arXiv:2304.10161v1 [math.AG] 20 Apr 2023

Kähler 三维簇的丰度勘误与补遗

FRÉDÉRIC CAMPANA、ANDREAS HÖRING 和 THOMAS PETERNELL

摘要。在本文中，我们指出了论文主定理证明中的一个严重漏洞，并说明该陈述的哪些部分仍然有效。事实上，除非该簇可能不具有穿过非常一般点的正维子簇，且不双亚纯于一个环面商，否则主定理仍然成立。后述情形可由一个陈类不等式排除；该不等式在代数情形下成立，但在 Kähler 情形下仍属未知。

[CHP16] 中定理 8.2 的证明存在漏洞。我们在此说明如何在大多数情形下修正这一问题；唯一剩下的情形是 Kodaira 维数为 0 的“简单”三维簇 X，因此对于 X 的一个非常一般点，不存在真正的正维紧解析子簇。在这种情形下，预期 X 双亚纯于一个环面商。我们进一步说明，如何将定理 8.2 归结为一个 Bogomolov-Gieseker 型的轨形陈类不等式；该不等式在代数情形下是众所周知的，其证明通过取超平面截面将问题降至二维。关于 Kähler 情形下该不等式的最新进展，参见 [JC23]。

这个问题涉及等式 (33) 的证明。准确地说，我们处于以下情形。设 X 是一个正规 $\mathbb{Q}$-因子紧 Kähler 三维簇，且 $(X, 0)$ 为 KLT。此外，X 带有一个除子 $D \in |mK_X|$，具有以下性质。

a) 令 $B := \mathrm{Supp} D$。则 (X, B) 为对数典范，且 $X \setminus B$ 具有终端奇点 ies.
b) $K_X + B$ 是数值有效的，且 $\nu(K_X + B) = 2$；此外，$\kappa(X) = \kappa(K_X + B)$。
c) 对所有不可约分支 $T \subset B$，都有 $(K_X + B)_T \neq 0$。d) $(K_X + B) \cdot K_X^2 \geq 0$。

那么我们断言 $\kappa(X) \geq 1$。
为证明这一点，我们考虑一个终端修改 $\mu\colon X' \to X$，令 $L := m(K_X+B); L' = \mu^*(L)$，于是问题归结为在 [CHP16]，中证明等式 (33)，其内容为

$$L' \cdot (K_{X'}^2 + c_2(X')) \geq 0. \tag{1}$$

为了证明方程 (1)，我们声称可以假设 X 在余维二处具有典范奇点。然而，这一般并不成立。一旦方程 (1) 得到证明（当 X 具有典范奇点时，该结论成立），[CHP16] 中给出的证明便完整了。因此，我们必须处理 X 具有（可能的）非典范奇点的情形。在这种情况下，X 在余维二处具有商奇点。我们不进行终端化，而是令 $\mu\colon X' \to X$ 为一个消解。我们

日期：2023年4月20日。

按照 [Kwc92 第14]章中的思路继续。如 [Kwc92 引理 14.31],所示，归结为证明

$$L \cdot (K_X^2 + \hat{c}_2(X)) \geq 0. \tag{2}$$

由于

$$L \cdot (K_X + B) \cdot B = 0,$$

根据 [Kwc92, 引理 14.32]可得

$$L \cdot \hat{c}_2(\Omega_X(\log B)) \geq 0. \tag{3}$$

为证明等式 3，我们按照 [CHP16] 在 orbifold 情形下的做法进行。关于解析情形下 orbifold 陈类的概念，我们参见 [GK20] 。特别地，对于 X 上的 Kähler 形式 ω 和 X 上的反身层 $\mathcal{F}$ （该层是 $X \setminus S$ 上的一个 Q-层），我们可以定义交数 $\omega\, \hat{c}_2(\mathcal{F})$: orbifold 陈类 $\hat{c}_2(\mathcal{F}) \in H^4(X \setminus S, \mathbb{R})$ 唯一延拓为 X 上的一个类 γ，于是我们定义

$$\omega \cdot \hat{c}_2(\mathcal{F}) := [\omega] \cdot \gamma,$$

其中 $[\omega] \in H^2(X, \mathbb{R})$ 是 ω 的类。
首先，我们需要以下 [CHP16, 定理 7.1] 的 orbifold 版本。

1. 猜想。 设 X 是一个正规紧 *Kähler* 三维簇，且仅有孤立的非商奇点；设 α 是 X 上的一个 *Kähler* 类。令 $\mathcal{F}$ 是 X 上一个 $\alpha-$ 稳定的非零无扭挠相干 Q-层。则有

$$\alpha \cdot \hat{c}_2(\mathcal{F}) \geq \big(\frac{r-1}{2r}\big)\alpha \cdot c_1^2(\mathcal{F}).$$

当然，在假设X 在余维 2 中仅具有商奇点的情况下，猜想1 应当在所有维数中都成立。如果 X 是射影的，曲面情形参见 [Kwc92，第 10]章，以及 [GKPT19，定理 6。1]

如果猜想 1 对 KLT 空间成立，则可得到 [CHP16 定理 7.2] 的以下轨形版本。

2. 定理。 设 (X, ω) 是一个具有孤立非商奇点的紧 *Kähler* 三维簇，并设 $\mathcal{F}$ 是 X 上的一个非零反身凝聚 Q- 层，使得 $\det \mathcal{F}$ 是 $\mathbb{Q}$-*Cartier* 的。假设存在一个伪有效类 $P \in N^1(X)$，使得

$$L := c_1(\mathcal{F}) + P$$

是一个数值有效类。进一步假设，对于所有 $0 < \varepsilon \ll 1$，层 $\mathcal{F}$ 都是$(L + \varepsilon\omega)$-泛数值有效的。那么我们有

$$L \cdot \hat{c}_2(\mathcal{F}) \geq \frac{1}{2}(L \cdot c_1^2(\mathcal{F}) - L^3).$$

特别地，如果 $L \cdot c_1^2(\mathcal{F}) \geq 0$ 且 $L^3 = 0$，那么

$$L \cdot \hat{c}_2(\mathcal{F}) \geq 0. \tag{4}$$

我们旨在将定理 2 应用于反身层 $\mathcal{F} = \Omega_X(\log B)$，以证明等式 3。因此，我们需要验证 $\mathcal{F}$ 的一般 nef 性，这可由 Ω_X 的一般 nef 性推出。具体证明通过对 [CHP16，命题 8.2] 进行如下改写来完成。

3. 命题。设 X 是一个具有 *klt* 奇点的正规非代数紧 *Kähler* 空间，其维数为 n 。假设 $\kappa(X) \geq 0$。那么，Ω_X 关于任意数值有效类 α 都是一般数值有效的，即对于每一个无挠商层

$$\Omega_X \to \mathcal{Q} \to 0,$$

我们有 $\alpha^{n-1} \cdot c_1(\mathcal{Q}) \geq 0$。

证明。 我们按照 [CHP16]中的方法进行。设 $\pi : \hat{X} \to X$ 为一个消解。使用 CHP16 命题 8 的证明中相同的记号， [我们需要证明

$$\pi^*(\alpha)^{n-1} \cdot c_1(\hat{Q}) \geq 0.$$

为此，我们应用 Enoki 定理 [Eno88，定理 14], ，并需要将其写成$\mathbb{Q}$-除子，

$$K_{\hat{X}} = L + D$$

其中 L 数值有效且 D 有效。令 $L = 0$，我们需要证明 $\kappa(\hat{X}) \geq 0$。由于X 是 KLT，这不能直接由 $\kappa(X) = \kappa(K_X) \geq 0$推出。反设 $\hat{X}$ $\kappa(X) = -\infty$。那么根据 [HP16]， X 是单有理的。由于 X 不是代数的，$\hat{X}$ 不能有理连通，因此我们有一个有理的几乎全纯（MRC）商

$$\hat{f} : \hat{X} \dashrightarrow \hat{S}$$

且维数 $\hat{S} = 1$ 为 2。由于 $H^2(\hat{X}, \mathcal{O}_{\hat{X}}) \neq 0$，我们必有维数 $\hat{S} = 2$。由于 $\hat{X}$ 并非 $\hat{}$ 代数的， π 的例外集不能满射到 S，因此 f 下降为一个几乎全纯映射 f: $X \dashrightarrow S$，其一般纤维是一条光滑有理曲线。这与 $\kappa(K_X) \geq 0$ 矛盾。

□

非简单情形下定理 *8.2* 的证明。在本文余下部分，我们将指出，在 X 的代数维数为 $a(X) \geq 1$ 或者具有覆盖 X 的曲线族时，如何不使用 Bogomolov-Gieseker 不等式，直接在 [CHP16] - 中证明定理 8.2。关于代数约化理论（我们将广泛使用），例如可参见 [CP94]。我们将记作 $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(L)$。

第一种情况：我们假设存在一个几乎全纯的椭圆纤维化

$$f : X \dashrightarrow S,$$

在一个光滑 Kähler 曲面上。由于 f 不可能是 Moishezon 态射，因此 $\mathcal{L}$ 在 f 的一般纤维上必定数值平凡。现在，我们考虑 X 中椭圆曲线族（ f 的纤维）的闭包所对应的图，并得到一个双有理映射 $p : Z \to X$ 以及一个等维态射 $q : Z \to T$，其中 T 是该族的参数空间（与 S 双有理）。我们可以假设 T 光滑且 Z 正规。线丛 $\mathcal{L} = p^*(\mathcal{L})$ 是 q-数值平凡的，实际上在 q 的一般纤维上是平凡的，因为 $H^0(X; \mathcal{L}) \neq 0$。利用 Zariski 引理 [BHPVdV04, III, 引理 8.2] ，我们得到（至多将 L 替换为其某个倍数） $\mathcal{L} \simeq q^*(\mathcal{G})$˜，其中 $\mathcal{G}$ 是 T 上的一个线丛。由于 $\nu(\mathcal{L}) = 2$，因此 $\mathcal{G}$ 是大且数值有效的。于是 S 是 Moishezon˜，且 $\kappa(\mathcal{L}) = 2$，从而 $\kappa(\mathcal{L}) = 2$。

注意，第一种情形尤其解决了代数维数$a(X)$等于二的情形：此时，代数约化如上所述定义了一个椭圆纤维化。

第二种情形：假设 $a(X) = 1$。这里，代数约化是一个全纯纤维空间

$$f : X \to C$$

ˆ 在光滑曲线 C 上。令 X_c 为 f 的一般纤维，其中 f 是一个 KLT 曲面，并令 $X_c \to X_c$ 为其极小解奇点化。由于 X 不是单有理的，且对于任意代数约化的一般纤维 ˆ，有 $\kappa(\hat{X}_c) \leq 0$，我们得到 $\kappa(X_c) = 0$，从而 $\kappa(X_c) \geq 0$。如果一般纤维 X_c 是代数的，则 f 不可能具有泛多截面，因此 X_c 必须是光滑且极小的。于是 $B_{|X_c} = 0$ 和 $\mathcal{L}|_{X_c} \simeq \mathcal{O}_{X_c}$。由于我们可以假设对于所有 $k \geq 1$ 都有 $h^0(X, \mathcal{L}^{\otimes k}) = 1$，因此 $f_*(\mathcal{L}) = \mathcal{O}_C$（无论如何，根据 C_3，1，我们必须有 $C = \mathbb{P}_1$），从而 $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(\sum a_j D_j)$，其中 $a_j > 0$ 和 D_j 是纤维分支。由于 $\mathcal{L}$ 是数值有效的，并且在一般纤维上数值平凡，这意味着 $\nu(\mathcal{L}) = 1$。这与我们的假设 $\nu(\mathcal{L}) = 2$ 矛盾。
如果一般纤维 X_c 不是代数的，我们有 $L^2 \cdot X_c = 0$。事实上，$L_{|X_c}$ 不可能是大，否则 X 将是射影的。于是我们立即看到

$$K_{X_c}^2 = K_{X_c} \cdot B_{|X_c} = B_{|X_c}^2 = 0.$$

此外，K_{X_c} 必须是数值有效的，否则 X_c 具有一个典范除子为大除子的极小模型。根据曲面的丰盛性猜想，K_{X_c} 是半丰沛的。
如果 Kodaira 纤维化在 X_c 上定义了椭圆纤维化，我们就得到 X 上的椭圆曲线覆盖族，并得出与前一种情况相同的结论。
如果 K_{X_c} 是扭挠的，则 $\mathcal{L}_{|X_c}$ 也同样如此。因此，对于某个 k，有 $f_*(\mathcal{L}^k) = \mathcal{O}_C$，由此我们可以像之前一样得出结论。

第三种情况：假设 $a(X) = 0$ 并且 X 不是简单的。在这种情况下，X 是 Kummer，即双亚纯等价于一个环面商——因此无需证明——或者X 具有一个由椭圆曲线构成的覆盖族，参见 [CP00]。我们再次像第一种情况那样考虑图 p：$Z \to X$。由于 $a(X) = 0$，X 只有有限多个除子，因此 p 是泛有限的。与之前一样，我们推得 $\kappa(p^*(\mathcal{L})) = 2$，从而得到 $\kappa(\mathcal{L}) = 2$。

□

参考文献

[BHPVdV04] Wolf P. Barth、Klaus Hulek、Chris A. M. Peters 和 Antonius Van de Ven，《紧复曲面》，第二版，《数学及其边界领域成果》第三辑，第4卷，施普林格出版社，柏林，2004年。MR MR2030225（2004m:14070）[CHP16] Frédéric Campana、Andreas Höring 和 Thomas Peternell，《Kähler 三维簇的丰盛性》，《高等师范科学年刊》（

4 **49** 2016 4, 971 1025 3552019 ）

[94]

（），第–期。MR CP F. Campana 和 Th. Peternell，《循环空间》，《多复变函数》第七卷，《数学科学百科全书》第74卷，施普林格出版社，柏林，1994年，第319–349页。MR 1326625[CP00] Frédéric Campana 和 Thomas Peternell，《具有非平凡全纯复2形式的复三维簇》，《代数几何杂志》**9**（2000年），第2期，223–264页。MR MR1735771（2002a:32016）[Eno88] Ichiro Enoki，《极小 Kähler 空间切丛层的稳定性与负性》，《流形上的几何与分析》（片田/京都，1987年），《数学讲义》第1339卷，施普林格出版社，柏林，1988年，第118–126页。MR 961477[GK20] Patrick Graf 和 Tim Kirschner，《三维复环面的有限商》，《傅里叶研究所年刊》（格勒诺布尔）**70**（2020年），第2期，881–914页。MR 4105953[GKPT19] Daniel Greb、Stefan Kebekus、Thomas Peternell 和 Behrouz Taji，《典范模型的宫冈–丘不等式与一致化》，《高等师范科学年刊》（4）**52**（2019年），第6期，1487–1535页。MR 4061021

[HP16] Andreas Höring 和 Thomas Peternell，《Kähler 三维簇的极小模型》，《数学发明》**203**（2016年），第1期，217–264页。MR 3437871[JC23] Philipp Naumann、Mihai P˘aun、Thomas Peternell、Xiaojun Wu、Junyan Cao、Patrick Graf，《奇异情形下的 Hermite–Einstein 度量》，arXiv 预印本**2303.08773**（2023年）。[Kwc92] János Kollár（与14位合作者），《代数三维簇的翻转与丰盛性》，法国数学学会，巴黎，1992年，收录于第二届代数几何夏季研讨会论文集。研讨会于1991年8月在犹他州盐湖城的犹他大学举行。《Astérisque》第211号（1992年）。MR MR1225842（94f:14013）

Frédéric Campana，埃利·嘉当研究所，亨利·庞加莱大学，BP 239，F-54506 旺多厄夫尔莱南西 Cedex；法国大学研究院，
电子邮箱：frederic.campana@univ-lorraine.fr

Andreas Höring，J.A. Dieudonné 数学实验室，UMR 7351 法国国家科学研究中心，尼斯-索菲亚·安提波利斯大学，06108 尼斯 Cedex 02，法国电子邮箱：hoering@unice.fr

Thomas Peternell，数学研究所，拜罗伊特大学，95440 拜罗伊特，德国电子邮箱：thomas.peternell@uni-bayreuth.de