arXiv:2304.10099v1 [math.AP] 20 Apr 2023

不规则区域上的加权分数阶 Sobolev-Poincaré 不等式

YI XUAN[1,2]

Abstract. 本文研究不规则区域上的加权分数阶 Sobolev-Poincaré 不等式。这里考虑的权是到边界距离的某些幂，而区域则是所谓的 s-John 区域和 β-H¨older 区域。我们的主要结果将 Hajlasz-Koskela [《J. Lond. Math. Soc.》 1998] 的结果从经典的加权 Sobolev-Poincaré 不等式推广到了其分数阶对应形式，并将 Guo [《中国数学年刊》 2017] 的结果从分数阶 Sobolev-Poincar´e 不等式推广到了加权情形。

1. Introduction

经典的 Sobolev-Poincar´e 不等式断言：如果 u Ω 上的函数是光滑函数 $\subset \mathbb{R}^n$，且 Ω 是有界 Lipschitz 区域，那么对所有 $p \in [1, n)$，

$$\Big(\int_\Omega |u - u_\Omega|^{\frac{np}{n-p}} dx\Big)^{\frac{n-p}{np}} \le C\Big(\int_\Omega |\nabla u|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}}, \tag{1.1}$$

其中，$u_\Omega = |\Omega|^{-1}\int_\Omega u dx$ 是 u 在 Ω 上的积分平均值。该不等式与 Rellich-Kondrachov 紧嵌入定理密切相关，后者在偏微分方程理论中有重要应用，参见例如 [1, 19]。自 20 世纪 90 年代以来，不规则区域上 (1.1) 的有效性也受到了广泛关注，部分原因是它在变分问题中的应用，参见 [20, 3, 9, 10, 14] 及其中的参考文献。特别是，[9]建立了 (1.1) 的加权版本，并将其应用于紧嵌入问题。[9] 的一项主要技术创新，是证明（加权）Sobolev-Poincar´e 不等式成立等价于某些容量估计。Maz'ya 早期的研究 [17, 18],已使用了这一有用的观察，但仅针对满足锥条件的有界区域。在 [9], 中，类似的估计被推广到更一般的 s-John 区域类。

回顾一下，$\mathbb{R}^n$ ($n \ge 2$) 中的有界区域 Ω 被称为 s-John 域（$s \ge 1$），如果存在一个常数 C 和一个指定点 x_0，满足对于每个 $x \in \Omega$，都存在一条弧长参数化的可求长曲线 $\gamma : [0, \ell(\gamma)] \to \Omega$，其中 $\ell(\gamma)$ 表示 γ 的长度，且 $\gamma(0) = x$，并且 $\gamma(\ell(\gamma)) = x_0$，使得对于所有 $0 \le t \le \ell(\gamma)$，均有以下关系成立。

$$Cd(\gamma(t), \partial\Omega) \ge t^s.$$

在 $s = 1$ 的情况下，F. John 首先在其关于弹性力学的研究中使用了这一概念 [13]，而该术语由 Martin 和 Sarvas[16] 引入。对于一般的 $s \ge 1$，Smith 和 Stegenga [20] 引入了这一概念；另请参见 [8]，其中进一步研究了这类区域的推广及其与几何函数论的联系。

Date: 2023年4月21日。*Key words and phrases.* s-John 域，β-H¨older 域，分数阶 Sobolev-Poincaré 不等式，紧性估计，权。

近年来，对分数阶 Sobolev-Poincar´e 不等式的研究日益受到关注；例如参见 [5, 11, 7, 4]。更具体地说，文献中广泛研究了有限勒贝格测度的区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ 上的如下分数阶 (p,q)-Sobolev-Poincar´e 不等式：

$$\int_\Omega |u(x)-u_\Omega|^q dx \leq C\Big(\int_\Omega \int_{\Omega\cap B(x,\tau d(x,\partial\Omega))} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+p\delta}} dydx\Big)^{\frac{q}{p}}, \tag{1.2}$$

其中 $1 \leq p \leq q < \infty$, $\delta \in (0,1)$, $\tau \in (0,\infty)$，且常数 C 与 $u \in C(\Omega)$ 无关。为简化记号，对每个 $u \in C(\Omega)$、$\delta \in (0,1)$、$\tau \in (0,\infty)$，我们在 Ω 上定义函数 g_u^τ 如下：

$$g_u^\tau(x) = \int_{\Omega\cap B(x,\tau d(x,\partial\Omega))} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+p\delta}} dy.$$

基于 Hajlasz-Koskela 在 [7] 中的思想，研究表明，在 s-John 域这一类区域中，(1.2) 的一个本质上尖锐的版本成立。

本文旨在将 [7] 的主要结果进一步推广到加权情形，类似于 [9] 中的做法。更具体地说，设 f, g 是定义在开集 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 上的两个正的连续函数，其中 $\int_\Omega f(x)dx < \infty$。本文关注 (1.2) 的以下加权版本：

$$\Big(\int_\Omega |u(x)-u_{\Omega,f}|^q f(x)dx\Big)^{\frac{1}{q}} \leq C\Big(\int_\Omega g_u^\tau(x)g(x)dx\Big)^{\frac{1}{p}}, \tag{1.3}$$

其中 $u_{\Omega,f}$ 是 u 在 Ω 上的 f-平均值，定义如下：

$$u_{\Omega,f} = \frac{\int_\Omega u(x)f(x)dx}{\int_\Omega f(x)dx}.$$

当 $f \equiv g \equiv 1$时，(1.3) 化为 (1.2)。

关于 (1.3) 的总体思路与 [9] 和 [7]类似。首先，将加权分数阶 Sobolev-Poincar´e 不等式 (1.3) 的成立性归结为某些加权容量估计。为表述主要结果，我们先回顾：若集合 A 是开集 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 中的可容许子集，则 A 是开集，且 $\partial A \cap \Omega$ 是光滑子流形。本文的主要结果如下。

定理 1.1. 设 f, g 是开集 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 上的两个正的连续函数，其中$\int_\Omega f(x)dx < \infty$。设 $1 \leq p \leq q < \infty$, $\delta \in (0,1)$，且 $\tau \in (0,\infty)$。假设对于 Ω 中任意一个球$B \subset\subset$，都存在常数 $C = C(\Omega\ B, f, g, p, q, \delta, \tau)$，使得

$$\Big(\int_A f(x)dx\Big)^{\frac{p}{q}} \leq C \inf_u \int_\Omega g_u^\tau(x)g(x)dx,$$

对于任意满足 $A \cap B = \emptyset$ 的可容许集合 $A \subset \Omega$，其中下确界取遍所有函数 $u \in C(\Omega)$，并满足 $u|_A \geq 1$ 和 $u|_B = 0$。那么存在常数 $\tau_0 = \tau(\Omega)$，使得对于每个 $\tau \in (0,\tau_0)$ 以及每个 $u \in C(\Omega)$，加权分数阶 Sobolev-Poincaré 不等式 (1.3) 成立。

定理 1.1 可视为 [9, 定理 1] 和 [7,定理 1.1] 的加权分数阶版本，它使我们能够通过容量估计研究不规则区域中的加权分数阶 Sobolev-Poincaré 不等式 (1.3)。在 s-John 区域中进行容量估计的技术目前已经相当成熟；例如参见 [10, 6]。

与 [9], 对于一点 $x \in \Omega$ 的情形类似，我们设 $\rho(x) = d(x, \partial\Omega)$。我们的第二个主要结果可视为 [7, 定理 1.2] 的加权版本。

定理 1.2. 设 Ω ⊂ $\mathbb{R}^n$ 是一个 s-John 域。假设 $\delta \in (0,1)$、$1 \le p \le q$、$a \ge 0$ 和 $b > p\delta - n$ 满足 $q < \frac{(n+a)s}{n+b-\delta p+p}$，$()(s-1)(p-1)$。则存在常数 $\tau_0 = \tau(\Omega)$，使得对于每个 $\tau \in (0,\tau_0)$ 及每个 $u \in C(\Omega)$，加权分数阶 Sobolev-Poincaré 不等式 (1.3) 均以 $f = \rho^a$ 和 $g = \rho^b$ 成立。

注意，定理 1.2 中 b 和 q 的取值范围本质上是尖锐的，正如[7] 的例 1.1 所示。若 $s = 1$ 或 $p = 1$，则可以达到临界情形 $q = \frac{(n+a)s}{n+b-\delta p+s-1}$，$()$ $()$ $(p-1)$，如 [7, 备注 4.2], 所述，但在技术上非常复杂，因此此处省略细节。s 和 p的其他取值范围情形仍未解决。我们想指出，分数阶 Sobolev-Poincar´e 不等式的成立确实能够控制区域 Ω 的几何性质；参见 [2]和 [7,定理 1.4]。

文献中广泛研究的另一类不规则区域（例如参见 [20, 7, 12, 15]）是所谓的 β-H¨older 区域（$0 < \beta \le 1$），即具有一个特定点 $x_0 \in \Omega$ 的区域，使得对所有 $x \in \Omega$

$$k_\Omega(x, x_0) \le \frac{1}{\beta} \log \frac{d(x_0, \partial\Omega)}{d(x, \partial\Omega)} + C,$$

其中 k_Ω 是 Ω 中的拟双曲距离（精确定义见下文第 2 节）。H¨older 域的概念由 Smith 和 Stegenga [20] 基于 Becker 和 Pommerenke 的早期工作提出。此外，众所周知，β-H¨older 域是 $\frac{1}{\beta}$-John 域。在 H¨older 域中进行容量估计的技术也已相当成熟；参见 [15, 7]。

我们的第三个主要结果可视为 [15, 定理 1.4-1.5] 和 [7,定理 1.3]的加权分数阶版本。

定理 1.3. 设 Ω 为一个 β-H ¨older 域。假设 $0 < \delta < 1$、$1 \le p \le q$、$a \ge 0$ 和$p\delta - n < b < (a+n)\beta\frac{p}{q} + p\delta - n$。那么，存在一个常数 $\tau_0 = \tau(\Omega)$，使得对每个$\tau \in (0,\tau_0)$以及每个 $u \in C(\Omega)$，加权分数阶 Sobolev-Poincar ´e 不等式 (1.3) 均成立，其中 $f = \rho^a$ 和 $g = \rho^b$。

b 和 q 的取值范围基本上是尖锐的，正如 [7] 的例 1.2 所示。

由于本文以自然的方式将 [9] 和 [7] 中的相应结果推广到了加权分数阶情形，本文所采用的许多论证与上述论文中的论证相似。为方便读者，我们尽可能纳入了详细的推导。本文的结构如下：第 2 节介绍一些基本引理和知识。在第 3 节中，我们证明连接加权容量型不等式与加权分数阶 Sobolev-Poincaré 不等式的定理。随后，在第 4 节中证明 α-John 域所满足的所需容量型不等式。此外，在第 5 节中，我们推导出类似的、针对 β-Holder 域的容量型不等式。

2. 初步知识

首先，我们固定一些记号。在全文中，$C(\cdot)$表示一个常数，其中“·”包含该常数所依赖的所有参数。若存在一个常数 $C \ge 1$使得 $A/C \le B \le CA$，则记作 $A \asymp B$。

我们始终假设维数为 $n \ge 2$。两点 x、$y \in \mathbb{R}^n$ 之间的欧几里得距离记为 $|x-y|$，而 $d(A,B)$ 表示集合 A、$B \subset \mathbb{R}^n$ 之间的欧几里得距离。我们也将点 $x \in \mathbb{R}^n$ 的欧几里得距离记为 $d(x,A)$。

以及集合 $A \subset \mathbb{R}^n$。记号 $B \subset\subset \Omega$ 仅表示 B 是 Ω 的一个子集，且 $d(B,\partial\Omega) > 0$。集合 $E \subset \mathbb{R}^n$ 的欧几里得直径记为 $d(E)$。对于可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$， $|E|$ 表示 E的 n 维勒贝格测度。

在 $\mathbb{R}^n$ 中，以 x 为球心、 r 为半径的球记作 $B(x,r)$，而 $\mathbb{R}^n$ 中的立方体 Q 记作

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i < x_i < a_i + a, 1 \le i \le n, a > 0\}.$$

立方体 Q 的边长记作 $\ell(Q)$，即上述定义中的 $\ell(Q) = a$。若 $\mathbb{R}^n$ 中的 $x(r,B = B)$ 是一个球，且 $t > 0$ 是正常数，则 tB 表示球 $B(x,tr)$。对于立方体 $Q \in \mathbb{R}^n$， tQ 表示与其中心相同的立方体，使得 $\ell(tQ) = t\ell(Q)$。

以下 在 $\mathbb{R}^n$ 中关于球或立方体的分数阶 Sobolev-Poincar´e 不等式是众所周知的。

引理 2.1（[11]）。设 Ω 是半径为 r 的球，或边长为 r 、位于 $\mathbb{R}^n$ 中的立方体。假设 $1 \le p \le q < \infty$、 $\delta \in (0,1)$、 $\tau \in (0,\infty)$。那么，对于所有 $u \in C(\Omega)$，

$$\int_\Omega |u(x) - u_\Omega|^q dx \le C(n) r^{n+\frac{q}{p}(p\delta - n)} \Big(\int_\Omega \int_{\Omega \cap B(x,\tau d(x,\partial\Omega))} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+p\delta}} dy dx \Big)^{\frac{q}{p}}. \tag{2.1}$$

下面的链引理源自 [9, 定理 9]的证明。

引理 2.2. 假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个 s-John 域，且 $M > 1$ 是一个固定常数。令$B_0 = (x_0, \frac{\rho(x_0)}{4M})$，其中~~$x_0$~~ 是 Ω 中的一个点。则存在一个常数 $C > 0$，仅依赖于 Ω、 M和 n，使得对于任意 $x \in \Omega$，都存在有限个球 $B_i = B(x_i, r_i)(i = 1, 2, ..., k)$，满足以下性质：

(1) $|B_i \cap B_{i-1}| \ge 1/C|B_i \cup B_{i-1}|$ 对于任意 $1 \le i \le k$。(2) $d(x, B_i) \le C r_i^{\frac{1}{s}}$对于任意 $0 \le i \le k$。(3) $d(B_i, \partial\Omega) \ge M r_i$对于任意 $0 \le i \le k$。(4) $\sum_{i=0}^k \chi_{B_i} \le C\chi_\Omega$。(5) $|x - x_i| \le C r_i^{\frac{1}{s}}$对于任意 $0 \le i \le k-1$ 和 $B_k = B(x, \frac{\rho(x)}{4M})$。(6) 对于任意 $r > 0$，半径为 $r_i > r$ 的球的数量 B_i 在$s > 1$ 时小于 $Cr^{\frac{1-s}{s}}$ ，在 $s = 1$时小于 $\log_2(Cr^{-1})$。(7) 对于每个 $y \in B_i$， $r_i \asymp \rho(y)$ 对任意 $0 \le i \le k$成立，其中这些常数仅依赖于 Ω、 M 和 n。

为方便读者，我们回顾两个将在后续证明中用到的覆盖引理。第一个是 Vitali 覆盖引理。

引理 2.3. 设 E 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界集。设 $E \subset \cup_{j\in J} B_j$，其中 $\{B_j\}_{j\in J}$ 是一族球。则存在一个可数的两两互不相交的球子族（可能是有限的）B_1,B_2,...，使得 $E \subset \cup_{i=1}^\infty 5B_i$。

第二个称为 Besicovitch 覆盖引理。

引理 2.4. 假设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 是一个有界集。设对于 $x \in E$， $B_x = B(x, r_x)$。那么我们可以找到一个点列（可能是有限的） $x_i \in E(i = 1, 2, ...)$，使得 $E \subset \bigcup_{i=1}^\infty B_{x_i}$，并且满足： $\mathbb{R}^n$ 中没有任何一点属于多于 $C(n)$ 个这样的球，其中 $C(n)$ 是一个仅依赖于维数 n 的常数。

接下来，我们引入拟双曲距离。设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个真域，其中真域是指满足条件 $\Omega \subsetneq \mathbb{R}^n$ 的域。两点之间的拟双曲距离

$x, y \in \Omega$ 定义为

$$k_\Omega(x,y) = \inf_\gamma \int_\gamma \frac{ds}{\rho(x)},$$

其中下确界取遍 Ω 内连接 x 和 y 的所有曲线 γ。

回顾一下，区域 Ω 的 Whitney 分解 $\mathcal{W}(\Omega)$ 是由 Ω 内的一族立方体构成的，这些立方体两两不相交，且满足这些立方体闭包的并集为整个 Ω，并且满足以下条件：

$$d(Q) \le d(Q, \partial\Omega) \le 4d(Q),$$

对所有 $Q \in \mathcal{W}(\Omega)$。

在本文中，我们需要如下给出的真域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 的 Whitney 型分解。

引理 2.5 ([21])。设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 的真子域。假设 $k \ge 2$ 是一个整数。因此，我们有 Ω 的一个 Whitney 型分解 $\mathcal{V}_k(\Omega) = \{Q_i : i \ge 1\}$ 由若干立方体组成，并满足以下三个性质：

(1) $\bigcup_i \overline{Q_i} = \Omega$；(2) 对任意 $i \ne j$，
$Q_i \cap Q_j = \emptyset$；(3) 对所有 $i \ge 1$， $kd(Q_i) \le d$
$(Q_i, \partial\Omega) \le 5kd(Q_i)$。

我们固定 Ω 的一个 Whitney 型分解，并取该分解中的一个立方体 Q_0 ，将 Q_0 的中心记为 x_0。对于每个 Whitney 型立方体 Q，我们选取一条拟双曲测地线，将 x_0 与该立方体 Q 的中心连接起来；与这条测地线有非空交集的 Whitney 型立方体集合记为 $P(Q)$。于是，Whitney 型立方体 Q 的影定义为

$$S(Q) = \bigcup_{\{Q_1 \in \mathcal{W}(\Omega): Q \in P(Q_1)\}} Q_1.$$

随后， [15]证明了一个引理，该引理控制了 $P(Q)$相对于 β-Holder 域（$0 < \beta \le 1$）的大小。

引理 2.6（[15]）。对于一个 β-H ¨older 域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(0 < \beta \le 1, n \ge 2)$以及一个常数 $\varepsilon > 0$，存在一个常数 $C = C(\varepsilon, d(\Omega) \ n, k)$，使得

$$\sum_{Q \in P(Q_1)} |Q|^\varepsilon \le C,$$

对于任意 $Q_1 \in \mathcal{V}_k(\Omega)$。

3. 证明

本节将证明定理 1.1。我们首先证明（1.3）的一个较弱版本，这里的证明与 [7, 定理 1.1]的证明类似。

定理 3.1. 设 f、g 是开集 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 上的正的连续函数，其中$\int_\Omega f(x)dx < \infty$。设 $1 \le p \le q < \infty$、$\delta \in (0, 1)$ 且 $\tau \in (0, \infty)$。假设对任意球$B \subset\subset \Omega$，都存在常数 $C = C(\Omega\ B, f, g, p, q, \delta, \tau)$，使得

$$\Big(\int_A f(x)dx\Big)^{\frac{p}{q}} \le C \inf_u \int_\Omega g_u^\tau(x) g(x) dx,$$

对任意满足 $A\cap B=\emptyset$ 的可容许集合 $A\subset\Omega$，其中下确界是对所有满足 $u|_A\geq 1$ 和 $u|_B=0$ 的函数 $u\in C(\Omega)$ 取的。那么，对任意球 $B\subset\subset\Omega$，都存在常数 C，使得对任意满足 $u|_B=0$ 的 $u\in C(\Omega)$,

$$\Big(\int_\Omega |u(x)|^q f(x)dx\Big)^{\frac{1}{q}}\leq C\Big(\int_\Omega g_u^\tau(x)g(x)dx\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

证明。固定任意一个球 $B_0\subset\subset\Omega$。假设 $u\geq 0$ 是一个连续函数，且满足$u|_{B_0}=0$。对于任意 $j\in\mathbb{Z}$，定义

$$u_j(x)=\min\{2^j,\max\{0,u(x)-2^j\}\}.$$

显然， $2^{-j}u_j|_{B_0}=0$和 $2^{-j}u_j|_{F_j}\geq 1$，其中 $F_j=\{x\in\Omega:\ u(x)\geq 2^{j+1}\}$.此外，对于 u_j，我们可以利用该假设得到:

$$\Big(\int_{F_j} f(x)dx\Big)^{\frac{p}{q}}\leq C\int_\Omega g_{2^{-j}u_j}gdx,$$

为简便起见，我们省略了 g_u^τ中的上标 τ。对于 $k\in\mathbb{Z}$，定义 $A_k:=F_{k-1}\backslash F_k$。对于 $y\in\Omega$，令 $B_y=B(y,\tau\rho(y))$。

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u(x)|^q f(x)dx&\leq\sum_{k=-\infty}^{+\infty}2^{(k+1)q}\int_{A_k}f(x)dx\\&\leq C\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\Big(\int_\Omega g_{u_k}gdx\Big)^{\frac{q}{p}}\\&\leq C\Big(\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_\Omega g_{u_k}gdx\Big)^{\frac{q}{p}},\\&\leq C\Big(\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(I_1^k+I_2^k)\Big)^{\frac{q}{p}}\end{aligned}\tag{3.1}$$

其中

$$I_1^k=\sum_{i\leq k}\sum_{j\geq k}\int_{A_i}\int_{A_j\cap B_y}\frac{|u_k(y)-u_k(z)|^p g(y)}{|y-z|^{n+p\delta}}dzdy,$$

and

$$I_2^k=\sum_{i\geq k}\sum_{j\leq k}\int_{A_i}\int_{A_j\cap B_y}\frac{|u_k(y)-u_k(z)|^p g(y)}{|y-z|^{n+p\delta}}dzdy.$$

对于任意满足 $j-1>i$的 $y\in A_i$ 和 $z\in A_j$,

$$|u(y)-u(z)|\geq|u(y)|-|u(z)|\geq 2^j-2^{i+1}\geq 2^{j-1}.$$

此外，对于这样的 y,z,

$$|u_k(y)-u_k(z)|\leq 2^{k+1}\leq 4\,2^{k-j}|u(y)-u(z)|.\tag{3.2}$$

由于对每个 $k\in\mathbb{Z}$,

$$|u_k(z)-u_k(y)|\leq|u(y)-u(z)|,$$

因此，对任意 $i \le k \le j$、 $y \in A_i$ 和 $z \in A_j$，(3.2) 均成立。于是，

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} I_1^k \le 4^p \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{i\le k} \sum_{j\ge k} 2^{p(k-j)} \int_{A_i} \int_{A_j\cap B_y} \frac{g(y)|u(y)-u(z)|^p}{|y-z|^{n+p\delta}} dzdy.$$

由于 $\sum_{k=i}^{j} 2^{p(k-j)} \le (1-2^{-p})^{-1}$，通过改变求和顺序，我们得到

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} I_1^k \le \frac{4^p}{1-2^{-p}} \int_\Omega g_u(y)g(y)dy.$$

出于类似的原因，我们得到

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} I_2^k \le C \int_\Omega g_u(y)g(y)dy.$$

因此，由 (3.1) 和上述两个等式，我们得出

$$\int_\Omega |u(x)|^q f(x)dx \le C\Big(\int_\Omega g_u(y)g(y)dy\Big)^{\frac{q}{p}}.$$

由上述结论，容易证明，对于任意球 $B \subset\subset \Omega$，都存在一个常数C，使得对于每个满足 $u|_B = 0$ 的 $u \in C(\Omega)$,

$$\Big(\int_\Omega |u|^q f dx\Big)^{\frac{1}{q}} \le C\Big(\int_\Omega g_u g dx\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

□

接下来我们证明，定理 3.1 的结论蕴含加权分数阶 Sobolev-Poincar´e 不等式 (1.3)。

定理 3.2. 设 f、g 是开集 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 中满足$\int_\Omega f(x)dx < \infty$的两个正的连续函数。设 $1 \le p \le q < \infty$、 $\delta \in (0,1)$。那么存在常数 $\tau_0 = \tau(\Omega)$，使得若对任意球 $B \subset\subset \Omega$，均存在常数 C，使得对任意满足 $u|_B = 0$的 $u \in C(\Omega)$，都有

$$\Big(\int_\Omega |u(x)|^q f(x)dx\Big)^{\frac{1}{q}} \le C\Big(\int_\Omega g_u^\tau(x)g(x)dx\Big)^{\frac{1}{p}},$$

那么存在常数 C，使得对每个 $\tau \in (0,\tau_0)$ 以及每个 $u \in C(\Omega)$,

$$\Big(\int_\Omega |u(x)-u_{\Omega,f}|^q f(x)dx\Big)^{\frac{1}{q}} \le C\Big(\int_\Omega g_u^\tau(x)g(x)dx\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

证明。由于 Ω 有界，存在常数 $k = k(\Omega)$ 和球 $B_0 = B(x_0,r_0)$，使得 $3B_0 \subset\subset \Omega \subset kB_0$. 。设 $\tau_0 = \tau_0(\Omega) = \frac{1}{k-3}$，并假设 $\tau < \tau_0$。

取一个光滑函数 ϕ，使得 $0 \le \phi \le 1$ 在 Ω 上成立， $\phi|_{B_0} = 1$，且 ϕ 的支集包含于 $2B_0$中。对于任意 $v \in C(\Omega)$，我们可以将 $v - v_{3B_0}$ 分解为

$$v - v_{3B_0} = \phi(v - v_{3B_0}) + (1-\phi)(v - v_{3B_0}) =: v_1 + v_2.$$

显然， $v_2|_{B_0} = 0$ 和 $v_2|_{\Omega\setminus 2B_0} = v - v_{3B_0}$. 因此，

$$\int_\Omega |v - v_{3B_0}|^q f \le C\int_{3B_0} |v_1|^q f + C\int_\Omega |v_2|^q f = I_1 + I_2.$$

根据球上的分数阶 Sobolev-Poincar´e 不等式（见引理 2.1），我们有

$$I_1 \le C\int_{3B_0}|v-v_{3B_0}|^q f \le C\int_{3B_0}|v-v_{3B_0}|^q \le C\Big(\int_{3B_0} g_v\Big)^{\frac{q}{p}} \le C\Big(\int_{3B_0} g_v g\Big)^{\frac{q}{p}}.$$

此外，由于 $v_2|_{B_0}=0$，根据定理的假设，

$$\begin{aligned} I_2^{\frac{p}{q}} &\le C\int_\Omega g_{v_2} g = C\int_{\Omega\setminus 3B_0} g_{v_2} g + C\int_{3B_0} g_{v_2} g \\ &= C\int_{\Omega\setminus 3B_0} g_v g + C\int_{3B_0} g_{v_2} g, \end{aligned}$$

在上述不等式的最后一行，我们用到了以下事实： $g_{v_2}=g_v$ 在 $\Omega\setminus 3B_0$。这由以下事实可得： $v=v_2$ 在 $\Omega\setminus 2B_0$，并且如果 $x\in\Omega\setminus 3B_0$ 且 $y\in B(x,\tau\rho(x))$，那么 $y\notin 2B_0$，否则我们就会得到

$$|x-y|<\tau\rho(x)\le\tau(k-3)r_0\le|x-y|,$$

这显然是矛盾的。

接下来我们估计项 $\int_{3B_0} g_{v_2} g.$。注意，

$$\begin{aligned} |v_2(x)-v_2(y)| \le{}& |(1-\phi(x))(v(x)-v_{3B_0})-(1-\phi(y))(v(x)-v_{3B_0})| \\ &+|(1-\phi(y))(v(x)-v_{3B_0})-(1-\phi(y))(v(y)-v_{3B_0})|. \end{aligned}$$

经过简单计算可得

$$g_{v_2}(x)=\int_{\Omega\cap B(x,\tau\rho(x))}\frac{|v_2(x)-v_2(y)|^p}{|x-y|^{n+\delta p}}dy \le C|v(x)-v_{3B_0}|^p + Cg_v(x),$$

其中 C 仅依赖于 ϕ 的数据。因此，再次对球应用分数阶 Sobolev-Poincar´e 不等式，我们推得

$$\int_{3B_0} g_{v_2} g \le C\int_{3B_0} g_v g + C\int_{3B_0}|v-v_{3B_0}|^p g \le C\int_{3B_0} g_v g.$$

注意到以下初等不等式，结合前面的估计即可得出结论

$$\int_\Omega |v-v_{\Omega,f}|^q f dx \le C(q)\int_\Omega |v-v_{3B_0}|^q f dx.$$

□

定理 1.1 的证明。由定理 3.1 和 3.2 可立即得出。 □

4. Weighted fractional Sobolev-Poincaré inequality in s-John domains

我们先证明 s-John 域的加权容量估计。

定理 4.1. 假设 Ω 是一个 s-John 域。令 $0<\delta<1, \tau>0, 1\le p\le q, a\ge 0, b>p\delta-n$ 为常数，满足 $q<\frac{(n+a)s}{p}$ $n+b-\delta p+$ $()(s-1)(p-1)$。那么对~~于每个球 $B\subset\subset\Omega$,~~ 都存在一个常数 $C=C(\Omega, p, q, a, b, \delta, \tau, B)$，使得

$$\Big(\int_A \rho(x)^a dx\Big)^{\frac{p}{q}} \le C\ \inf\int_\Omega g_u^\tau(x)\rho(x)^b dx, \tag{4.1}$$

对于每个满足 $A\cap B=\emptyset$ 的可容许子集 $A\subset\Omega$。这里，下确界取遍所有满足 $u|_A\geq 1$ 和 $u|_B=0$ 的函数 $u\in C(\Omega)$。

证明。这里的证明与 [7, 定理 1.2]的证明类似。由于

$$\frac{n+a}{s(n+b-\delta p)+(s-1)(p-1)}>\frac{q}{p}\geq 1,$$

我们可以选择 $\Delta>0$ 使得

$$\frac{n+a}{s(n+b-\delta p)+(s-1)(p-1)+2\Delta}=\frac{q}{p}.$$

处理 $B_0\subset\subset\Omega$时，不失一般性，我们可以假设 $B_0=B(x_0,\rho_{(x_0)}\,_{4M})$，其中 $M>1$ 且 $M>\frac{2}{\tau}$。为了证明该定理，只需验证存在一个常数 C，使得对于 Ω 中任意满足 $A\cap B_0=\emptyset$ 的可容许子集 A，都有

$$\Big(\int_A\rho(x)^a dx\Big)^{\frac{p}{q}}\leq C\int_\Omega g_u(x)\rho(x)^b dx,$$

其中 $u\in C(\Omega)$，$u|_A\geq 1$ 且 $u|_{B_0}=0$。经过 $\mathbb{R}^n$的相似变换，不妨假设$d(\Omega)=1$。对于任意 $x\in A$，存在一列有限个球 B_0,B_1,...,B_k，满足引理 2.2 的条件。特别地，对于任意 $y\in B_i$,

$$B_i\subset B(y,\tau\rho(y)).$$

为此，固定点 y 并任取一点 $z\in B_i$。于是，由引理 2.2,

$$|y-z|\leq|y-x_i|+|x_i-z|\leq 2r_i\leq\frac{2}{M}d(B_i,\partial\Omega)\leq\frac{2}{M}\rho(y)<\tau\rho(y).$$

对于 $x\in\Omega$，记球 $B_x\,(x,\frac{\rho(x)}{4M})$ 为 B，并令

$$\mathscr{C}=\{x\in A:u_{B_x}\geq\frac{1}{2}\},\ \mathscr{D}=\{x\in A:u_{B_x}<\frac{1}{2}\}.$$

于是，我们有

$$\int_A\rho(x)^a dx=\int_{\mathscr{C}}\rho(x)^a+\int_{\mathscr{D}}\rho(x)^a dx. \tag{4.2}$$

对于一个 y $x\in\mathscr{C}$，我们取了一串球 B_0,B_1,...,B_k。根据引理 2.2 ，

$$\frac{1}{2}\leq|u_{B_k}-u_{B_0}|\leq\sum_{i=0}^{k-1}(|u_{B_i}-u_{B_i\cap B_{i+1}}|+|u_{B_{i+1}}-u_{B_i\cap B_{i+1}}|)\leq C\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{|B_i|}\int_{B_i}|u-u_{B_i}|dy. \tag{4.3}$$

于是，固定一个球 B_i 并应用 H¨older 不等式,

$$\frac{1}{|B_i|}\int_{B_i}|u(y)-u_{B_i}|dy\leq\frac{1}{|B_i|}\int_{B_i}\Big(\frac{1}{|B_i|}\int_{B_i}|u(y)-u(z)|^p dz\Big)^{\frac{1}{p}}dy.$$

由于 $|B_i|\geq C|y-z|^n$ 对所有 $y,z\in B_i$,

$$\frac{1}{|B_i|}\int_{B_i}|u(y)-u_{B_i}|dy\leq C|B_i|^{\frac{\delta}{n}-1}\int_{B_i}\Big(\int_{B_i}\frac{|u(y)-u(z)|^p}{|y-z|^{n+p\delta}}dz\Big)^{\frac{1}{p}}dy.$$

将上述方程相加可得

$$\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{|B_i|}\int_{B_i}|u-u_{B_i}|dy\leq C\sum_{i=0}^{k}|B_i|^{\frac{\delta}{n}-1}\int_{B_i}\Big(\int_{B_i}\frac{|u(y)-u(z)|^p}{|y-z|^{n+p\delta}}dz\Big)^{\frac{1}{p}}dy.$$

由于 $B_i \subset B(y,\tau\rho(y)) \cap \Omega$,

$$\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{|B_i|}\int_{B_i}|u-u_{B_i}|dy \le C\sum_{i=0}^{k}|B_i|^{\frac{\delta}{n}-1}\int_{B_i}\Big(\int_{B(y,\tau\rho(y))\cap\Omega}\frac{|u(y)-u(z)|^p}{|y-z|^{n+p\delta}}dz\Big)^{\frac{1}{p}}dy$$
$$\le C\sum_{i=0}^{k} r_i^{\delta-\frac{n}{p}}\Big(\int_{B_i} g_u(y)dy\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

将此结果与 (4.3) 结合，我们得到

$$C \le \sum_{i=0}^{k} r_i^{\delta-\frac{n}{p}}\Big(\int_{B_i} g_u(y)dy\Big)^{\frac{1}{p}}. \tag{4.4}$$

记作 $\kappa = \frac{(s-1)(p-1+\Delta)}{sp}$。应用霍尔德不等式，可得

$$C \le \Big(\sum_{i=0}^{k} r_i^{\frac{\kappa p}{p-1}}\Big)^{\frac{p-1}{p}}\Big(\sum_{i=0}^{k} r_i^{p(-\kappa+\delta-\frac{n}{p})}\int_{B_i} g_u(y)dy\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

由引理 2.2 可知，当 $s>1$

$$\sum_{i=0}^{k} r_i^{\frac{\kappa p}{p-1}} \le \sum_{i=0}^{\infty}(2^{-i})^{\frac{\kappa p}{p-1}}2^{\frac{i(s-1)}{s}} < C,$$

对于较简单的情形 $s=1$，我们也可以得到相同的结论。结合上述两个不等式，可推出

$$\sum_{i=0}^{k} r_i^{p(-\kappa+\delta-\frac{n}{p})}\int_{B_i} g_u(y)dy \ge C. \tag{4.5}$$

由引理 2.2，对于任意 $0\le i\le k-1$ 和 $y\in B_i$，$Cr_i \ge |x-y|^s$。注意到 $-\kappa p+\delta p-n-b<0$。这意味着对于任意 $y\in B_i$,

$$r_i{}^{-\kappa p+\delta p-n-b} \le C|x-y|^{s(-\kappa p+\delta p-n-b)}.$$

应用引理 2.2,

$$r_i{}^{-\kappa p+\delta p-n} \le C\rho(y)^b|x-y|^{s(-\kappa p+\delta p-n-b)}.$$

对于 $y\in B_i\cap(2^{j+1}B_k\backslash 2^jB_k)$,

$$|x-y| \asymp 2^j r_k,$$

其中 $0\le j\le \lfloor\log_2 r_k\rfloor$。由于 $d(\Omega)=1$，我们只需考虑这样的 j。对于这样的 y,

$$r_i{}^{-\kappa p+\delta p-n} \le C\rho(y)^b(2^j r_k)^{s(-\kappa p+\delta p-n-b)}.$$

Since $d(\Omega)=1$, $r_k{}^{-\kappa p+\delta p-n-b}\ge 1$。此外，正如引理 2.2 所示，对于 $y\in B_k$,

$$r_k{}^{-\kappa p+\delta p-n} \asymp r_k{}^{-\kappa p+\delta p-n-b}\rho(y)^b \le r_k{}^{s(-\kappa p+\delta p-n-b)}\rho(y)^b.$$

因此，th 上述两个方程、引理 2.2 中的条件以及 (4.5) 表明

$$
\begin{aligned}
C &\le \sum_{i=0}^{k} r_i^{p(-\kappa+\delta-\frac{n}{p})} \int_{B_i} g_u(y)dy \\
&\le C{r_k}^{s(-\kappa p+\delta p-n-b)} \int_{B_k} g_u(y)\rho(y)^b dy + C \sum_{j=0}^{|\log_2 r_k|} (2^j r_k)^{s(-\kappa p+\delta p-n-b)} \int_{\Omega\cap(2^{j+1}B_k\setminus 2^j B_k)} g_u(y)\rho(y)^b dy \\
&\le C \sum_{l=0}^{|\log_2 r_k|+1} (2^l r_k)^{s(-\kappa p+\delta p-n-b)} \int_{2^l B_k\cap\Omega} g_u(y)\rho(y)^b dy.
\end{aligned}
$$

由于 $\Delta > 0$，我们有

$$
\sum_{l=0}^{|\log_2 r_k|+1} (2^l r_k)^{\Delta} \le {r_k}^{\Delta} \sum_{l=-\infty}^{|\log_2 r_k|+1} 2^{l\Delta} \le {r_k}^{\Delta} 2^{(|\log_2 r_k|+1)\Delta} < C.
$$

Co比较上述两个不等式，存在一个 $l \in [0, |\log_2 r_k| + 1]$，使得 t

$$
(2^l r_k)^{\Delta} < C(2^l r_k)^{s(-\kappa p+\delta p-n-b)} \int_{2^l B_k\cap\Omega} g_u(y)\rho(y)^b dy. \tag{4.6}
$$

换言之，存在一个 $R_x \ge r_k \ge C\rho(x)$，满足

$$
C{R_x}^{s(\kappa p-\delta p+n+b)+\Delta} \le \int_{B(x,R_x)\cap\Omega} g_u(y)\rho(y)^b dy.
$$

对覆盖 $\mathscr{C}$ 的族 $\{B(x,R_x)\}_{x\in\mathscr{C}}$ 应用引理 2.3，我们得到一列互不相交的球 $B_{(1)}$, $B_{(2)}$,$B_{(3)}$,...，使得 $\mathscr{C} \subset \cup_{i=1}^{\infty} 5B_{(i)}$。记 $B_{(i)}$ 的半径为 $r_{(i)}$。对于 $y \in B(x,R_x)\cap\Omega$，容易观察到 $\rho(y) \le CR_x$，由此可得 $\rho(y)^a \le C{R_x}^a$，其中我们用到了条件 $a \ge 0$。因此，我们可以作如下估计：

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathscr{C}} \rho(x)^a dx &\le \sum_{i=1}^{\infty} \int_{5B_{(i)}\cap\Omega} \rho(x)^a dx \\
&\le C \sum_{i=1}^{\infty} r_{(i)}^{n+a} \\
&\le C \sum_{i=1}^{\infty} \Big(\int_{B_{(i)}\cap\Omega} g_u(y)\rho(y)^b dy \Big)^{\frac{n+a}{s(n+b+\kappa p-\delta p)+\Delta}} \\
&\le C \Big(\sum_{i=1}^{\infty} \int_{B_{(i)}\cap\Omega} g_u(y)\rho(y)^b dy \Big)^{\frac{n+a}{s(n+b+\kappa p-\delta p)+\Delta}}.
\end{aligned} \tag{4.7}
$$

在最后一个不等式中，我们应用了如下事实：

$$
\frac{n+a}{s(n+b+\kappa p-\delta p)+\Delta} = \frac{n+a}{s(n+b-\delta p)+(s-1)(p-1)+2\Delta} \ge 1.
$$

因此，我们得到了 (4.2) 中第一项所需的估计，即

$$
\int_{\mathscr{C}} \rho(x)^a dx \le C\Big(\int_{\Omega} g_u(y)\rho(y)^b dy \Big)^{\frac{q}{p}}, \tag{4.8}
$$

这由 (4.7) 和上面的方程得出。

接下来，我们将估计 (4.2) 的第二部分。请记住，对于 $x \in \Omega$,$B_x = B(x, {}^{\rho(x)}\overline{{}_{4M}})$。那么 $\mathscr{D} \subset \cup_{x\in\mathscr{D}} B_x$. 此外，根据引理 2.4，存在一个球列 B_{x_1},B_{x_2},B_{x_3},...，使得 $\mathscr{D} \subset \cup_{i=1}^{\infty} B_{x_i}$。由于 $u_{B_{x_i}} \leq \frac{1}{2}$ 且 $u|_A \geq 1$，对于 $y \in B_{x_i} \cap A$,

$$|u(y) - u_{B_{x_i}}|^q \geq \frac{1}{2^q},$$

对于所有 $i \geq 1$，根据引理 2.1 及上述关系，我们可以得到

$$|A \cap B_{x_i}| \leq C \int_{A\cap B_{x_i}} |u - u_{B_{x_i}}|^q \leq C r_{x_i}^{n+\frac{q}{p}(p\delta-n)} \Big(\int_{B_{x_i}} g_u(y)dy \Big)^{\frac{q}{p}}.$$

因此，我们有

$$\begin{aligned} \int_{\mathscr{D}} \rho(y)^a dy &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \int_{B_{x_i}\cap A} \rho(y)^a dy \\ &\leq C \sum_{i=1}^{\infty} r_{x_i}^a |A \cap B_{x_i}| \\ &\leq C \sum_{i=1}^{\infty} r_{x_i}^{a+n+\frac{q}{p}(p\delta-n)} \Big(\int_{B_{x_i}} g_u(y)dy \Big)^{\frac{q}{p}} \\ &\leq C \Big(\int_{\Omega} \rho(y)^{[a+n+\frac{q}{p}(p\delta-n)]\frac{p}{q}} g_u(y)dy \Big)^{\frac{q}{p}}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

然后，根据主定理的条件，很容易得出:

$$n + a \geq \frac{q}{p}(b + n - p\delta),$$

由此我们得到,

$$[a + n + \frac{q}{p}(p\delta - n)]\frac{p}{q} \geq b.$$

由于 $d(\Omega) = 1$，由 (4.9) 可得

$$\int_{\mathscr{D}} \rho(y)^a dy \leq C \Big(\int_{\Omega} \rho(y)^b g_u(y)dy \Big)^{\frac{q}{p}}.$$

将上述方程与 (4.8) 结合，我们便完成了整个证明。 □

定理 4.1 的一个直接推论是，在 s-John 域中成立以下加权分数阶 Sobolev-Poincar´e 不等式。

定理 4.2. 设 Ω 是一个 s-John 域。假设 $0 < \delta < 1, \tau > 0, 1 \leq p \leq q, a \geq 0$ 和 $b > p\delta - n$ 满足 $q < {}_{p}{}^{(n+a)s\ n+b-\delta p\ +}{}_{()(s-1)(p-1)}$。那么，~~对任意球 $B \subset\subset \Omega$~~，存在一个常数 C，使得对任意满足 $u|_B = 0$ 的 $u \in C(\Omega)$,

$$\Big(\int_{\Omega} |u(x)|^q \rho(x)^a dx \Big)^{\frac{1}{q}} \leq C \Big(\int_{\Omega} g_u^{\tau}(x) \rho(x)^b dx \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

定理 4.2 的证明。由定理 4.1 和定理 3.1 可立即得出。 □

证明 定理 1.2 的。这是定理 4.1 和定理 1.1 的直接推论 . □

5. Weighted fractional Sobolev-Poincaré inequality in β-Hölder domains

与 pre上一节一样，我们首先在 β-H¨older 区域中证明一个加权容量估计。

定理 5.1. 设 Ω 是一个 β-H¨older 区域（$0 < \beta \leq 1$）。假设 $\tau > 0$, $0 < \delta < 1$,$1 \leq p \leq q$, $a \geq 0$ 以及 $p\delta - n < b < (a+n)\,\beta\frac{p}{q} + p\delta - n$. 那么对于 Ω 中的任意球 $B \subset\subset$，存在一个常数 $C(\Omega\ a, b, p, q, \delta, \tau, B)$，使得

$$\Big(\int_A \rho(x)^a dx\Big)^{\frac{p}{q}} \leq C \inf \int_\Omega g_u^\tau(x)\rho(x)^b dx,$$

对于任意满足 $A \cap B = \emptyset$ 的可容许子集 $A \subset \Omega$，其中下确界取遍所有满足 $u|_A \geq 1$ 和 $u|_B = 0$ 的函数 $u \in C(\Omega)$。

定理 5.1 的证明。我们的假设意味着存在一个常数 $\varepsilon > 0$，使得

$$(a+n)\frac{p}{q}\beta > b - \delta p + n + \varepsilon(p-1) > 0.$$

此外，存在一个 $t > 0$，使得

$$\frac{a+n}{t + \frac{b-p\delta+n+\varepsilon(p-1)}{\beta}} = \frac{q}{p}.$$

固定任意一个球 $B \subset\subset \Omega$。对于任意正整数 m，对 Ω 应用引理 2.5，可得 Ω 的一个 Whitney 型分解 $\mathcal{V}_m(\Omega)$。取 m 足够大，我们可以假设存在 Whitney 型分解 $\mathcal{V}_m(\Omega)$ 中的一个立方体 Q_0，使得$Q_0 \subset B$。将 m 取得更大一些，我们设 $m > \frac{6}{5\tau} + \frac{1}{10}$。此外，设 Q_0 的中心为 x_0，且不失一般性， $d(\Omega) = 1$。只需证明存在一个常数 C，使得对于任意满足 $A \cap Q_0 = \emptyset$ 的可容许集合 $A \subset \Omega$，都有

$$\Big(\int_A \rho(x)^a dx\Big)^{\frac{p}{q}} \leq C \inf \int_\Omega g_u^\tau(x)\rho(x)^b dx,$$

其中，下确界是对所有满足 $u|_A \geq 1$ 和 $u|_{Q_0} = 0$ 的函数 $u \in C(\Omega)$ 取的。对于 $x \in \Omega\backslash(\cup_{Q\in\mathcal{V}_k}\partial Q)$, 定义 $Q(x)$ 为满足 $x \in Q(x)$ 的唯一 Whitney 立方体。由于$|\cup_{Q\in\mathcal{V}_k(\Omega)}\ \partial Q| = 0$，下文中我们始终忽略此集合。令

$$\mathcal{C} = \{x \in A : u_{Q(x)} \geq \frac{1}{2}\},$$

$$\mathcal{D} = \{x \in A : u_{Q(x)} > \frac{1}{2}\}.$$

对于任意 $x \in \mathcal{C}$，选取一条拟双曲测地线 γ，连接 x_0 和 x。将与 γ 相交的 Whitney 型立方体记为 Q_0、Q_1、.....、Q_k，其中心分别为 x_0、x_1、.....、x_k，使得 $x \in Q_k$ 且

$$\overline{Q_i} \cap \overline{Q_{i+1}} \neq \emptyset,$$

对于 $0 \leq i \leq k-1$，定义 $\frac{6}{5}Q_1$、$\frac{6}{5}Q_2$、.....、$\frac{6}{5}Q_{k-1}$ 为 Q_1'、Q_2'、.....、Q_{k-1}'，其中 $Q_0' = Q_0$ 且 $Q_k' = Q_k$。因此，对于任意整数 $0 \leq i \leq k$、 $y \in Q_i'$ 和 $z \in Q_i'$，有

$$|y - z| \leq |y - x_i| + |z - x_i| \leq d(Q_i') \leq \frac{6}{5}d(Q_i),$$

并且那

$$\rho(y) \geq d(Q_i', \partial\Omega) \geq d(Q_i, \partial\Omega) - \frac{1}{10}d(Q_i) \geq (m - \frac{1}{10})d(Q_i).$$

因此,

$$|y-z| \le \frac{\frac{6}{5}}{m-\frac{1}{10}}\rho(y) < \tau\rho(y).$$

换言之,

$$Q_i' \subset B(y, \tau\rho(y)),$$

对于任意 $y \in Q_i'$. 此外，容易证明，若 Q_1 和 Q_2 是两个 Whitney 型立方体，且 $\overline{Q_1}$ 与 $\overline{Q_2}$ 的交集非空，则它们的欧几里得直径相当。因此，存在一个常数 C，使得

$$|Q_i' \cap Q_{i-1}'| \ge \frac{1}{C}|Q_i' \cup Q_{i-1}'|$$

对于任意一个 1 $\le i \le k$. 因此，采用与式 (4.4) 类似的方法，我们得到以下等式。 :

$$C \le \sum_{i=0}^{k} r_i^{\delta-\frac{n}{p}} \Big(\int_{Q_i'} g_u(y)dy \Big)^{\frac{1}{p}},$$

其中， r_i 表示立方体 Q_i' 相对于任意 $0 \le i \le k$的长度。于是，由引理 2.6 和 Hölder 不等式可得，对于 $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} C &\le \Big(\sum_{i=0}^{k} r_i^{\varepsilon} \Big)^{\frac{p-1}{p}} \Big(\sum_{i=0}^{k} r_i^{\Delta} \int_{Q_i'} g_u(y)dy \Big)^{\frac{1}{p}} \\ &\le C \Big(\sum_{i=0}^{k} r_i^{\Delta} \int_{Q_i'} g_u(y)dy \Big)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned} \tag{5.1}$$

其中 $\Delta = p\delta - n - \varepsilon(p-1)$。请注意，对于连接 x_0 与 x 的拟双曲测地线 γ，对 γ 中的任意点 w，都有

$$|x-w|^{\frac{1}{\beta}} \le Cd(w, \partial\Omega),$$

这来自 Ω 这一 β-H¨older 域的 $\frac{1}{\beta}$-John 性质（见 [15]）。此外，由 Whitney 型分解的性质可知，对任意 $w \in Q_i'$, $\rho(w) \asymp r_i$。因此，对任意$0 \le i \le k-1$ 及任意 $y \in Q_i'$,

$$|x-y| \le |x-\xi_i| + |\xi_i - y| \le C\rho(\xi_i)^{\beta} + Cr_i \le Cr_i^{\beta},$$

对某个 $\xi_i \in \gamma \cap Q_i'$。假设 $\kappa < b$。那么，对于任意 $y \in Q_i'(0 \le i \le k-1)$,

$$r_i^{\kappa-b} \le C|x-y|^{\frac{\kappa-b}{\beta}}.$$

因此，我们得到

$$r_i^{\kappa} \le C\rho(y)^b |x-y|^{\frac{\kappa-b}{\beta}}.$$

对任意 $y \in Q_i \cap (2^{j+1}Q_k' \backslash 2^j Q_k')$,

$$|x-y| \asymp 2^j r_k,$$

关于 $0 \le j \le |\log_2 r_k| + 1$。由于 $d(\Omega) = 1$，只需考虑

$$0 \le j \le |\log_2 r_k| + 1.$$

因此，关于 $0 \le i \le k-1$,

$$r_k^{\kappa} \le C\rho(y)^b (2^j r_k)^{\frac{\kappa-b}{\beta}}.$$

对于 $y \in Q_k'$, $r_k^{\kappa-b} \geq 1$. 因此,

$$r_k^{\kappa} \leq C r_k^{\kappa-b} \rho(y)^b \leq C r_k^{\frac{\kappa-b}{\beta}} \rho(y)^b.$$

定理的条件告诉我们， $\Delta < b$。因此，我们可以假设 $\kappa = \Delta$。于是，由（5.1）以及关于 Q_0'、Q_1'、.....、Q_k'的事实可知，在 $\mathbb{R}^n$ 中，没有任何一点属于多于 C 个立方体，其中常数 C 与 x的选择无关，因此我们得到

$$\begin{aligned} C &\leq \sum_{i=0}^{k} r_i^{\Delta} \int_{Q_i'} g_u(y)dy \\ &\leq C r_k^{\frac{\kappa-b}{\beta}} \int_{Q_k} \rho(y)^b g_u(y)dy + C \sum_{j=0}^{|\log_2 r_k|+1} (2^j r_k)^{\frac{\kappa-b}{\beta}} \int_{\Omega\cap(2^{j+1}Q_k \setminus 2^j Q_k)} g_u(y)\rho(y)^b dy \\ &\leq C \sum_{l=0}^{|\log_2 r_k|+2} (2^l r_k)^{\frac{\kappa-b}{\beta}} \int_{\Omega\cap 2^l Q_k} g_u(y)\rho(y)^b dy \end{aligned}$$

根据类似于 （4.6）的论证，对于 $t > 0$，存在一个 $l \in [0, |\log_2 r_k| + 2]$，使得

$$(2^l r_k)^t \leq C(2^l r_k)^{\frac{\Delta-b}{\beta}} \int_{\Omega\cap 2^l Q_k} g_u(y)\rho(y)^b dy.$$

换句话说，存在一个 $R_x > r_k \geq C\rho$（x），使得

$$C R_x^{-\frac{\Delta-b}{\beta}+t} \leq \int_{B(x,R_x)\cap\Omega} g_u(y)\rho(y)^b dy.$$

对于 $y \in 5B(x, R_x) \cap \Omega$, $\rho(y) \leq \rho(x) + 5R_x \leq CR_x$. 由 $a \geq 0$, $\rho(y)^a \leq CR_x^a$. 与 (4.7) 中类似的推导可得

$$\int_{\mathcal{C}} \rho(x)^a dx \leq C\Big(\int_{\Omega} g_u(y)\rho(y)^b dy\Big)^{\frac{q}{p}}.$$

对于 $\mathcal{D}$，我们可以用一列立方体 Q_1,Q_2,Q_3,... 覆盖它，除去一个勒贝格测度为零的集合；这些立方体属于 $\mathcal{V}_m(\Omega)$，且对任意 $i \geq 1$，都有某个点 $x_i \in Q_i \cap \mathcal{D}$ 。因此,

$u_{Q_i} < \frac{1}{2}$. 因此，根据引理 2.1,

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{D}} \rho(y)^a dy &\le \sum_{i=0}^{\infty} \int_{Q_i \cap A} \rho(y)^a dy \\ &\le C \sum_{i=0}^{\infty} \ell(Q_i)^a |Q_i \cap A| \\ &\le \sum_{i=0}^{\infty} C\ell(Q_i)^a \int_{Q_i} |u - u_{Q_i}|^q \\ &\le C \sum_{i=1}^{\infty} \ell(Q_i)^{a+n+\frac{q}{p}(p\delta-n)} \Big(\int_{Q_i} g_u \Big)^{\frac{q}{p}} \\ &\le C \Big(\int_{\Omega} g_u \rho^{[a+n+\frac{q}{p}(p\delta-n)]\frac{p}{q}} \Big)^{\frac{q}{p}} \\ &\le C \Big(\int_{\Omega} g_u \rho^b \Big)^{\frac{q}{p}}.\end{aligned}$$

结合上述两个不等式，证明完成。

□

于是我们得到了定理 4.2 的一个类似结果。

定理 5.2. 设 Ω 是一个 β-H ¨older 域（$0 < \beta \le 1$）。假设 $0 < \delta < 1$, $\tau > 0$,$1 \le p \le q$, $a \ge 0$ 和 $p\delta - n < b <$ （$a + n$）$\beta\frac{p}{q} + p\delta - n$. 那么对于任意的球 $B \subset\subset \Omega$，存在一个常数 C，使得对于任意满足 $u|_B = 0$ 的 $u \in C(\Omega)$,

$$\Big(\int_{\Omega} |u(x)|^q \rho(x)^a dx \Big)^{\frac{1}{q}} \le C \Big(\int_{\Omega} g_u^{\tau}(x) \rho(x)^b dx \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

定理 5.2 的证明。结论直接由定理 3.1 和定理 5.1 得出。

□

定理 1.3 的证明。由定理 1.1 和定理 5.1 可得。 □

致谢。作者谨向郭长宇教授致以诚挚谢意，感谢他对本工作的关注，以及在本工作准备期间进行的许多有益讨论。作者还要感谢导师刘金松教授提出的意见和许多深思熟虑的建议。

References

[1] H. Brezis, 《 *Functional analysis*》， *Sobolev spaces and partial differential equations*。大学教材。施普林格，纽约，2011年。[2] S. Buckley 和 P. Koskela, 《 *Sobolev-Poincaré implies John*》，数学研究通讯，2(5)（1995）577-593。[3] S. Buckley 和 P. Koskela, 《 *New Poincare inequalities from old*》，芬兰科学院数学系列年刊 A I，23（1998），第1期，251-260。[4] I. Drelichman 和 R.G. Dur´an, 《 *The Bourgain-Brézis-Mironescu formula in arbitrary bounded domains*》，美国数学会会刊，150（2022），第2期，701-708。[5] B. Dyda、L. Ihnatsyeva 和 A. V. Vahakangas, 《 *On improved Sobolev-Poincare inequalites*》，Ark. mat.，54（2016）437-454。[6] C.-Y. Guo, 《 *Sharp capacity estimates in s-John domains*》，势分析，43（2015），第2期，277-288。

[7] C.-Y. Guo, 《 *Fractional Sobolev Poincaré inequalities in irregular domains*》, 中国数学年刊, 38B(3)（2017）839-856。[8] C.-Y. Guo 和 P. Koskela, 《 *Generalized John disks*》, 中欧数学杂志, 12（2014）, 第2期, 349-361。[9] P. Hajlasz 和 P. Koskela, 《 *Isoperimetric inequalities and imbedding theorems in irregular domains*》, 伦敦数学会杂志, 58(2)（1998）425-450。[10] P. Hajlasz 和 P. Koskela, 《 *Sobolev met Poincaré*》, 美国数学会回忆录, 145(688)（2000）。[11] R. Hurri-Syrjanen 和 A. V. Vahakangas, 《 *On frctional Poincaré inequalities*》, 数学分析杂志, 120（2013）85-104。[12] R. Jiang 和 A. Kauranen, 《 *A note on "Quasihyperbolic boundary conditions and Poincaré domains"*》, 数学年刊, 357（2013）, 第3期, 1199-1204。[13] F. John, 《 *Rotation and strain*》, 纯粹与应用数学通讯, 14（1961）391-413。[14] T. Kilpelainen 和 J. Maly, 《 *Sobolev inequalities on sets with irregular boundaries*》, 分析与应用杂志, 19(2)（2000）369-380。[15] P. Koskela、J. Onninen 和 J. T. Tyson, 《 *Quasihyperbolic boundary conditions and Poincaré domains*》, 数学年刊, 323(4)（2002）811-830。[16] O. Martin 和 J. Sarvas, 《 *Injectivity theorems in plane and space*》, 芬兰科学院数学系列年刊 A I, 4(2)（1979）383-401。[17] V. G. MAZ'YA, 《 *Classes of domains and imbedding theorems for function spaces*》, 苏联科学院通报, 133（1960）527-530（俄文）; 苏联数学通报, 1（1960）882-885（英文）。[18] V. G. MAZ'YA, 《 *On certain integral inequalities for functions of many variables*》, 数学分析问题, 3（列宁格勒大学, 列宁格勒, 1972）33-68（俄文）; 苏联数学杂志, 1（1973）205-234（英文）。[19] V.G. Maz'ya, 《 *Sobolev spaces with applications to elliptic partial differential equations*》。第二版, 修订并增补。数学科学基础丛书 [数学科学基础原理], 342。施普林格, 海德堡, 2011年。[20] W. Smith 和 D. A. Stegenga, 《 *Hölder domains and Poincaré domains*》, 美国数学会汇刊, 319（1990）67-100。[21] E. M. Stein, 《 *Singular integrals and differentiability properties of functions*》, 普林斯顿大学出版社, 普林斯顿, 新泽西州, （1970）普林斯顿数学丛书, 第30卷。

1. HLM, Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing, 100190, People's Republic of China
2. School of Mathematical Sciences, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing, 100049, People's Republic of China*Email address*: xuanyi@amss

.ac.cn