t 为奇数。注意，对于序列 $O(V(P_{m,k}\square T)):=z_0,z_1,\ldots,z_{2mn-1}$ 中任意连续的 (d_t+d_p) 个顶点，至多有一个 $L(y_{j_q})=(d_t+1)/2$；对于所有其他顶点，$L(y_{j_t})\leq(d_t-1)/2$。因此，我们有

$$\begin{aligned}
E(a,b) &= L_T(y_{j_a})+L_T(y_{j_b})+2\sum_{t=a+1}^{b-1}L_T(y_{j_t})-(b-a-1)(d_t+1)+d_p\\
&= L_T(y_{j_a})+L_T(y_{j_b})+2(b-a-1)\left(\frac{d_t-1}{2}\right)+2\left(\frac{b-a-1}{d_t+d_p}\right)-(b-a-1)(d_t+1)+d_p\\
&= L_T(y_{j_a})+L_T(y_{j_b})-(b-a-1)((d_t+d_p-2)/(d_t+d_p))+d_p-(b-a-1)\\
&\leq L_T(y_{y_{j_a}})+L_T(y_{j_b})+d_p-(b-a-1)\\
&\leq d_T(y_{j_a},y_{j_b})+d_{P_{m,k}}(x_{i_a},x_{i_b}).
\end{aligned}$$

如果 $z_a=(x_{i_a},y_{j_a})$ 和 $z_b=(x_{i_b},y_{j_b})$，且 y_{j_a} 和 y_{j_b} 位于 T 的同一分支，则注意到 $b-a\geq d_t+d_p$。因此，$E(a,b)\leq L_T(y_{j_a})+L_T(y_{j_b})+d_p-(b-a-1)\leq L_T(y_{j_a})+L_T(y_{j_b})+d_p-(d_t+d_p-1)=L_T(y_{j_a})+L_T(y_{j_b})-2((d_t-1)/2)\leq L_T(y_{j_a})+L_T(y_{j_b})-2\phi_T(y_{j_a},y_{j_b})\leq d_T(y_{j_a},y_{j_b})\leq d_T(y_{j_a},y_{j_b})+d_{P_{m,k}}(x_{i_a},x_{i_b})$。

情况 2：$|W(T)|=2$。在这种情况下，根据 δ 的定义，回忆一下，对所有 $0\leq t\leq 2mn-2$，$\varepsilon(T)=0$ 且 $\delta_T(y_{j_t},y_{j_{t+1}})=1$。

子情形-2.1：假设 (a)-(d) 成立。根据 (b) 和 (d)，我们有 $L_T(y_{j_0})=L_T(y_{j_{2mn-1}})=0<(d_t-1)/2$，并且对于所有 $1\leq t\leq 2mn-2$, $L_T(y_{j_t})\leq\min\{L_T(y_{j_{t-1}})+L_T(y_{j_t})\ L_T(y_{j_t})+L_T(y_{j_{t+1}})\}=\min\{d_T(y_{j_{t-1}},y_{j_t})-1,d_T(y_{j_t},y_{j_{t+1}})-1\}\leq(d_t-1)/2$。如果 $z_a=(x_{i_a},y_{j_a})$ 和 $z_b=(x_{i_b},y_{j_b})$ 满足 y_{j_a} 和 y_{j_b} 位于 T 的相对分支中，那么 $d_T(y_{j_a},y_{j_b})=L_T(y_{j_a})+L_T(y_{j_b})+1$ 和 y_{j_a}

而 y_{j_b} 位于不同分支中，那么 $d_T(y_{j_a}, y_{j_b}) = L_T(y_{j_a}) + L_T(y_{j_b})$。因此，在这两种情况下，我们都有

$$\begin{aligned} E(a,b) &= L_T(y_{j_a}) + L_T(y_{j_b}) + 2\sum_{t=a+1}^{b-1} L_T(y_{j_t}) - (b-a-1)d_t + d_p + 1 \\ &\leq L_T(y_{j_a}) + L_T(y_{j_b}) + 2(b-a-1)((d_t-1)/2) - (b-a-1)d_t + d_p + 1 \\ &= L_T(y_{j_a}) + L_T(y_{j_b}) + d_p - (b-a-2) \\ &\leq d_T(y_{j_a}, y_{j_b}) + d_{P_{m,k}}(x_{i_a}, x_{i_b}). \end{aligned}$$

若 $z_a = (x_{i_a}, y_{j_a})$ 和 $z_b = (x_{i_b}, y_{j_b})$ 满足 y_{j_a} 和 y_{j_b} 位于 T 的同一分支中，则注意到 $b-a \geq 2$。若 $b-a \geq 4$，则 $\min\{L_T(y_{j_t}) + L_T(y_{j_{t+1}}) \; L_T(y_{j_{t+1}}) + L_T(y_{j_{t+2}})\} \leq (d_t-1)/2$，因为 $\min\{d_T(y_{j_t}, y_{j_{t+1}}) - 1, d_T(y_{j_{t+1}}, y_{j_{t+2}}) - 1\} \leq (d_t-1)/2$，且 $\max\{L_T(y_{j_t}) + L_T(y_{j_{t+1}}) \; L_T(y_{j_{t+1}}) + L_T(y_{j_{t+2}})\} \leq d_t - 1$。因此，我们有

$$\begin{aligned} E(a,b) &\leq (2((d_t-1)/2) + 2(d_t-1)) - 3d_t + d_p + 1 \\ &= d_p - 2 \leq d_{P_{m,k}}(x_{i_a}, x_{i_b}) + d_T(y_{j_a}, y_{j_b}). \end{aligned}$$

若 $b = a+3$，则有两种可能：(i) $d_T(y_{j_a}, y_{j_{a+1}}) \leq (d_t+1)/2, d_T(y_{j_{a+1}}, y_{j_{a+2}}) > (d_t+1)/2$，以及 $d_T(y_{j_{a+2}}, y_{j_{a+3}}) \leq (d_t+1)/2$；(ii) $d_T(y_{j_a}, y_{j_{a+1}}) > (d_t+1)/2, d_T(y_{j_{a+1}}, y_{j_{a+2}}) \leq (d_t+1)/2$，以及 $d_T(y_{j_{a+2}}, y_{j_{a+3}}) > (d_t+1)/2$。在情形 (i) 中，注意到 $L_T(y_{j_a}) + L_T(y_{j_{a+1}}) \leq (d_t-1)/2, (d_t-1)/2 < L_T(y_{j_{a+1}}) + L_T(y_{j_{a+2}}) \leq d_t - 1$，且 $L_T(y_{j_{a+2}}) + L_T(y_{j_{a+3}}) \leq (d_t-1)/2$。因此，$E(a,b) \leq ((d_t-1)/2 + (d_t-1) + (d_t-1)/2) - 2d_t + d_p + 1 = d_p - 1 \leq d_{P_{m,k}}(x_{i_a}, x_{i_b}) \leq d_{P_{m,k}}(x_{i_a}, x_{i_b}) + d_T(y_{j_a}, y_{j_b})$。在情形 (ii) 中，注意到 $(d_t-1)/2 < L_T(y_{j_a}) + L_T(y_{j_{a+1}}) \leq d_t - 1, L_T(y_{j_{a+1}}) + L_T(y_{j_{a+2}}) \leq (d_t-1)/2$，且 $(d_t-1)/2 < L_T(y_{j_{a+2}}) + L_T(y_{j_{a+3}}) \leq d_t - 1$。因此，

$$\begin{aligned} E(a,b) &\leq L_T(y_{j_a}) + L_T(y_{j_b}) + 2(L_T(y_{j_{a+1}}) + L_T(y_{j_{a+2}})) - 2d_t + d_p + 1 \\ &\leq L_T(y_{j_a}) + L_T(y_{j_b}) + 2((d_t-1)/2) - 2d_t + d_p + 1 \\ &= L_T(y_{j_a}) + L_T(y_{j_b}) - d_t + d_p \\ &= L_T(y_{j_a}) + L_T(y_{j_b}) - 2((d_t-1)/2) + d_p - 1 \\ &\leq L_T(y_{j_a}) + L_T(y_{j_b}) - 2\phi_T(y_{j_a}, y_{j_b}) + d_p - 1 \\ &\leq d_{P_{m,k}}(x_{i_a}, x_{i_b}) + d_T(y_{j_a}, y_{j_b}). \end{aligned}$$

若 $b = a+2$，则或者 (i) $d_T(y_{j_a}, y_{j_{a+1}}) \leq (d_t+1)/2$ 且 $d_T(y_{j_{a+1}}, y_{j_{a+2}}) \leq (d_t+1)/2$，或者 (ii) $d_T(y_{j_a}, y_{j_{a+1}}) \leq (d_t+1)/2$ 且 $d_T(y_{j_{a+1}}, y_{j_{a+2}}) > (d_t+1)/2$。在情形 (i) 中，$L_T(y_{j_a}) + L_T(y_{j_{a+1}}) \leq (d_t-1)/2$ 且 $L_T(y_{j_{a+1}}) + L_T(y_{j_{a+2}}) \leq (d_t-1)/2$。因此，我们有 $E(a,b) \leq ((d_t-1)/2 + (d_t-1)/2) - d_t + d_p + 1 = d_p \leq d_{P_{m,k}}(x_{i_a}, x_{i_b}) + d_T(y_{j_a}, y_{j_b})$。在情形 (ii) 中，$L_T(y_{j_a}) + L_T(y_{j_{a+1}}) \leq (d_t-1)/2$ 且 $(d_t-1)/2 < L_T(y_{j_{a+1}}) + L_T(y_{j_{a+2}}) \leq d_t - 1$，也就是说 $L_T(y_{j_{a+1}}) \leq (d_t-1)/2 - L_T(y_{j_a})$。因此，$E(a,b) \leq L_T(y_{j_a}) + 2L_T(y_{j_{a+1}}) + L_T(y_{j_{a+2}}) - d_t + d_p + 1 \leq L_T(y_{j_a}) + L_T(y_{j_{a+2}}) + 2((d_t-1)/2 - L_T(y_{j_a})) - d_t + d_p + 1 = L_T(y_{j_a}) + L_T(y_{j_{a+2}}) - 2L_T(y_{j_a}) + d_p \leq L_T(y_{j_a}) + L_T(y_{j_{a+2}}) - 2\phi_T(y_{j_a}, y_{j_{a+2}}) + d_p \leq d_{P_{m,k}}(x_{i_a}, x_{i_b}) + d_T(y_{j_a}, y_{j_b})$。

子情形 2.2：假设 (a)–(c) 和 (e) 成立。那么对于所有 $0 \leq t \leq 2mn-2$, $L_T(y_{j_t}) + L_T(y_{j_{t+1}}) \leq (d_t-1)/2$，当 $d_T(y_{j_t}, y_{j_{t+1}}) \leq (d_t+1)/2$ 时，y_{j_t} 和 $y_{j_{t+1}}$ 位于相对分支中。若 $b = a+1$，则 $E(a, b) = L_T(y_{j_a}) + L_T(y_{j_b}) + 1 + d_p = d_{P_{m,k}}(x_{i_a}, x_{i_b}) + d_T(y_{j_a}, y_{j_b})$。

若 $b=a+2$，则

$$\begin{aligned} E(a,b) &= L_T(y_{j_a})+2L_T(y_{j_{a+1}})+L_T(y_{j_b})-d_t+d_p+1 \\ &\le L_T(y_{j_a})+L_T(y_{j_b})+2((d_t-1)/2-L_T(y_{j_a}))+L_T(y_{j_b})-d_t+d_p+1 \\ &= L_T(y_{j_a})+L_T(y_{j_b})-2L_T(y_{j_a})+d_p \\ &\le L_T(y_{j_a})+L_T(y_{j_b})-2\phi_T(y_{j_a},y_{j_b})+d_p \\ &\le d_T(y_{j_a},y_{j_b})+d_T(x_{i_a},x_{i_b}). \end{aligned}$$

如果 $b-a\ge 3$ 那么

$$\begin{aligned} E(a,b) &= L_T(y_{j_a})+L_T(y_{j_b})+2\sum_{t=a+1}^{b-1}L_T(y_{j_t})-(b-a-1)d_t+d_p+1 \\ &\le L_T(y_{j_a})+L_T(y_{j_b})+2((d_t-1)/2)-2d_t+d_p+1 \\ &= L_T(y_{j_a})+L_T(y_{j_b})-d_t+d_p \\ &= L_T(y_{j_a})+L_T(y_{j_b})-2((d_t-1)/2)+d_p-1 \\ &\le L_T(y_{j_a})+L_T(y_{j_b})-2\phi_T(y_{j_a},y_{j_b})+d_p-1 \\ &\le d_T(y_{j_a},y_{j_b})+d_{P_{m,k}}(x_{i_a},x_{i_b}). \end{aligned}$$

子情形 2.3：假设 (a)-(c) 和 (f) 成立。在这种情况下，回顾一下，对于所有 $0\le t\le 2mn-1$, $L_T(y_{j_t})\le (d_t-1)/2$。如果 $z_a=(x_{i_a},y_{j_a})$ 和 $z_b=(x_{i_b},y_{j_b})$ 满足 y_{j_a} 和 y_{j_b} 位于 T 的相对分支或不同分支中，那么

$$\begin{aligned} E(a,b) &\le L_T(y_{j_a})+L_T(y_{j_b})+2\sum_{t=a+1}^{b-1}L_T(y_{j_t})-(b-a-1)d_t+d_p+1 \\ &\le L_T(y_{j_a})+L_T(y_{j_b})+2(b-a-1)((d_t-1)/2)-(b-a-1)d_t+d_p+1 \\ &= L_T(y_{j_a})+L_T(y_{j_b})+d_p-(b-a-2) \\ &\le d_T(y_{j_a},y_{j_b})+d_{P_{m,k}}(x_{i_a},x_{i_b}). \end{aligned}$$

如果 $z_a=(x_{i_a},y_{j_a})$ 和 $z_b=(x_{i_b},y_{j_b})$ 满足 y_{j_a} 和 y_{j_b} 位于 T 的同一分支中，那么回顾一下，$b-a\ge d_t+d_p$。因此，如上所述，我们有

$$\begin{aligned} E(a,b) &\le L_T(y_{j_a})+L_T(y_{j_b})+d_p-(b-a-2) \\ &\le L_T(y_{j_a})+L_T(y_{j_b})+d_p-(d_t+d_p-2) \\ &= L_T(y_{j_a})+L_T(y_{j_b})-2((d_t-2)/2) \\ &\le L_T(y_{j_a})+L_T(y_{j_b})-2\phi_T(y_{j_a},y_{j_b}) \\ &\le d_T(y_{j_a},y_{j_b})+d_{P_{m,k}}(x_{i_a},x_{i_b}). \end{aligned}$$

□

现在，我们利用已有结果确定佩特森图与星图的笛卡尔积的无线电数。

著名的佩特森图是广义彼得森图 P_5,2，如图1所示。我们用 $V(P_5,2)=\{x_1,x_2,\ldots,x_{10}\}$ 表示具有 $E(P_5,2)=\{x_ix_{i+2},x_jx_{j+3},x_1x_{10},x_2x_7,x_3x_9$ 的图：i =1、2、3、4、6、7、8；$j=1$、2、5、6、7}。n-星图是一种树，由 n 个叶子和另一个通过边连接到所有叶子的顶点组成，记作 $K_{1,n}$。记 $V(K_{1,n})=\{y_j:\ j=0$、1、2、.....、$n\}$，其中$E(K_{1,n})=\{y_0y_j:\ j=1$、2、.....、$n\}$。

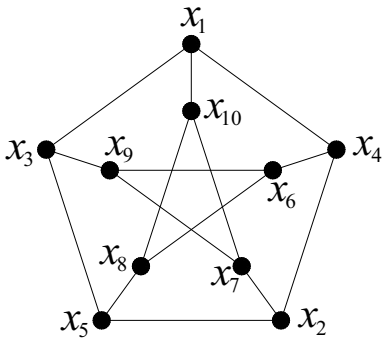

图1：Peterson 图 $P_{5,\ 2}$。

定理3.4。 设 $P_{5,2}$ 为佩特森图，$K_{1,n}$ 为具有 $n \geq 3$的星图。那么

$$\mathrm{rn}(P_{5,2}\Box K_{1,n}) = 10n + 27. \tag{9}$$

证明。 $K_{1,\ n}$的阶、直径和总层级分别为 $n+1$、2 和 n。将这些值代入式 (1) 的右侧，可得式 (9) 的右侧，它是 rn($P_{5,\ 2}\Box K_{1,\ n}$) 的一个下界。现在证明这个下界是紧的。对于 $n = 3$，4 和 5，结果很容易验证。因此，我们考虑 $n \geq 6$；对于这些情况，只需给出 $P_{5,\ 2}\Box K_{1,\ n}$ 的一个顶点排序 $O(V(P_{5,\ 2}\Box K_{1,\ n})) := z_0,\ z_1,\ \ldots, z_{10n+9}$，使其满足定理 3.2 的条件 (a)-(c)。我们使用三个置换 $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 5 & 9 & 3 & 7 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}$、$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 4 & 2 & 5 & 3 & 6 & 9 & 7 & 10 & 8 \end{pmatrix}$ 和 $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 10 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ 来定义 $V(P_{5,\ 2}\Box K_{1,\ n})$ 的这种排序。下面分两种情况讨论。

情形-1： $n \equiv 0$ （模 5）。

在此情形下，我们首先按如下方式将 (x_i, y_j) $(1 \leq i \leq 10, 0 \leq j \leq n)$ 重命名为 (a_r, b_s)：

$$(a_r, b_s) = \begin{cases} (x_i, y_j), & \text{if } 1 \leq i \leq 10 \text{ and } j = 0, \\ (x_{\alpha\tau^{j-1}(i)}, y_j), & \text{if } 1 \leq i \leq 10 \text{ and } 1 \leq j \leq n. \end{cases}$$

现在我们按如下方式定义一个排序 $O(V(P_{5,2}\Box K_{1,n}))$：$= z_0, z_1,\ \ldots,\ z_{10n+9}$：令 $z_0 = (a_5, b_0)$，对于 $1 \leq t \leq 10n + 9$，令 $z_t = (a_r, b_s)$，其中

$$t := \begin{cases} (r-1)n + s, & \text{if } 1 \leq r \leq 10 \text{ and } 1 \leq s \leq n, \\ 10n + r, & \text{if } 1 \leq r \leq 4 \text{ and } s = 0, \\ 10n + r - 2, & \text{if } 7 \leq r \leq 10 \text{ and } s = 0, \\ 10n + 9, & \text{if } r = 6 \text{ and } s = 0. \end{cases}$$

情形-2： $n \not\equiv 0$ （模 5）。

在这种情况下，我们首先按如下方式将 (x_i, y_j) $(1 \leq i \leq 10, 0 \leq j \leq n)$ 重命名为 (a_r, b_s)：

$$(a_r, b_s) = \begin{cases} (x_i, y_j), & \text{if } 1 \leq i \leq 10 \text{ and } j = 0, \\ (x_{\tau^{j-1}(i)}, y_j), & \text{if } 1 \leq i \leq 10, 1 \leq j \leq n \text{ and } n \equiv 1 \pmod 5, \\ (x_{\beta\tau^{j-1}(i)}, y_j), & \text{if } 1 \leq i \leq 10, 1 \leq j \leq n \text{ and } n \equiv 2 \pmod 5, \\ (x_{\beta^3\tau^{j-1}(i)}, y_j), & \text{if } 1 \leq i \leq 10, 1 \leq j \leq n \text{ and } n \equiv 3 \pmod 5, \\ (x_{\beta^2\tau^{j-1}(i)}, y_j), & \text{if } 1 \leq i \leq 10, 1 \leq j \leq n \text{ and } n \equiv 4 \pmod 5, \end{cases}$$

现在定义如下排序 $O(V(P_{5,2}\square K_{1,n}))$: $= z_0, z_1, \ldots, z_{10n+9}$。令 $z_0 = (a_5, b_0)$，对于 $1 \le t \le 10n+9$，令 $z_t = (a_r, b_s)$，其中

$$t := \begin{cases} (r-1)n+s, & \text{if } 1 \le r \le 10 \text{ and } 1 \le s \le n, \\ 10n+5-r, & \text{if } 1 \le r \le 4 \text{ and } s = 0, \\ 10n+r-1, & \text{if } 6 \le r \le 10 \text{ and } s = 0. \end{cases}$$

那么，在上述两种情况下，注意 $d_{P_{5,2}}(x_{i_t}, x_{i_{t+1}}) = 2$ 和 $L_T(y_{j_0}) + L_T(y_{j_{10n+9}}) = 0$，其中 $z_t = (x_{i_t}, y_{j_t})$ 对于 $0 \le t \le 10n+9$。因此，定理 3.2 的条件 (a)-(b) 得到满足。

断言：上述定义的序 $O(V(P_{5,2}\square K_{1,n})) := z_0, z_1, \ldots, z_{10n+9}$ 满足 (7)。

设 $z_a = (x_{i_a}, y_{j_a})$ $z_b = (x_{i_b}, y_{j_b})$; $0 \le a < b \le 10n+9$ 为两个顶点。将 (7) 的右侧记为 $E(a,b)$。若 $b-a = 1$，则 $E(a,b) = L_T(y_{j_a}) + L_T(y_{j_b}) - 3 + 5 = L_T(y_{j_a}) + L_T(y_{j_b}) + 2 = d_{P_5,2}(x_{i_a}, x_{i_b}) + d_T(y_{j_a}, y_{j_b})$。假设 $b-a \ge 2$。若 $a = 0$ 且 $b = 2$，则 $d_{P_m,k}(x_{i_0}, x_{i_2}) = d_T(y_{j_0}, y_{j_2}) = 1$，因此 $E(a,b) = L_T(y_{j_0}) + 2L_T(y_{j_1}) + L_T(y_{j_2}) - d_t - 1 = 2 = d_{P_m,k}(x_{i_0}, x_{i_2}) + d_T(y_{j_0}, y_{j_2})$。若 $a = 0$ 且 $b \ge 3$，则 $E(a,b) \le 1 \le d_{P_m,k}(x_{i_0}, x_{i_b}) + d_T(y_{j_0}, y_{j_b})$，如 $z_0 = (x_{i_0}, y_{j_0}) \ne z_b = (x_{i_b}, y_{j_b})$。因此，(7) 得到满足。若 $1 \le a < b \le 10n$，则注意到 $L_T(y_t) = 1$ 对所有 $1 \le t \le 10n$ 都成立，因此我们有

$$\begin{aligned} E(a,b) &= \sum_{t=a}^{b-1} [L_T(y_{j_t}) + L_T(y_{j_{t+1}}) - 2 - 1] + 2 + 2 + 1 \\ &\le 2(b-a) - 3(b-a) + 5 \\ &= 5 - (b-a). \end{aligned}$$

若 $b-a = 2$，则注意到 $d_{P_5,2}(x_{i_a}, x_{i_b}) \ge 1$ 且 $d_T(y_{j_a}, y_{j_b}) = 2$，因此 $E(a,b) \le 3 \le d_{P_5,2}(x_{i_a}, x_{i_b}) + d_T(y_{j_a}, y_{j_b})$。若 $b-a = 3$，则注意到 $d_{P_5,2}(x_{i_a}, x_{i_b}) \ge 1$ 且 $d_T(y_{j_a}, y_{j_b}) \ge 2$，因此 $E(a,b) \le 2 \le d_{P_5,2}(x_{i_a}, x_{i_b}) + d_T(y_{j_a}, y_{j_b})$。若 $b-a \ge 4$，则如 $z_a \ne z_b$ 所示，我们有 $d_{P_5,2}(x_{i_a}, x_{i_b}) + d_T(y_{j_a}, y_{j_b}) \ge 1$，因此 $E(a,b) \le 1 \le d_{P_5,2}(x_{i_a}, x_{i_b}) + d_T(y_{j_a}, y_{j_b})$。同样，若 $10n < b \le 10n+9$，易于验证式 (7) 成立。因此，定理 3.2 的条件 (c) 得证。

□

例3.5. 下表*1*中展示了由定理*3.4*的证明得到的顶点排序 $O(V(P_{5,2}\square K_{1,6})) := z_0, z_1, \ldots, z_{69}$以及 $P_{5,2}\square K_{1,6}$ 的一个最优无线电标号。

表 1: $\mathrm{rn}(P_{5,\ 2}\square K_{1,\ 6}) = 87$。

$(x_i,\ y_j)$	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
x_1	$z_{64} \to 72$	$z_1 \to 2$	$z_{26} \to 27$	$z_{21} \to 22$	$z_{16} \to 17$	$z_{11} \to 12$	$z_6 \to 7$
x_2	$z_{63} \to 69$	$z_7 \to 8$	$z_2 \to 3$	$z_{27} \to 28$	$z_{22} \to 23$	$z_{17} \to 18$	$z_{12} \to 13$
x_3	$z_{62} \to 66$	$z_{13} \to 14$	$z_8 \to 9$	$z_3 \to 4$	$z_{28} \to 29$	$z_{23} \to 24$	$z_{18} \to 19$
x_4	$z_{61} \to 63$	$z_{19} \to 20$	$z_{14} \to 15$	$z_9 \to 10$	$z_4 \to 5$	$z_{29} \to 30$	$z_{24} \to 25$
x_5	$z_0 \to 0$	$z_{25} \to 26$	$z_{20} \to 21$	$z_{15} \to 16$	$z_{10} \to 11$	$z_5 \to 6$	$z_{30} \to 31$
x_6	$z_{65} \to 75$	$z_{31} \to 32$	$z_{56} \to 57$	$z_{51} \to 52$	$z_{46} \to 47$	$z_{41} \to 42$	$z_{36} \to 37$
x_7	$z_{66} \to 78$	$z_{37} \to 38$	$z_{32} \to 33$	$z_{57} \to 58$	$z_{52} \to 53$	$z_{47} \to 48$	$z_{42} \to 43$
x_8	$z_{67} \to 81$	$z_{43} \to 44$	$z_{38} \to 39$	$z_{33} \to 34$	$z_{58} \to 59$	$z_{53} \to 54$	$z_{48} \to 49$
x_9	$z_{68} \to 84$	$z_{49} \to 50$	$z_{44} \to 45$	$z_{39} \to 40$	$z_{34} \to 35$	$z_{59} \to 60$	$z_{54} \to 55$
x_{10}	$z_{69} \to 87$	$z_{55} \to 56$	$z_{50} \to 51$	$z_{45} \to 46$	$z_{40} \to 41$	$z_{35} \to 36$	$z_{60} \to 61$

参考文献

[1] D. Bantva 和 D. Liu，块图和树的线图的最优无线电标号，Theoretical. Compu. Sci., 891 (2021年), 90–104.[2] D. Bantva 和 D. Liu，两个树的笛卡尔积的无线电数，已投稿。[3] D. Bantva、S. Vaidya 和 S. Zhou，树的无线电数，Discrete Appl. Math., 217 (2017年), 110–122.[4] K. F. Benson、M. Porter 和 M. Tomova，所有阶为 n 且直径为 $n-2$的图的无线电数，Le Mathematiche, 68 (2013年), 167–190.[5] R. Cˇada、J. Ekstein、P. Holub 和 O. Togni，距离图的无线电标号，Discrete Appl. Math., 161(18) (2013年), 2876–2884.[6] T. Calamoneri， $L(h,k)$-标号问题：最新综述及带注释的参考书目，The Comput. J., 54(8) (2011年), 1344—1371.[7] G. Chartrand、D. Erwin、F. Harary 和 P. Zhang，图的无线电标号，Bull. Inst. Combin. Appl., 33 (2001年), 77–85 .[8] G. Chartrand、D. Erwin 和 P. Zhang，受FM频道限制启发的一种图标号，Bull. Inst. Combin. Appl., 43 (2005年), 43–57.[9] S. Das、S. Ghosh、S. Nandi 和 S. Sen，无线电k-着色的一个下界技巧，Discrete Math., 340 (2017年), 855–861.[10] J. R. Griggs 和 R. K. Yeh，满足距离2条件的图标号，SIAM J. Discrete Math., 5 (1992年), 586—595.[11] W.K. Hale，频率分配：理论与应用，Proc IEEE, 68(12) (1980年), 1497–1514.[12] V. Hal´asz 和 Z. Tuza，完全树的距离约束标号，Discrete Math., 338 (2015年), 1398–1406.[13] X. Li、V. Mak 和 S. Zhou，完全 m叉树的最优无线电标号，Discrete Applied Math., 158 (2010年), 507–515.[14] D. Liu，树的无线电数，Discrete Math., 308 (2008年), 1153–1164.[15] D. Liu 和 X. Zhu，路径和圈的多层距离标号，SIAM J. Discrete Math., 19 (2005年), 610–621.[16] F. S. Roberts，图的T-着色：最新结果和开放问题，Discrete Math., 93 (1991年), 229-245.[17] L. Saha 和 P. Panigrahi，环面网格的无线电数，Australas. J Comb., 55 (2013年), 273–288.[18] L. Saha 和 P. Panigrahi，图的平方的无线电数，Electron. Notes Discret. Math., 48 (2015年), 205–212.

[19] D. B. West, 《图论导引》, 印度普伦蒂斯霍尔出版社, 2001年。

[20] R. K. Yeh, 关于满足距离二条件的图标号的综述, *Discrete Math.*, 306(2006), 1217—1231。

[21] S. Zhou, 基于凯莱图建模的光网络信道分配问题, 《理论计算机科学》, 310（2004年）, 501–511。