arXiv:2304.10134v2 [math.GT] 5 Sep 2023

从 Mayer-Vietoris 谱序列到¨Uber同调

LUIGI CAPUTI、DANIELE CELORIA 和 CARLO COLLARI

Abstract. 我们证明，关于反星覆盖的 Mayer-Vietoris 谱序列的第二页，可以与单纯复形的另一种同调不变量——零次 ¨Uber同调——相对应。因此，我们得到了这一背景下 Mayer-Vietoris 谱序列第二页的组合解释。随后，我们利用这一解释扩展了粗体同调的计算；粗体同调是连通支配多项式在 -1处的范畴化。

1. Introduction

Mayer-Vietoris 谱序列是著名的 Mayer-Vietoris 长正合列的一种推广，是代数拓扑中的一种有效且应用广泛的构造。在经典形式中，Mayer-Vietoris 谱序列由给定拓扑空间 X的一个覆盖的交叠模式构造而成。该谱序列收敛到 X的同调，从而为各种拓扑与组合应用提供了有力工具。首先，它与经典的神经引理有关（参见定理 3.9）。利用谱序列论证证明神经引理的方法见 [Seg68，第 5],节，此后该方法以多种方式得到推广。近年来，由于神经引理和 Mayer-Vietoris 谱序列在持久同调 [LSVJ11, GS18, Cas19, BKRR23, GL23], 、有界上同调 [Iva20, FM21], 、构形空间的同调 [Che16, CL18, CLW21], 以及空间的拓扑复杂度 [Bas03, LRM21]等方面的应用，它们日益受到关注。经典上，人们利用 E^2页的描述推断球面配置的性质 [Jew94, JOS94], ，并研究一般的超平面配置 [BE97, DS13, DSY16]。

神经引理适用于单纯复形（或更一般地，拓扑空间）的“良好覆盖”，也就是说，覆盖中的每个集合及其所有可能的有限交集都是可缩的。当这些交集既不可缩，也不是无圈时，神经引理的结论通常不成立。无论如何，Mayer-Vietoris谱序列最终都会收敛到 X 的同调，而谱序列的各页则对这一收敛过程提供越来越精确的近似。因此，谱序列各页的子复形应当包含有趣的不变量——例如其他同调理论，如路径同调 [Asa22], ，或挠，如 [Jew94] 中所示——这引出了以下问题：

问题。设 $\mathcal{U}$ 是拓扑空间 X 的一个覆盖。能从 Mayer-Vietoris谱序列的第二页读出 X 的哪些拓扑性质，或 $\mathcal{U}$ 的神经的哪些组合性质?

如前所述，这个问题相当模糊，因为它在很大程度上取决于覆盖 $\mathcal{U}$ 和空间 X。本文聚焦于覆盖 $\mathcal{U}_{\text{ast}}$，该覆盖由有限连通单纯复形 X的反星子复形 $\text{ast}_X(v)$构成；这里 v 遍历 X的顶点，而 $\text{ast}_X(v)$是 X 中 v 的星的补集（参见定义 3.11）。我们的主要结果是，关于覆盖 $\mathcal{U}^{\text{ast}}$的 X的 Mayer-Vietoris 谱序列的第二页，与 ¨ 单纯复形的另一个组合与同调不变量 $\mathrm{B}(X)$ 相关：

定理1.1. 设 X 是一个具有 m 个顶点的有限单纯复形。那么，对于所有 $i \geq 0$ 和$0 \leq j \leq m$，存在一个双分次模的同构

$$E^2_{m-j-1,i} \cong \ddot{\mathrm{B}}^j_i(X)$$

它介于 X关于反星覆盖的增广 Mayer-Vietoris 谱序列的第二页与 X的 ¨零次 Uber同调之间。

分次同调 $\ddot{\mathrm{B}}_i^j(X)$是在 [Cel23]中引入的更一般的单纯复形同调理论的零度特化。后者理论被称为 ¨的 Uber同调。 [Cel23] 中证明了， ¨Uber同调同时包含有限单纯复形的拓扑信息和组合信息。定理1.1阐明，当将其中一个次数设为0 时， ¨Uber同调理论从相关谱序列的第二页读取 X 的组合信息。将定理1.1与 [ET22]的结果进行比较会很有意思。该论文介绍了与格的布尔覆盖相关联的胞腔型上同调。利用Mayer-Vietoris谱序列，将布尔覆盖的同调与底层格的同调联系起来。在他们的情形中，该覆盖对应于包含格的原子的上区间，这暗示了Mayer-Vietoris谱序列在该背景下的一种平行的组合解释。

利用定理1.1中的对应关系，我们给出一些计算，并拓展了 [Cel23、CCC23] 先前通过直接计算或离散 Morse 理论技术得到的结果——参见命题 5.2 和命题5.7。我们研究锥化和悬挂的影响。 ¨Uber同调的一个进一步特化称为粗体同调，它与连通支配集有关。我们还证明，无三角形图上的旗复形的零次 ¨Uber同调完全由其粗体同调决定（命题 5.6）。

计算图中的连通支配集是一个 NP困难问题。已有研究表明，在 [CCC23] 中，粗体同调实现了连通支配多项式的范畴化。记 D_c(G) 为图 G 的连通支配多项式（见公式（4））。反星覆盖的定义可以推广到正则 CW 复形，而定理1.1的主要应用如下：

定理1.2. 设 $X \neq \Delta^n$ 是一个有限、连通的正则 CW复形。假设 X 的反星覆盖是一个 1-Leray覆盖，且 X 的 1-骨架是一个简单图 G。则有

$$(-1)^{m-1} D_c(\mathtt{G})(-1) = \chi(X) - 1 \ ,$$

其中， m 是 X中的顶点数。

定理1.2在单纯复形的情形下几乎是定理1.1的直接推论，但在考虑 CW 复形时则不那么直接。对于 CW 复形， ¨Uber同调和粗体同调群的定义尚不存在，与支配集之间的桥梁也不明确。定理1.2的作用正是阐明这一联系。例如，利用更一般的 CW 复形框架，我们能够推断 -1 是网格图的连通支配多项式的一个根（参见推论 5.4）。

我们的最后一个应用涉及弦图。回忆一下，弦图是这样一个图 G：其中每个诱导圈，即 G 的一个诱导子图所构成的圈，都恰好有三个顶点。

推论1.3. 设 G 是一个具有 $m \geq 3$ 个顶点的弦图。那么， -1 是连通支配多项式 D_c(G) 的一个根。

例如，网格图就是满足 -1是 D_c(G) 的根的非弦图 G 的例子（参见推论 5.4）。在这些情况下，推论1.3的逆命题不成立。进一步探究单纯复形的拓扑性质与其 1-骨架的组合性质之间的关系，尤其是与弦性的一般概念 [ANS16]相关的关系，将会很有意义。

致谢。作者谨向 Julius Frank 表示衷心感谢，感谢他提供宝贵的讨论意见，并分享了他的代码 [Fra22]。作者也感谢 Dejan Govc 对论文初稿提出的意见和反馈，并谨向匿名审稿人致以诚挚谢意；审稿人的意见帮助提升了论文的质量。本文的主要思想诞生于都灵 Piazza Statuto 的一家酒吧。DC 受 Hodgson-Rubinstein 的 ARC 项目资助 DP190102363“低维流形的经典与量子不变量”的支持。CC 受 MIUR-PRIN 项目 2017JZ2SW5 的支持。

¨2. Uberhomology, its 0-degree, and bold homology

我们首先根据 [Cel23, CCC23] 回顾 ¨Uber同调的定义。

设 X 是一个有限连通单纯复形，具有 m 个顶点，即 $V(X) = \{v_1, \dots, v_m\}$。下文中，我们假设已为 X 的顶点指定一个固定顺序。此类排序的选择仅为辅助之用，不会影响以下讨论。

X 上的双色着色 ε 是一个映射 $\varepsilon\colon V(X) \to \{0,1\}$。为便于直观理解，我们有时将 0 视为白色，将 1 视为黑色。二着色单纯复形是一个有序对 (X,ε)，由配备了双色着色 ε 的单纯复形 X 构成。给定 (X,ε)中的一个 n维单形 σ ，定义其相对于 ε 的权重为以下总和

$$w_\varepsilon(\sigma) \coloneqq n + 1 - \sum_{v_i \in V(\sigma)} \varepsilon(v_i)\ . \tag{1}$$

等价地， $w_\varepsilon(\sigma)$是 σ中颜色为 0/白色的顶点数。对于固定的双色着色 ε，公式 (1) 中的权重在与 X相关联的单纯链复形 $C_*(X;\mathbb{Z}_2)$上诱导出一个滤过。更明确地，令

$$\mathscr{F}_j(X,\varepsilon) \coloneqq \mathbb{Z}_2\langle\ \sigma \mid w_\varepsilon(\sigma) \le j\ \rangle \subseteq C_*(X;\mathbb{Z}_2)\ .$$

单纯微分 ∂ 保持此滤过；它可以分解为两个微分之和（参见 [Cel23，引理 2.1]）：一个保持权重不变，记作 ∂_h；另一个使权重降低一。将 $(C(X,\varepsilon)\ \partial_h)$ 称为双分次链复形，其底层模为 $C(X;\mathbb{Z}_2)$；第一分次由单形的维数给出，而权重 w_ε给出第二分次。(X,ε) 的 ε-水平同调 $\mathrm{H}^h(X,\varepsilon)$ 是双分次链复形 $(C(X,\varepsilon)\ \partial_h)$ 的同调。换言之，$\mathrm{H}^h(X,\varepsilon)$ 是与滤过 $\mathscr{F}_j(X,\varepsilon)$ 相关联的分次对象的同调。

定义 ¨Uber同调的下一步，是注意到 X 上的双色着色可以与集合 m上的布尔偏序集 $B(m)$ 的元素（按包含关系构成偏序）建立规范对应。设 ε 和 ε' 是 X 上的两种双色着色，且仅在顶点 v_i处不同；进一步假设 $\varepsilon(v_i) = 0$ 且 $\varepsilon'(v_i) = 1$。用 $d_{\varepsilon,\ \varepsilon'}$ 表示恒等映射 $\mathrm{Id}\colon \mathrm{H}^h(X,\varepsilon) \to \mathrm{H}^h(X,\varepsilon')$ 的保权重部分。稍微滥用一下记号，$d_{\varepsilon,\ \varepsilon'}$ 可以写作

$$d_{\varepsilon,\varepsilon'}(\sigma) = \begin{cases} \sigma & \text{if } w_\varepsilon(\sigma) = w_{\varepsilon'}(\sigma) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}\ ,$$

se以及 [Cel23，第 6] 节。请注意，后一种情况只有在 $w_\varepsilon(\sigma) = w_{\varepsilon'}(\sigma) - 1$ 时才可能出现。

对于给定的 X 上的双色着色 ε，令 $\ell(\varepsilon) \coloneqq \sum_j \varepsilon(v_j)$。那么，第 j 个 ¨上同调链模定义如下:

$$\ddot{\mathrm{C}}^j(X;\mathbb{Z}_2) = \bigoplus_{\ell(\varepsilon)=j} \mathrm{H}^h(X,\varepsilon)\ . \tag{2}$$

根据 [Cel23，命题 6.2], 中的映射

$$\ddot{d}^j \coloneqq \sum_{\ell(\varepsilon)=j} d_{\varepsilon,\varepsilon'}\colon \ddot{\mathrm{C}}^j(X;\mathbb{Z}_2) \to \ddot{\mathrm{C}}^{j+1}(X;\mathbb{Z}_2) \tag{3}$$

是一个次数为 1 的微分，从而使 $\left(\ddot{\mathrm{C}}^*(X;\ \mathbb{Z}_2)\ \ddot{d}\right)$ 成为上链复形。图1展示了 ¨Uber 链复形构造的示意性总结。

¨定义2.1。有限连通单纯复形 X 的 ¨Uber同调 $\mathrm{H}^*(X)$是复形 $\left(\ddot{\mathrm{C}}^*(X;\ \mathbb{Z}_2)\ \ddot{d}\right)$的同调。

¨Uber同调群可以赋予两个额外的分次，从而得到三重分次的模-¨ule。事实上，微分 d 同时保持单形的权重和维数不变。 ¨uber同调的三个分次记号如下： $\ddot{\mathrm{H}}^{\ j}_{k\ ,\ i}(X)$ 表示由维数为 i、具有 k 个颜色为0的顶点，且（¨uber）同调次数为 j的单形生成的同调分量。

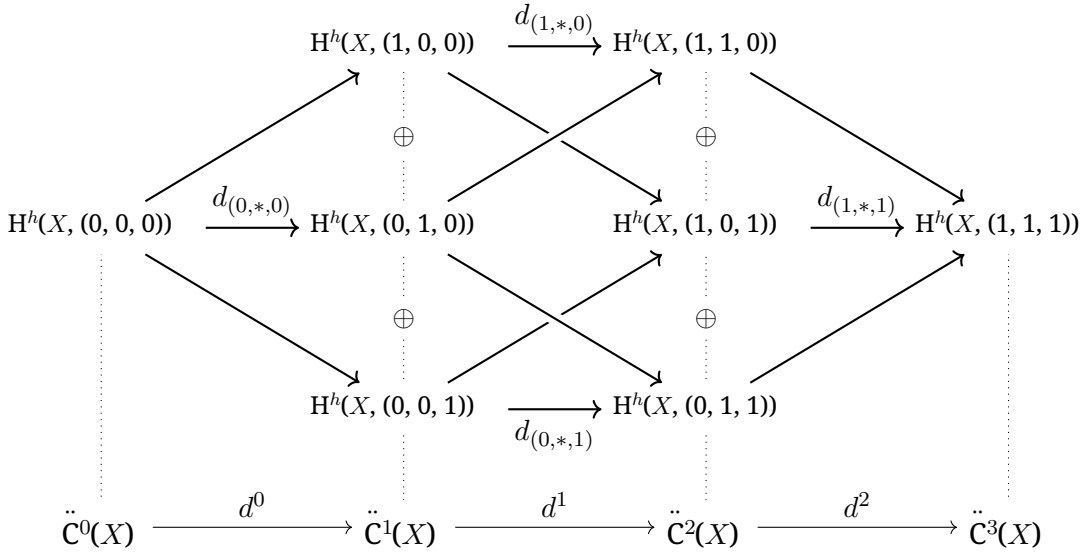


FIGURE 1. 具有由一个含 3 个顶点的单纯复形的水平同调标记的布尔偏序集 B (3)，以及其向¨über链复形的“扁平化”。

上述定义可以用偏序集同调的术语重新表述 [Cha19, CCDT21], ，这使得可以将 ¨uber同调的定义从 $\mathbb{Z}_2$ 推广到一般系数：

命题2.2（[CCC23，命题2.14]）。设 X 为一个具有 m个顶点的连通单纯复形，Mod_R 为交换环 R上的 R-模范畴。那么， X 的 ¨Uber 同调（Uberhomology）与 $B(m)$的偏序集同调一致，其系数取自一个适当的函子 $\mathcal{H}$： $B(m) \to \mathrm{Mod}_R$。

关于命题2.2的证明以及对偏序集同调解释的更详细介绍，请参阅 [CCC23] 。

¨如上所述， ¨超微分 d 保持（k,i）-双次数。特别地，将 ¨Uber同调限制到权重 0 的分量，便得到一个分次同调。

定义 2.3. 对于单纯复形 X，将零次 ¨Uber同调定义为分次同调

$$\ddot{\mathrm{B}}_i^j(X) := \ddot{\mathrm{H}}_{0,i}^j(X) \ .$$

¨B(X) 的另一种定义如下：对于 $\varepsilon \in \mathbb{Z}_2^m$，定义 X_ε 为由相对于 ε 的 1-着色顶点诱导出的 X 的单纯¨子复形。通过在布尔偏序集 $B(m)$ 的每个顶点 ε 上标记 X_ε 的第 i 阶同调 $\mathrm{H}_i(X_\varepsilon)$，即可得到同调 $\mathrm{B}_i^*(X)$；与立方体的边相关联的微分由包含映射诱导。也就是说¨，$\mathrm{B}_i^*(X)$ 是布尔偏序集 $B(m)$ 上、系数取为由维数 i 的单纯同调给出的函子的偏序集同调。

利用命题2.2，可以定义 B_i^* 的一般系数；将 ¨$\mathrm{B}_i^j(X;\ddot{R})$ 定义为 X 的零次 Uber同调 ¨，其系数取自交换环 R。

例 2.4. 作为一个例子，我们可以计算 Δ^2 的边界的同调 ¨$\mathrm{B}_i^j(\partial\Delta^2)$。其链复形如图2所示。该复形集中在同调次数 1 到 3 以及单纯次数 0 和 1 上。在次数 $i=0$ 中，它同构于与 $\partial\Delta^2$ 相关联的单纯链复形；而在次数 $i=1$ 中，只有平凡微分，并且在次数 $j=3$ 中有唯一的非平凡直和项。因此

$$\ddot{\mathrm{B}}_i^j(\mathtt{K}_3) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \textit{if } (j,i) \in \{(1,0),(3,1)\}, \\ 0 & \textit{otherwise.} \end{cases}$$

更明确地说，双次数 (1,0) 中的生成元由三个连通分支的直和张成，这三个连通分支分别由一个黑色顶点标识（见图2的第一列）。另一个生成元则可以视为 $\partial\Delta^2$ 的基本类，并将其看作 S^1 的一个三角剖分。

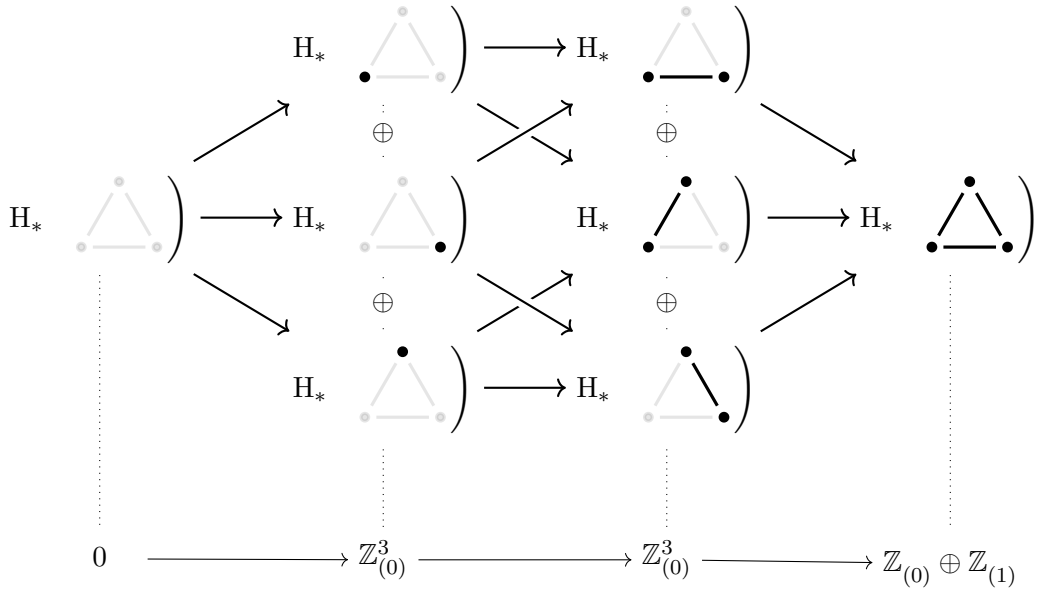


FIGURE 2. .....的零次 ¨Uber链复形 $\partial\Delta^2$。这里， $\mathbb{Z}^d_{(i)}$ 表示 B^*_i 中的一个 $\mathbb{Z}^{d¨}$ 直和项。

¨2.1. 粗体同调。将 $\mathrm{B}^*_i(X)$ 特化为 $i = 0$ ，称为粗体同调，记作 $\mathbb{H}^*(X)$。这种同调由 [Cel23 的第 8], 节引入，并且已证明它包含关于简单图 [CCC23] 的非平凡组合信息。迄今为止引入的三种同调之间的关系可示意性地概括如下：

$$\ddot{\mathrm{H}}^j_{k,i}(X) \xrightarrow[k=0]{\text{restrict to}} \ddot{\mathrm{B}}^j_i(X) \xrightarrow[\mathrm{i}\,=\,0]{\text{restrict to}} \mathbb{H}^j(X)$$

设 G 是一个连通简单图，也就是说，是一个连通的一维单纯复形。G 的顶点的一个子集 $S \subseteq V$ 称为

- 支配的，如果 V(G) 中的每个顶点要么属于 S ，要么与 S 中的某个元素共享一条边；
- 若 S 张成一个连通子复形，则称其为连通的。

图 \(G\) 的连通支配多项式定义为

$$D_c(\mathtt{G})(t) = \sum_S t^{|S|} \in \mathbb{Z}[t] \ , \tag{4}$$

其中 S 遍历 V(G)中的连通支配集。已知计算图的连通支配多项式是NP困难的 [GJ79]。在 [CCC23], 中，作者证明了连通支配多项式与粗体同调的欧拉示性数之间存在紧密关系：

定理 2.5（[CCC23，定理 1.2]）。粗体同调范畴化了 $D_c(-1)$。更准确地说， $\mathbb{H}^*$ 在图的包含下具有函子性，并且其欧拉示性数为 $D_c(-1)$。

由此结果可以推导出 $\mathbb{H}$ 的一些性质和计算结果。例如，树的粗体同调为零，并且它能检测完全图（精确表述见 [CCC23] ）。粗体同调的计算也可以扩展到单纯复形；事实上，根据定义可以立即推导出以下结论：

引理 2.6. 设 X 是一个单纯复形， $X^{(1)}$ 是它的 1-骨架。那么，存在一个分次同构 $\mathbb{H}^*(X) \cong \mathbb{H}^*(X^{(1)})$。

证明。 $X^{(1)}$ 中的单色子复形的连通分支与 X 中的连通分支一一对应。因此，由 [CCC23 定理 1.3] 可得结论。□

3. Anti-star covers and spectral sequences

（上）同调计算中使用的主要工具之一，是通过谱序列对 Mayer-Vietoris 长正合列进行推广。为明确记号，我们先回顾一些基本定义，更多细节请参见 [McC01] 。

我们将重点讨论同调型的增广第一象限谱序列，即由第一象限增广双复形导出的谱序列，其诱导微分的双次数为 $(-r, r-1)$。称双分次 R-模 $C_{p,\,q}$ 具有双次数 (a,b) 的第一象限增广双复形 $(C_{p,\,q}, \delta_{p,\,q})$，若其微分为

$$\delta_{p,q} \colon C_{p,q} \longrightarrow C_{p+a,q+b} \ ,$$

其中 $C_{p,q} = 0$ 对于 $p < -1$ 和 $q < 0$。谱序列自然地出现在滤过链复形的语境中。按照惯例，我们说谱序列 (E^r, d^r) 收敛到分次模 H_*，并记作 $E_{p,q} \Rightarrow \mathrm{H}_{p+q}$，如果 H_* 上存在一个滤过 F，使得对于所有 p, q，都有 $E^\infty_{p,q} \cong \mathrm{Gr}_{p,q}\mathrm{H}_*$ ，其中 $E^\infty_{p,q}$ 是该谱序列的极限项。

现在我们专门讨论第一象限增广双复形 (C, δ_v, δ_h)，其中 δ_v 和 δ_h 分别是双次数为 $(0,-1)$ 和 $(-1,0)$ 的微分，并且 $\delta_v \circ \delta_h = \delta_h \circ \delta_v$。考虑相应的全复形

$$\mathrm{Tot}(C)_n := \bigoplus_{p+q=n} C_{p,q} \ ,$$

其微分 δ 定义为对每个 $x \in C_{p,*}$ 和每个 p，令 $\delta(x) := \delta_h(x) + (-1)^p \delta_v(x)$。$\mathrm{Tot}(C)$ 上有两个自然滤过。第一个滤过 F^I 通过在 p 层截断上述直和来定义： $F^I_p(\mathrm{Tot}(C))_n := \bigoplus_{i \le p} C_{i,n-i}$。第二个滤过 F^{II} 是互补滤过： $F^{II}_q(\mathrm{Tot}(C))_n := \bigoplus_{j \le q} C_{n-j,j}$。在第一象限双链复形的特殊情形下，两个滤过都是有界的（从上方和下方），因此两个相关的谱序列都收敛到全复形 $\mathrm{Tot}(C)$ 的同调。由第一个滤过得到的谱序列的第 0 页是

$$IE^0_{p,q} := F^I_p(\mathrm{Tot}(C))_{p+q} / F^I_{p-1}(\mathrm{Tot}(C))_{p+q} = \bigoplus_{i \le p} C_{i,p+q-i} / \bigoplus_{i \le p-1} C_{i,p+q-i} = C_{p,q} \ ,$$

而第二滤过为:

$$IIE^0_{p,q} := F^{II}_p(\mathrm{Tot}(C))_{p+q} / F^{II}_{p-1}(\mathrm{Tot}(C))_{p+q} = \bigoplus_{j \le p} C_{p+q-j,j} / \bigoplus_{j \le p-1} C_{p+q-j,j} = C_{q,p} \ .$$

这些微分分别由 δ_v 和 δ_h诱导。相关谱序列的第一页分别为 $IE^1_{p,q} = \mathrm{H}_q(C_{p,*})$，其诱导微分为 $\delta^{(2)}_h$ ；以及 $IIE^1_{p,q} = \mathrm{H}_q(C_{*,p})$，其诱导微分为 $\delta^{(2)}_v$，在下文中分别简称为 $\delta^{(2)}$ 。

3.1. Mayer-Vietoris谱序列。

根据 [Bro94，第VII章4] 和 [God58，第I.3.3节及第II部分5], ，我们简要回顾Mayer-Vietoris谱序列的构造。

对于单纯复形 X，记 $P(X)$ 为 X 的面偏序集，即由 X 的非空单形构成、按包含映射排序的偏序集。令 X_p 为 X 中所有 p-单形组成的集合，并假设顶点集始终是有限且有序的。所得结果将不依赖于排序方式的选择。

设 $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ 是 X 的单纯覆盖，即 X 的一个子复形族，并满足每个 U_i 非空且 $\bigcup_{i \in I} U_i = X$。对于指标集 I 的每个非空子集 J，用 U_J 表示覆盖中相应元素的交集 $\bigcap_{j \in J} U_j$ 。根据这些数据，我们可以为 X 关联另一个单纯复形:

定义 3.1. 给定一个单纯复形 X及其覆盖 $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$，神经 N($\mathcal{U}$) 是定义在非空有限子集族 $J \subseteq I$ 上的单纯复形，使得 $U_J \coloneqq \bigcap_{j\in J} U_j \neq \emptyset$。

考虑 $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ 的覆盖 X。我们可以为N($\mathcal{U}$)的每个单形 σ 关联一个 $\{1, ..., |I|\}$的子集 J。特别地，对于由指标 j_0，...， j_p定义的N($\mathcal{U}$)的一个 p-单形 σ，我们将交集$U_{j_0} \cap \cdots \cap U_{j_p}$记作 U_σ。

每个偏序集都是一个范畴。特别地，这也适用于面偏序集 $P(X)$；其对象是 X的单形，并且当 τ 是 σ的一个面时，存在一个态射 $\tau \to \sigma$。将由此得到的范畴记作P(X)，并将阿贝尔群范畴记作Ab。

定义 3.2。 X 上的系数系统是一个函子 $\mathcal{L}$: P(X)$^{\mathrm{op}} \to$ Ab。

更具体地说， X 上的系数系统是一个阿贝尔群族 $\{A_\sigma\}$，由 X的单形 σ 索引，并配有一个映射 $A_{\tau\subseteq\sigma}$: $A_\sigma \to A_\tau$，当 τ 是 σ的一个面时定义，且满足若 $\mu \subseteq \tau \subseteq \sigma$则 $A_{\tau\subseteq\sigma} \circ A_{\mu\subseteq\tau} = A_{\mu\subseteq\sigma}$。

例3.3. 设 $\mathcal{U}$ 是单纯复形 X的一个覆盖。对于每个 $q \in \mathbb{N}$ 和 $\sigma \in$ N($\mathcal{U}$)，定义

$$\mathcal{H}_q(\sigma) \coloneqq \mathrm{H}_q(U_\sigma)$$

作为子复形 U_σ （属于 X）的第 q 个同调群。如果 τ 是属于 N($\mathcal{U}$) 的 σ 的一个面，那么存在一个包含映射 $U_\sigma \subseteq U_\tau$，因此在相应的 q-同调群之间存在一个诱导映射。容易验证， $\mathcal{H}_q$ 在神经 N($\mathcal{U}$) 上构成一个系数系统。类似地，也可以考虑 U_σ 中的 q-链群 $C_q(U_\sigma)$；这同样在 N($\mathcal{U}$) 上给出一个系数系统 $\mathcal{C}_q$。

给定一个单纯复形 X 和定义在 X上的系数系统 $\mathcal{L}$，可以定义带有 $\mathcal{L}$系数的 X 的同调群，参见 [God58，第I.3.3] 节。对于每个 $n \geq 0$，定义 p-链为总和

$$C_p(X; \mathcal{L}) \coloneqq \bigoplus_{\sigma\in X_p} \mathcal{L}(\sigma)\ .$$

如果 σ 是单形 $[x_0, \ldots, x_p]$，则将 $d_i(\sigma) \coloneqq [x_0, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, x_p]$ 定义为其第 i 个面。根据 $\mathcal{L}$ 的函子性，存在限制映射

$$\mathcal{L}(\sigma) \to \mathcal{L}(d_i(\sigma)) \hookrightarrow \bigoplus_{\tau\in X_{p-1}} \mathcal{L}(\tau)$$

对于所有 $\sigma \in X_p$和 $0 \leq i \leq p$，将其扩展为整个链复形 $C_p(X; \mathcal{L})$ 上的映射 ∂_i: $C_p(X;\ \mathcal{L}) \to C_{p-1}(X;\ \mathcal{L})$，其中每个 i均如此。微分 ∂: $C_p(X;\ \mathcal{L}) \to C_{p-1}(X;\ \mathcal{L})$ 通过定义$\partial \coloneqq \sum_{i=0}^{p}(-1)^i\partial_i$给出。这通常称为 Čech 微分，由此得到的链复形通常称为余层复形（例如参见 [Bre68，第 4] 节）。

定义 3.4. 具有系数系统 $\mathcal{L}$ 的 X 的同调是链复形 $(C_*(X; \mathcal{L})\ \partial)$ 的同调。

现在我们转向 Mayer-Vietoris谱序列的构造。这是与双链复形相关联的谱序列，对应于一个拓扑空间的覆盖。对于单纯复形 X 和覆盖 $\mathcal{U}$，令

$$C^0_{p,q} \coloneqq \bigoplus_{\sigma\in \mathrm{N}_p(\mathcal{U})} C_q\left(U_\sigma\right) = \bigoplus_{|J|=p+1} C_q\left(U_J\right) \tag{5}$$

由 $\mathbb{Z}$-模自由生成，其生成元为 X 的子复形中考虑覆盖 $\mathcal{U}$ 的 $p+1$ 个元素交集所得的 q-链。这里有两个微分，分别使 p 次数或 q 次数降低。记 δ^0_h: $C^0_{p,\ q} \to C^0_{p-1,\ q}$ 为使 p 次数降低的水平微分，记 δ^0_v: $C^0_{p,\ q} \to C^0_{p,\ q-1}$ 为使 q 次数降低的垂直微分。按照惯例，我们将微分 δ^0_v 定义为各面的交错和：若 $\tau = [v_0, \ldots, v_q]$，则 $\delta^0_v(\tau) \coloneqq \sum_{k=0}^{q}(-1)^k[v_0, \ldots, \widehat{v_k}, \ldots, v_q]$。这样，对于所有 $p \geq 0$，我们得到链复形 $(C^0_{p,\ *}, \delta^0_v)$。而在水平方向上，对固定的 $q \in \mathbb{N}$，我们将 δ^0_h 定义为链复形 C_p(N($\mathcal{U}$); $\mathcal{C}_q$) 的微分，其中该链复形是 N($\mathcal{U}$) 上取值于系数系统 $\mathcal{C}_q$ 的链复形。更具体地说，

对于方程 (5) 的求和中出现的每个 J 以及每个 $j \in J$，子集 $J' := J \setminus \{j\}$ 是 $\mathrm{N}(\mathcal{U})$ 中 J 的一个面。J' 到 J 的包含映射诱导出一个单纯映射 $U_J \to U_{J'}$（反转顺序），因而在 q-链层面上诱导出一个映射。于是，微分 δ_h^0 在 $C_q(U_J)$ 的基元素上定义为 $U_{J\setminus\{j\}}$ 在 $j \in J$ 上的交错和。然后通过线性性将此定义扩展到所有和。

注 3.5。δ_h^0 和 δ_v^0 的微分可交换，即 $\delta_h^0 \circ \delta_v^0 = \delta_v^0 \circ \delta_h^0$。

给群 $C_{p,q}^0$ 赋予微分 δ_h^0 和 δ_v^0，便得到一个双链复形。与该双链复形 $(C_{*,*}^0,\ \delta_h^0,\ \delta_v^0)$ 相关联的两个谱序列（分别对应垂直滤过和水平滤过）都收敛到全链复形 $\mathrm{Tot}\, X$ 的同调，因为 $(C_{*,*}^0,\ \delta_h^0,\ \delta_v^0)$ 是一个第一象限双链复形。然而，尽管这两个谱序列都以同一个分次对象 $\mathrm{H}_*(\mathrm{Tot}\, X)$ 为极限，它们的 E^∞ 项却不同——将其视为双分次对象时即可看出。首先，考虑通过对 p 次数取同调得到的谱序列 IE。对于固定的 $s > 0$，链复形 $C_{*,s}^0$ 是无圈的 [Bro94，第 VII 节。4]，因此，其 E^1 页的非平凡群 $C_s(X)$ 集中在第一列。微分由 δ_v^0 诱导。因此，第二页由同调群 $\mathrm{H}_*(X)$ 组成。于是，该谱序列在第二页塌缩，得到

$$\mathrm{H}_*(\mathrm{Tot}\, X) \cong \mathrm{H}_*(X)\ . \tag{6}$$

第二个谱序列 IIE 被称为Mayer-Vietoris谱序列。从现在起，我们将简单地写作 E 而不是 IIE。

定义 3.6. 与单纯复形 X 及覆盖 $\mathcal{U}$ 相关联的 Mayer-Vietoris 谱序列的第一页由下式给出

$$E_{p,q}^1 = \bigoplus_{\sigma \in \mathrm{N}_p(\mathcal{U})} \mathrm{H}_q(U_\sigma) \tag{7}$$

微分 $\delta^{(1)}\colon E_{p,\ q}^1 \to E_{p-1,\ q}^1$ 由 δ_h^0 诱导。

注3.7。式（7）中的群 $E_{p,q}^1$ 与链群 $C_p(\mathrm{N}(\mathcal{U});\ \mathcal{H}_q)$ 相一致，其中 $\mathcal{H}_q$ 是例3.3中描述的系数系统。

然后，E^2 的 IIE 页由下式给出

$$E_{p,q}^2 = \mathrm{H}_p(E_{*,q}^1) = \mathrm{H}_p(\mathrm{N}(\mathcal{U}); \mathcal{H}_q)\ .$$

如前所述，该谱序列收敛到全复形 $\mathrm{Tot}\, X$ 的同调。因此，根据公式 (6)，我们得到 Mayer-Vietoris 谱序列收敛到 X 的同调。

注 3.8. 假设 X 的覆盖中的元素对所有 σ 和 $i \geq k$ 都具有同调 $\mathrm{H}_i(U_\sigma) = 0$。那么，第 i 页上的微分 δ^i 对 $i \geq k+2$ 必定是平凡的。因此，在这种情况下，Mayer-Vietoris 谱序列在第 E^{k+2} 页收敛。

因此，如果每个 U_σ 都是无圈的，所述谱序列会在第二页退化（此外，它只有在 $q = 0$ 处有非零群），于是我们得到经典的神经引理——参见 [Bro94, 定理 VII (4.4)]:

定理 3.9（神经引理）。设 X 是一个有限单纯复形，$\mathcal{U}$ 是由子复形构成的覆盖，并假设每个非空交集 U_σ 都是无圈的。那么，$\mathrm{H}_*(X) \cong \mathrm{H}_*(\mathrm{N}(\mathcal{U}))$。

当子复形 U_σ 不是无圈的时，神经引理的结论并不成立。尽管如此，Mayer-Vietoris谱序列最终仍会收敛到 X 的同调。

注 3.10. 本节概述的结果是一个更一般构造的特例。设 $\mathcal{F}$ 是拓扑空间 X 上的一个层。若 $\mathcal{U}$ 是 X 的一个 $\mathcal{F}$-无圈覆盖（即 $\mathcal{F}$ 在 $\mathcal{U}$ 的有限交上无圈），则 $\mathcal{U}$ 关于系数 $\mathcal{F}$ 的 Čech 上同调与 X 的层上同调一致。此外，若 $\mathcal{U}$ 由 X 的两个开子集构成，我们便可得到层 $\mathcal{F}$ 的经典 Mayer-Vietoris长正合列。

3.2. 反星覆盖。就本文的目的而言，考察单纯复形的一类特殊覆盖尤其有趣。这类覆盖由顶点星的补集构成，通常称为反星覆盖。设 X 是一个不同于标准单形 Δ^m 的单纯复形。

定义 3.11. 对于每个顶点 v in X，记 $\mathrm{ast}_X(v)$ 为由 $V(X) \setminus \{v\}$ 中的顶点张成的 X 子复形。相应的覆盖 $\mathcal{U}_{\mathrm{ast}_X} = \{\mathrm{ast}_X(v)\}_{v\in V(X)}$ 称为 X 的反星覆盖。

等价地，每个 $\mathrm{ast}_X(v)$ 都是通过从 X 中移除 v 的开星得到的。在上下文明确时，我们将省略对 X 的依赖，直接记作 $\mathrm{ast}(v)$ 和 $\mathcal{U}^{\mathrm{ast}}$。反星子复形包含了关于单纯复形 X 的同伦信息。事实上，如果（反）星中的包含映射是零伦的，如果 $\mathrm{ast}_X(v)$ 同伦等价于 n 维球面的楔和，并且链接 $\mathrm{lk}_X(v)$ 同伦等价于 $(n-1)$ 维球面的楔和，那么 X 同伦等价于 n 维球面的楔和 [V˘Z09，引理 5]。此外，如果 v 是 X 的一个（非孤立）顶点，则存在一个 Mayer-Vietoris长正合列。

$$\cdots \to \widetilde{\mathrm{H}}_{i+1}(X) \to \widetilde{\mathrm{H}}_i(\mathrm{lk}_X(v)) \to \widetilde{\mathrm{H}}_i(\mathrm{ast}_X(v)) \to \widetilde{\mathrm{H}}_i(X) \to \cdots$$

将 X 的（约化）同调、 v 的链接以及相关反星复形联系起来。当同时考虑多个顶点时，仅靠长正合列不足以确定 X 的同调，此时便需要借助 Mayer-Vietoris谱序列。

注 3.12. 容易看出，与反星覆盖相关的神经与标准单形 Δ^m 重合。

为了展示第5节中使用的一些技术，下面给出了若干与反星覆盖相关的 Mayer-Vietoris 谱序列的示例计算。

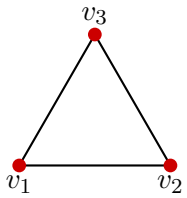


FIGURE 3. 例3.13中的单纯复形。

例3.13。设 $X = \partial\Delta^2$，如图3所示。令 $U_i = \mathrm{ast}(v_i)$为反星子复形，即 $U_i = [v_{i+1}, v_{i+2}]$，其中指标模3计算。交集 $U_i \cap U_{i+1}$ 由顶点 v_{i+2}给出。再将空交集和完全交也加入 $\mathcal{U}^{\mathrm{ast}}$，便得到图4所示的布尔偏序集。将同调函子$\mathrm{H}_q$ 应用于其中的每个元素。

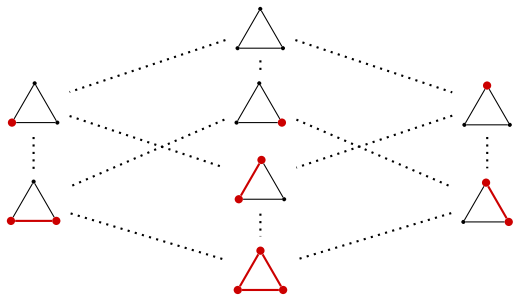


FIGURE 4. $\partial\Delta^2$的反星覆盖的神经所对应的布尔图（分别添加了空交集和完全交作为顶元和底元）；红色单形表示元素 $U_i = \mathrm{ast}_X(v_i)$及其交集（参见图2）。

偏序集产生的则是图 5 中的装饰立方体。立方体各条边的方向遵循包含映射；相应地， p-微分从关联神经的 p-单形指向 $(p-1)$-单形。

为了得到双复形 $E^0_{p,q}$，对每个 q 取由 q-链生成的模，然后将它们相加：

$$E^0_{2,q} = C_q(\emptyset), \quad E^0_{1,q} = \bigoplus_{i=1}^{3} C_q(\{v_i\}), \quad E^0_{0,q} = \bigoplus_{i=1}^{3} C_q(\{[v_i, v_{i+1}]\}) \ .$$

要转到第一页，沿 q 方向取同调；对于每个 q，这将得到图 5 底部所示的行。唯一的非平凡行位于 $q = 0$ 处。唯一的微分

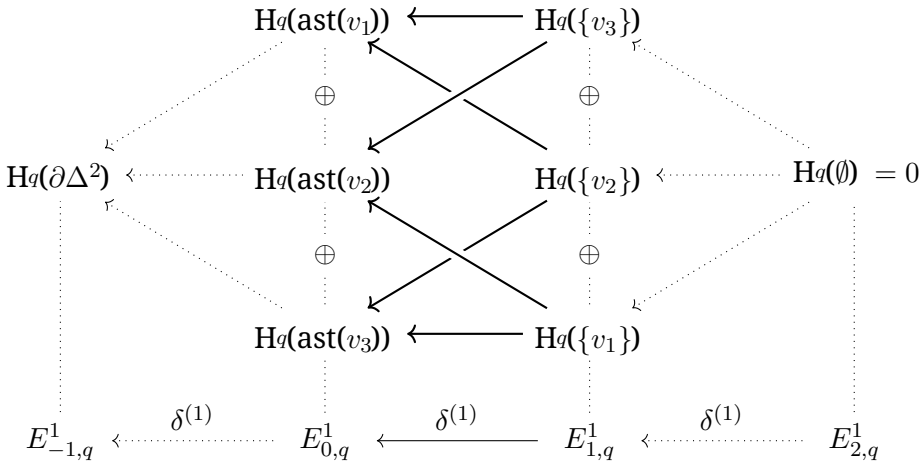


FIGURE 5. 系数系统 $\mathcal{H}_q$ 定义在 $\partial\Delta^2$的神经上，并通过添加空交集和完全交集上的取值进行增广。按列取直和，得到Mayer-Vietoris谱序列中 E^1 的 q行。

具有一个秩为 1 的非平凡核。再次取同调，得到非平凡同调群 $E^2_{0,0}$,$E^2_{1,0}$，二者均与 $\mathbb{Z}$ 同构；其余所有群均为零。总之，Mayer-Vietoris 谱序列在第二页收敛（因为所有微分都为零），得到同调维数 0 和 1 上的非平凡类；这对应于 X 与 S^1 同伦。

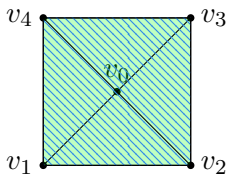
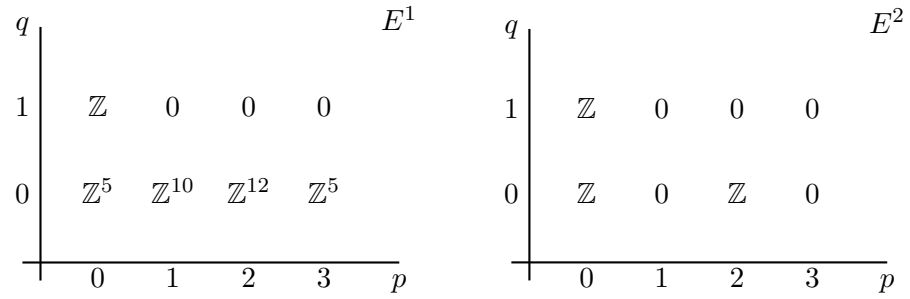


FIGURE 6. 长度为四的环上的锥。

例3.14. 考虑图6所示的可缩单纯复形 X ，即一个长度为4的环上的锥。由于Mayer-Vietoris谱序列收敛于圆盘的同调，且除ast(v_0)外，所有子复形ast(v_i)都是可缩的，因此第一和第二

Mayer-Vietoris谱序列的页如下:



微分 $\delta^{(2)}$: $E^2_{2,0} \cong \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \cong E^2_{0,1}$ 是非平凡的，它消去了位于 $E^2_{0,1}$ 的 $\mathbb{Z}$-类。第三页仅包含点的同调。

例3.15. 设 Δ^{n+1} 为标准的（$n+1$）-单形，并赋予其标准三角剖分。设 S^n 为从 Δ^{n+1} 中移除其内部后得到的球面。那么，相应的反星覆盖由可缩子复形组成。因此，Mayer-Vietoris 谱序列在第二页收敛。由此可知， E^2 在次数 (0, 0) 和次数 (n, 0) 上各包含一个秩为一的分量。

4. The overlap between Mayer-Vietoris and überhomology

本节的目的是证明定理1.1；更明确地说，是建立与反星覆盖相关的Mayer-Vietoris谱序列的第二页与零次 ¨Uber同调之间的对应关系。为此，第一步是扩展Mayer-Vietoris谱序列的计算框架，使其也包含覆盖中各元素的空交集。

设 X 是一个单纯复形， $\mathcal{U}^{\mathrm{ast}}$ 是与之关联的反星覆盖。假设 X 不是标准单形。根据公式（7），关联的 Mayer-Vietoris 谱序列的第一页为

$$E^1_{p,q} = \bigoplus_{\sigma \in \mathrm{N}_p(\mathcal{U}^{ast})} \mathrm{H}_q(U_\sigma) \ .$$

为了纳入空交集 $U_\emptyset := X$，可以通过设置，将双链复形 $E^0_{p,\ q}$ 和谱序列的第一页在 $p = -1$ 次上的同调都补充为 X 的同调，

$$E^1_{-1,q} := \mathrm{H}_q(X) \ .$$

由包含映射所诱导的第一页的水平微分也自然地扩展到 (-1)-列。

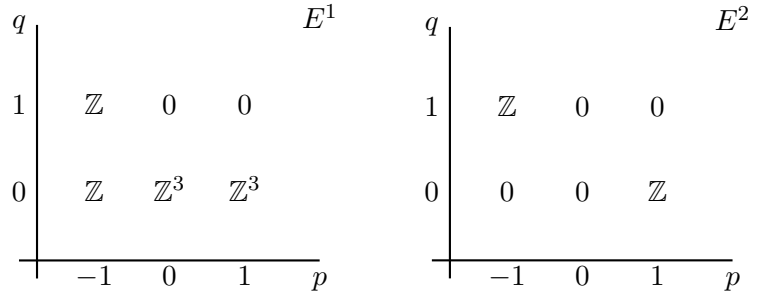
定义 4.1. 相对于覆盖 $\mathcal{U}$ 的 X 的增广 Mayer-Vietoris 谱序列，是指其 E^1-页为 $E^1_{p,q} = \bigoplus_{\sigma \in \mathrm{N}_p(\mathcal{U}^{ast})} \mathrm{H}_q(U_\sigma)$ 的谱序列，并在次数 -1 处用 $E^1_{-1,q} := \mathrm{H}_q(X)$ 增广，其微分由包含映射诱导。

注释 4.2。考虑双链复形 $E^0_{p,q}$，其在次数 $p = -1$ 处通过 $C_q(X)$进行增广；即令 $E^0_{-1,q} := C_q(X)$。由于此类增广复形的各行都是正合的 [Bro94, Section VII.4]，根据无环组装引理 [Wei94, Lemma 2.7.3]，，与 $E^0_{*,*}$相关联的全复形是无环的。因此，与（$E^0_{*,*}$ 的第二滤过）相关联的增广 Mayer-Vietoris 谱序列收敛到一个无环复形。

我们给出一些例子，以扩展第3.2节中已经讨论的内容。

例4.3。与例3.13类似，考虑通过在次数 -1 处加入 X 的同调来增广第一页所得到的谱序列。此时第一页和第二页

变为如下形式：



唯一的微分 $\delta^{(2)}\colon E^2_{1,0} \to E^2_{-1,1}$ 是一个同构；因此，第三页是平凡的。类似地，对于例3.14中的正方形，第二页完全是平凡的，除了双次数 (0, 1) 和 (2, 0)，在这两处它是 $\mathbb{Z}$。

例4.4。考虑例3.15中的球面。容易看出，增广 Mayer-Vietoris 谱序列的第二页完全是平凡的，除了次数 $(-1, n)$ 和 $(n, 0)$。增广谱序列在第 $n+1$ 页坍缩。

现在我们可以继续证明定理1.1；

证明 of 定理1.1。对于给定的顶点集 $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_k}\} \subseteq V(X)$，诱导子复形 x

$$X\langle v_{i_1}, \dots, v_{i_k}\rangle \subseteq X$$

它们张成的部分可视为复形 (X, ε) 的"1-着色"分量，其中 ε 是在 X 上的双色着色：对每个 v_{i_j} 赋值 1，其余赋值 0。等价地，对所有 $s \notin \{i_1, \dots, i_k\}$ 取反星子复形 U_s 的交，即可得到 $X\langle v_{i_1}, \dots, v_{i_k}\rangle$。

现在注意，对于固定的 $q \geq 0$，根据公式（2）中链的定义，限制到零次后，我们得到群 $E^1_{p,q}$ 与 $\bigoplus_{\ell(\varepsilon)=m-p-1} \mathrm{H}^q(X, \varepsilon)$ 之间的一个对应；这是 Uber复形零次中的 ¨Uber同调次数 $m-p-1$ 分量。当限制到基域 $R = \mathbb{Z}_2$ 时，p-微分与公式（3）中的微分一致。此外，在适当的布尔偏序集 [CCDT21] 上选定符号赋值后，微分的一致性可推广到一般系数环 R；根据命题2.2 和 [CCDT21，定理3.16 与推论 3.18]，这种一致性不依赖于符号赋值的选择。根据定义2.1，这个链复形的同调就是 X 的 Uber同调。另一方面，它给出增广 Mayer-Vietoris 谱序列的第二页。这就为 $p \geq -1$ 和 $q \geq 0$ 给出了完整的对应 $E^2_{p,q} \cong \ddot{\mathrm{B}}^{m-p-1}_q(X)$。□

换言之，¨的零次 Uber同调与反星覆盖的神经的同调相一致，其系数取自例3.3中定义的函子 $\mathcal{H}_*$。注意，反星覆盖的定义可以逐字扩展到正则 CW 复形。此外，定理1.1使我们也能够将 ¨Uber同调的定义扩展到正则 CW 复形。这将在例5.3和推论1.3中使用。

推论4.5。 ¨Uber同调群 $\ddot{\mathrm{B}}^j_i(X)$ 继承了一个进一步的微分

$$\delta^{(2)}\colon \ddot{\mathrm{B}}^j_i(X) \to \ddot{\mathrm{B}}^{j+2}_{i+1}(X)$$

对于所有 $i \geq 0$ 和 $0 \leq j \leq m = V(X)$，因此，$(\ddot{\mathrm{B}}^j_i(X)\ \delta^{(2)})$ 是一个链复形。

证明。微分 $\delta^{(2)}$：$\ddot{\mathrm{B}}^j_i(X) \to \ddot{\mathrm{B}}^{j+2}_{i+1}(X)$ 正是增广 Mayer-Vietoris 谱序列 $\delta^{(2)}$ 第二页 $E^2_{*,\,*}$ 上的微分。□

注意，诱导的微分 $\delta^{(2)}$ 与 Mayer-Vietoris长正合列中的连接同态有关。此外，增广的 Mayer-Vietoris 谱序列的横截诱导出一个（部分定义的）映射。

$$\tau\colon \mathbb{H}^k(X) = \ddot{\mathrm{B}}^k_0(X) \longrightarrow \ddot{\mathrm{B}}^m_{m-k-1}(X)\ ,$$

其中 $m = |V(X)|$ 和 $k = 0, \ldots, m-2$。

根据定理1.1，接下来可以得到零次 ¨Uber同调群的计算结果；

例4.6。例3.13中的单纯复形的同调群 $\ddot{\mathrm{B}}_i^j(X)$ 均为零，除了 $\ddot{\mathrm{B}}_1^3(X)$ 和 $\ddot{\mathrm{B}}_0^1(X)$，这两个群都同构于 $\mathbb{Z}$。这两个类由微分 $\delta^{(2)}$: $\ddot{\mathrm{B}}_0^1(X) \to \ddot{\mathrm{B}}_1^3(X)$ 配对，而粗体同调类与 X 的基本类配对。在这种情况下， $\delta^{(2)}$ at $\ddot{\mathrm{B}}_0^1(X)$ 与横截 τ 一致，并且是一个同构。考虑例3.14中的正方形；它具有非平凡的同调群 $\ddot{\mathrm{B}}_1^4(X)$ 和 $\ddot{\mathrm{B}}_0^2(X)$；它们再次由微分（横截） $\delta^{(2)}$ 配对，该微分是一个同构。

例4.7。例3.15中的标准球面 $\partial\Delta^m$唯一非平凡的零次 ¨Uber同调群是 $\ddot{\mathrm{B}}_{m-1}^{m+1}(\partial\Delta^m)$和 $\ddot{\mathrm{B}}_0^1(\partial\Delta^m)$。请注意，在这种情况下，粗体同调类与 $\ddot{\mathrm{B}}_{m-1}^{m+1}(\partial\Delta^m)$的类仍然成对出现，但在增广谱序列中是通过更高次微分配对的。然而，横截映射仍然给出群 $\ddot{\mathrm{B}}_{m-1}^{m+1}(\partial\Delta^m)$与 $\ddot{\mathrm{B}}_0^1(\partial\Delta^m)$之间的一个同构。

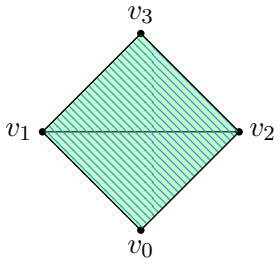


FIGURE 7. 1-单纯形的悬挂。

例4.8。考虑由两个沿一条边粘合在一起的2-单形得到的单纯复形 X，其顶点如图7所示。将 v_0、v_3 称为外部顶点，将 v_1、v_2 称为公共边的顶点。于是，子复形$\mathrm{ast}_X(v_i)$以及除$\mathrm{ast}_X(v_1)\cap\mathrm{ast}_X(v_2)$之外的所有可能交集都是可缩的。子复形$\mathrm{ast}_X(v_1)\cap\mathrm{ast}_X(v_2) = \{v_0, v_3\}$是不连通的。谱序列在第二页收敛，此时它完全平凡。因此， X 的同调群 $\ddot{\mathrm{B}}_i^j(X)$全都为零。

5. 应用

本节将介绍定理1.1的一些推论和应用。首先，我们回顾 d-Leray复形的定义。

定义 5.1。若 CW复形 X 对所有 $i \geq d$ 的所有诱导子复形的约化同调均为平凡，则称其为 d-Leray。若覆盖 $\mathcal{U}$ 的所有元素均为 d-Leray，则称覆盖 $\mathcal{U}$ 为 d-Leray。

~等价地，根据 [KM06，命题 3.1]，，若单纯复形 X 对所有属于 X 且满足 $i \geq d$ 的单形 σ，均有 $\mathrm{H}_i(\mathrm{lk}_X(\sigma)) = 0$，则称其为 d-Leray。具有 d-Leray性质会影响Mayer-Vietoris谱序列的收敛性。例如，以下结果可由定理1.1直接推出：

命题 5.2。设 $X \neq \Delta^m$ 是一个连通、可缩的单纯复形。若 X 的反星覆盖是 1-Leray，则所有同调群 $\ddot{\mathrm{B}}_i^j(X)$ 均为零。

证明。若反星覆盖是 1-Leray 的，则增广 Mayer-Vietoris 谱序列的第一页仅在 $q = 0$ 上有非平凡元素。由于 X 可缩，该谱序列在第二页收敛到零。□

该命题推广了 [CCC23，定理 5.1]：具有至少 3 个顶点的连通树的粗体同调是平凡的。事实上，在这种情况下，反星覆盖是¨1-Leray 的，而粗体同调是 B∗(X) 的 0 部分。另一个例子是“树的多边形邻域”：

例5.3. 设 T 是一棵树，并选取一个抽象满多边形 P（即一个 2-胞腔），其边数至少为 n，其中 $n = \max_{v\in T} \deg(v) + 2$。然后，对 T 的每个顶点 v，在 v处取 P^v 个 P 的副本；对每条边 (v, w)，沿一个自由面将 P^v 和 P^w粘合。由于 T 中没有圈，这一构造得到一个可缩的 CW复形 X(T)（仅当 P 是一个三角形时，它才是单纯复形）。注意，即使固定 P，这一构造也可能产生不同的复形。无论如何， X(T) 的反星覆盖是 1-Leray。因此，若 $T \neq \Delta^1$，则相关增广 Mayer-Vietoris 谱序列中的所有群 $E^2_{*,\,*}(X(T))$ 都是平凡的——理由与命题 5.2 相同。现在考虑 X(T) 的 1-骨架，它是一个连通图，且其 1 维同调的秩为 $|V(T)|$。与该图对应的反星覆盖不再是 1-Leray。不过，注意增广 Mayer-Vietoris 谱序列的 $(q = 0)$ 行仍然是平凡的（多边形是否为 2-胞腔的边界，不会影响连通分支的数量，也不会影响诱导的 p-微分）。因此，树的多边形邻域的粗体同调（$\neq \Delta^1$）完全平凡。

Den记 \(I_m \) 为具有 m 个顶点的路径图，并用 $\square$ 表示图的笛卡尔积。

推论 5.4. 如果 $m \geq 3$，那么所有图积 $I_m \square I_2$ 都具有平凡的粗体同调。

证明。注意，通过将多边形 P 选为正方形，乘积 $I_m \square I_2$ 可以视为 I_m 的一个多边形邻域。乘积 $I_m \square I_2$ 不是可缩的，其反星覆盖也不是 1-Leray。然而，与例5.3中的推理相同，可以证明图 $I_m \square I_2$ 具有平凡的粗体同调。□

因此，将 $I_m \square I_2$, 的连通支配多项式在 -1 处求值是平凡的。我们指出，一般而言，计算网格的连通支配集并不直接；另见 [SN21、GK21]。

原则上，可以利用闭流形反星覆盖的性质，推导其 1-骨架粗体同调的性质。例如，假设 M 是一个闭连通非定向 n-流形。考虑 M的一个 m顶点三角剖分 T 。若反星覆盖是 1-Leray，则增广 Mayer-Vietoris 谱序列的第一页对所有 $p \geq 0$和 $q \geq 1$均为零 $E^1_{p,\,q}$，而 $E^1_{-1,\,n-1} = H_{n-1}(M;\,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2$，见 [Hat00，推论 3.28]。该谱序列收敛到一个无环总体复形，从而得到一个同构：

$$\delta^{(n)} \colon E^n_{n-1,0} \longrightarrow E^n_{-1,n-1} \cong \mathbb{Z}_2 \ .$$

由于 $E^2_{n-1,\,0} \cong E^n_{n-1,\,0}$，因此 ¨$B^m_{n-1}(M;\,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{H}^{m-n}(M;\,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2$，粗体同调便会包含挠。不幸的是，非定向闭连通 n-流形的反星覆盖是 n-Leray。因此，我们无法据此推断粗体同调中存在挠类。

问题 5.5. 是否有可能在单纯复形的整系数粗体同调中找到挠?

给定一个简单图 G，记其旗复形为 Fl(G)，即其单形由 G 的完全子图给出。正如 [Tan13，第 3 节2], 中所述，唯一的 0-Leray 复形是标准单形 Δ^n，而 1-Leray 复形则是定义在弦图上的旗复形。2-Leray 和 3-Leray 复形的一个例子分别由完全二分图和完全图的线图的旗复形给出 [HL22, 定理 1.1]。一类推广二分图的图是无三角形图。

命题 5.6. 设 G 是一个以 m 个顶点为顶点集的连通无三角形图。那么，

(i) $\mathbb{H}^m(G;\mathbb{Z}) = \mathbb{H}^{m-1}(G;\mathbb{Z}) = 0$; (ii) $\mathbb{H}^{m-2}(G;\mathbb{Z})$ 和 ¨$B^m_1(G;\mathbb{Z})$ 是 $H_1(G;\,\mathbb{Z})$ 的商群；(iii) 对所有 $0 \leq j \leq m-2$, $\mathbb{H}^j(G) \cong$ ¨$B^{j+2}_1(G)$。

证明。由于 G 不含三角形，因此 Fl(G) = G，而 Fl(G) = G 的反星覆盖是 2-Leray。对谱序列的考察结合推论4.5，得出短正合列

$$0 \to \mathbb{H}^j(\mathtt{G}) = \ddot{\mathrm{B}}_0^j(\mathtt{G}) \xrightarrow{\delta^{(2)}} \ddot{\mathrm{B}}_1^{j+2}(\mathtt{G}) \to 0$$

由于谱序列必须在第三页收敛， $\delta^{(2)}$ 是一个同构。结论由定理 1.1 得出。□

根据引理 2.6，上述命题意味着，无三角形图上的旗复形的零次 ¨Uber同调完全由其粗体同调决定。

图锥对图的粗体同调的影响已在 [CCC23 的命题 5.3]中探讨。用 Cone(X) 表示单纯复形 X 的锥。回顾一下，给定两个链复形 (C_*, δ_*^C) 和 (D_*, δ_*^D)，以及一个链映射 $\psi\colon C_* \to D_*$， ψ 的映射锥是如下定义的链复形:

$$\mathrm{Cone}(\psi) = D_* \oplus C_{*-1}, \quad \partial_{\mathrm{Cone}} = \begin{pmatrix} \delta_*^D & -\psi_* \\ 0 & \delta_{*-1}^C \end{pmatrix} .$$

以下结果是对 [CCC23 命题 5.3] 和 [Cel23 命题 7.11] 的部分推广。

命题5.7. 设 $X \neq \Delta^{m-1}$ 是一个具有 m 个顶点的单纯复形。那么，存在一个同构

$$\ddot{\mathrm{B}}_*^*(\mathrm{Cone}(X)) \cong \ddot{\mathrm{B}}_*^*(X)$$

（在双分次模范畴中）。

证明。将 X的有序顶点记为 $v_1, ..., v_m$， 将Cone(X)中的锥顶点记为 v_0。令 $U_i = \mathsf{ast}_X(v_i)$、$U_0' = \mathsf{ast}^{\mathrm{Cone}(X)}(v_0)$以及$U_i' = \mathsf{ast}^{\mathrm{Cone}(X)}(v_i) \simeq \mathsf{Cone}(U_i)$。注意，所有$U_i'$以及它们的交集都非空且可缩。此外， $U_0' = X$，在此对应关系下，每个 U_i都对应于交集$U_0' \cap U_i'$。因此，我们得到同构

$$E^1_{p,q}(\mathrm{Cone}(X)) \cong E^1_{p-1,q}(X) \oplus \bigoplus_{i_1 < \cdots < i_{p+1}} \mathrm{H}_q(U_{i_1}' \cap \cdots \cap U_{i_{p+1}}') = \begin{cases} E^1_{p-1,q}(X) \oplus \mathbb{Z}^{\binom{m}{p+1}} & \text{if } q = 0 \\ E^1_{p-1,q}(X) & \text{otherwise} \end{cases}$$

对所有 $p \geq -1$ 和 q均成立，其中约定$E^1_{-1,q}(X) = \mathrm{H}q(X)$，且$E^1_{-2,q}(X) = 0$。我们断言:

$$E^1_{p,q}(\mathrm{Cone}(X)) = \mathrm{Cone}\left(\phi\colon E^1_{p,q}(X) \to \widetilde{C}_p(\Delta^{m-1})\right) ,$$

其中， ϕ 是一个分次链映射， $\Delta^{m-1} = [1, ..., m]$，且 $\widetilde{C}_p(\Delta^{m-1})$集中在 q次数 0 上。为说明这一点，将群 $\mathrm{H}_0(U_{i_1}' \cap \cdots \cap U_{i_{p+1}}')$与 $\widetilde{C}_p(\Delta^{m-1})$中由单形 $[i_1, ..., i_{p+1}]$张成的直和项相识别。此识别给出了映射 ϕ。由于 $\widetilde{C}_*(\Delta^{m-1})$是无圈的，结论得证。□

上述推理可以推广到单纯复形的悬挂:

定理5.8. 设 X 是一个以 m 为顶点的连通单纯复形，并用 $\Sigma(X)$表示 X的悬挂。那么，对于 $q \neq 1$，存在以下同构。

$$\ddot{\mathrm{B}}_q^j(\Sigma(X)) \cong \begin{cases} \ddot{\mathrm{B}}_q^*(X) \oplus \ddot{\mathrm{B}}_{q-1}^{*+2}(X) & \textit{if } q > 1, \\ \ddot{\mathrm{B}}_0^j(X) \oplus \mathbb{Z}_{(2)} & \textit{if } q = 0 \textit{ and } X^{(1)} \neq \mathtt{K}_m, \\ 0 & \textit{if } q = 0 \textit{ and } X^{(1)} = \mathtt{K}_m, \end{cases}$$

其中， $\mathbb{Z}_{(2)}$ 表示 ¨上具有 2 次上同调次数的 $\mathbb{Z}$的一个副本。

证明。设 v_1、...、v_m 是 X 的顶点，并写作 $\Sigma(X) = X * \{p_1, p_2\}$。对于每个 $I \subseteq \{1, ..., k\}$（可以为空），我们将 X 中由 $\{v_j\}_{j\notin I}$ 张成的子复形记作 $\mathcal{U}_I$。类似地，给定 $I \subseteq \{1, ..., m\}$ 和 $J \subseteq \{1, 2\}$，我们将 $\Sigma(X)$ 中由 $\{v_j\}_{j\notin I} \cup \{p_r\}_{r\notin J}$ 张成的子复形记作 $\mathcal{U}_I^J$。注意，有如下识别：$\mathcal{U}_I^\emptyset = \Sigma(\mathcal{U}_I)$、$\mathcal{U}_I^{\{1\}} = \mathcal{U}_I^{\{2\}} = \mathsf{Cone}(\mathcal{U}_I)$ 和 $\mathcal{U}_I^{\{1,2\}} = \mathcal{U}_I$。

根据定义，Mayer-Vietoris谱序列的第一页分解为

$$E^1_{p,q} = C^0_{p,q} \oplus C^1_{p-1,q} \oplus C^2_{p-2,q} \tag{8}$$

其中

$$C^0_{p,q} \coloneqq \bigoplus_{|I|-1=p} \mathrm{H}_q(\mathcal{U}_I^\emptyset),\ C^1_{p-1,q} \coloneqq \bigoplus_{|I|-1=p-1} \mathrm{H}_q(\mathcal{U}_I^{\{1\}}) \oplus \mathrm{H}_q(\mathcal{U}_I^{\{2\}}),\ C^2_{p-2,q} \coloneqq \bigoplus_{|I|-1=p-2} \mathrm{H}_q(\mathcal{U}_I^{\{1,2\}})\ .$$

对于每个 q，包含映射 $\mathcal{U}^J_{I\setminus\{i\}} \subset \mathcal{U}^J_I$with $J \subseteq \{1, 2\}$ 分别在 $C^0_{*,q}$,$C^1_{*,q}$ 和 $C^2_{*,q}$ 上诱导出微分 ∂_0, ∂_1 和 ∂_2，从而赋予它们链复形的结构。类似地，包含映射 $\mathcal{U}^J_I \subset \mathcal{U}^{J\setminus\{j\}}_I$ 诱导出链映射 $\phi_s \colon C^s_{*,q} \to C^{s-1}_{*\,q}$，其中 $s = 1$，2。ϕ_1 和 ϕ_2 的符号可以选取得当，使得 E^1 上的微分相对于方程 (8) 中的分解可写为如下形式：

$$\delta^{(1)} = \begin{pmatrix} \partial_0 & -\phi_1 & 0 \\ 0 & \partial_1 & -\phi_2 \\ 0 & 0 & \partial_2 \end{pmatrix}$$

因此，我们可以将 $(E^1_{*,q}, \delta^{(1)})$ 写成一个迭代锥：

$$E^1_{*,q} = \mathrm{Cone}((\phi_1, 0) \colon \mathrm{Cone}(\phi_2 : C^2_{*,q} \to C^1_{*,q}) \to C^0_{*,q})\ .$$

利用这些识别 $\mathcal{U}_I^\emptyset = \Sigma(\mathcal{U}_I)$、$\mathcal{U}_I^{\{1\}} = \mathcal{U}_I^{\{2\}} = \mathsf{Cone}(U_I)$ 和 $\mathcal{U}_I^{\{1,2\}} = \mathcal{U}_I$，我们可以得到链复形同构：

$$C^0_{*,q} \cong \begin{cases} C_*(\Delta^{m-1}) \oplus \mathbb{Z}_{(m-1)} & \text{if } q = 0 \\ E^1_{*,q-1}(X) & \text{if } q > 1 \end{cases}, \quad C^1_{*,q} \cong \begin{cases} C_*(\Delta^{m-1}) \oplus C_*(\Delta^{m-1}) & \text{if } q = 0 \\ 0 & \text{if } q > 1 \end{cases}$$

and

$$C^2_{*,q} \cong E^1_{*-2,q}(X)\ .$$

因此，对于 $q = 0$，我们得到强变形收缩（按照 [BN05，定义 4.3] 的含义）$C^0_{*,\ 0} \simeq \mathbb{Z}_{(m-1)}$ 以及 $C^1_{*,\ 0} \simeq 0$。进而（参见 [BN05，引理 4.5]），这些强变形收缩导出以下强变形收缩：

$$\mathrm{Cone}(\phi_2 : C^2_{*,q} \to C^1_{*,q}) \simeq C^2_{*-1,q} \cong E^1_{*-1,q}(X), \quad q \neq 1,$$

因此

$$E^1_{*,q} \simeq \begin{cases} \mathrm{Cone}(\psi : E^1_{*-1,0}(X) \to \mathbb{Z}_{(m-1)}) & \text{if } q = 0 \\ E^1_{*-2,q}(X) \oplus E^1_{*,q-1}(X) & \text{if } q > 1 \end{cases}$$

对于适当的链映射 ψ。这证明了关于 $q > 1$ 的陈述。现在，如果 $X^{(1)} \neq \mathrm{K}m$，那么 $\mathbb{H}_1(X^{(1)}) = \tilde{\mathrm{B}}^1_0(X) = 0$ （见 [CCC23，第 1.4] 定理）。事实上，我们可以证明 $E^1_{*,0}(X)$（强）变形收缩到一个复形 C_*，其支撑于严格低于 m 的次数，参见 [CCC23，命题 4.3] 的另一种证明。这意味着

$$E^1_{*,0} \simeq \mathrm{Cone}(0 : C_{*-1} \to \mathbb{Z}_{(m-1)}) = C_{*-2} \oplus \mathbb{Z}_{(m-1)}\ .$$

由于 C_* 是其同调为 $\mathbb{H}_{m-*}(X^{(1)}) = \tilde{\mathrm{B}}^{m-*}_0(X)$ 的链复形，因此该结论对 $q = 0$ 和 $X^{(1)} \neq \mathrm{K}m$ 成立。最后，考虑 $X^{(1)} = \mathrm{K}m$ 的情形。根据引理 2.6，$\mathrm{H}_{m+1}(E^1_{*,0}) = \mathbb{H}_{m-*-2}((\Sigma(X))^{(1)})$ 可以通过考虑任意满足 $Y^{(1)} = (\Sigma(X))^{(1)}$ 的单纯复形 Y 来计算。例如，我们可以取 Y 为 $\Sigma\Delta^{m-1}$。由于 Y 是可缩的，且其反星覆盖是 1-Leray 的，因此由命题 5.2 可知 $\mathbb{H}_*((\Sigma(X))^{(1)}) = 0$。□

注意，我们无法采用定理5.8的证明中相同的推理来得到关于 $q = 1$情形的结论。这是因为 $\mathrm{H}_1(\Sigma X) \neq \mathrm{H}_0(X)$。我们还可以通过取一个具有三个顶点的线性图来发现，$\mathrm{B}_1^*(\Sigma(X))$ 不一定是平凡的——参见例3.14。

最后，我们给出定理1.2的证明：

定理1.2的证明。设 X 是一个有限连通CW复形，并用 G 表示其 1-骨架。由于 X 的反星覆盖是 1-Leray，增广 Mayer-Vietoris 谱序列收敛到平凡群。此外， E^2页中唯一非平凡的群位于双次数 $(*, 0)$ 和 $(-1, *)$ 处。 ¨Uber同调群 $\ddot{\mathrm{B}}_i^j(X)$ 全部为零，除了 $\ddot{\mathrm{B}}_0^{m-p-1}(X) \cong \mathrm{H}^p(X) = \ddot{\mathrm{B}}_p^m(X)$。群 $\ddot{\mathrm{B}}_0^{m-p-1}(X)$ 与 $\ddot{\mathrm{B}}_p^m(X)$ 之间的同构由横截给出。因此，我们有

$$(-1)^{m-1} D_c(\mathtt{G})(-1) = \chi(X) - 1\,, \tag{9}$$

因此该陈述得证。 □

注意，定理1.2中的1-Leray假设不可或缺。事实上，考虑图6所示的例3.14中的单纯复形。其底层图的连通支配多项式在 -1处的取值为 -1，而 X 的欧拉示性数为1。

注意到弦图的旗复形是可缩且为1-Leray的 [DE09，引理3.1]，即可由定理1.2立即推出推论1.3。

注5.9。考虑图$\mathrm{I}_3 \square \mathrm{I}_2$。根据推论 5.4，其粗体同调是平凡的，且 -1是其连通支配多项式的一个根。因此，推论1.3的逆命题一般不成立，因为$\mathrm{I}_3 \square \mathrm{I}_2$ 不是弦图。

最后，我们从高阶弦性的角度作一番展望。根据 [ANS16，事实3.1]，，单纯复形 X 的反星覆盖 $\mathcal{U}^{\mathrm{ast}}$ 是 k-Leray的，当且仅当对所有 $l \geq k$， X 都是 resolution l-弦的。与推论1.3相呼应，研究此类复形的1-骨架的连通支配多项式的性质将很有意义。

References

[ANS16] K. A. Adiprasito、E. Nevo 和 J. A. Samper。《高阶弦性：从图到复形》。 *Proceedings of the American Mathematical Society* 144 8 3317 3329, 2016 , （）：–。[Asa22] Y. Asao。幅度同调与路径同调。 *Bulletin of the London Mathematical Society*，2022年。[Bas03] S. Basu。半代数集不同贝蒂数的不同界。载于*on Computational Geometry (Medford, MA, 2001)* 30, 65 85 2003 *ACM Symposium* ，卷 页码 –。

[BE97] A. Bj¨orner 和 T. Ekedahl。有限域上的子空间配置：上同调与枚举方面。 *Advances in Mathematics*，129(2):159–187，1997。[BKRR23] U. Bauer、M. Kerber、F. Roll 和 A. Rolle。函子性神经定理及其变体的统一观点。 *Expositiones Mathematicae*，2023年。[BN05] D. Bar-Natan。辫结与协边的 Khovanov同调。 *Geometry and Topology* 9 1443 1499, , ： –。[Bre68] G. E. Bredon。余层与同调。 *Pacific Journal of Mathematics*，25:1–32，1968年。[Bro94] K. S. Brown。 *Cohomology of groups*，第87卷，丛书： *Graduate Texts in Mathematics*。施普林格出版社，纽约，1994年。1982年原版的修订重印本。[Cas19] A. T. Casas。通过谱序列分配持久同调，2019年。arXiv:1907.05228。[CCC23] L. Caputi、D. Celoria 和 C. Collari。通过图 ¨Uber同调将连通支配范畴化。*Journal of Pure and Applied Algebra*，227(9):107381，2023年。[CCDT21] L. Caputi、C. Collari 和 S. Di Trani。有向图的多路径上同调。 *Algebraic & Geometric Topology* 2021 2108 02690 ，。即将出版，arXiv:。。

[Cel23] D. Celoria。过滤单纯同调、图差异度与 ¨ *Journal of Algebraic* Uber同调。，第 – 页。[*Combinatorics* 1 46, 2023

Cha19] A. Chandler。薄偏序集、CW偏序集与范畴化，2019年。arXiv:1911.05600。[Che16] S. Chettih。 *Dancing in the stars: Topology of non-k-equal configuration spaces of graphs*。ProQuest有限责任公司，密歇根州安娜堡，2016年。博士论文——俄勒冈大学。[CL18] S. Chettih 和 D. L ¨ *Algebraic* utgehetmann。带环树的构形空间的同调。， （）： –。[CLW21] J. Chen、Z. L¨u 和 J. Wu。小覆盖与拟环面流形的轨道配置空间。 *Science China Mathematics*，64(1):167–196，2021年。

[DE09] A. Dochtermann 和 A. Engstr¨om。通过组合拓扑研究边理想的代数性质。
The Electronic Journal of Combinatorics，16(2):研究论文 r2，24，2009年。[DS13] M. W. Davis 和 S. Settepanella。复环面超平面补空间上同调的消失结果。 *Publicacions Matemàtiques*，第379–392页，2013年。[DSY16] G. Denham、A. I. Suciu 和 S. Yuzvinsky。组合覆盖与上同调的消失。
Selecta Mathematica 22 2 561 594, 2016 ，（）：–。[ET22] B. Everitt 和 P. Turner。超平面配置、布尔覆盖与外幂的层同调。 *Mathematische Zeitschrift*，302(3):1451–1475，2022年。[FM21] R. Frigerio 和 A. Maffei。关于奇异上同调覆盖的双复形的一点说明。*Homology, Homotopy and Applications*，23(2):59–68，2021年。[Fra22] J. Frank。Uber同调。https://github.com/julius-frank/uberhomology，2022年。[GJ79] M. R. Garey 和 D. S. Johnson。*Computers and Intractability. A Guide to the Theory of NP-completeness* 1979 。数学科学丛书。Freeman，。[GK21] M. Goto 和 K. M. Kobayashi。网格图中的连通支配，2021年。arXiv:2109.14108。[GL23] A. Guidolin 和 C. Landi。多参数持久性的 Koszul复形的莫尔斯不等式。
Journal of Pure and Applied Algebra 227 7 107319, 2023 ，（）：论文编号 。[God58] R. Godement。 *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*。科学与工业时事，第1252号。Hermann，巴黎，1958年。斯特拉斯堡大学数学出版物，第13号。[GS18] D. Govc 和 P. Skraba。近似神经定理。
Foundations of Computational Mathematics，18 5 1245 1297，2018年 （）：–。[Hat00] A. Hatcher。*Algebraic topology*。剑桥大学出版社，剑桥，2000年。[HL22] A. F. Holmsen 和 S. Lee。匹配数有界的图复形的 Leray 数。*Journal of Combinatorial Theory, Series A*，189:105618，2022年。[Iva20] N. V. Ivanov。有界上同调理论中的 Leray定理，2020年。arXiv:2012.08038。[Jew94] K. Jewell。球面与子空间配置的补空间。
Topology and its Applications，56 3 199（）：–214，1994年。[JOS94] K. Jewell、P. Orlik 和 B. Z. Shapiro。关于仿射子空间配置的补空间。
Topology and its Applications 56 3 215 233, 1994 ，（）：–。[KM06] G. Kalai 和 R. Meshulam。Leray复形的交集与单项式理想的正则性。
Journal of Combinatorial Theory Series A 113 7 1586 1592, 2006 ，（）：–。[LRM21] D. L¨utgehetmann 和 D. Recio-Mitter。全关节图与香蕉图构形空间的拓扑复杂度。
Discrete & Computational Geometry，65:693–712，2021年。[LSVJ11] D. Lipsky、P. Skraba 和 M. Vejdemo-Johansson。并行化持久性的谱序列，2011年。arXiv:1112.1245。[McC01] J. McCleary。*A user's guide to spectral sequences* 58 *Cambridge Studies in Advanced Mathematics* 2001 ，第 卷，。剑桥大学出版社，剑桥，第二版，。[Seg68] G. Segal。分类空间与谱序列。 *Publications mathématiques de l'IHÉS*，34:105–112，1968年。[SN21] A. Srinivasan 和 N. S. Narayanaswamy。网格的连通支配数。载于 Apurva Mudgal 和 C. R. Subramanian 编， *Algorithms and Discrete Applied Mathematics*，第247–258页，尚，2021年。施普林格国际出版。[Tan13] M. Tancer。通过单纯复形研究凸集的交叠模式：综述。载于 *Thirty essays on geometric graph theory* 521 540 2013 ，第 – 页。施普林格，纽约，。[VˇZ09] S. T. Vre´cica 和 R. T. ˇZivaljevi´c。无环棋盘复形与代数的对称同调。
European Journal of Combinatorics，30(2):542–554，2009年。[Wei94] C. A. Weibel。*An introduction to homological algebra* 38 *Cambridge Studies in Advanced Mathematics* 1994 ，第 卷，。剑桥大学出版社，剑桥，。