串联排队系统中的多项式指数型界

Florin Ciucu 和 Sima Mehri，华威大学

arXiv:2304.10162v1 [math.PR] 20 Apr 2023

摘要

当到达过程为泊松到达时，从各个队列中作业数量 N_i 的乘积形式结构来看，排队网络已得到充分研究；而关于整个网络中的等待时间 W，人们所知甚少。反过来，对于非泊松到达，无论是 N_i的情况还是 W的情况，人们都知之甚少。

本文研究了一个串联网络

$$GI/G/1 \to \cdot/G/1 \to \cdots \to \cdot/G/1$$

具有一般到达流的 an （Poly-Exp）结构，其构造方式为 具有轻尾服务时间。主要结果是，尾部 $\mathbb{P}(W > x)$ 具有多项式指数 al 构造如下形式的上界

$$(a_I x^I + \cdots + a_1 x + a_0) e^{-\theta x} \ .$$

多项式的次数 I 取决于瓶颈队列的数量、它们在串联排队系统中的位置，以及服务时间的“轻尾性”。这些上界在非渐近范围内（即对于有限 x）成立；研究表明它们是紧确的，并且比基于大偏差的其他结果高出许多个数量级。整体方法也特别稳健，例如可直接推广到非更新到达。

一、引言

排队理论中的一个里程碑结果是稳态下各个队列中作业数量的乘积形式结构，即

$$\mathbb{P}(N_1 = n_1, \ldots, N_M = n_M) = \prod_i \mathbb{P}(N_i = n_i) \ .$$

这一性质最早是在 Jackson 网络中得到证明的：外部到达为泊松过程，服务时间服从指数分布，每个队列采用 FIFO 调度，作业则以概率路由的方式通过网络。若干重要的推广（例如 BCMP 网络或 Kelly 网络）允许采用更一般的服务时间分布或其他调度算法；大多数排队论教材都介绍了这类结果。

乘积形式结构的显著之处在于，队列看起来仿佛在统计上相互独立，尽管通常并非如此；事实上，即使在 Jackson 网络中，如果作业被路由回先前经过的某些队列，各队列也并不独立。乘积形式结果的关键优势在于，只需对所有 $j \neq i$ 取极限 $n_j \to \infty$，便可直接得到边际队列长度的分布 N_i。

因此，在乘积形式网络中，每个队列单独来看都已得到充分理解，但对于端到端等待时间，我们所知甚少。例如，即使在 $M/M/1 \to M/M/1$ 情形下，与两个队列中的逗留时间彼此独立（Reich [31]）不同，相应的等待时间并不独立（Burke [8]）。$M/M/1 \to M/M/1$ 情形下的等待时间联合分布已有研究（Karpelevitch 和 Kreinin [22]），更一般的情形中，第二队列由多台服务器服务时的端到端等待时间分布也已有研究（Kr¨amer [25]）。Ayhan 和 Baccelli [2]，将这些结果推广到一大类具有泊松到达的网络，但仅给出了联合拉普拉斯–斯蒂尔切斯变换（LST），而该变换通常需要进行数值反演；之后，Ayhan 和 Seo [3] 得到了这类网络中各个等待时间分布的显式表达式。

关于逗留时间也有类似结果，但存在一个值得注意的例外。一个非常一般的结果是：对于所谓的准无超越路径，在开放和封闭的乘积形式网络（例如 BCMP 网络）中，联合 LST 具有乘积形式的表达式。Boxma 和 Daduna 的综述中陈述了这一结果 [6]（见定理 2.4），并将此前针对开放或封闭网络的结果推广至此；该综述还讨论了 LST 数值求逆的问题，以及乘积形式和非乘积形式网络中的若干近似技术。关于逗留时间分位数数值计算的专题综述，可参见 Harrison 和 Knottenbelt [20]。如前所述，与 $M/M/1 \to M/M/1$串联排队系统中的等待时间不同，逗留时间彼此独立。这一特殊性质可直接推广至前馈／树形 Jackson 网络，因此端到端逗留时间服从 Erlang 分布（即独立指数随机变量之和）。Walrand 和 Varaiya [35]将这一结果推广到了路径不发生超越的开放 Jackson 网络。

此前所有结果以及许多相关研究（另见 Disney 和 K¨onig 的全面综述 [14]）都有两个共同特点：它们是精确结果，但仅适用于泊松到达。放宽泊松假设、同时仍保持精确结果的一种有效方法是大偏差。Ganesh [19]研究了本文所述基本相同的一般条件下串联排队系统中的逗留时间 D；主要结果是 D 呈指数衰减

$$\mathbb{P}(D > x) \approx e^{-\theta x} \ ,$$

其渐近衰减率为 $\theta > 0$；更形式化地说，$\lim_{x\to\infty} \frac{\log \mathbb{P}(D>x)}{x} = -\theta$，也就是说，该结果是渐近精确的。

另一种方法是网络演算 [27], [9], [16]。尽管其本质上同样基于大偏差，但网络演算的一个关键特点是有效地保留指数项之前的所有项，而不是通过取极限 $\lim_{x\to\infty} \log \mathbb{P}(D>x)\, x$ 将它们舍弃。通过这种方式，可以或多或少地直接得到关于 D（以及 W）尾部的非渐近界；§ IV-A 中将给出一些具体的推导过程。尽管这类结果可以推广到广泛的到达过程类别，包括非更新过程或重尾过程（例如 [16], [26]），但其众所周知的缺点是数值精度较差。

本文旨在对具有非泊松到达的排队网络中的端到端等待时间 W 进行精确的非渐近分析。我们特别考虑具有M 个队列、一般到达过程和轻尾服务时间（即具有某些有限的矩母函数）的 $GI/G/1 \to \cdot/G/1 \to \cdots \to \cdot/G/1$ 串联网络。除了输入过程的非泊松特性之外，使 $\mathbb{P}(W > x)$的分析极具挑战性的因素是 W 由 M 嵌套随机游走构成的结构。

从宏观上看，我们的方法遵循标准的 $GI/G/1$ 分析思路，即建立并求解积分/更新方程。关键区别在于，我们不再将 $\mathbb{P}(W \le x)$本身作为被积函数，而是先将W 分解为两个“合适的”随机游走，并以它们的联合分布作为被积函数。由此得到的更新方程使多项式指数型解得以存在，从而直接导出关于$\mathbb{P}(W > x)$的多项式指数型界。为作说明，我们给出了 $GI/M/1 \to \cdot/M/1$ 串联排队系统的具体构造；尽管其中的计算涉及初等积分，整体分析仍颇为繁琐。数值结果表明，这些界不仅十分紧，而且其多项式指数结构也有助于在小 x时，于双对数尺度上捕捉 $\mathbb{P}(W > x)$的凹性。

下文首先分析由两个队列组成的串联排队系统，以便在符号较少的情形下阐明核心思想。 M 队列的一般情形将在§III中讨论；虽然核心思想可从 $M = 2$推广而来，但有些技术上的推广并不简单，因此我们给出完整证明。接着，我们对 $GI/M/1 \to \cdot/M/1$ 进行明确分析，并通过数值比较，将结果与仿真以及基于大偏差的替代界进行对照。最后，我们讨论若干直接的扩展和开放问题，并总结全文。附录收录了辅助性技术结果以及若干尚未给出的证明。

II. Simplest Case: Two Queues ($M = 2$)

为了便于理解我们的整体方法，我们先从两个串联队列的情形开始。一般且预计更为繁琐的 M 队列情形将在 §III 中讨论。

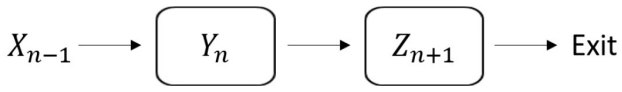


图 1：双队列串联排队系统中作业 n 的到达间隔时间和服务时间

我们考虑串联排队系统 $GI/G/1 \to \cdot/G/1$。作业 0、1、2、.....依次经过两个队列，每个队列的容量均为无限；作业 0 在时刻 0 到达，作业 n 在时刻 $X_0 + \cdots + X_{n-1}$ [1] 到达。作业 n 在第一和第二队列的服务时间分别为 Y_n 和 Z_{n+1}；见图 1。所有序列 (X_n)、(Y_n) 和 (Z_n) 均为独立同分布且相互独立。我们还假设稳定性条件 $\mathbb{E}[X_0] > \max\{\mathbb{E}[Y_1], \mathbb{E}[Z_2]\}$。

假设服务时间是轻尾的，即其矩母函数有限。具体而言，对于第一队列，我们假设 $\theta^+ := \sup\{\theta > 0 : \mathbb{E}[e^{\theta(Y-X)}] < \infty\} \in (0, \infty]$. 若 $\mathbb{E}[e^{\theta^+(Y-X)}] \ge 1$，这涵盖了大多数感兴趣的情况，那么 $\mathbb{E}[e^{\theta(Y-X)}] = 1$ 存在唯一解，它决定了等待时间/逗留时间的渐近衰减率（[23]）。否则，若 $\mathbb{E}[e^{\theta^+(Y-X)}] < 1$，则渐近衰减率为 θ^+；此类“超轻尾”分布的示例见附录 § A。

The 主要关注的指标是该串联排队系统中某个 作业的等待时间之和 W 。

A. 等待时间之和与乘积形式结果的对比

与乘积形式结果不同，处理等待时间之和时面临的根本困难，可以从 Burke 证明前者并非独立的结论中得到理解 [8]；Harrison 和 Knottenbelt [20]也曾非正式地提出过类似的论证。考虑稳态下的 $M/M/1 \to M/M/1$ 特殊情况，并分别用 $N_1(t)$和 $N_2(t)$表示时刻 t两个队列中的作业数量，用 W_1 和 W_2 表示某个 作业的等待时间。Burke 证明了

$$\mathbb{P}(W_2 = 0 \mid W_1 = 0) > \mathbb{P}(W_2 = 0)$$

[1]按照惯例，本文中所有末尾索引小于起始索引的求和均为零，例如 $X_0 + X_{-1} = 0$。

通过明确计算左边的项；右边只需根据 Jackson 网络的到达定理即可得出 $\mathbb{P}(N_2(t) = 0)$（例如参见 Walrand [36], 第 73 页）。

将 T 和 S 分别记为在第一队列中等待时间为零的作业的到达时间和服务时间，前述关系变为

$$\mathbb{P}\left(N_2(T+S)=0 \mid N_1(T)=0\right) > \mathbb{P}(N_2(T+S)=0) \ ,$$

i.e.， $N_1(T)$ 和 $N_2(T+S)$ 并不独立，即使 T 是一个与 S 独立的停止时刻 .

现在应该可以看出，同时处理 W_1 和 W_2 的一个关键难点在于，这等价于在缺乏独立性的不同（随机）时刻，同时且隐式地处理 N_1 和 N_2 。这与乘积形式结果不同，后者是在同一时刻处理 N_1 和 N_2 。

$$\mathbb{P}(N_1(t)=n_1, N_2(t)=n_2) = \mathbb{P}(N_1(t)=n_1)\mathbb{P}(N_2(t)=n_2) \ .$$

B. 等待时间之和的新颖表示

我们继续进行。首先计算作业 n 离开第二队列（即整个串联排队系统）的离开时刻

$$\max_{0\le i<j\le n+1} X_0+\cdots+X_{i-1}+Y_i+\cdots+Y_{j-1}+Z_j+\cdots+Z_{n+1} \ ,$$

这可通过运用 Lindley递推关系 的典型论证得到。

为便于后续记号处理，我们将所有索引从 k 改为 $n+2-k$；特别地，作业 n的服务时间变为 Y_2 和 Z_1，作业 n 与 $n-1$ 之间的到达间隔变为 X_3，作业 $n-1$ 的服务时间变为 Y_3和 Z_2，依此类推。于是，作业 n 的离开时刻可改写为

$$\max_{1\le i<j\le n+2} X_{n+2}+\cdots+X_{j+1}+Y_j+\cdots+Y_{i+1}+Z_i+\cdots+Z_1 \ .$$

因此，作业 n 在串联排队系统中的等待时间与下式具有相同的分布：

$$\begin{aligned} W &= \max_{1\le i<j\le n+2} Z_1+\cdots+Z_i+Y_{i+1}+\cdots+Y_j+X_{j+1}+\cdots+X_{n+2}-(Z_1+Y_2+X_3+\cdots+X_{n+2}) \\ &= \max\left\{0, T^1+(Z_2-Y_2)_+, T^2+Z_2-Y_2\right\} \ . \end{aligned} \tag{1}$$

记 $u_+ := \max\{u,0\}$，并且

$$T^1 := \max_{3\le i\le n+2} U_3+\cdots+U_i$$

$$T^2 := \max_{3\le i<j\le n+2} V_3+\cdots+V_i+U_{i+1}+\cdots+U_j \ ,$$

其中， $V \simeq Z-X$ 和 $U \simeq Y-X$ （“$\simeq$”表示分布相等）。注意，当 $n=1$时， T^2 没有定义；当 $n=0$时，T^1 和 T^2 均没有定义；在这些情况下，将 W 表达式中相应的未定义求和设为 0，例如，当 $n=0$时， $W=0$ 。

作业 n的逗留时间（延迟），即等待时间与两段服务时间之和

$$D := W+Z_1+Y_2$$

在极限情况下 $n\to\infty$ 恢复为标准表示形式（参见 Ganesh [19] 或 Foss [17]）

$$\sum_{0\le i\le j} Z_0+\cdots+Z_i+Y_i+\cdots+Y_j-(X_0+\cdots+X_{j-1}) \ ,$$

通过对（X_n）、（Y_n）和（Z_n）稍作重新编号。与这种更为紧凑的表示形式不同，我们的表示形式与（1）的关键区别在于避免了求和中索引的重叠“$i\le j$”；我们通过将 T^1 与 T^2分开来实现这一点，后者涉及带有“$i<j$”的求和。正如§II-D中即将详细说明的，这种分离对于我们的整体方法至关重要。

在极限情况下， $n\to\infty$ 对于 W 和 D 存在唯一的平稳分布（Loynes [28]）；我们将主要讨论 W，并偶尔对 D作一些评论。

C. 上界和下界的通用构造

由 (1) 得到的 W 表示法是我们整体方法中的关键一步。下一个定理将说明其用途：该定理使我们能够构造 $\mathbb{P}(W > x)$的一般上界和下界。首先引入一些额外的记号：$u \wedge v :=\min\{u, v\}$ 以及 $u \vee v :=\max\{u, v\}$。

定理 *1*：设 U 和 V 是两个满足 $\mathbb{P}(U > 0) > 0$ 和 $\mathbb{P}(V > 0) > 0$的随机变量。(a) 积分方程

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{u\geq U\}}\psi\left((u-U)\wedge(v-V), v-V\right)\right] = \psi(u,v) \tag{2}$$

在 $\bar{\mathbb{R}}^2$ 上界有界函数类中存在唯一解，其极限为 $\psi(\infty,\infty) =\lim_{u,v\to\infty}\psi(u,v) = 1$。

这由下式给出

$$\psi(u,v) := \mathbb{P}(T_1^1 \leq u, T_1^2 \leq v)\ ,$$

其中

$$T_k^1 := \sup_{k\leq i<\infty} U_k + \cdots + U_i$$

$$T_k^2 := \sup_{k\leq i<j<\infty} V_k + \cdots + V_i + U_{i+1} + \cdots + U_j$$

对于 $k \geq 1$ 和 (U_1, V_1)、$(U_2, V_2)\ldots$ 是 (U, V) 的独立同分布副本；按记号约定，$\mathbb{R} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$。(b) 假设该 function γ：$\bar{\mathbb{R}}^2 \to (-\infty, K_\gamma]$，对于某个有限的 K_γ，对所有 $(u, v) \in \text{supp}(\gamma \vee 0) \subseteq \bar{\mathbb{R}}^2$

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{u\geq U\}}\gamma\left((u-U)\wedge(v-V), v-V\right)\right] \geq \gamma(u,v)\ . \tag{3}$$

如果 $\gamma(\infty,\infty) :=$ 上极限$_{u,v\to\infty}\gamma(u,v) = 1$ 那么 $\psi \geq \gamma$。

(c) 假设函数 η：$\bar{\mathbb{R}}^2 \to [0,\infty)$ 对所有 $(u, v) \in \text{supp}(\psi)$ 均满足 $v \geq u$

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{u\geq U\}}\eta\left((u-U)\wedge(v-V), v-V\right)\right] \leq \eta(u,v)\ . \tag{4}$$

若 $\eta(\infty,\infty) :=$ 下极限$_{u,v\to\infty}\eta(u,v) = 1$，则 $\psi(u,v) \leq \eta(u,v)$ 对所有 $v \geq u$ 均成立。

如下文将很快展示，求 $\mathbb{P}(W > x)$ 上界和下界的问题可归结为分别求出 (b) 和 (c) 中的函数 γ 和 η。作为一条技术性说明，(c) 中的附加限制 $v \geq u$ 可以通过对 (4) 中的 η 施加较弱的条件来加强下界。

证明：对于 (a) 部分，我们先证明给定的 ψ 满足 (2)；唯一性将在证明 (b) 后得出。我们有

$$\begin{aligned}\psi(u,v) &= \mathbb{P}(T_1^1 \leq u, T_1^2 \leq v)\\ &= \mathbb{P}\left(T_2^1 \leq (u-U_1)\wedge(v-V_1), T_2^2 \leq v-V_1, U_1 \leq u\right),\\ &= \mathbb{P}\left(T_1^1 \leq (u-U)\wedge(v-V), T_1^2 \leq v-V, U \leq u\right),\end{aligned}$$

其中 $(U,\ V)$ 与 $(T_1^1,\ T_1^2)$ 相互独立。因此

$$= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{u\geq U\}}\psi\left((u-U)\wedge(v-V), v-V\right)\right].$$

为证明 (b) 部分，即 $\psi \geq \gamma$，先定义函数

$$f(u,v) := \limsup_{(x,y)\to(u,v)} \left(\gamma(x,y) - \psi(x,y)\right)\ \forall (u,v) \in \bar{\mathbb{R}}^2\ ,$$

它是上半连续的，并且在 $\bar{\mathbb{R}}^2$ 的任意闭子集上都能取到最大值（见附录 § B.**1**，**2**）。令

$$K := \sup_{(u,v)\in\bar{\mathbb{R}}^2} f(u,v)\ .$$

若 $K \leq 0$，证明即告完成；否则，假设 $K > 0$。定义

$$\mathcal{K} := \{(u,v) \in \bar{\mathbb{R}}^2 : f(u,v) = K\}\ ,$$

它是 $\bar{\mathbb{R}}^2$ 的一个闭子集，并且

$$a := \min\{u \in \bar{\mathbb{R}} : \exists v \in \bar{\mathbb{R}} : (u,v) \in \mathcal{K}\}$$

$$b := \min\{v \in \bar{\mathbb{R}} : (a,v) \in \mathcal{K}\}\ .$$

由于 $f(a,b) = K > 0$, 存在一个序列 $(a_n, b_n) \in \text{supp}(\gamma \vee 0)$，使得 $(a_n, b_n) \to (a,b)$，当 $n \to \infty$ 时，并且

$$\begin{aligned}K = f(a,b) &= \lim_{n\to\infty}(\gamma-\psi)(a_n,b_n)\\ &\leq \limsup_{n\to\infty}\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{a_n\geq U\}}(\gamma-\psi)\left((a_n-U)\wedge(b_n-V), b_n-V\right)\right]\end{aligned}$$

由于 $\gamma-\psi\le K_\gamma<\infty$，我们还可以进一步使用法图引理

$$\begin{aligned}&\le \mathbb{E}\left[\limsup_{n\to\infty}\mathbb{1}_{\{a_n\ge U\}}(\gamma-\psi)\left((a_n-U)\wedge(b_n-V),b_n-V\right)\right]\\&\le K\cdot\mathbb{P}(a=U)+\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{a>U\}}f\left((a-U)\wedge(b-V),b-V\right)\right]\\&\le K\cdot\mathbb{P}(a\ge U)\ ,\end{aligned}$$

根据 K 和 f 的定义。由此可得 $\mathbb{P}(a\ge U)=1$，因此必然有

$$f\left((a-U)\wedge(b-V),b-V\right)=K \tag{5}$$

对于上述不等式成立为等式的情形，几乎必然（a.s.）成立。

接下来，我们声称 $(a,b)=(\infty,\infty)$。反设 $a<\infty$。那么，(5) 和 $\mathbb{P}(U>0)>0$ 与 a 的选取相矛盾，因此 $a=\infty$。类似地，反设 $b<\infty$。那么，(5) 和 $\mathbb{P}(V>0)>0$ 与 b 的选取相矛盾，因此 $b=\infty$ 也成立。最后，

$$K=f(\infty,\infty)=\limsup_{u,v\to\infty}(\gamma-\psi)(u,v)=0$$

根据 γ 和 ψ 的极限条件，从而得到 $\psi\ge\gamma$。

现在我们可以证明满足 (2) 的 ψ 的唯一性。设 ψ_1 和 ψ_2 是两个有界解，满足 $\psi_i(\infty,\infty)=\lim_{u,v\to\infty}\psi_i(u,v)=1$。将定理的第二部分应用于 $\psi=\psi_i$ 和 $\gamma=\psi_{3-i}$（注意，证明只需要 ψ 满足 (2)、有界，且 $\psi(\infty,\infty)=\lim_{u,v\to\infty}\psi(u,v)=1$），我们得到 $\psi_i\ge\psi_{3-i}$ 对 $i=1,2$ 成立，因此 $\psi_1=\psi_2$。

证明 fo　　定理的最后一部分，即 $\psi(u,v)\le\eta(u,v)$ 关于 $v\ge u$ 的情况也类似；参见附录 § C　　. □

现在我们能够建立定理 1 的 (b) 和 (c) 部分中的一般函数 γ 和 η 与 $\mathbb{P}(W>x)$ 的上界之间的联系。

推论*2*:　（一般上界和下界）考虑定理 1 中的函数 ψ、γ 和 η。那么，作业 $n\to\infty$ 的等待时间对所有 $x\ge0$ 均满足

$$\begin{aligned}1-\mathbb{E}\left[\eta(x-(Z-Y)_+,x-(Z-Y))\right]&\le\mathbb{P}(W>x)=1-\mathbb{E}\left[\psi(x-(Z-Y)_+,x-(Z-Y))\right]\\&\le 1-\mathbb{E}\left[\gamma(x-(Z-Y)_+,x-(Z-Y))\right]\ .\end{aligned} \tag{6}$$

相应的逗留时间满足

$$\begin{aligned}&1-\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{Z_1+Y<x\}}\eta(x-(Z_1+Z_2\vee Y),x-(Z_1+Z_2))\right]\\&\quad\le\mathbb{P}(D>x)=1-\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{Z_1+Y<x\}}\psi(x-(Z_1+Z_2\vee Y),x-(Z_1+Z_2))\right]\\&\quad\le 1-\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{Z_1+Y<x\}}\gamma(x-(Z_1+Z_2\vee Y),x-(Z_1+Z_2))\right]\ .\end{aligned} \tag{7}$$

请注意，为避免冗杂，我们在可能的情况下省略了 Y 和 Z 的下标。该推论暗示，一旦构造出满足定理 1 的 (b) 和 (c) 部分条件的显式函数 γ 和 η，便可得到 $\mathbb{P}(W>x)$ 和 $\mathbb{P}(D>x)$ 的显式上界。第 IV 节将给出一个例子。

证明：由 W 在式 (1) 中的表示可知，对于所有 $x\ge0$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(W>x)&=\mathbb{P}(\max\left\{0,T^1+(Z-Y)_+,T^2+Z-Y\right\}>x)\\&=1-\mathbb{P}(\max\left\{0,T^1+(Z-Y)_+,T^2+Z-Y\right\}\le x)\\&=1-\mathbb{P}\left(T^1\le x-(Z-Y)_+,T^2\le x-(Z-Y)\right)\\&=1-\mathbb{E}\left[\psi(x-(Z-Y)_+,x-(Z-Y))\right]\ .\end{aligned}$$

由于 $x-(Z-Y)_+\le x-(Z-Y)$ 且 $\gamma(u,v)\le\psi(u,v)\le\eta(u,v)\ \forall v\ge u$，因此 $P(W>x)$ 的上界和下界立即可得。$\mathbb{P}(D>x)$ 的上界和下界由 $D=W+Z_1+Y$ 得出。□

D. 积分方程 *(2)* 与相关工作对比

定理 1 的核心在于积分方程 (2)，该方程使得能够针对 $P(W>x)$ 构造通用的上界和下界。该方程可以改写为一个二维更新方程

$$\psi(u,v)=\int_{-\infty}^{u}\int_{-\infty}^{\infty}\psi\left((u-x)\wedge(v-y),v-y\right)dF_{U,V}(x,y)\ , \tag{8}$$

其中，$F_{U,V}$是（U,V）的联合分布；其“更新性”源于将 T_1^1和T_1^2中的底层随机游走表示为 T_2^1和 T_2^2的形式，即提取出首个增量 U_1和 V_1，并进一步利用平稳性。

从概念角度来看，(8) 与 $GI/G/1$ 的标准分析有关。事实上，求解图 1 中第一队列的等待时间$\mathbb{P}(W^1 \le x)$，归结为求解

$$\mathbb{P}(W^1 \le x) = \int_{-\infty}^{x} \mathbb{P}(W^1 \le x - y) dF_U(y) \ , \tag{9}$$

通过应用更新论证和勒贝格控制收敛定理。

(9) 与 (8) 之间的关键区别在于被积函数本身。(9) 使用的是所要求的分布 $\mathbb{P}(W^1 \le x)$，而 (8) 中的被积函数则基于 $\mathbb{P}(T_1^1 \le u, T_1^2 \le v)$ 的联合分布，该分布源自 W 中的底层随机游走；正如定理 1（部分 (a)）所示，这个联合分布也是 (8) 的唯一 解。

尽管存在大量相关文献（例如，参见 Cohen [13]），但方程 (9) 仍然没有精确的闭式解，部分原因在于与 Wiener-Hopf 型积分方程相关的数值计算仍面临诸多挑战。不过，该方程确实适用于一种通用且尤为简单的上界和下界构造方法。具体而言，假设存在一个函数 $\gamma(x)$，使得对于所有 $x \ge 0$

$$\int_{-\infty}^{x} \gamma(y) dF(y) \ge \gamma(x) \ , \tag{10}$$

then

$$\mathbb{P}(W^1 > x) \le 1 - \gamma(x) \ .$$

使用相同的更新论证和归纳法即可立即得到证明（参见 Kingman [24]）。其中一个这样的函数是 $\gamma(x) = 1 - e^{-\theta x}$，其中 $\theta > 0$ 满足 $\mathbb{E}[e^{\theta U}] = 1$（或者，更一般地，$\theta = \sup\{r > 0 \colon \mathbb{E}[e^{rU}] \le 1\}$；回顾第 II 节开头关于轻尾分布的讨论）；相应的上界 $\mathbb{P}(W^1 > x) \le e^{-\theta x}$ 称为 $GI/G/1$队列的 Kingman 上界，也可以通过基于鞅的论证得到（Kingman [23]）。

值得将我们的积分方程应用于单个 $GI/G/1$ 队列，令 $Z = 0$ （即图1所示串联排队系统中第二队列的服务时间为零）。于是，根据定理 1和推论2的(b)部分，推导上界可归结为寻找满足以下条件的函数 $\gamma(u, v)$

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{u \ge Y - X\}} \gamma((u - (Y - X)) \wedge (v + X), v + X)\right] \ge \gamma(u, v) \ , \tag{11}$$

对所有$(u, v) \in \text{supp}\ (\gamma \vee 0) \subseteq \bar{\mathbb{R}}^2$ 以及 $\gamma(\infty, \infty) = 1$均成立。如预期那样，令

$$\gamma(u, v) = \begin{cases} 1 - e^{-\theta u} & \text{if } u \le v \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases} \ .$$

类似地，(10)和(11)都可得到更紧的Ross上界 $\mathbb{P}(W^1 > x) \le \frac{1}{\inf_{u \ge 0} \mathbb{E}\left[e^{\theta(U-u)} | U > u\right]} e^{-\theta x}$，它在$GI/M/1$ 情形下是精确的（Ross [32]）；具体做法是将 $\gamma(x)$和 $\gamma(u, v)$中的指数项乘以上界中的前置因子。

对于单个队列的分析，(11) 看起来不必要地复杂，部分原因是它源自积分方程 (2)，而该方程是为两个队列组成的串联排队系统设计的；相比之下，(10) 则是为单个队列设计的。它的关键优势，尤其是其母积分方程 (2) 的关键优势，在于二者都允许得到闭式解——接下来将展示两个队列的情形，之后再推广到一般的串联队列。

E. 多项式指数型界的存在性

在显式构造可用于对 $\mathbb{P}(W > x)$ 给出紧确（上）界的 γ 之前，我们先证明其多项式指数型界的存在性，并给出一种显式构造。为此，在下一个存在性定理的证明中，我们暂不考虑 多项式系数的紧确性。

定理 *3*: （多项式-指数上界的存在性）定义

$$\theta_1 := \sup\{r > 0 : \mathbb{E}[e^{rU}] \le 1\}, \qquad \theta_2 := \sup\{r > 0 : \max\{\mathbb{E}[e^{rV}], \mathbb{E}[e^{rU}]\} \le 1\}$$

$$I_U(r) := \begin{cases} 1 & \text{if} \quad \mathbb{E}[e^{rU}] = 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}, \qquad I_V(r) := \begin{cases} 1 & \text{if} \quad \mathbb{E}[e^{rV}] = 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

对于随机变量 U，V。对于某个 $a \in \mathbb{R}$，定义

$$\mathcal{D}_a := \{(u, v) : u \ge -a_+, \ v \ge (-a) \vee u\}$$

并假设存在一个常数 K，使得对于所有 $v \ge 0$

$$\mathbb{E}\left[(V - v) e^{\theta_2 (V - v)} \mid V > v\right] \le K < \infty \ .$$

那么存在一个正数常数 $P_1 \geq 0$ 和一个多项式 $P_2\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$，其次数为 $I_V(\theta_2)$，且满足 $P_2(u,v) \geq 0\ \forall (u,v) \in \mathcal{D}_a$，使得

$$\gamma(u,v) := \mathbb{1}_{\{(u,v)\in\mathcal{D}_a\}}\left[1 - P_1 e^{-\theta_1 u} - P_2(u,v)e^{-\theta_2 v}\right]$$

满足定理 1 的 (b) 部分中的要求。

参数 a 的作用是优化 γ，即收紧 $\mathbb{P}(W > x)$ 的上界；更多详情请参见 §IV 中的示例。请注意，γ 的多项式指数结构由两个指数项及其对应的多项式混合而成。如果这些队列是齐次的（U 和 V 服从相同的分布），那么 $\theta_1 = \theta_2$，因此只有一个指数项。否则，多项式指数结构会更复杂，并取决于“瓶颈”的位置。例如，如果 U 和 V 的分布属于同一类，但 $E[U] > E[V]$，那么第一队列就是瓶颈，$\theta_1 = \theta_2$，且 $I_V(\theta_2) = 0$，即 P_2 的次数为 0。反之，如果 $E[U] < E[V]$，那么第二个节点就是瓶颈；在附加条件 $\mathbb{E}[e^{\theta^+ U}] \geq 1$ 下（回顾 §II 开头关于“轻尾性”的描述），则 $\theta_1 > \theta_2$ 且 $I_V(\theta_2) = 1$；因此，多项式指数结构包含两个指数项，而 P_2 的次数为 1。

我们还要指出，η 是否存在匹配的多项式指数结构（这是得到 $\mathbb{P}(W > x)$ 下界所必需的），目前仍是一个开放问题。

证明：固定 $a \in \mathbb{R}$。我们分两步进行。

步骤 *1*：首先，我们证明存在一个常数 $Q_1 \geq 0$ 和一个多项式 $Q_2\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，其次数为 $I_V(\theta_2)$，且具有非负系数，使得对于所有 $u \geq -a_+,\ v \geq 0$

$$Q_1 e^{-\theta_1 u} \geq \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{u\geq U\}} Q_1 e^{\theta_1(U-u)}\right] + \mathbb{P}(U > u) \tag{12}$$

$$Q_2(v)e^{\theta_2(a-v)} \geq \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{v\geq V\}}\left(Q_1 e^{\theta_1(V+a-v)} + Q_2(v-V)e^{\theta_2(V+a-v)}\right)\right] + \mathbb{P}(V > v)\ . \tag{13}$$

证明：不等式 (12) 立即成立于

$$Q_1 := \left(\inf_{u\geq -a_+} \mathbb{E}\left[e^{\theta_1(U-u)} \mid U > u\right]\right)^{-1}$$

通过拆分 $\mathbb{1}_{\{u\geq U\}} = 1 - \mathbb{1}_{\{U>u\}}$ 并改写为 $\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{U>u\}} e^{\theta_1(U-u)}] = E[e^{\theta_1(U-u)} \mid U > u]\mathbb{P}(U > u)$。

令 $Q_2(v) := A_0 + A_1 v$。为了同样证明 (13)，只需证明存在非负常数 A_0，A_1 使得

$$\begin{aligned} &A_0 e^{\theta_2 a}\left\{e^{-\theta_2 v} - \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{v\geq V\}} e^{\theta_2(V-v)}\right]\right\} + A_1 e^{\theta_2 a}\left\{v e^{-\theta_2 v} - \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{v\geq V\}}(v-V)e^{\theta_2(V-v)}\right]\right\} \\ &\geq \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{v\geq V\}} Q_1 e^{\theta_1(V+a-v)}\right] + \mathbb{P}(V > v)\ . \end{aligned} \tag{14}$$

对于 $v \geq 0$，并利用 $\theta_1 \geq \theta_2$，右侧可上界为

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{v\geq V\}} Q_1 e^{\theta_1(V+a-v)}\right] + \mathbb{P}(V > v) \\ &\leq e^{\theta_1 a}\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{v\geq V\}} Q_1 e^{\theta_2(V-v)}\right] + \mathbb{P}(V > v) \\ &= e^{\theta_1 a}\mathbb{E}\left[Q_1 e^{\theta_2(V-v)}\right] + \mathbb{P}(V > v) - e^{\theta_1 a}\mathbb{E}\left[Q_1 e^{\theta_2(V-v)} \mid V > v\right]\mathbb{P}(V > v) \\ &\leq Q_1 \mathbb{E}[e^{\theta_2 V}]e^{\theta_1 a - \theta_2 v} + \mathbb{P}(V > v)\ . \end{aligned}$$

在左侧，我们对 $A_0 e^{\theta_2 a}$ 的系数取相反方向的上界。

$$e^{-\theta_2 v} - \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{v\geq V\}} e^{\theta_2(V-v)}\right] \geq \left(1 - \mathbb{E}\left[e^{\theta_2 V}\right]\right)e^{-\theta_2 v} + \mathbb{P}(V > v)$$

以及类似地，系数为 A_1

$$\begin{aligned} &v e^{-\theta_2 v} - \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{v\geq V\}}(v-V)\, e^{\theta_2(V-v)}\right] \\ &\quad = v e^{-\theta_2 v} - \mathbb{E}\left[(v-V)\, e^{\theta_2(V-v)}\right] + \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{V>v\}}(v-V)\, e^{\theta_2(V-v)}\right] \\ &\quad \geq \left(1 - \mathbb{E}\left[e^{\theta_2 V}\right]\right) v e^{-\theta v} + \mathbb{E}\left[V e^{\theta_2 V}\right] e^{-\theta_2 v} - K\mathbb{P}(V > v)\ . \end{aligned}$$

因此，只需确定满足更严格版本的（13）的系数 A_0 和 A_1 即可。

$$\begin{aligned} &A_0 e^{\theta_2 a}\left\{\left(1 - \mathbb{E}\left[e^{\theta_2 V}\right]\right)e^{-\theta_2 v} + \mathbb{P}(V > v)\right\} \\ &\qquad + A_1 e^{\theta_2 a}\left\{\left(1 - \mathbb{E}\left[e^{\theta_2 V}\right]\right) v e^{-\theta v} + \mathbb{E}\left[V e^{\theta_2 V}\right] e^{-\theta_2 v} - K\mathbb{P}(V > v)\right\} \\ &\quad \geq Q_1 \mathbb{E}[e^{\theta_2 V}]e^{\theta_1 a - \theta_2 v} + \mathbb{P}(V > v)\ . \end{aligned} \tag{15}$$

有两种情况。如果 $\mathbb{E}\left[e^{\theta_2 V}\right] < 1$ 那么

$$A_1 := 0 \quad \text{and} \quad A_0 := \max\left\{\frac{Q_1 \mathbb{E}[e^{\theta_2 V}] e^{(\theta_1-\theta_2)a}}{1-\mathbb{E}[e^{\theta_2 V}]}, e^{-\theta_2 a}\right\}$$

满足 (14)，且 $Q_2(v) = A_0$ 的次数为 $I_V(\theta_2) = 0$。

在另一种情况下，若 $\mathbb{E}\left[e^{\theta_2 V}\right] = 1$，则

$$A_1 := \frac{Q_1 e^{(\theta_1-\theta_2)a}}{\mathbb{E}[V e^{\theta V}]} \quad \text{and} \quad A_0 := \max\left\{e^{-\theta_2 a} + A_1 K, 0\right\}$$

也满足 (14)；此外，$Q_2(v) = A_0 + A_1 v$ 的次数为 $I_V(\theta) = 1$。注意，在 A_0 的表达式中，对于 (14) 只需使用“max”中的第一项；第二项仅在 $A_0 \geq 0$ 时才需要。

我们特别指出，当 $\mathbb{E}\left[e^{\theta_2 V}\right] = 1$ 时，$Q_2(v)$ 的次数必为 1；具体而言，需要 $A_1 > 0$ 来抵消 (14) 右侧的项 $e^{-\theta_2 v}$。

步骤 2：令 $P_1 := Q_1$，并令 $P_2(u,v) := Q_2(v+a)$，它们来自步骤 1。则 γ 满足 (3)。

证明：首先注意，γ 在第一队列中的“边际”函数

$$\gamma_1(u) := (1 - P_1 e^{-\theta_1 u}) \mathbb{1}_{\{u \geq -a_+\}}$$

对所有 $u \geq -a_+$ 均成立

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{u \geq U\}} \gamma_1(u-U)\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{u \geq U\}} \left(1 - P_1 e^{\theta_1 (U-u)}\right)\right] \\ &\geq 1 - P_1 e^{-\theta_1 u} = \gamma_1(u) \end{aligned} \tag{16}$$

根据 Q_1的定义。另请注意，

$$\operatorname{supp}(\gamma \vee 0) = \{(u,v) \in \mathcal{D}_a : 1 > Q_1 e^{-\theta_1 u} + Q_2(v+a) e^{-\theta_2 v}\} \subseteq \mathcal{D}_a \ .$$

现在我们可以证明 γ 的条件 (3)。对于所有 $(u,v) \in \mathcal{D}_a$

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{u \geq U\}} \gamma\left((u-U) \wedge (v-V), v-V\right)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{u \geq U, v+a \geq V\}} \left[1 - Q_1 e^{-\theta_1((v-V)\wedge(u-U))} - Q_2(a+v-V) e^{-\theta_2 (v-V)}\right]\right] \end{aligned}$$

由于 $Q_1 \geq 0$，并且利用 x 的 *max*，我们可以继续进行。

$$\begin{aligned} &\geq \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{u \geq U, v+a \geq V\}} \left(1 - Q_1 e^{\theta_1 (U-u)} - \left(Q_1 e^{\theta_1 (V-v)} + Q_2(a+v-V) e^{\theta_2 (V-v)}\right)\right)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{u \geq U, v+a < V\}} \left(-1 + Q_1 e^{\theta_1 (U-u)}\right)\right] + \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{u \geq U\}} \left(1 - Q_1 e^{\theta_1 (U-u)}\right)\right] \\ &\quad - \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{u \geq U, v+a \geq V\}} \left(Q_1 e^{\theta_1 (V-v)} + Q_2(a+v-V) e^{\theta_2 (V-v)}\right)\right] \end{aligned}$$

对于第一个期望使用 $Q_1 \geq 0$，对于第二个使用(16)，由于$(u,v) \in \mathcal{D}_a$ 意味着 $u \geq -a_+$，我们可以进一步继续

$$\begin{aligned} &\geq -\mathbb{P}(u \geq U, v+a < V) + \left(1 - Q_1 e^{-\theta_1 u}\right) \\ &\quad - \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{u \geq U, v+a \geq V\}} \left(Q_1 e^{\theta_1 (V-v)} + Q_2(a+v-V) e^{\theta_2 (V-v)}\right)\right] \\ &\geq -\mathbb{P}(v+a < V) - \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{v+a \geq V\}} \left(Q_1 e^{\theta_1 (V-v)} + Q_2(a+v-V) e^{\theta_2 (V-v)}\right)\right] \\ &\quad + \left(1 - Q_1 e^{-\theta_1 u}\right) \\ &\geq 1 - Q_1 e^{-\theta_1 u} - Q_2(v+a) e^{-\theta_2 v} = \gamma(u,v) \ . \end{aligned}$$

在第二个不等式中，我们舍弃了事件 $\{u \geq U\}$；在最后一个不等式中，我们使用了步骤 1 中的 (13)；对于最后一个等式，请回想整条不等式链对 $(u,\ v) \in \mathcal{D}_a$ 均成立。

最后，定理 1 的 (b) 部分中的其余条件，即 γ 有上界且 $\gamma(\infty,\infty) = 1$，显然成立。 □

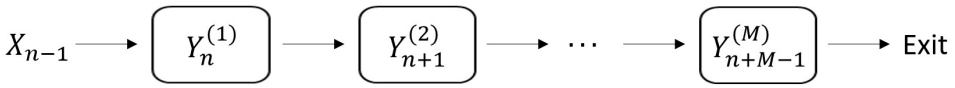


图 2：作业 n 在 M 个串联排队系统中的到达间隔和服务时间

III. General Case: M Queues

现在我们讨论 M 个队列串联的 $GI/G/1 \to \cdot/G/1 \to \cdots \to \cdot/G/1$ 一般情形。与 $M=2$ 情形一样，作业 0 在时刻零到达，作业 n 在时刻 $X_0+\cdots+X_{n-1}$ 到达。作业 n 在各节点处的服务时间具有轻尾分布，记为 $Y_{(j)\,n+j-1}$，其中 $j=\{1,2,\ldots,M\}$[2]；见图 2。所有序列均为独立同分布且相互独立，并且我们假设稳定性条件 $\mathbb{E}[X_0] > \max_j \mathbb{E}[Y_{(j)\,j-1}]$。

作业 n 离开串联排队系统的时刻为

$$\max_{0\le i_1<\ldots<i_M\le M+n-1} X_0+\cdots+X_{i_1-1}+Y_{i_1}^{(1)}+\cdots+Y_{i_2-1}^{(1)}+Y_{i_2}^{(2)}+\cdots+Y_{i_3-1}^{(2)} \\ +\cdots+Y_{i_M}^{(M)}+\cdots+Y_{M+n-1}^{(M)} .$$

将所有下标从 k 改为 $M+n-k$ 后，离开时刻可重写为

$$\tau = \max_{1\le i_M<i_{M-1}<\ldots<i_1\le M+n} Y_1^{(M)}+\cdots+Y_{i_M}^{(M)}+Y_{i_M+1}^{(M-1)}+\cdots+Y_{i_{M-1}}^{(M-1)} \\ +\cdots+Y_{i_2+1}^{(1)}+\cdots+Y_{i_1}^{(1)}+X_{i_1+1}+\cdots+X_{M+n} .$$

因此，作业 n 的端到端等待时间与以下变量同分布：

$$\begin{aligned} W &= \tau - [Y_1^{(M)}+Y_2^{(M-1)}+\cdots+Y_M^{(1)}+X_{M+1}+X_{M+2}+\cdots X_{M+n}] \\ &= \max_{1\le j\le m}\left\{T_{M+1,M+n}^{j}+S^{j}-\sum_{k=1}^{M}Y_k^{(M+1-k)}\right\}\vee 0 \end{aligned}$$

其中

$$S^M = Y_1^{(M)}+\cdots+Y_M^{(M)} ,$$

$$S^j = \max_{1\le i_M<\ldots<i_{j+1}\le M} Y_1^{(M)}+\cdots+Y_{i_M}^{(M)}+Y_{i_M+1}^{(M-1)}+\cdots+Y_{i_{M-1}}^{(M-1)}+\cdots+Y_{i_{j+1}+1}^{(j)}+\cdots+Y_M^{(j)} ,$$

对于 $1\le j\le M-1$，并且

$$T_{k,l}^{j} := \sup_{k\le i_j<i_{j-1}<\cdots<i_1\le l} V_k^{(j)}+\cdots+V_{i_j}^{(j)}+V_{i_j+1}^{(j-1)}+\cdots+V_{i_{j-1}}^{(j-1)}+\cdots+V_{i_2+1}^{(1)}+\cdots+V_{i_1}^{(1)}$$

其中 $V_{(i)} \simeq Y^{(i)} - X$。

相较于第 II 节中的情形 $M=2$， W的表达式在结构上完全相同，但采用关于 S^j的一般形式书写。将其应用于 $M=2$、$S^j-\sum_{k=1}^{M}Y_{(M+1-k)\,k}$，当 $j=1$ 时可还原为（$Y_{(2)\,2}\quad -Y_{(1)\,2}$）+，而当 $j=2$时可还原为（ $Y_{(2)\,2}\quad -Y_{(1)\,2}$）；此外，由图（2）和图（1）还可注意到，本文中的（$Y_{(1)_n}$）和（$Y_{(2)_n}$）分别对应于第 II 节中的（Y_n）和（Z_n）。

接下来的三个结果是对 $M=2$ 情形下相应结果的推广；由于它们的证明与第 II 节中的证明类似，因此我们将其推迟至附录 §D。

定理4：（上界和下界的一般构造）设 $V_{(i)}$ 为满足 $\mathbb{P}(V_{(i)}\ 0\ >0\quad i=1\ \ldots\ M\qquad V^{1}\ \ldots\ V^{M}\quad V^{1}\ \ldots\ V^{M}\quad \ldots\qquad\qquad V^{1}\ \ldots\ V^{M}\qquad\qquad >)$ 的随机变量，其中，，；并设（（）1，，（）1），（（）2，，（）2）是（（），（））的独立同分布副本。记

$$\mathcal{V}_M(v_1,\ldots,v_M) := \left(\bigwedge_{1\le i\le 2}\left(v_i-V^{(i)}\right),\ldots,\bigwedge_{M-1\le i\le M}\left(v_i-V^{(i)}\right),v_M-V^{(M)}\right) .$$

（a）积分方程

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{v_1\ge V^{(1)}\}}\psi_M\left(\mathcal{V}_M(v_1,\ldots,v_M)\right)\right] = \psi_M(v_1,\ldots,v_M) \tag{17}$$

在 $\bar{\mathbb{R}}^M$ 上具有极限 $\psi_M(\infty,\ \ldots\ldots,\ \infty)=\lim_{v_1,\ \ldots\ldots,\ v_M\to\infty}\psi_M(v_1,\ \ldots\ldots,\ v_M)=1$ 的有界函数类中存在唯一解。该解为

$$\psi_M(v_1,\ldots,v_M) := \mathbb{P}\left(T_1^1\le v_1,\ldots,T_1^M\le v_M\right) ,$$

[2]上标索引主要表示队列在串联排队系统中的位置。

其中

$$T_k^j := \sup_{k\le i_j<i_{j-1}<\cdots<i_1<\infty} V_k^{(j)}+\cdots+V_{i_j}^{(j)}+V_{i_j+1}^{(j-1)}+\cdots+V_{i_{j-1}}^{(j-1)}+\cdots+V_{i_2+1}^{(1)}+\cdots+V_{i_1}^{(1)}\ ,$$

对于 $j=1,\ldots\ldots,\ M$和 $k\in\mathbb{N}$。

(b) 假设函数 $\gamma_M\colon \bar{\mathbb{R}}^M\to(-\infty,K_{\gamma_M}]$，对于某个有限的 K_{γ_M}，对所有 $(v_1,\ldots,v_M)\in\operatorname{supp}(\gamma_M\vee 0)\subseteq\bar{\mathbb{R}}^M$

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{v_1\ge V^{(1)}\}}\gamma_M\left(\mathcal{V}_M(v_1,\ldots,v_M)\right)\right]\ge\gamma_M(v_1,\ldots,v_M)\ . \tag{18}$$

如果 $\gamma_M(\infty,\ldots,\infty)=$上极限 $_{v_1,\ldots,v_M\to\infty}\gamma_M(v_1,\ldots,v_M)=1$则 $\psi_M\ge\gamma_M$。

(c) 假设函数 η_M：$\bar{\mathbb{R}}^M\to[0,\infty)$对所有 $(v_1,\ldots\ldots,v_M)\in$ 满足 $\operatorname{supp}(\psi_M)$

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{v_1\ge V^{(1)}\}}\eta_M\left(\mathcal{V}_M(v_1,\ldots,v_M)\right)\right]\le\eta_M(v_1,\ldots,v_M) \tag{19}$$

如果 $\eta_M(\infty,\ldots,\infty)=$下极限$_{v_1,\ldots,v_M\to\infty}\eta_M(v_1,\ldots,v_M)=1$那么 $\psi_M\le\eta_M$。

下一个推论将函数 ψ_M、γ_M和 η_M 与 $\mathbb{P}(W>x)$联系起来。

推论 *5*：（一般上界和下界）考虑定理4中的函数 ψ_M、γ_M和 η_M。那么，作业 $n\to\infty$ 的等待时间对于所有 $x\ge 0$均满足

$$\begin{aligned}1-\mathbb{E}\left[\eta_M\left(x+\sum_{k=1}^M Y_k^{M+1-k}-S_1,\ldots,x+\sum_{k=1}^M Y_k^{M+1-k}-S_M\right)\right]&\le\mathbb{P}(W>x)\\&\le 1-\mathbb{E}\left[\gamma_M\left(x+\sum_{k=1}^M Y_k^{M+1-k}-S_1,\ldots,x+\sum_{k=1}^M Y_k^{M+1-k}-S_M\right)\right].\end{aligned}$$

最后一个结果证明了多项式-指数上界的存在性。

定理 *6*：（多项式-指数上界的存在性）固定 $m\in\mathbb{N}$。假设 $\theta_i:=\sup\{r>0\colon\forall 1\le j\le i\colon\mathbb{E}[e^{rV_{(j)}}]\le 1\}$，其中随机变量为 $V_{(i)}\,i\in\{1,2,\ldots,m\}$。令

$$I_i(\theta):=\begin{cases}1 & \text{if }\ \mathbb{E}[e^{\theta V^{(i)}}]=1\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases} \tag{20}$$

and

$$d_1(\theta):=0,\quad d_j(\theta):=I_2(\theta)+\ldots+I_j(\theta),\qquad 2\le j\le M\ .$$

令 $a\in\mathbb{R}$ 且

$$\mathcal{D}_a^M:=\{(v_1,\ldots,v_M):v_1\ge -a_+,v_2\ge -a,\ldots,v_M\ge -a\}\ .$$

设 $\zeta_1:=\theta_1$，且对于 $2\le i\le M$，若 $\theta_{i-1}=\theta_i$或 $d_{i-1}(\theta_{i-1})=0$，则令 $\zeta_i:=\theta_i$；否则令 $\zeta_i\in(\theta_i,\theta_{i-1})$。假设对于所有 $(v_1,\ldots,v_M)\in\mathcal{D}_a^M$，以及所有 $i\in\{1,2,\ldots,M\}$ 和 $j\in\{1,\ldots,d_{i-1}(\theta_{i-1})\vee d_i(\theta_i)\}\cap(2\mathbb{Z}+1)$

$$\mathbb{E}\left[\left(V^{(i)}-v_i\right)^j e^{\zeta_i(V^{(i)}-v_i)}\mid V^{(i)}>v_i\right]\le K_i^j<+\infty\ .$$

则存在多项式 $P_i\colon\mathbb{R}^i\to\mathbb{R}$，其次数为 $d_i(\theta_i)$，分别对于 $i\in\{1,2,\ldots,M\}$与

$$P_i(v_1,\ldots,v_i)\ge 0$$

对于所有 $1\le i\le M$ 和满足以下条件的$(v_1,\ldots,v_M)\in\mathcal{D}_a^M$

$$\gamma_M(v_1,\ldots,v_M):=\mathbb{1}_{\{(v_1,\ldots,v_M)\in\mathcal{D}_a^M\}}\left[1-\sum_{i=1}^M P_i(v_1,\ldots,v_i)e^{-\theta_i v_i}\right]$$

满足 (18)。

我们注意到，与针对 $M=2$ 的定理 3 不同，这里对涉及新参数 ζ 的条件期望还有一项额外的、更强的要求；这与服务时间尾部的“轻尾性”有关（详情见证明）。$\mathcal{D}_a^M$ 的定义对条件期望的要求也比定理 3 更强；这是因为处理 $M\ge 3$ 时遇到了额外的技术问题。

值得注意的是，根据推论 5，决定尾部 $\mathbb{P}(W>x)$ 行为的多项式 $P_M(v_1、\ldots\ldots、v_M)$ 的次数取决于式 (20) 中的示性函数。在一种极端情况下，如果所有队列都是同质的，且 $\mathbb{E}[e^{\theta^+(Y-X)}]\ge 1$（回顾第 II 节开头关于“轻尾性”的描述），那么 P_M 的次数为 $M-1$，因为除第一个以外的所有示性函数 I_i 均为 1。另一种极端情况是，若只有一个瓶颈，且 $\mathbb{E}[e^{\theta^+(Y-X)}]\ge 1$，则 P_M 的次数取决于瓶颈的位置：如果瓶颈位于首位，则次数为 0；否则无论其位置如何（例如，位于第二位或末位），次数均为 1。还有一种极端情况是 $\mathbb{E}[e^{\theta^+(Y-X)}]<1$，例如附录 § A 中给出的分布，此时 P_M 的次数为 0。

IV. 显式多项式指数型界与数值计算

我们回到 §II 中的 $M=2$ 情形，并给出 $GI/M/1 \to \cdot/M/1$ 的显式解，即服务时间服从指数分布（两个队列的速率相同）；此外，对于 $D/M/1 \to \cdot/M/1$ 和 $Gamma/M/1 \to \cdot/M/1$，即到达间隔服从确定性分布或 Gamma 分布的情形，我们还会进一步简化这些解。随后，我们利用大偏差推导其他（非渐近）上界，最后展示数值比较结果。

回顾符号 $V=Z-X, U=Y-X$，其中 Z，Y和 X相互独立，并假设对于某个 $\theta>0$，$\mathbb{E}[e^{\theta U}]=\mathbb{E}[e^{\theta V}]=1$成立。令 $R\in\{Y,Z\}$ 和 $r\geq 0$。

$$K_i^R(r):=\mathbb{E}[(R-r)^i e^{\theta(R-r)}\mid R>r],\quad \bar{F}_R(r):=\mathbb{P}(R>r)\ .$$

根据定理 1（部分 (b)），并借鉴定理 3，我们需要找到常数 a,A,B,C,D，使得通过定义 γ：$\mathcal{D}_a:=\{(u,v):\ u\geq -a_+,\ v\geq (-a)\ \vee u\}\to\mathbb{R}$

$$\gamma(u,v):=\mathbb{1}_{\{(u,v)\in\mathcal{D}_a\}}\left[1-(A+Bv+Cu)e^{-\theta_2 v}-De^{-\theta u}\right]\ ,$$

以下内容 g 不等式成立：$D\geq 0$, $A+Bv+Cu\geq 0\ \forall(u,v)\in\mathcal{D}_a$，以及定理 1 中的 (3)，即，

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Bigg[&\mathbb{1}_{\{u\geq U,v+a\geq V\}}\Big[1-D\exp\{-\theta[(u-U)\wedge(v-V)]\}\\&-(A+B(v-V)+C[(u-U)\wedge(v-V)])\exp\{-\theta(v-V)\}\Big]\Bigg]\\&\geq 1-De^{-\theta u}-(A+Bv+Cu)e^{-\theta v}\ ,\end{aligned}\tag{21}$$

对于所有 $(u,v)\in\operatorname{supp}(\gamma\vee 0)\in\mathcal{D}_a$。我们回顾一下，$a\in\mathbb{R}$ 是一个优化参数，事实证明它对界的整体数值精度至关重要，但代价是使得相关计算更加繁琐。

为求出参数 A，B，C，D，以及 a，我们接下来采用一种次优方法：构造一组满足式 (21) 的充分不等式，这些不等式更易于分别处理，并据此匹配参数；参见附录 § E。

对于 $GI/M/1\to\cdot/M/1$模型，即 Y，$Z\simeq Exp(\mu)$和 $\mathbb{E}[X]=\frac{1}{\mu\rho}$，令 $\theta>0$满足 $\mathbb{E}[e^{\theta(Y-X_)}]=1$，或者等价地，$\mathbb{E}[e^{-\theta X}]=(\mu-\theta)/\mu$；由稳定性条件 $\rho<1$可知其存在。首先注意到

$$K_i^Y(x)=\frac{\mu\times i!}{(\mu-\theta)^{i+1}}\ ,$$

三个主要参数立即可得　　自不等式 2、4、5、6 和 7（如附录 § E 中引理 7 所列）　　：

$$D=\frac{\mu-\theta}{\mu}\qquad C=\frac{\theta(\mu-\theta)D}{\mu},\qquad B=C\times\frac{\left(\mu\mathbb{E}\left[Xe^{-\theta X}\right]-\frac{\mu-\theta}{\mu}\right)_+}{1-\mu\mathbb{E}\left[Xe^{-\theta X}\right]}\ .$$

其余参数 A 和 a 可通过分别处理剩下的不等式 1、3 和 8 得到（同样见引理 7）。由前两个不等式，我们定义

$$\begin{aligned}A_1(a):=aB+\sup_{x\geq -a_+}\Bigg\{&\Bigg(B\mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{\mu-\theta}-X\right)e^{-\theta X}\left(e^{-\mu(X+x)}\mathbb{1}_{\{X+x\geq 0\}}+\mathbb{1}_{\{X+x<0\}}\right)\right]\\&+C\mathbb{E}\left[e^{-\theta X}\left(\frac{1}{\mu}e^{-\mu(X+x)}\mathbb{1}_{\{X+x\geq 0\}}+\left(\frac{1}{\mu}-X-x\right)\mathbb{1}_{\{X+x<0\}}\right)\right]\Bigg)\\&\times\left(\mathbb{E}\left[e^{-\theta X}\left(e^{-\mu(X+x)}\mathbb{1}_{\{X+x\geq 0\}}+\mathbb{1}_{\{X+x<0\}}\right)\right]\right)^{-1}\Bigg\}\end{aligned}$$

and

$$A_2(a):=a(B+C)+\frac{e^{-\theta a}(\mu-\theta)}{\mu}+\frac{B+C}{\mu-\theta}-D\ .$$

注意到

$$\mathbb{E}[(t-Y)\mid t\geq Y>t+a]=\frac{(t-(t+a)_+)e^{\mu(t-(t+a)_+)}}{e^{\mu(t-(t+a)_+)}-1}-\frac{1}{\mu}$$

and

$$\mathbb{E}[e^{\theta(Y-t)}\mid t\geq Y>t+a]=\frac{\mu\left(e^{(\mu-\theta)(t-(t+a)_+)}-1\right)}{\left(e^{\mu(t-(t+a)_+)}-1\right)(\mu-\theta)}\ ,$$

由这八个不等式可得

$$A_3(a) := B\left(a+\frac{1}{\mu-\theta}\right) - \min_{\operatorname{ess\,inf}(X)\wedge(-a)\le r\le -a}\left\{\frac{De^{-\theta a}\left(1-e^{(\theta-\mu)r}\right)+Cr}{1-e^{-\mu r}}\right\} + \frac{C}{\lambda} + \frac{e^{-\theta a}(\mu-\theta)}{\mu}\ .$$

现在我们可以定义了。

$$A := \min_{a\ge 0}(A_1(a)\vee A_2(a)) \wedge \min_{a\le 0}(A_1(a)\vee A_2(a)\vee A_3(a))\ . \tag{22}$$

令

$$a_1 := \arg\min_{a\ge 0}(A_2(a)) = \left(\frac{\ln(\theta(\mu-\theta)/\mu(B+C))}{\theta}\right)_+$$

并注意到 $A_1(a)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调不减，而 $A_2(a)$ 在 $[a_1,\infty$ 上单调不减、在 $[0,a_1]$ 上单调不增，由 (22) 中 A 的表达式可得第一个最小值对应的最优参数 a 是

$$a := \arg\min_{a\ge 0}(A_1(a)\vee A_2(a)) = \sup\left(\{0\le a\le a_1 : A_1(a)\le A_2(a)\}\cup\{0\}\right)\ .$$

最后，我们应用推论2，得到 W 尾部的上界，即

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(W>x) = 1-\mathbb{P}\left(T_1^2\le x-Z+Y, T_1^1\le x-(Z-Y)_+\right)\\
&\le 1-\mathbb{E}\Bigg\{\mathbb{1}_{\{x-Z+Y\ge -a\}}\Big[1-D\exp(-\theta(x-(Z-Y)_+))\\
&\quad -(A+B(x-(Z-Y))+C(x-(Z-Y)_+))\exp(-\theta(x-(Z-Y)))\Big]\Bigg\}\ .
\end{aligned}$$

我们现在区分两种情况。如果 $x\ge(-a)_+$，那么上界变为

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(W>x) \le{}& \frac{1}{2}e^{-\mu(x+a)} + \frac{D\left((2\mu-\theta)e^{-\theta x}-\mu e^{-\mu x+(\theta-\mu)a}\right)}{2(\mu-\theta)}\\
&+C\left(\frac{x\mu^2}{\mu^2-\theta^2}e^{-\theta x}+\frac{\mu(1+(\mu-\theta)a)}{2(\mu-\theta)^2}e^{-\mu x+(\theta-\mu)a}-\frac{\mu}{2(\mu-\theta)^2}e^{-\theta x}\right)\\
&+A\left(e^{-\theta x}\frac{\mu^2}{\mu^2-\theta^2}-e^{-\mu x+(\theta-\mu)a}\frac{\mu}{2(\mu-\theta)}\right)\\
&+B\left(\frac{\mu^2}{\mu^2-\theta^2}xe^{-\theta x}-\frac{2\mu^2\theta}{(\mu^2-\theta^2)^2}e^{-\theta x}+\frac{\mu(1+(\mu-\theta)a)}{2(\mu-\theta)^2}e^{-\mu x+(\theta-\mu)a}\right)\ .
\end{aligned} \tag{23}$$

否则，如果 $0\le x<-a$，上界变为

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(W>x) \le{}& 1-\frac{1}{2}e^{\mu(x+a)}+\frac{1}{2}De^{(\mu-\theta)x+\mu a}\\
&+\frac{\mu}{2(\mu+\theta)}e^{(\mu+\theta)a+\mu x}\left(A+B\left(\frac{1}{\mu+\theta}+a\right)+Cx\right)\ .
\end{aligned} \tag{24}$$

我们注意到，$\mathbb{P}(W>x)$ 的两个上界具有混合多项式指数结构，因为它们包含两个指数项（分别关于 θ 和 μ），以及相应的多项式。

在 $D/M/1\to\cdot/M/1$ 为常数这一特殊情形下，我们可以简化

$$A_1(a) = aB + B\left(\frac{1}{\mu-\theta}-X\right)+C\left(\frac{1}{\mu}+(a_+-X)_+\right)\ .$$

在另一个 $Gamma/M/1\to\cdot/M/1$ 特殊情形中，也就是说，$X\simeq Gamma(\alpha,\beta)$ 服从形状参数为 α、速率参数为 β 的伽马分布，其分布函数为 $F_X(x)=G(x,\alpha,\beta)$，我们在 B 的表达式中有 $\mathbb{E}[Xe^{-\theta X}]=\alpha\beta^\alpha/(\beta+\theta)^{\alpha+1}$，并且

$$\begin{aligned}
A_1(a) = aB+\sup_{x\ge -a_+}\Bigg\{&\Bigg[\left(\frac{B}{\mu-\theta}+\frac{C}{\mu}\right)\left(\frac{\beta}{\beta+\theta+\mu}\right)^\alpha e^{-\mu x}(1-G(-x,\alpha,\beta+\theta+\mu))\\
&+\left(\frac{B}{\mu-\theta}+\frac{C}{\mu}-Cx\right)\left(\frac{\beta}{\beta+\theta}\right)^\alpha G(-x,\alpha,\beta+\theta)-(B+C)\left(\frac{\alpha\beta^\alpha}{(\beta+\theta)^{\alpha+1}}\right)G(-x,\alpha+1,\beta+\theta)\\
&-B\left(\frac{\alpha\beta^\alpha}{(\beta+\theta+\mu)^{\alpha+1}}\right)e^{-\mu x}\left(1-G(-x,\alpha+1,\beta+\theta+\mu)\right)\Bigg]\\
&\times\left[\left(\frac{\beta}{\beta+\theta+\mu}\right)^\alpha e^{-\mu x}(1-G(-x,\alpha,\beta+\theta+\mu))+\left(\frac{\beta}{\beta+\theta}\right)^\alpha G(-x,\alpha,\beta+\theta)\right]^{-1}\Bigg\}\ .
\end{aligned}$$

A. 大偏差/网络演算方法

在这里，我们采用标准的大偏差/网络演算方法给出替代界，该方法关键依赖于UnionBound

$$\mathbb{E}\left[\max\{X,Y\}\right] \leq \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y] \qquad \text{or} \qquad \mathbb{P}(A \cup B) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)\ ,$$

对于正随机变量 X 和 Y，或事件 A 和 B。这种方法的一个优点是，它能够得到精确的渐近衰减率（例如，对于 $\mathbb{P}(D > x)$，参见 [19]）。另一个优点是，正如网络演算的若干应用所示，它能够分析具有广泛类别的到达过程、服务时间或调度算法的排队网络，并且还可以得到逗留时间的精确渐近尺度（[27], [9], [11], [16], [21], [7]）。

这类结果的缺点是数值紧致性较差，尤其是在非渐近状态下（即，在 $\mathbb{P}(D > x)$ 的情况下，x 取有限值时）。这一问题在 20 世纪 80 年代末至 90 年代的大偏差有效带宽文献中曾被提出。Choudhury等人 [10] 揭示了有效带宽结果与仿真之间存在数个数量级的巨大数值差异。近来，关于网络演算结果的类似数值问题也在仅涉及单个队列的情形中被报道；此外，研究表明，在单个队列中，采用 Kingman 的 GI/G/1 界（回顾 §II-D）而非UnionBound，可以大幅改善数值紧致性问题 [30]。

较大的数值不准确性主要源于并集上界对底层相关性的忽视；正如Talagrand [33] 所指出的，这一问题在非泊松型/非无记忆型事件中尤为明显。此外，由于等待时间/逗留时间涉及完整的样本路径，底层数值误差会在无限次应用并集上界的过程中不断累积。

例如，在公式 (1) 的等待时间 W 表述中，大偏差方法首先通过计算上界来展开。

$$\begin{cases} \mathbb{P}\left(\max_{3\leq i\leq n+2} U_3 + \cdots + U_i > x\right) \leq (\beta + \beta^2 + \beta^3 + \ldots)e^{-\theta x} = \frac{\beta}{1-\beta}e^{-\theta x} \\ \mathbb{P}\left(\max_{3\leq i<j\leq n+2} V_3 + \cdots + V_i + U_{i+1} + \cdots + U_j > x\right) \leq (\beta^2 + 2\beta^3 + 3\beta^4 + \ldots)e^{-\theta x} = \frac{\beta^2}{(1-\beta)^2}e^{-\theta x} \end{cases},$$

通过反复应用 Chernoff 界和并集界，其中 $\beta = \mathbb{E}\left[e^{\theta(Y-X)}\right]$，且 $\theta > 0$ 的选取满足 $\beta < 1$（以保证无穷级数收敛）。前一个界涉及随机游走的最大值，这是单个队列的典型事件，可通过无限次应用并集界得到，但代价是忽略部分和 $U_3 + \cdots + U_i$内部的相关性。相应地，后一个界涉及一个双重最大值事件（分别对 i和 j取最大值），这是两个队列组成的串联排队系统的典型事件；该界本身通过嵌套地无限次应用并集界得到，同时也忽略了底层部分和之间的相关性。正如单个队列相关文献所报告的那样，前一个界所伴随的数值误差，在针对串联排队系统的后一个界中，很可能会进一步加剧。

当 Y和 Z 均为速率为 μ的指数分布时，再次应用并集上界并进行二重积分，可得

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(W > x) &\leq \mathbb{P}\left(\max_{3\leq i\leq n+2} U_3 + \cdots + U_i + (Z-Y)_+ > x\right) \\ &\quad + \mathbb{P}\left(\max_{3\leq i<j\leq n+2} V_3 + \cdots + V_i + U_{i+1} + \cdots + U_j + Z - Y > x\right) \\ &\leq \inf_{\{0<\theta<\mu:\beta<1\}} \left(\frac{\beta}{1-\beta}\frac{2\mu-\theta}{2(\mu-\theta)} + \left(\frac{\beta}{1-\beta}\right)^2 \frac{\mu^2}{(\mu-\theta)(\mu+\theta)}\right) e^{-\theta x}\ . \end{aligned} \tag{25}$$

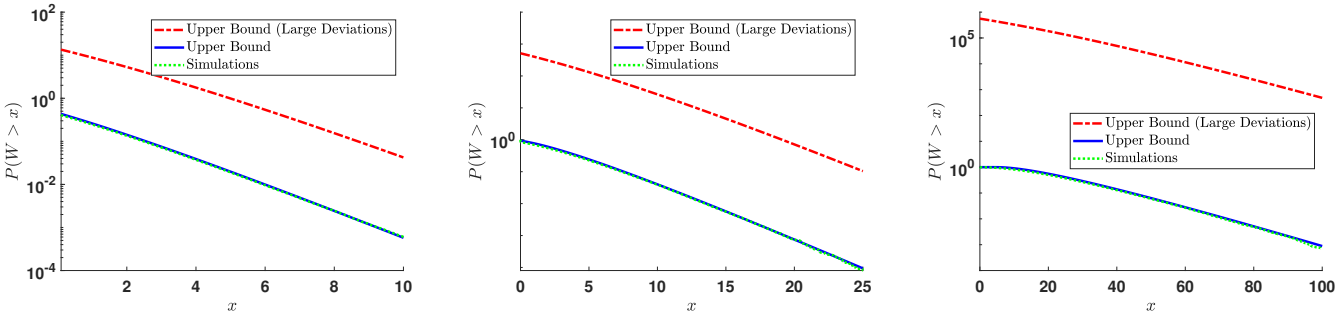
由于上界的超越 性本质， θ 的最优值需要通过数值搜索求得。

B. 数值比较

这里通过数值示例，将式 (23)–(24) 中的主要上界与式 (25) 中基于大偏差的上界进行比较。我们还给出了通过 10^5 次运行和 10^4 个样本路径点（即式 (25) 中的“n”）得到的模拟结果；在此设置下，运行时间为 10^{13}, , 这是因为涉及嵌套“max”的事件本身需要 10^8 时间。

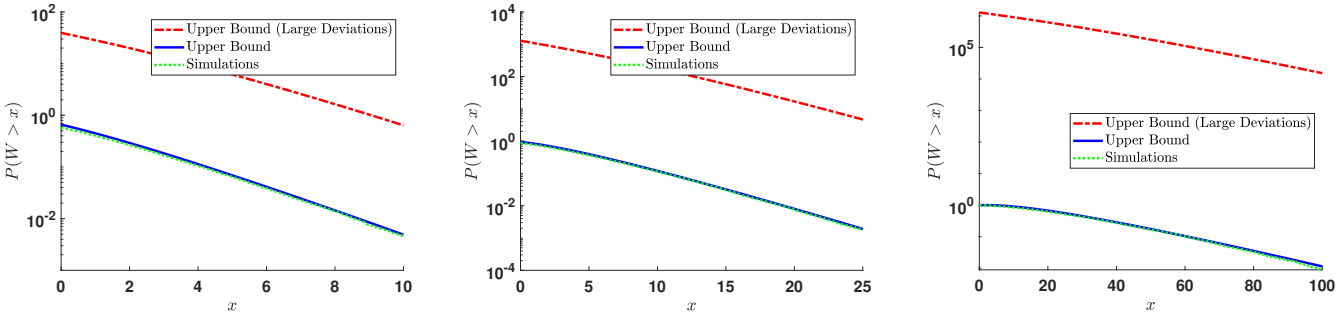
图 3 展示了 $D/M/1 \to \cdot/M/1$ 串联排队系统在不同利用率因子 ρ下的结果；服务率为 $\mu = 1$，到达间隔为 $X = \frac{1}{\rho\mu}$。基于大偏差的上界精度（极其）差，且在利用率较高时尤为明显，尽管采用了 D/M 设置；这不仅是由于嵌套的“max”以及由此导致的并集上界的嵌套无限次应用，还因为可用于运行优化“$\inf_{\{0<\theta<\mu:\beta<1\}}$”的选择更有限，而利用率较低的情形则不然。此外，除了式 (23)–(24) 中上界的整体精度外，我们还强调它们能够捕捉到初始的凹形“弯曲”部分；在 (c) 中的小 x附近，这一特征清晰可见，且正是上界的多项式指数结构所致。我们注意到，纯指数上界会完全错过这一弯曲，因为它们在所示的双对数尺度上会呈现为一条直线；针对单个队列提出的基于鞅的上界就是如此（例如，参见 [30]）。

图 4 展示了结果，并揭示了关于 $Erlang(2)/M/1 \to \cdot/M/1$ 串联排队系统的类似观察，其中输入服从伽马分布，是一种特殊情形。



(a) $\rho = 0.5$ (b) $\rho = 0.75$ (c) $\rho = 0.95$

图 3： $D/M/1 \to \cdot/M/1$ 串联排队系统的等待时间 CCDF $\mathbb{P}(W > x)$：上界（由 (23)-(24) 得出）与上界（由 (25) 得出，基于大偏差）及仿真结果



(a) $\rho = 0.5$ (b) $\rho = 0.75$ (c) $\rho = 0.95$

图 4： $Erlang(2)/M/1 \to \cdot/M/1$ 串联排队系统的等待时间互补累积分布函数（CCDF） $\mathbb{P}(W > x)$：上界（由 (23)–(24) 得出）与上界（由 (25) 得出，基于大偏差）及仿真的比较。

V. 扩展与开放问题

下面简要概述对公式 (2) 中关键积分表示的若干（在实践中）重要扩展，以及相关的主要结果。

A. 非更新到达

扩展到非更新到达（即非“GI”）是直接的。我们仅展示交替更新（AR）到达过程的分析，这足以说明，进一步扩展到半马尔可夫到达过程时，只需额外跟踪底层马尔可夫链的状态。

令 X_k 在 $k \in N$ 时为一个由两个随机变量 $X^{(1)}$ 和 $X^{(2)}$ 以及一个取值为 1 和 2 且概率相等的伯努利随机变量 B 驱动的 AR 过程，其中 $X^{(1)}$ 和 $X^{(2)}$ 具有可能不同的分布。若 $B = 1$，则 $X_{2k} := X_k^{(1)}$ 且 $X_{2k+1} := X_k^{(2)}$；否则，若 $B = 2$，则对于 $k \geq 0$，有 $X_{2k} := X_k^{(2)}$ 且 $X_{2k+1} := X_k^{(1)}$，其中 $(X_1^{(1)}, X_1^{(2)})$、$(X_2^{(1)}, X_2^{(2)})\ldots$ 是 $(X^{(1)}, X^{(2)})$ 的独立同分布副本。等价地，$X_{2k} := X_k^{(B)}$ 且 $X_{2k+1} := X_k^{(3-B)}$，即 B 的实现决定了 X_0 的初始分布，而 X_k 在 $k \geq 1$ 时的实现则交替出现。

基础积分方程的解以及它与 $\mathbb{P}(W > x)$ 之间的联系，对于 $M = 2$ 情形（即 $AR/G/1 \to \cdot/G/1$），均在附录 § F 中给出；尽管文中未提供关于多项式指数型界存在性的结果，但我们认为，将定理 3 和 6 推广至该情形也显然是直接的。

B. 扩展到分组网络

将图 2 中的串联网络视为分组网络。根本区别在于，作业（分组） n 在第一队列处的服务时间在所有下游队列中都保持不变——因为分组的大小通常不会被网络改变。分析分组网络的“经典”方法基于所谓的“Kleinrock 独立性假设”，该假设要求在每个队列处独立地重新生成分组大小（例如，图 2 中的模型）。这一假设最初是为了将分组网络分析纳入 Jackson 网络框架。

尽管极大地简化了分析过程，“Kleinrock 独立性假设”却容易使人对网络中逗留时间的标度律产生错误理解。具体而言，在泊松到达和指数服务时间的情况下，逗留时间随队列数量呈超线性增长，更准确地说，其增长阶为 $\Theta(M \log M)$（Vinogradov [34]）。然而，一旦

在强制采用“Kleinrock 独立性假设”时，逗留时间仅呈线性增长，为 $\Theta(M)$（即独立指数随机变量之和）。



图 5：在分组（串联排队系统）网络中作业 n 的到达间隔和（相同的）服务时间，其中包含 M 个队列 s

如图 5 所示，作业 n 的服务时间表示为 Y_n，即在图 2 所示模型的所有队列 $i \in \{1,\dots,M\}$ 中，$Y_{(n)_{i+n-1}} = Y_n$。因此，作业 n 的离开时刻可表示为

$$\begin{aligned}&\max_{0\le i_1<\ldots<i_m\le n+m-1} X_0+\cdots+X_{i_1-1}+Y_{i_1}+\cdots+Y_{i_2-1}+Y_{i_2-1}+\cdots+Y_{i_3-2}\\&\qquad+\cdots+Y_{i_m-m+1}+\cdots+Y_n\\&=\max_{0\le i\le n}\{X_0+\cdots+X_{i-1}+Y_i+\cdots+Y_n+(M-1)\max\{Y_i,\dots,Y_n\}\}\ .\end{aligned}$$

$(M-1)\max\{Y_i,\dots,Y_n\}$ 项取自集合 $\{Y_i,\dots,Y_n\}$ 中所有可能的和（允许重复）中的最大值，这样的和共有 $\binom{n-i+M-1}{M-1}$ 个。

将子索引 k 更改为 $n+1-k$ 后，离开时刻可以更方便地写成

$$\tau=\max_{1\le i\le n+1}\{X_{n+1}+\cdots+X_{i+1}+Y_i+\cdots+Y_1+(M-1)\max\{Y_i,\dots,Y_1\}\}\ .$$

同样，作业 n 的服务时间变为 Y_1，作业 $n-1$ 的服务时间变为 Y_2，依此类推。因此，作业 n 的等待时间与其具有相同的分布。

$$W=\tau-(MY_1+X_2+\cdots+X_{n+1})=\max\left\{T^1_{2,n+1},T^2_{2,n+1}-(M-1)Y_1\right\}\vee 0\ , \tag{26}$$

其中，略去符号使用上的严格区分，

$$T^1_{k,l}:=\max_{k\le i\le l}\{(Y_k-X_k)+\ldots+(Y_i-X_i)\}$$

$$T^2_{k,l}:=\max_{k\le i\le l}\{(Y_k-X_k)+\ldots+(Y_i-X_i)+(M-1)\max\{Y_k,\dots,Y_i\}\}\ .$$

底层积分方程的解以及与 $\mathbb{P}(W>x)$ 的联系，见附录 § G 中关于 M 队列的内容。这些结果有望为范围广泛的到达过程导出显式结果，尤其是结合前文提及的对半马尔可夫到达的扩展时；请注意，与 § III 中的一般串联排队系统情形不同，式 (26) 中 W 的表达式要简单得多。串联排队（分组）网络领域的最先进成果（Le Gall [18]）包括：在更新到达和一般服务时间的情况下，以复积分形式对 $\mathbb{P}(D>x)$ 进行精确分析；在少数特殊情形下（包括泊松到达或确定性到达以及指数服务时间），可得到实数域中的显式解；更早的结果（例如 Boxma [5] 和 Vinogradov [34]）则仅限于泊松到达。

最后，我们讨论一些开放问题以及另一种潜在的扩展方向。一个关键的开放问题是，式 (2) 中的积分表示是否存在精确（且显式）的解，这将立即使得能够精确且显式地求解 $\mathbb{P}(W>x)$。这一方向的进展或许可以首先通过研究定理 3 中相应的下界来实现，这些下界很可能也具有多项式指数结构。尽管采用了引理 7 中次优但在数值上有效的匹配方法，针对 $D/M/1\to\cdot/M/1$ 和 $Gamma/M/1\to\cdot/M/1$ 所给出的显式分析显然仍然十分繁琐；更简便的表示形式或化简方法，结合数值算法，或许能够避免这一繁琐问题，尤其是在一般的 M 情形下。本文所提出的扩展方向之一涉及非更新到达，而另一个可以直接考虑的扩展方向，则是将本文提出的方法与网络演算的相关概念相结合。原则上，这种结合能够实现对具有调度机制的串联网络的分析，尤其是分析某个流在每个队列/服务器处按照特定调度策略与其他流竞争时的端到端等待时间/逗留时间。从技术角度来看，这一扩展需要将序列 $Y^{(i)}$ 替换为双变量的“服务曲线过程”或“动态 F-服务器”（采用 Chang [9], 第 178 页中的术语），以此刻画竞争流在每台服务器处所获得的服务。

VI. 结论

本文延续了近期旨在改进适用于广泛到达过程、但众所周知十分宽松的大偏差型队列上界的研究。不同于以往专注于单个队列的工作，本文聚焦于串联排队网络，这类网络带来了极大的技术难题。

这一突破在于提出了一个新的积分方程，该方程能够恰当地编码端到端等待时间的解析结构。结合一项存在性结果，该结果揭示了该积分方程解的多项式指数结构，（混合）多项式指数函数。

通过匹配过程可得 $\mathbb{P}(W > x)$ 的上界。即使采用对多项式参数而言次优但方便的匹配方法，所展示的两个示例显然仍非常繁琐。不过，它们确实揭示了我们的方法不仅能像以往针对单个队列的研究那样，通过对 Kingman $GI/G/1$ 上界进行变体，在重载时得出紧确的上界，也能在较低利用率下做到这一点。

通过对非更新到达和分组网络的两项扩展可以看出，我们的方法似乎具有稳健性，也可能适用于串联队列之外的其他排队网络。

参考文献

[1] S. Asmussen.《应用概率与排队论》。施普林格，2003。[2] H. Ayhan 和 F. Baccelli. 泊松输入下（max，+）线性系统中稳态等待时间联合拉普拉斯变换的展开。《排队系统：理论与应用》，37(1/3)：291–328，2001。[3] H. Ayhan 和 D.-W. Seo.（max,+）线性系统中瞬态及稳态等待时间的尾概率。《IEEE 自动控制汇刊》，47(1)：151–157，2002。[4] R. S. Borden.《高等微积分教程》。Dover Publications，1998。[5] O. Boxma. 关于两服务台服务时间相同的串联排队模型。第1、2部分。《应用概率进展》，11(3)：616–659，1979。[6] O. Boxma 和 H. Daduna. 排队网络中的逗留时间。载于《计算机与通信系统的随机分析》（编者：H. Takagi），第401–450页。North-Holland Publishing Company，1990。[7] A. Burchard、J. Liebeherr 和 F. Ciucu. 关于网络时延的超线性缩放。《IEEE/ACM 网络汇刊》，19(4)：1043–1056，2011年8月。[8] P. J. Burke.《串联队列中时延的相关性》。《数理统计年刊》，35(2)：874–875，1964。[9] C.-S. Chang.《通信网络中的性能保证》。施普林格出版社，2000。[10] G. L. Choudhury、D. M. Lucantoni 和 W. Whitt. 充分发挥异步传输模式的效能。《IEEE 通信汇刊》，44(2)：203–217，1996年2月。[11] F. Ciucu、A. Burchard 和 J. Liebeherr. 一种用于网络随机分析的网络服务曲线方法。载于 ACM Sigmetrics，第279–290页，2005。[12] F. Ciucu 和 F. Poloczek. Kingman 的 GI/G/1 界的两项扩展。《ACM 测量与分析计算系统学报——ACM Sigmetrics / IFIP Performance》，2(3)：43:1–43:33，2018年12月。[13] J. W. Cohen.《单服务台排队（第2版）》。Elsevier Science，1982。[14] R. L. Disney 和 D. K¨onig. 排队网络：随机过程综述。《SIAM 评论》，27(3)：335–403，1985。[15] N. G. Duffield. 马尔可夫到达队列的指数界。《排队系统》，17(3-4)：413–430，1994年9月。[16] M. Fidler. 一种基于矩母函数的端到端概率网络演算。载于 IEEE 国际服务质量研讨会（IWQoS），第261–270页，2006。[17] S. G. Foss. 轻尾服务时间串联队列稳态逗留时间分布的精确渐近性质。《信息传输问题》，43(4)：353–366，2007年12月。[18] P. L. Gall. 更新输入、连续服务时间相同的串联队列中的总逗留时间。《随机过程及其应用》，52(1)：165–178，1994年8月。[19] A. J. Ganesh. 串联队列逗留时间的大偏差。《运筹学年刊》，79：3–26，1998。[20] P. Harrison 和 W. Knottenbelt. 逗留时间的分位数。载于《计算机系统性能建模展望》（编者：E. Gelenbe），第155–193页。Imperial College Press，2004。[21] Y. Jiang 和 Y. Liu.《随机网络演算》。施普林格，2008。[22] F. I. Karpelevitch 和 A. Y. Kreinin. 泊松串联队列中的联合分布。《排队系统：理论与应用》，12(3-4)：273–286，1992。[23] J. F. C. Kingman. 排队论中的一个鞅不等式。《剑桥哲学学会会刊》，60(2)：359–361，1964年4月。[24] J. F. C. Kingman. 排队论中的不等式。《英国皇家统计学会会刊，B辑》，32(1)：102–110，1970。[25] W. Kr¨amer. 两个串联队列系统中的总等待时间分布函数及顾客的去向。载于国际电信业务大会（ITC 7），1973。[26] J. Liebeherr、A. Burchard 和 F. Ciucu. 重尾及自相似流量通信网络的时延界。《IEEE 信息论汇刊》，58(2)：1010–1024，2012年2月。[27] H. Liu.《串联排队网络中的缓冲区大小与分组丢失》。博士论文，加利福尼亚大学圣迭戈分校，圣迭戈，加利福尼亚州，1993。[28] R. M. Loynes. 串联队列系统的稳定性。《剑桥哲学学会数学学报》，60(3)：569–574，1964年7月。[29] Z. Palmowski 和 T. Rolski. 关于流体模型鞅不等式的一则注记。《统计与概率快报》，31(1)：13–21，1996年12月。[30] F. Poloczek 和 F. Ciucu. 基于鞅的调度分析。《性能评估》（专刊：IFIP Performance 2014），79：56–72，2014年9月。[31] E. Reich. 关于串联队列的注记。《数理统计年刊》，34(1)：338–341，1963。[32] S. M. Ross. GI/G/1 队列时延分布的上界。《应用概率杂志》，11(2)：417–421，1974年6月。[33] M. Talagrand. 主控测度：一般链式方法。《概率年刊》，24(3)：1049–1103，1996年7月。[34] O. P. Vinogradov. 一个服务相同的多阶段系统。《苏联计算机与系统科学杂志》，24(2)：28–31，1986年3月。[35] J. Walrand 和 P. Varaiya. Jackson 网络中的逗留时间与超越条件。《应用概率进展》，12(4)：1000–1018，1980。[36] J. C. Walrand.《排队网络导论》。Prentice Hall International editions. Prentice Hall，1989。

附录 A 极轻分布

设随机变量 Y的密度为 $f_Y(x) = \alpha 1\!\!1_{x\geq 0} e^{-\mu x}/(1+x^2)$，其中 α取适当的值；另设随机变量 X与 Y独立，且几乎必然满足 $X > \mathbb{E}[Y] \vee (\ln(\alpha\pi/2)/\mu)$。那么

$$\theta^+ := \sup\{r \in \mathbb{R} : \mathbb{E}[e^{r(Y-X)}] < \infty\} = \mu$$

and

$$\mathbb{E}[e^{\theta^+(Y-X)}] = \mathbb{E}[e^{\mu(Y-X)}] = \alpha\mathbb{E}[e^{-\mu X}] \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} dx = \alpha\pi\mathbb{E}[e^{-\mu X}]/2 < 1 \ .$$

附录 B 半连续函数

在我们的证明中，需要用到分析中的两个结果。设 $\mathcal{D}$ 是 $\bar{\mathbb{R}}^M$的一个紧子集， $\phi\colon \mathcal{D}\to\bar{\mathbb{R}}$ 是任意函数，并定义 $f\colon \mathcal{D}\to\bar{\mathbb{R}}$

$$f(x):=\limsup_{y\to x}\phi(y)\ \forall x\in\mathcal{D}\ .$$

1. 第一个结果是， f 是一个上半连续函数，即对于 $\mathcal{D}$中的每个收敛序列 $x_n\to x$ ，

$$f(x)\geq\limsup_{x_n\to x}f(x_n)\ .$$

事实上，根据 $x_n(\ y_n\in\mathcal{D})$ 的定义，存在 $\ y_n\in\mathcal{D}$，使得 $\ |y_n-x_n|<n^{-1}$ 且 $\ \phi(y_n)\ \geq f(x_n)\ -n^{-1}$。由于 $x_n\to x$，我们得到 $\ |y_n-x|\leq|y_n-x_n|+|x_n-x|\to 0$，因为 $\ n\to\infty$，因此 $\ y_n\to x$ 也成立。由 $\ \phi(y_n)\ \geq f(x_n)\ -n^{-1}$，进而可得，

$$f(x)=\limsup_{y\to x}\phi(y)\geq\limsup_{n\to\infty}\phi(y_n)\geq\limsup_{n\to\infty}f(x_n)\ ,$$

从而证明 f 是上半连续的。

2. 第二个结果是，根据魏尔斯特拉斯最大值定理（Borden [4], 第 40页），紧致定义域上的任何上半连续函数都能取得其最大值。特别地， f能取得其最大值，即，如果 $\ K:=\sup_{x\in\mathcal{D}}f(x)$ 那么

$$\mathcal{K}:=\{x\in\mathcal{D}:f(x)=K\}$$

非空且闭。此外，

$$a_1:=\inf\{x_1\in\bar{\mathbb{R}}:\exists(x_2,\ldots,x_M)\in\bar{\mathbb{R}}^{M-1}:(x_1,\ldots,x_M)\in\mathcal{K}\}$$

$$a_j:=\inf\{x_j\in\bar{\mathbb{R}}:\exists(x_j,\ldots,x_M)\in\bar{\mathbb{R}}^{M-j+1}:(a_1,\ldots,a_{j-1},x_j,\ldots,x_M)\in\mathcal{K}\}$$

是良定义的，且 $\ a:=(a_1,\ \ldots\ldots,\ a_M)\ \in\mathcal{K}$。此外，若 $\ K>0$，则存在一个序列 $\ x_n\to a$，使得 $\ \phi(x_n)\ >0$ 且 $\ x_n\in\operatorname{supp}(\phi\vee 0)$。

注意函数支撑集的标准记号，即，

$$\operatorname{supp}(\phi):=\{x\in\mathcal{D}:\phi(x)\neq 0\}\ \text{and}\ \operatorname{supp}(\phi\vee 0):=\{x\in\mathcal{D}:\phi(x)>0\}\ .$$

Appendix C
Proof of part (c) of Theorem 1

我们需要证明 证明 $\ \psi(u,\ v)\ \leq\eta(u,\ v)$ 在 $\ v\geq u$ 上成立。令 $\ \mathcal{D}:=\{(u,\ v)\ \in\bar{\mathbb{R}}^2,\ v\geq u\}$，并对 $(u,\ v)\ \in\mathcal{D}$定义 e

$$f(u,v):=\limsup_{(x,y)\to(u,v)}(\psi(x,y)-\eta(x,y))\ .$$

As 在 (b) 部分， f 是上半连续的，并在紧集 $\mathcal{D}$上取得其最大值，即，

$$K:=\max_{(u,v)\in\mathcal{D}}f(u,v)\ .$$

若 $\ K\leq 0$，则证明完成。否则，假设 $\ K>0\ $ 并定义

$$\mathcal{K}:=\{(u,v)\in\mathcal{D}:f(u,v)=K\}$$

它是 $\ \bar{\mathbb{R}}^2$ 的闭子集，且

$$a:=\min\{u\in\bar{\mathbb{R}}:\exists v\in\bar{\mathbb{R}}:(u,v)\in\mathcal{K}\}$$

$$b:=\min\{v\in\bar{\mathbb{R}}:(a,v)\in\mathcal{K}\}\ .$$

由于 $\ f(a,\ b\ )\ =K>0$，存在一个序列 $(a_n,\ \ b_n)\ \in\operatorname{supp}(\psi)\cap\mathcal{D}$，使得 $(a_n,\ \ b_n)\ \to(a,\ \ b)$ 一个　d

$$\begin{aligned}K=f(a,b)&=\lim_{n\to\infty}(\psi-\eta)(a_n,b_n)\\&\leq\limsup_{n\to\infty}\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{a_n\geq U\}}(\psi-\eta)\left((a_n-U)\wedge(b_n-V),b_n-V\right)\right]\end{aligned}$$

由于 $\ \psi-\eta\leq 1$，我们可以应用法图引理。

$$\begin{aligned}&\leq\mathbb{E}\left[\limsup_{n\to\infty}\mathbb{1}_{\{a_n\geq U\}}(\psi-\eta)\left((a_n-U)\wedge(b_n-V),b_n-V\right)\right]\\&\leq K\cdot\mathbb{P}(a=U)+\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{a>U\}}f\left((a-U)\wedge(b-V),b-V\right)\right]\\&\leq K\cdot\mathbb{P}(a\geq U)\ ,\end{aligned}$$

利用 K 和 f 的定义。由此可得，存在 $\mathbb{P}(a \geq U) = 1$，使得必然

$$f((a-U) \wedge (b-V), b-V) = K \text{ a.s.} \tag{27}$$

接下来我们断言 $(a,\ b) = (\infty,\ \infty)$。否则，若 $a < \infty$，则 (27) 和 $\mathbb{P}(U > 0) > 0$ 与 a 的选取相矛盾，因此 $a = \infty$。同理，若 $b < \infty$，则 (27) 和 $\mathbb{P}(V > 0) > 0$ 与 b 的选取相矛盾，因此 $b = \infty$ 也成立。最后，

$$K = f(\infty, \infty) = \limsup_{u,v \to \infty} (\psi - \eta)(u, v) = 0$$

根据 ψ 和 η的极限条件，因此 $v \geq u$上的 $\psi \leq \eta$。

附录 D

§ III 中的证明

证明：定理 4] 的 [。对于 (a)，我们可以写成

$$\begin{aligned}
&\psi_M(v_1, \ldots, v_M) = \mathbb{P}(T_1^1 \leq v_1, \ldots, T_1^M \leq v_M) \\
&= \mathbb{P}\left(V_1^{(1)} \leq v_1, V_1^{(1)} + T_2^1 \leq v_1, V_1^{(2)} + T_2^1 \vee T_2^2 \leq v_2, \ldots, V_1^{(M)} + T_2^{M-1} \vee T_2^M \leq v_M\right) \\
&= \mathbb{P}\left(V_1^{(1)} \leq v_1, T_2^1 \leq \bigwedge_{1 \leq i \leq 2} \left(v_i - V_1^{(i)}\right), \ldots, T_2^{M-1} \leq \bigwedge_{M-1 \leq i \leq M} \left(v_i - V_1^{(i)}\right), T_2^M \leq v_M - V_1^{(M)}\right) \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{v_1 \geq V^{(1)}\}} \psi_M \left(\bigwedge_{1 \leq i \leq 2} \left(v_i - V^{(i)}\right), \ldots, \bigwedge_{M-1 \leq i \leq M} \left(v_i - V^{(i)}\right), v_M - V^{(M)}\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{v_1 \geq V^{(1)}\}} \psi_M\left(\mathcal{V}_M(v_1, \ldots, v_M)\right)\right].
\end{aligned}$$

对于 (b) 和 (c)，记

$$\phi_1 := \gamma_M - \psi_M, \quad \phi_2 := \psi_M - \eta_M$$

and

$$f_i(v_1, \ldots, v_M) := \limsup_{(u_1, \ldots, u_M) \to (v_1, \ldots, v_M)} \phi_i(u_1, \ldots, u_M)\ ,$$

它们在 $\bar{\mathbb{R}}^M$ 上是上半连续的，并且能够取到其最大值

$$K_i := \max_{(v_1, \ldots, v_M) \in \bar{\mathbb{R}}^M} f_i(v_1, \ldots, v_M), \qquad i = 1, 2.$$

由于 $f_i(\infty, \ldots, \infty) = 0$，因此 $K_i \geq 0$。设

$$\mathcal{K}_i := \{(v_1, \ldots, v_M) \in \bar{\mathbb{R}}^M : f_i(v_1, \ldots, v_M) = K_i\}$$

并定义

$$\begin{aligned}
a_1^{(i)} &:= \min\{v_1 \in \bar{\mathbb{R}} : \exists (v_2, \ldots, v_M) \in \bar{\mathbb{R}}^{M-1} : (v_1, \ldots, v_M) \in \mathcal{K}_i\} \\
a_j^{(i)} &:= \min\{v_j \in \bar{\mathbb{R}} : \exists (v_{j+1}, \ldots, v_M) \in \bar{\mathbb{R}}^{M-j}, (a_1^{(i)}, \ldots, a_{j-1}^{(i)}, v_j, \ldots, v_M) \in \mathcal{K}_i\}\ ,
\end{aligned}$$

其定义良好，因为 f_i 是上半连续的；此外，

$$(a_1^{(1)}, \ldots, a_M^{(1)}) \in \mathcal{K}_1 \subseteq \operatorname{supp}(\gamma_M \vee 0), \quad (a_1^{(2)}, \ldots, a_M^{(2)}) \in \mathcal{K}_2 \subseteq \operatorname{supp}(\psi_M).$$

我们现在可以写出

$$\begin{aligned}
K_i &= f_i(a_1^{(i)}, \ldots, a_M^{(i)}) \\
&= \limsup_{(v_1, \ldots, v_M) \to (a_1^{(i)}, \ldots, a_M^{(i)})} \phi_i(v_1, \ldots, v_M) \\
&= \limsup_{(v_1, \ldots, v_M) \to (a_1^{(i)}, \ldots, a_M^{(i)})} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{v_1 \geq V^{(1)}\}} \phi_i(\mathcal{V}_M(v_1, \ldots, v_M))\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[\limsup_{(v_1, \ldots, v_M) \to (a_1^{(i)}, \ldots, a_M^{(i)})} \mathbb{1}_{\{v_1 \geq V^{(1)}\}} \phi_i(\mathcal{V}_M(v_1, \ldots, v_M))\right] \\
&\leq K_i \cdot \mathbb{P}(a_1^{(i)} = V^{(1)}) + \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{a_1^{(i)} > V^{(1)}\}} f_i(\mathcal{V}_M(a_1^{(i)}, \ldots, a_M^{(i)}))\right] \\
&\leq K_i \cdot \mathbb{P}(a_1^{(i)} \geq V^{(1)})
\end{aligned}$$

因此 $\mathbb{P}(a_1^{(i)} \geq V^{(1)}) = 1$ 且

$$\begin{aligned} & f_i(\mathcal{V}_M(a_1^{(i)}, \ldots, a_M^{(i)})) \\ & = f_i\left(\bigwedge_{1\leq j\leq 2}\left(a_j^{(i)} - V^{(j)}\right), \ldots, \bigwedge_{M-1\leq j\leq M}\left(a_j^{(i)} - V^{(j)}\right), a_M^{(i)} - V^{(M)}\right) = K_i \text{ a.s.} \end{aligned} \tag{28}$$

现在我们通过矛盾证明 $(a_1^{(i)}, \ldots, a_M^{(i)}) = (\infty, \ldots, \infty)$。令

$$j_0 := \min\{j \in \{1, 2, \ldots, m\}, a_j^{(i)} < \infty\}$$

由此，根据式 (28) 及 a_{j_0} 的选取可得 $\mathbb{P}(V^{(j_0)} > 0) = 0$，这与假设 $\mathbb{P}(V_{(j_0)} > 0) > 0$ 矛盾。因此

$$K_i = f_i(\infty, \ldots, \infty) = 0 \ ,$$

因此 $\psi_M \leq \gamma_M$ 和 $\eta_M \leq \psi_M$。

现在我们可以证明满足 (17) 的 ψ 的唯一性。设 ψ_1 和 ψ_2 是两个有界解，满足 $\psi_i(\infty, \ldots, \infty) = \lim_{v_1,\ldots,v_M\to\infty} \psi_i(v_1, \ldots, v_M) = 1$。利用定理的第二部分，取 $\psi = \psi_i$ 和 $\gamma = \psi_{3-i}$（注意，证明仅要求 ψ 满足 (17)、有界，且 $\psi(\infty, \ldots, \infty) = \lim_{v_1,\ldots,v_M\to\infty} \psi(v_1, \ldots, v_M) = 1$），我们得到，对于 $i = 1, 2$，有 $\psi_i \geq \psi_{3-i}$，因此 $\psi_1 = \psi_2$。

□

证明： [推论 5] 由 $x \geq 0$，我们有

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(W > x) &= \mathbb{P}\left(\max_{1\leq j\leq M}\{T_{M+1}^j + S_j\} > x + \sum_{k=1}^M Y_k^{M+1-k}\right) \\ &= 1 - \mathbb{P}\left(\max_{1\leq j\leq M}\{T_{M+1}^j + S_j\} \leq x + \sum_{k=1}^M Y_k^{M+1-k}\right) \\ &= 1 - \mathbb{P}\left(\forall 1 \leq j \leq M, T_{M+1}^j \leq x + \sum_{k=1}^M Y_k^{M+1-k} - S_j\right) \\ &= 1 - \mathbb{E}\left[\psi_M\left(x + \sum_{k=1}^M Y_k^{M+1-k} - S_1, \ldots, x + \sum_{k=1}^M Y_k^{M+1-k} - S_M\right)\right] \end{aligned} \ ,$$

由 T_k^j 的平稳性，对所有 $k \in \mathbb{N}$均成立。

□

证明： [定理 6] 与情形 $M = 2$（定理 3）一样，我们分两步进行。

步骤 *1*： 首先，我们用归纳法证明，关于 $i \geq 1$，存在多项式 Q_i： $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$， $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$，其次数分别至多为 $d_i(\theta_i)$，且在 $[0, \infty)$ 上取非负值，使得对所有 $v \geq -a_+$

$$Q_1 e^{-\theta_1 v} \geq \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{v\geq V^{(1)}\}} Q_1 e^{\theta_1(V^{(1)}-v)}\right] + \mathbb{P}(v < V^{(1)}) \tag{29}$$

且对所有 $2 \leq i \leq M$ 和 $v \geq 0$

$$Q_i(v) e^{-\theta_i v + \theta_i a} \geq \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{v\geq V^{(i)}\}} \sum_{l=i-1}^{i} Q_l\left(v - V^{(i)}\right) e^{\theta_l(V^{(i)}-v+a)}\right] + \mathbb{P}(v < V^{(i)}) \ . \tag{30}$$

步骤 *1* 的证明： 情形 $i = 1$ 可仿照定理 3 的证明，令

$$Q_1 := \left(\inf_{v\geq -a_+} \mathbb{E}\left[e^{\theta_1(V^{(1)}-v)} \mid V^{(1)} > v\right]\right)^{-1} \ .$$

对于某些 $k \geq 2$，接下来我们假设多项式 Q_i 对于 $i \leq k-1$ 存在。我们需要证明存在 $Q_k(v) := \sum^{d_k(\theta_k)}{}_{j=0} \ A_j v^j$，使得 (30) 对于 $i = k$ 成立。因此，只需证明存在非负常数 $A_{d_k(\theta_k)}$ $\cdots$， A_0，使得

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{d_k(\theta_k)} A_j e^{\theta_k a}\left\{v^j e^{-\theta_k v} - \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{v\geq V^{(k)}\}}\left(v - V^{(k)}\right)^j e^{\theta_k(V^{(k)}-v)}\right]\right\} \\ & \quad \geq \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{v\geq V^{(k)}\}} Q_{k-1}\left(v - V^{(k)}\right) e^{\theta_{k-1}(V^{(k)}-v+a)}\right] + \mathbb{P}(v < V^{(k)}) \ . \end{aligned} \tag{31}$$

接下来，我们对两边取上界，然后证明存在满足更紧不等式的 A_j。右侧的一个上界为

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{v\geq V^{(k)}\}}Q_{k-1}\left(v-V^{(k)}\right)e^{\theta_{k-1}(V^{(k)}-v+a)}\right]+\mathbb{P}(v<V^{(k)})\\
&\leq e^{\theta_{k-1}a}\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{v\geq V^{(k)}\}}Q_{k-1}\left(v-V^{(k)}\right)e^{\zeta_k(V^{(k)}-v)}\right]+\mathbb{P}(v<V^{(k)})\\
&=e^{\theta_{k-1}a}\mathbb{E}\left[Q_{k-1}\left(v-V^{(k)}\right)e^{\zeta_k(V^{(k)}-v)}\right]+\mathbb{P}(v<V^{(k)})\\
&\quad-e^{\theta_{k-1}a}\mathbb{E}\left[Q_{k-1}\left(v-V^{(k)}\right)e^{\zeta_k(V^{(k)}-v)}\mid V^{(k)}>v\right]\mathbb{P}(V^{(k)}>v)\\
&\leq R_{d_{k-1}(\theta_{k-1})}(v)e^{-\zeta_k v}+\left(1-\inf_{v\geq 0}e^{\theta_{k-1}a}\mathbb{E}\left[Q_{k-1}\left(v-V^{(k)}\right)e^{\zeta_k(V^{(k)}-v)}\mid V^{(k)}>v\right]\right)\mathbb{P}(V^{(k)}>v)\\
&\leq R_{d_{k-1}(\theta_{k-1})}(v)e^{-\zeta_k v}+\left(1+C\sum_{l=0}^{\lfloor(d_{k-1}(\theta_{k-1})-1)/2\rfloor}K_k^{2l+1}\right)\mathbb{P}(V^{(k)}>v)\ ,
\end{aligned}
$$

其中 $R_{d_{k-1}(\theta_{k-1})}$ 是一个次数至多为 $d_{k-1}(\theta_{k-1})$ 的多项式，且 C 是一个正常数。在最后一个不等式中，我们对 Q_{k-1} 使用归纳假设，并且仅根据条件期望的假设对 $(v-V^{(k)})$ 的奇次幂作上界估计；其余项均为正。

接下来，我们对（31）左侧方括号中的各项给出下界。对于 $j\geq 1$

$$
\begin{aligned}
&v^j e^{-\theta_k v}-\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{v\geq V^{(k)}\}}\left(v-V^{(k)}\right)^j e^{\theta_k(V^{(k)}-v)}\right]\\
&=v^j e^{-\theta_k v}-\mathbb{E}\left[\left(v-V^{(k)}\right)^j e^{\theta_k(V^{(k)}-v)}\right]+\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{V^{(k)}>v\}}\left(v-V^{(k)}\right)^j e^{\theta_k(V^{(k)}-v)}\right]\\
&\geq\left(1-\mathbb{E}\left[e^{\theta_k V^{(k)}}\right]\right)v^j e^{-\theta_k v}+j\mathbb{E}\left[V^{(k)}e^{\theta_k V^{(k)}}\right]v^{j-1}e^{-\theta_k v}+\tilde{R}_{j-2}(v)e^{-\theta_k v}\\
&\quad+\inf_{v\geq 0}\mathbb{E}\left[\left(v-V^{(k)}\right)^j e^{\theta_k(V^{(k)}-v)}\mid V^{(k)}>v\right]\mathbb{P}(V^{(k)}>v)\\
&\geq\left(1-\mathbb{E}\left[e^{\theta_k V^{(k)}}\right]\right)v^j e^{-\theta_k v}+j\mathbb{E}\left[V^{(k)}e^{\theta_k V^{(k)}}\right]v^{j-1}e^{-\theta_k v}\\
&\quad+\tilde{R}_{j-2}(v)e^{-\theta_k v}-K_k^j\mathbb{1}_{\{j\in 2\mathbb{Z}+1\}}\mathbb{P}(V^{(k)}>v)\ ,
\end{aligned}
$$

其中， $\tilde{R}_{j-2}$ 是一个次数不超过 $j-2$的多项式；在最后一个不等式中，当 j 为奇数时，我们仅通过考虑其底层符号，使用K_k^j 对条件期望进行了上界估计。此外，对于 $j=0$,

$$
\begin{aligned}
&e^{-\theta_k v}-\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{v\geq V^{(k)}\}}e^{\theta_k(V^{(k)}-v)}\right]\\
&\geq\left(1-\mathbb{E}\left[e^{\theta_k V^{(k)}}\right]\right)e^{-\theta_k v}+\inf_{v\geq 0}\mathbb{E}\left[e^{\theta_k(V^{(k)}-v)}\mid V^{(k)}>v\right]\mathbb{P}(V^{(k)}>v)\\
&\geq\left(1-\mathbb{E}\left[e^{\theta_k V^{(k)}}\right]\right)e^{-\theta_k v}+\mathbb{P}(V^{(k)}>v)\ .
\end{aligned}
$$

因此，只需找到满足以下更严格不等式的系数 A_j:

$$
\begin{aligned}
&A_0 e^{\theta_k a}\left\{\left(1-\mathbb{E}\left[e^{\theta_k V^{(k)}}\right]\right)e^{-\theta_k v}+\mathbb{P}(V^{(k)}>v)\right\}\\
&\quad+\sum_{j=1}^{d_k(\theta_k)}A_j e^{\theta_k a}\left\{\left(1-\mathbb{E}\left[e^{\theta_k V^{(k)}}\right]\right)v^j e^{-\theta_k v}+j\mathbb{E}\left[V^{(k)}e^{\theta_k V^{(k)}}\right]v^{j-1}e^{-\theta_k v}\right.\\
&\qquad\left.+\tilde{R}_{j-2}(v)e^{-\theta_k v}-K_k^j\mathbb{1}_{\{j\in 2\mathbb{Z}+1\}}\mathbb{P}(V^{(k)}>v)\right\}\\
&\geq R_{d_{k-1}(\theta_{k-1})}(v)e^{-\zeta_k v}+\left(1+C\sum_{l=0}^{\lfloor(d_{k-1}(\theta_{k-1})-1)/2\rfloor}K_k^{2l+1}\right)\mathbb{P}(V^{(k)}>v)\ .
\end{aligned}
\tag{32}
$$

主要有两种情况:

若 $\theta_k<\theta_{k-1}$(情形 1)，即节点 k是序列 $(1,2,\ldots,k)$ 中的第一个瓶颈，则 $d_k(\theta_k)=I_k(\theta_k)\in\{0,1\}$[3]。若 $\mathbb{E}[e^{\theta_k V_{(k)}}]<1$(情形 1.1)，则我们首先选择 $A_1=0$。若 $d_{k-1}(\theta_{k-1})=0$(情形 1.1.1)，则很容易看出，足够大的 $A_0>0$ 足以满足 (32)。相反，若 $d_{k-1}(\theta_{k-1})>0$(情形 1.1.2)，则我们回顾，根据定义， $\zeta_k>\theta_k$;

[3]在这种情况下， $I_k(\theta_k)=0$ 发生了 当 $\mathbb{E}[e^{\theta(Y_{(k)}-X)}]<1\ \forall\theta>0$ 时；回想一下 § I 开头关于轻尾分布的讨论

正是由于这个原因，即使右侧的多项式 $R_{d_{k-1}(\theta_{k-1})}(v)$ 的次数大于 0，只要$A_0 > 0$ 足够大，就足以满足 (32)。

若 $\mathbb{E}[e^{\theta_k V^{(k)}}] = 1$ (情形 1.2)，则 $d_k(\theta_k) = 1$。若 $d_{k-1}(\theta_{k-1}) = 0$ (情形 1.2.1)，则 A_0 和 A_1 的存在性显而易见。否则，若 $d_{k-1}(\theta_{k-1}) \geq 1$ (情形 1.2.2)，则同样有 $\zeta_k > \theta_k$，且 A_0 和 A_1 的存在性可按照情形 1.1.2 得出。

顺便指出，在 $M = 2$ 定理 3 的情况下，根据定义， $d_1(\theta) = 0\ \forall\theta$ ，因此右侧的多项式的次数始终为 0；正因如此，额外参数 ζ 以及与之对应的条件期望条件都是不必要的。

在另一个主要情形中，即 $\theta_k = \theta_{k-1}$(情形 2)，通过选取足够大的 $A_0 > 0$，包含 $\mathbb{P}(V(k) > v)$ 的各项便可得到适当的上界。若 $\mathbb{E}[e^{\theta_k V}(k)] < 1$(情形 2.1)，则 A_j 的系数是一个次数为 j 且最高次项系数为正的多项式。由于 (32) 的右侧次数为 $d_{k-1}(\theta_{k-1}) = d_k(\theta_k)$（因为 $\mathbb{E}[e^{\theta_k V}(k)] < 1 \Rightarrow I_k(\theta_k) = 0$），因此存在非负的 $A_{d_k}, \ldots, A_0$，使得 (32) 成立。类似地，若 $\mathbb{E}[e^{\theta_k V}(k)] = 1$，则 A_j 的系数是一个次数为 $j-1$ 且最高次项系数为正的多项式。由于 (32) 的右侧次数为 $d_{k-1}(\theta_{k-1}) = d_k(\theta_k) - 1$（因为 $\mathbb{E}[e^{\theta_k V}(k)] = 1 \Rightarrow I_k(\theta_k) = 1$），由此可知存在非负的 $A_{d_k}, \ldots, A_0$，使得 (32) 成立。至此，步骤 1 完成。

步骤 *2*：令 Q_j 来自步骤 1 的 's and d d定义 $P_j(v_1, \ldots, v_j) := Q_j(v_j + a)\ \forall j \in \{1, 2, \cdots, m\}$. 然后 γ_M 满足 (18)。

步骤 *2* 的证明：我们通过对 $m = 1, \ldots, M$ 进行归纳法，证明 γ_M 的边缘函数 γ_m（即限制在前 m 个分量上的函数）满足 (18)[4]。对于 $m = 1$,

$$\gamma_1(v_1) := (1 - Q_1 e^{-\theta_1 v_1}) \mathbb{1}_{\{v_1 \geq -a_+\}}$$

对所有 $v_1 \geq -a_+$ 均成立

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{v_1 \geq V^{(1)}\}} \gamma_1(v_1 - V^{(1)})\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{v_1 \geq V^{(1)}\}} \left(1 - Q_1 e^{-\theta_1 v_1 + \theta_1 V^{(1)}}\right)\right] \\ &\geq 1 - Q_1 e^{-\theta_1 v_1} = \gamma_1(v_1)\ ,\end{aligned}$$

根据式（29）中的构造。

对于归纳步骤，我们假设该命题对 '$m-1$' 成立，并需要证明它对 'm' 也成立。由于 Q_j's 满足 $j = 1, \ldots, m-1$ 的步骤 1，且随机变量 $V_{(1)} \ldots, V_{(m-1)}$，我们有

$$\gamma_{m-1}(v_1, \ldots, v_{m-1}) := \mathbb{1}_{\{(v_1, \ldots, v_{m-1}) \in \mathcal{D}_a^{m-1}\}} \left[1 - \sum_{j=1}^{m-1} Q_j(v_j + a) e^{-\theta_j v_j}\right]$$

满足式（18）。注意到

$$\operatorname{supp}(\gamma_m \vee 0) := \{(v_1, \ldots, v_m) \in \mathcal{D}_a^m : 1 > \sum_{j=1}^{m} Q_j(v_j + a) e^{-\theta_j v_j}\}$$

由此可知，如果 $(v_1, \ldots, v_m)$ 属于 $(\gamma_m \vee 0)$ 的支撑集，那么 $(v_1, \ldots, v_{m-1})$ 属于 $(\gamma_{m-1} \vee 0)$ 的支撑集。对于所有 $(v_1, \ldots, v_m)$ 属于 $(\gamma_m \vee 0)$ 的支撑集,

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{v_1 \geq V^{(1)}\}} \gamma_m \left(\bigwedge_{1 \leq i \leq 2} \left(v_i - V^{(i)}\right), \ldots, \bigwedge_{m-1 \leq i \leq m} \left(v_i - V^{(i)}\right), v_m - V^{(m)}\right)\right] \\ &= \mathbb{E}\Bigg[\mathbb{1}_{\{v_1 \geq V^{(1)}, \forall 2 \leq i \leq m : v_i + a \geq V^{(i)}\}} \Bigg\{1 - \sum_{j=1}^{m-1} Q_j \left(\bigwedge_{j \leq i \leq j+1} \left(a + v_i - V^{(i)}\right)\right) e^{-\theta_j \left(\bigwedge_{j \leq i \leq j+1} \left(v_i - V^{(i)}\right)\right)} \\ &\quad - Q_m \left(a + v_m - V^{(m)}\right) e^{-\theta_m \left(v_m - V^{(m)}\right)}\Bigg\}\Bigg]\end{aligned}$$

[4]为简化符号表示，在步骤 2 中，当针对某些 m 引用 (18) 或 M 中的其他表达式时，我们指的是相应的限制条件，即假设 $M = m$ 的情况。

由于 $Q_{m-1}(x) \geq 0\ \forall x \geq 0$，根据构造，我们有

$$
\begin{aligned}
&\geq \mathbb{E}\Bigg[\mathbb{1}_{\{v_1 \geq V^{(1)}, \forall 2 \leq i \leq m : v_i + a \geq V^{(i)}\}} \\
&\quad \Bigg\{1 - \sum_{j=1}^{m-1} Q_j \left(\bigwedge_{j \leq i \leq (j+1) \wedge (m-1)} \left(a + v_i - V^{(i)}\right) \right) e^{-\theta_j \left(\bigwedge_{j \leq i \leq (j+1)\wedge(m-1)} \left(v_i - V^{(i)}\right)\right)} \\
&\quad - \sum_{j=m-1}^{m} Q_j \left(a + v_m - V^{(m)}\right) e^{-\theta_j \left(v_m - V^{(m)}\right)} \Bigg\}\Bigg] \\
&= \mathbb{E}\Bigg[\mathbb{1}_{\{v_1 \geq V^{(1)}, v_m + a < V^{(m)}, \forall 2 \leq i \leq m-1, v_i + a \geq V^{(i)}\}} \\
&\quad \Bigg\{-1 + \sum_{j=1}^{m-1} Q_j \left(\bigwedge_{j \leq i \leq (j+1) \wedge (m-1)} \left(a + v_i - V^{(i)}\right) \right) e^{-\theta_j \left(\bigwedge_{j \leq i \leq (j+1)\wedge(m-1)} \left(v_i - V^{(i)}\right)\right)} \Bigg\}\Bigg] \\
&\quad + \mathbb{E}\Bigg[\mathbb{1}_{\{v_1 \geq V^{(1)}, \forall 2 \leq i \leq m-1, v_i + a \geq V^{(i)}\}} \\
&\quad \Bigg\{1 - \sum_{j=1}^{m-1} Q_j \left(\bigwedge_{j \leq i \leq (j+1) \wedge (m-1)} \left(a + v_i - V^{(i)}\right) \right) e^{-\theta_j \left(\bigwedge_{j \leq i \leq (j+1)\wedge(m-1)} \left(v_i - V^{(i)}\right)\right)} \Bigg\}\Bigg] \\
&\quad - \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{v_m + a \geq V^{(m)}\}} \sum_{j=m-1}^{m} Q_j \left(a + v_m - V^{(m)}\right) e^{-\theta_j \left(v_m - V^{(m)}\right)}\right]
\end{aligned}
$$

对于第一个期望利用 Q_j的正性，对于第二个期望利用归纳假设，我们可以继续

$$
\begin{aligned}
&\geq -\mathbb{P}\left(v_m + a < V^{(m)}\right) + \left(1 - \sum_{j=1}^{m-1} Q_j(a + v_j) e^{-\theta_j v_j}\right) \\
&\quad - \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{v_m + a \geq V^{(m)}\}} \sum_{j=m-1}^{m} Q_j \left(a + v_m - V^{(m)}\right) e^{-\theta_j \left(v_m - V^{(m)}\right)}\right] \\
&\geq 1 - \sum_{j=1}^{m} Q_j(a + v_j) e^{-\theta_j v_j} = \gamma_m(v_1, \ldots, v_m)\ .
\end{aligned}
$$

在最后一个不等式中，我们在事件 $v_m + a \geq V^{(m)}$ 上应用了步骤 1。

最后，定理 1 的 (b) 部分中的其余条件，即 γ 有界且 $\gamma(\infty, \infty) = 1$，显然成立。 □

APPENDIX E
FINDING THE POLYNOMIALS' PARAMETERS FOR $GI/G/1 \to \cdot/G/1$

引理 7：满足以下八个不等式即可满足 (21)

$$A\mathbb{E}\left[e^{\theta V} \mid U > u\right] + B\mathbb{E}\left[(v - V)e^{\theta V} \mid U > u\right] + C\mathbb{E}\left[(u - U)e^{\theta V} \mid U > u\right] \geq 0$$

$$B\mathbb{E}\left[Ve^{\theta V}\right] + C\mathbb{E}\left[Ue^{\theta V}\right] \geq 0$$

$$(A + D)e^{\theta a} K_0^Z(v + a + X) - (B + C)e^{\theta a}\left(aK_0^Z(v + a + X) + K_1^Z(v + a + X)\right) \geq 1$$

$$CK_1^Z(v - u + Y) + D(1 - K_0^Z(v - u + Y)) \geq 0$$

$$D\mathbb{E}[K_0^Y(u + X)\mathbb{1}_{\{Y > u + X \geq 0\}}] \geq \mathbb{P}(Y > u + X \geq 0)$$

$$D\mathbb{E}[e^{-\theta(u+X)} \mid 0 > u + X]\mathbb{P}(Y = 0) \geq \mathbb{P}(Y = 0)$$

$$DK_0^Y(0)\mathbb{E}[e^{-\theta(u+X)} \mid 0 > u + X] \geq 1$$

$$
\begin{aligned}
&Ae^{\theta a}\mathbb{E}[K_0^Z(v+a+X)\mathbb{1}_{\{Z>v+a+X,u+X+a\wedge 0<Y\le u+X\}}]\\
&-Be^{\theta a}\Big(\mathbb{E}[K_1^Z(v+a+X)\mathbb{1}_{\{Z>v+a+X,u+X+a\wedge 0<Y\le u+X\}}]\\
&\qquad +a\mathbb{E}[K_0^Z(v+a+X)\mathbb{1}_{\{Z>v+a+X,u+X+a\wedge 0<Y\le u+X\}}]\Big)\\
&+Ce^{\theta a}\mathbb{E}[(u-U)K_0^Z(v+a+X)\mathbb{1}_{\{0\ge U-u>a\wedge 0,V>v+a\}}]+D\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{u\ge U>a\wedge 0+u,V>a+v\}}e^{-\theta u+\theta U}\right]\\
&\ge \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{Z>v+a+X,u+X+a\wedge 0<Y\le u+X\}}]\ .
\end{aligned}
$$

当 $a\ge 0$ 时，由于所有指示函数均消失，最后一个不等式自动成立；此外，当 Y 是连续随机变量时，第六个不等式显然成立。这八个不等式是通过展开 (21)，并对其左右两侧的项进行分组得到的。鉴于显而易见的繁琐性，我们用不同的颜色表示每个分组。正如前面所提示的，上述分组很可能不是最优的，即采用不同的分组方式，或采用其他不涉及简化分组的更直接方法，可能有助于获得更好的 a，A，B，C，D，其衡量标准是最小化 $\mathbb{P}(W>x)$ 的上界。

证明：不等式 (21) 等价于

$$
AF_A+BF_B+CF_C+DF_D\ge F_1 \tag{33}
$$

其中，对于 $u\ge -a_+, v\ge -a, v\ge u$,

$$
\begin{aligned}
F_A(u,v)&:=e^{-\theta v}-\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{u\ge U,v+a\ge V\}}e^{\theta(V-v)}\right]\\
&=\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{u<U\}}e^{\theta(V-v)}\right]+\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{u\ge U,v+a<V\}}e^{\theta(V-v)}\right]\\
&=e^{-\theta v}\mathbb{E}\left[e^{\theta V}\mid U>u\right]\mathbb{P}(U>u)\\
&\quad +e^{\theta a}\mathbb{E}[K_0^Z(v+a+X)\mathbb{1}_{\{Z>v+a+X,Y\le u+X+a\wedge 0\}}]\\
&\quad +e^{\theta a}\mathbb{E}[K_0^Z(v+a+X)\mathbb{1}_{\{Z>v+a+X,u+X+a\wedge 0<Y\le u+X\}}]\ .
\end{aligned}
$$

最后两行是利用条件期望的标准性质以及 X、Y、Z 的独立性，由第二行的第二项得到的：

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{u\ge U,v+a<V\}}e^{\theta(V-v)}\right]&=e^{\theta a}\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{Z>X+v+a\}}\mathbb{1}_{\{Y-X\le u\}}e^{\theta(Z-X-v-a)}\mid X\right]\right]\\
&=e^{\theta a}\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{Z>X+v+a\}}e^{\theta(Z-X-v-a)}\mid X\right]\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{Y-X\le u\}}\mid X\right]\right]\\
&=e^{\theta a}\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[e^{\theta(Z-X-v-a)}\mid Z>X+v+a,X\right]\mathbb{P}(Z>X+v+a\mid X)\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{Y-X\le u\}}\mid X\right]\right]\\
&=e^{\theta a}\mathbb{E}\left[K_0^Z(X+v+a)\mathbb{P}(Z>X+v+a\mid X)\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{Y-X\le u\}}\mid X\right]\right]\\
&=e^{\theta a}\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[K_0^Z(X+v+a)\mathbb{1}_{\{Z>X+v+a\}}\mathbb{1}_{\{Y-X\le u\}}\mid X\right]\right]\\
&=e^{\theta a}\mathbb{E}\left[K_0^Z(X+v+a)\mathbb{1}_{\{Z>X+v+a\}}\mathbb{1}_{\{Y-X\le u\}}\right]\ .
\end{aligned}
$$

在倒数第二行中，我们利用了 $K_0^Z(X+v+a)$ 和 $\mathbb{P}(Z>X+v+a\mid X)$ 关于由 X 生成的 σ-域的可测性。指示函数 $\mathbb{1}_{\{Y-X\le u\}}$ 很容易展开，从而由前一个等式得到最后两行（用于形成方便的“着色”分组）。我们将在展开 F_B、F_C、F_D 时使用相同的论证：

$$
\begin{aligned}
F_B(u,v)&:=ve^{-\theta v}-\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{u\ge U,v+a\ge V\}}(v-V)e^{\theta(V-v)}\right]\\
&=\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{U>u \text{ or } V>v+a\}}(v-V)e^{-\theta v+\theta V}\right]+\mathbb{E}\left[Ve^{\theta(V-v)}\right]\\
&=e^{-\theta v}\mathbb{E}\left[(v-V)e^{\theta V}\mid U>u\right]\mathbb{P}(U>u)+\mathbb{E}\left[Ve^{\theta V}\right]e^{-\theta v}\\
&\quad -e^{\theta a}\mathbb{E}[K_1^Z(v+a+X)\mathbb{1}_{\{Z>v+a+X,Y\le u+X+a\wedge 0\}}]\\
&\quad -ae^{\theta a}\mathbb{E}[K_0^Z(v+a+X)\mathbb{1}_{\{Z>v+a+X,Y\le u+X+a\wedge 0\}}]\\
&\quad -e^{\theta a}\mathbb{E}[K_1^Z(v+a+X)\mathbb{1}_{\{Z>v+a+X,u+X+a\wedge 0<Y\le u+X\}}]\\
&\quad -ae^{\theta a}\mathbb{E}[K_0^Z(v+a+X)\mathbb{1}_{\{Z>v+a+X,u+X+a\wedge 0<Y\le u+X\}}]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_C(u,v) &:= ue^{-\theta v} - \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{u\geq U, v+a\geq V\}}\left((u-U)\wedge(v-V)\right)e^{\theta(V-v)}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{u<U \text{ or } v+a<V\}}(u-U)e^{-\theta v+\theta V}\right] + \mathbb{E}\left[Ue^{\theta(V-v)}\right] \\
&\quad + \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{u\geq U, a\geq V-v\geq U-u\}}\left(u-v-U+V\right)e^{\theta(V-v)}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{u<U\}}(u-U)e^{-\theta v+\theta V}\right] + \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{u+a\wedge 0\geq U, V-v>a\}}(u-U)e^{-\theta v+\theta V}\right] \\
&\quad + \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{0\geq U-u>a\wedge 0, V-v>a\}}(u-U)e^{-\theta v+\theta V}\right] \\
&\quad + \mathbb{E}\left[Ue^{\theta(V-v)}\right] - \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{a\wedge 0+u\geq U, V-v>a\}}\left(u-v-U+V\right)e^{\theta(V-v)}\right] \\
&\quad + \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{a\wedge 0+u\geq U, V-v\geq U-u\}}\left(u-v-U+V\right)e^{\theta(V-v)}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{u<U\}}(u-U)e^{-\theta v+\theta V}\right] + \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{u+a\wedge 0\geq U, V-v>a\}}(v-V)e^{-\theta v+\theta V}\right] \\
&\quad + \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{0\geq U-u>a\wedge 0, V-v>a\}}(u-U)e^{-\theta v+\theta V}\right] \\
&\quad + \mathbb{E}\left[Ue^{\theta(V-v)}\right] + \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{a\wedge 0+u\geq U, V-v\geq U-u\}}\left(u-v-U+V\right)e^{\theta(V-v)}\right] \\
&= \mathbb{E}[Ue^{\theta V}]e^{-\theta v} + \mathbb{E}[(u-U)e^{\theta V} \mid U>u]\mathbb{P}(U>u)e^{-\theta v} \\
&\quad + e^{\theta a}\mathbb{E}[(u-U)K_0^Z(v+a+X)\mathbb{1}_{\{0\geq U-u>a\wedge 0, V>v+a\}}] \\
&\quad - e^{\theta a}\mathbb{E}[K_1^Z(v+a+X)\mathbb{1}_{\{Z>v+a+X, Y\leq u+X+a\wedge 0\}}] \\
&\quad - ae^{\theta a}\mathbb{E}[K_0^Z(v+a+X)\mathbb{1}_{\{Z>v+a+X, Y\leq u+X+a\wedge 0\}}] \\
&\quad + \mathbb{E}\left[K_1^Z(v-u+Y)\mathbb{1}_{\{Z>v-u+Y, Y\leq u+X+a\wedge 0\}}e^{\theta(Y-X-u)}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_D(u,v) &:= e^{-\theta u} - \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{u\geq U, v+a\geq V\}}e^{-\theta((u-U)\wedge(v-V))}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{u<U \text{ or } v+a<V\}}e^{-\theta u+\theta U}\right] \\
&\quad + \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{u\geq U, v+a\geq V\}}\left\{e^{-\theta u+\theta U} - e^{-\theta((u-U)\wedge(v-V))}\right\}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{u<U\}}e^{-\theta u+\theta U}\right] + \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{a\wedge 0+u\geq U, V>a+v\}}e^{-\theta u+\theta U}\right] \\
&\quad + \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{u\geq U>a\wedge 0+u, V>a+v\}}e^{-\theta u+\theta U}\right] \\
&\quad + \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{a\wedge 0+u\geq U, a\geq V-v\geq U-u\}}\left\{e^{-\theta u+\theta U} - e^{-\theta v+\theta V}\right\}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{u<U\}}e^{-\theta u+\theta U}\right] + \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{a\wedge 0+u\geq U, V-v>U-u\}}e^{-\theta u+\theta U}\right] \\
&\quad + \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{u\geq U>a\wedge 0+u, V>a+v\}}e^{-\theta u+\theta U}\right] \\
&\quad - \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{a\wedge 0+u\geq U, V-v\geq U-u\}}e^{-\theta v+\theta V}\right] + \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{a\wedge 0+u\geq U, V-v>a\}}e^{-\theta v+\theta V}\right] \\
&= \mathbb{E}[K_0^Y(u+X)\mathbb{1}_{\{Y>u+X\geq 0\}}] \\
&\quad + \mathbb{E}[K_0^Y(0)e^{-\theta(u+X)}\mathbb{1}_{\{Y>0>u+X\}}] + \mathbb{E}[e^{-\theta(u+X)}\mathbb{1}_{\{Y=0>u+X\}}] \\
&\quad + \mathbb{E}\left[(1-K_0^Z(v-u+Y))\mathbb{1}_{\{Z>v-u+Y, Y\leq u+X+a\wedge 0\}}e^{\theta(Y-X-u)}\right] \\
&\quad + \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{u\geq U>a\wedge 0+u, V>a+v\}}e^{-\theta u+\theta U}\right] \\
&\quad + e^{\theta a}\mathbb{E}[K_0^Z(v+a+X)\mathbb{1}_{\{Z>v+a+X, Y\leq u+X+a\wedge 0\}}]
\end{aligned}
$$

最后

$$
\begin{aligned}
F_1(u,v) &:= \mathbb{P}(U>u) + \mathbb{P}(V>v+a, U\leq u) \\
&= \mathbb{P}(Y>u+X\geq 0) + \mathbb{P}(Y>0>u+X) + \mathbb{P}(Y=0>u+X) \\
&\quad + \mathbb{P}(Z>v+a+X, Y\leq u+X+a\wedge 0) \\
&\quad + \mathbb{P}(Z>v+a+X, u+X+a\wedge 0<Y\leq u+X)
\end{aligned}
$$

□

附录 F 交替更新过程的扩展： $AR/G/1 \to \cdot/G/1$

定理 8: 设交替更新过程 X_k 是两个随机变量 $Y-X^{(i)}$ 和 $V^i \simeq Z-X^{(i)}$ 的序列。定义 $U^{(i)}$ $\mathbb{P}\,U^{(i)}>0\ >0$ 和 $\mathbb{P}\,V^i>0>0$ 一个 $i=1\ 2$ 在 § V 中的 d 定义 d d $\simeq$ 和 ( ) ，并假设对于，，有（）和（ ( ) ）。

（a）耦合积分方程 $i=1,\ 2$

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{u+X^{(i)}\geq Y\}}\psi_i\left((u-U^{(i)})\wedge(v-V^{(i)}),v-V^{(i)}\right)\right]=\psi_{3-i}(u,v) \tag{34}$$

在 $\bar{\mathbb{R}}^2$ 上有界函数类中承认一个唯一解，其极限为 $\psi_i(\infty,\ \infty)=\lim_{u,\ v\to\infty}\psi_i(u,\ v)=1$。该解由下式给出

$$\psi_i(u,v):=\mathbb{P}(T_1^1\leq u,T_1^2\leq v\mid B=i)\ ,$$

其中

$$T_k^1:=\sup_{k\leq i<\infty}(Y_k-X_k)+\cdots+(Y_i-X_i)$$

$$T_k^2:=\sup_{k\leq i<j<\infty}(Z_k-X_k)+\cdots+(Z_i-X_i)+(Y_{i+1}-X_{i+1})+\cdots+(Y_j-X_j)$$

对于 $k\geq 1$ 和 (Y_1,Z_1)、$(Y_2,Z_2)\ldots$，它们是 (Y,Z) 的独立同分布副本。

（b）假设 t hat the functions $\gamma_i:\ \bar{\mathbb{R}}^2\to(-\infty,\ K_\gamma],\ i=1,\ 2$，对于某个有限的 K_γ，对所有 $(u,\ v)\in\text{supp}\,(\gamma_1\vee\gamma_2\vee 0)\subseteq\bar{\mathbb{R}}^2$

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{u+X^{(i)}\geq Y\}}\gamma_i\left((u-U^{(i)})\wedge(v-V^{(i)}),v-V^{(i)}\right)\right]\geq\gamma_{3-i}(u,v)\ . \tag{35}$$

若 $\gamma_i(\infty,\infty):=\text{上极限}_{u,v\to\infty}\gamma_i(u,v)=1$ 则 $\psi_i\geq\gamma_i$ 对于 $i=1,2$.

(c) 假设 th　在函数 $\eta_i\colon\bar{\mathbb{R}}^2\to[0,\infty)$ $i=1,2$ 中，对于所有满足 $v\geq$ 的 $(u,v)\in\text{supp}\,(\psi_1\vee\psi_2)$，均成立。　u

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{u+X^{(i)}\geq Y\}}\eta_i\left((u-U^{(i)})\wedge(v-V^{(i)}),v-V^{(i)}\right)\right]\geq\eta_{3-i}(u,v)\ . \tag{36}$$

If $\eta_i(\infty,\ \infty):=$ 下极限$_{u,\ v\to\infty}\eta_i(u,\ v)=1$ 则对于所有 $v\geq u$ 和 $i=1,\ 2$　　.

该证明与定理 1 的证明（非常）相似。

证明：对于 (a) 部分，我们首先证明给定的 ψ 满足 (34)；在证明 (b) 之后，即可得到唯一性。对于某个$i\in\{1,2\}$，我们有

$$\begin{aligned}
&\psi_{3-i}(u,v)=\mathbb{P}(T_1^1\leq u,T_1^2\leq v\mid B=3-i)\\
&=\mathbb{P}\left(T_2^1\leq(u+X_1-Y_1)\wedge(v+X_1-Z_1),T_2^2\leq v+X_1-Z_1,Y_1\leq u+X_1\mid B=i\right),\\
&=\mathbb{P}\left(T_1^1\leq(u+X^{(i)}-Y)\wedge(v+X^{(i)}-Z),T_1^2\leq v+X^{(i)}-Z,Y\leq u+X^{(i)}\right),
\end{aligned}$$

其中，(Y,Z) 与 (T_1^1,T_1^2) 相互独立。因此

$$=\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{u+X^{(i)}\geq Y\}}\psi_i\left((u-U^{(i)})\wedge(v-V^{(i)}),v-V^{(i)}\right)\right].$$

为了证明 (b) 部分，即 $\psi_i\geq\gamma_i$，首先定义这些函数

$$f_i(u,v):=\limsup_{(x,y)\to(u,v)}\left(\gamma_i(x,y)-\psi_i(x,y)\right)\ \forall(u,v)\in\bar{\mathbb{R}}^2\ ,i=1,2$$

它们是上半连续的，并且在 $\bar{\mathbb{R}}^2$ 的任意闭子集上都能取得最大值。令

$$K:=\sup_{(u,v)\in\bar{\mathbb{R}}^2}\left(f_1(u,v)\vee f_2(u,v)\right)\ .$$

若 $K\leq 0$ 证明完成；否则假设 $K>0$。定义

$$\mathcal{K}:=\{(u,v)\in\bar{\mathbb{R}}^2:f_1(u,v)\vee f_2(u,v)=K\}\ ,$$

它是 $\bar{\mathbb{R}}^2$ 的闭子集，并且

$$a:=\min\{u\in\bar{\mathbb{R}}:\exists v\in\bar{\mathbb{R}}:(u,v)\in\mathcal{K}\}$$

$$b:=\min\{v\in\bar{\mathbb{R}}:(a,v)\in\mathcal{K}\}\ .$$

由于 $f_j(a,\ b)=K>0$ 对 $j=1$ 或 $j=2$ 均成立，因此存在一个序列 $(a_n,\ b_n)\in\text{supp}(\gamma_1\vee\gamma_2\vee 0)$，使得 $(a_n,\ b_n)\to(a,\ b)$，当 $n\to\infty$

$$\begin{aligned}
K=f_j(a,b)&=\lim_{n\to\infty}(\gamma_{3-j}-\psi_{3-j})(a_n,b_n)\\
&\leq\limsup_{n\to\infty}\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{a_n\geq U^{(3-j)}\}}(\gamma_{3-j}-\psi_{3-j})\left((a_n-U^{(3-j)})\wedge(b_n-V^{(3-j)}),b_n-V^{(3-j)}\right)\right]\ .
\end{aligned}$$

由于 $\gamma_{3-j}-\psi_{3-j}\le K_\gamma<\infty$，我们可以进一步使用法图引理

$$\begin{aligned}
&\le \mathbb{E}\left[\limsup_{n\to\infty}\mathbb{1}_{\{a_n\ge U^{(3-j)}\}}(\gamma_{3-j}-\psi_{3-j})\left((a_n-U^{(3-j)})\wedge(b_n-V^{(3-j)}),b_n-V^{(3-j)}\right)\right]\\
&\le K\cdot\mathbb{P}(a=U^{(3-j)})+\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{a>U^{(3-j)}\}}f_{3-j}\left((a-U^{(3-j)})\wedge(b-V^{(3-j)}),b-V^{(3-j)}\right)\right]\\
&\le K\cdot\mathbb{P}(a\ge U^{(3-j)})\ ,
\end{aligned}$$

使用 K 和 f_j的定义。由此可得 $\mathbb{P}(a\ge U^{(3-j)})=1$，因此必有

$$f_{3-j}\left((a-U^{(3-j)})\wedge(b-V^{(3-j)}),b-V^{(3-j)}\right)=K \tag{37}$$

几乎处处成立，才能使上述不等式成为等式。

接下来我们声称$(a,\ b)=(\infty,\ \infty)$。反设 $a<\infty$。那么，(37)和 $\mathbb{P}(U^{3-j}>0)>0$与 a的选取相矛盾，因此 $a=\infty$。类似地，反设 $b<\infty$。那么，(37)和 $\mathbb{P}(V^{3-j}>0)>0$与 b的选取相矛盾，因此 $b=\infty$也成立。最后，

$$K=f_j(\infty,\infty)=\limsup_{u,v\to\infty}(\gamma_j-\psi_j)(u,v)=0$$

根据 γ_i 和 ψ_i的极限条件，从而得到 $\psi_i\ge\gamma_i$。

现在我们可以证明求解(34)的 $\psi=(\psi_1,\psi_2)$的唯一性。设 $\psi^{(1)}$和 $\psi^{(2)}$是满足$\psi_j^{(i)}(\infty,\infty)=\lim_{u,v\to\infty}\psi_j^{(i)}(u,v)=1$, $i,j\in\{1,2\}$的两个有界解。应用定理的第二部分，并取 $\psi=\psi^{(i)}$和 $\gamma=\psi^{(3-i)}$（注意，证明只需要 ψ满足(34)、有界，且 $\psi(\infty,\infty)=\lim_{u,v\to\infty}\psi(u,v)=(1,1)$），可得$\psi^{(i)}\ge\psi^{(3-i)}$对 $i=1$、2成立，从而 $\psi^{(1)}=\psi^{(2)}$。

The proof 对于定理的最后一部分，即 $\psi(u,\ v)\le\eta(u,\ v)$在 $v\ge u$ 上，证明类似，故略去。 □

定理 8 的 (b) 和 (c) 部分中的一般函数 γ 和 η 之间的联系，以及关于 $\mathbb{P}(W>$的上界 $x)$, 是also immediate:

推论 *9*: （一般上界和下界）考虑定理 8 中的函数 ψ_i、 γ_i和 η_i，其中 $i=1,\ 2$。则作业 $n\to\infty$ 的等待时间对所有 $x\ge0$ 均满足

$$\begin{aligned}
&1-\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[(\eta_1+\eta_2)(x-(Z-Y)_+,x-(Z-Y))\right]\\
&\le\mathbb{P}(W>x)=1-\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[(\psi_1+\psi_2)(x-(Z-Y)_+,x-(Z-Y))\right]\\
&\le 1-\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[(\gamma_1+\gamma_2)(x-(Z-Y)_+,x-(Z-Y))\right]\ .
\end{aligned}$$

相应的逗留时间满足

$$\begin{aligned}
&1-\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{Z_1+Y<x\}}(\eta_1+\eta_2)(x-(Z_1+Z_2\vee Y),x-(Z_1+Z_2))\right]\\
&\le\mathbb{P}(D>x)=1-\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{Z_1+Y<x\}}(\psi_1+\psi_2)(x-(Z_1+Z_2\vee Y),x-(Z_1+Z_2))\right]\\
&\le 1-\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{Z_1+Y<x\}}(\gamma_1+\gamma_2)(x-(Z_1+Z_2\vee Y),x-(Z_1+Z_2))\right]\ .
\end{aligned}$$

该证明是推论2证明的向前扩展。

证明：根据 W 在 (1) 中的表示式可知，对于所有 $x\ge0$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(W>x)&=\mathbb{P}(\max\left\{0,T^1+(Z-Y)_+,T^2+Z-Y\right\}>x)\\
&=1-\mathbb{P}(\max\left\{0,T^1+(Z-Y)_+,T^2+Z-Y\right\}\le x)\\
&=1-\mathbb{P}\left(T^1\le x-(Z-Y)_+,T^2\le x-(Z-Y)\right)\\
&=1-\sum_{i=1}^{2}\mathbb{P}\left(T^1\le x-(Z-Y)_+,T^2\le x-(Z-Y)\mid B=i\right)\mathbb{P}(B=i)\\
&=1-\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[(\psi_1+\psi_2)(x-(Z-Y)_+,x-(Z-Y))\right]\ .
\end{aligned}$$

由于 $x-(Z-Y)_+\le x-(Z-Y)$ 和 $\gamma(u,v)\le\psi(u,v)\le\eta(u,v)\ \forall v\ge u$，因此可以直接得到 $P(W>x)$ 的上界和下界。 $\mathbb{P}(D>x)$ 的界由 $D=W+Z_1+Y$ 得出。□

定理 *10*：令 $Y \geq 0$ 和 $X \geq 0$ 为满足 $\mathbb{P}(Y > 0) > 0$ 的两个随机变量。令 $(U, V) = (Y - X, MY - X)$

- 积分方程

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{U \leq u, V \leq v\}} \psi((u - U) \wedge (v - V), v - U)\right] = \psi(u, v) \tag{38}$$

在 $\bar{\mathbb{R}}^2$ 中的有界函数类里存在唯一解，该解满足极限 $\psi(\infty, \infty) = \lim_{u,v \to \infty} \psi(u, v) = 1$，即，

$$\psi(u, v) := \mathbb{P}(T_1^1 < u, T_1^2 < v) \ ,$$

其中

$$T_k^1 = \max_{k \leq i < \infty} ((Y_k - X_k) + \ldots + (Y_i - X_i))$$

$$T_k^2 = \max_{k \leq i < \infty} ((Y_k - X_k) + \ldots + (Y_i - X_i) + (M - 1)\max(Y_k, \ldots, Y_i))$$

对于 $k \geq 1$ 和 (X_1, Y_1)，$(X_2, Y_2) \ldots$ 是 (X, Y) 的独立同分布副本。

- Assume t hat the function $\gamma \colon \bar{\mathbb{R}}^2 \to (-\infty, K_\gamma]$，对于某个有限的 K_γ，对所有 $(u, v) \in \text{supp}(\gamma \vee 0) \subseteq \bar{\mathbb{R}}^2$

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{U \leq u, V \leq v\}} \gamma((u - U) \wedge (v - V), v - U)\right] \geq \gamma(u, v) \ . \tag{39}$$

如果 $\gamma(\infty, \infty) :=$ 上极限$_{u,v \to \infty} \gamma(u, v) = 1$ 那么 $\psi \geq \gamma$。

- 假设函数 $\eta \colon \bar{\mathbb{R}}^2 \to [0, \infty)$ 对所有 $(u, v) \in \text{supp}(\psi)$ 均满足 $v \geq u$

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{U \leq u, V \leq v\}} \eta((u - U) \wedge (v - V), v - U)\right] \leq \eta(u, v) \ . \tag{40}$$

如果 $\eta(\infty, \infty) :=$ 下极限$_{u,v \to \infty} \eta(u, v) = 1$ 那么，对于所有 $v \geq u$，$\psi(u, v) \leq \eta(u, v)$。

该定理的一个有趣之处在于，函数 ψ、γ 和 η 中的第二个分量是 $v - U$，而不是像定理 1 中那样为 $v - V$；其证明与定理 1 的证明非常相似:

证明：对于 (a)，我们 首先证明给定的 ψ 满足 (38)；证明 (b) 后即可得到唯一性。我们有 e

$$\begin{aligned}
&\psi(u, v) = \mathbb{P}(T_1^1 \leq u, T_1^2 \leq v) \\
&= \mathbb{P}\left(Y_1 - X_1 + 0 \vee T_2^1 \leq u, MY_1 - X_1 + 0 \vee T_2^1 \leq v, Y_1 - X_1 + T_2^2 \leq v\right) \\
&= \mathbb{P}\big(Y_1 - X_1 \leq u, MY_1 - X_1 \leq v, \\
&\qquad T_2^1 \leq (u + X_1 - Y_1) \wedge (v + X_1 - MY_1), T_2^2 \leq v + X_1 - Y_1\big) \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{Y - X \leq u, MY - X \leq v\}} \psi((u + X - Y) \wedge (v + X - MY), v + X - Y)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{U \leq u, V \leq v\}} \psi((u - U) \wedge (v - V), v - U)\right] .
\end{aligned}$$

为证明 (b)，即 $\psi \geq \gamma$，先定义函数

$$f(u, v) := \limsup_{(x,y) \to (u,v)} \left(\gamma(x, y) - \psi(x, y)\right) \ \forall (u, v) \in \bar{\mathbb{R}}^2 \ ,$$

该函数是上半连续的，并且在 $\bar{\mathbb{R}}^2$ 的任意闭子集上都能取得最大值。令

$$K := \sup_{(u,v) \in \bar{\mathbb{R}}^2} f(u, v) \ .$$

若 $K \leq 0$，则证明完成；否则，假设 $K > 0$。定义

$$\mathcal{K} := \{(u, v) \in \bar{\mathbb{R}}^2 : f(u, v) = K\} \ ,$$

它是 $\bar{\mathbb{R}}^2$ 的一个闭子集，并且

$$a := \min\{u \in \bar{\mathbb{R}} : \exists v \in \bar{\mathbb{R}} : (u, v) \in \mathcal{K}\}$$

$$b := \min\{v \in \bar{\mathbb{R}} : (a, v) \in \mathcal{K}\} \ .$$

由于 $f(a, b) = K > 0$，存在一个序列 $(a_n, b_n) \in \text{supp}(\gamma \vee 0)$，使得当 $n \to \infty$ and 时，$(a_n, b_n) \to (a, b)$

$$\begin{aligned}
K = f(a, b) &= \lim_{n \to \infty} (\gamma - \psi)(a_n, b_n) \\
&\leq \limsup_{n \to \infty} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{a_n \geq U, b_n \geq V\}} (\gamma - \psi)\left((a_n - U) \wedge (b_n - V), b_n - U\right)\right]
\end{aligned}$$

由于 $\gamma-\psi\le K_\gamma<\infty$，我们还可以进一步使用法图引理

$$\begin{aligned}&\le\mathbb{E}\left[\limsup_{n\to\infty}\mathbb{1}_{\{a_n\ge U,b_n\ge V\}}(\gamma-\psi)\left((a_n-U)\wedge(b_n-V),b_n-U\right)\right]\\&\le K\cdot\mathbb{P}(a=U\text{ or }b=V)+\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{a>U,b>V\}}f\left((a-U)\wedge(b-V),b-V\right)\right]\\&\le K\cdot\mathbb{P}(a\ge U,b\ge V)\ ,\end{aligned}$$

利用 K 和 f 的定义。由此可得 $\mathbb{P}(a\ge U,b\ge V)=1$，因此必然有

$$f\left((a-U)\wedge(b-V),b-U\right)=K \tag{41}$$

几乎必然成立，才能使上述不等式成立为等式。

接下来我们声称 $(a,b)=(\infty,\infty)$。反设 $a<\infty$。那么 (41) 和 $\mathbb{P}(U>0)>0$ 与 a 的选取矛盾，因此 $a=\infty$。类似地，反设 $b<\infty$。那么 (41) 和 $\mathbb{P}(U>0)>0$ 与 b 的选取矛盾，因此 $b=\infty$ 也成立。最后，

$$K=f(\infty,\infty)=\limsup_{u,v\to\infty}(\gamma-\psi)(u,v)=0$$

根据 γ 和 ψ 的极限条件，从而得到 $\psi\ge\gamma$。

现在可以证明求解（38）的 ψ 的唯一性。设 ψ_1 和 ψ_2 是两个有界解，满足 $\psi_i(\infty,\infty)=\lim_{u,v\to\infty}\psi_i(u,v)=1$。应用定理的第二部分，其中取 $\psi=\psi_i$ 和 $\gamma=\psi_{3-i}$（注意，证明只需要 ψ 满足（38）、有界，且 $\psi(\infty,\infty)=\lim_{u,v\to\infty}\psi(u,v)=1$），我们得到对于 $i=1,\ \psi_i\ge\psi_{3-i}$ 成立，2，因此 $\psi_1=\psi_2$。定理最后一部分的证明，即在 $v\ge u$ 上 $\psi(u,v)\le\eta(u,v)$，也与定理 1 中相应部分的证明类似，故此处省略。□

推论 *11*：（一般上界和下界）考虑定理 10 中的函数 ψ、γ 和 η。那么，对于所有 $x\ge0$，作业 $n\to\infty$ 的等待时间满足

$$\begin{aligned}1-\mathbb{E}\left[\eta(x,x+(M-1)Y)\right]\le\mathbb{P}(W>x)&=1-\mathbb{E}\left[\psi(x,x+(M-1)Y)\right]\\&\le1-\mathbb{E}\left[\gamma(x,x+(M-1)Y)\right]\ .\end{aligned}$$

相应的逗留时间满足

$$\begin{aligned}1-\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{MY\le x\}}\eta(x-MY,x-Y)\right]\le\mathbb{P}(D>x)&=1-\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{MY\le x\}}\varphi(x-MY,x-Y)\right]\\&\le1-\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{MY\le x\}}\psi(x-MY,x-Y)\right]\ .\end{aligned}$$

证明：由 (26) 中 W 的表示可得，对于所有 $x\ge0$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(W>x)&=\mathbb{P}(\max\left\{0,T^1,T^2+(M-1)Y\right\}>x)\\&=1-\mathbb{P}(\max\left\{0,T^1,T^2+(M-1)Y\right\}\le x)\\&=1-\mathbb{P}\left(T^1\le x,T^2\le x+(M-1)Y\right)\\&=1-\mathbb{E}\left[\psi(x,x+(M-1)Y)\right]\ .\end{aligned}$$

由于 $x\le x+(M-1)Y$ 且 $\gamma(u,v)\le\psi(u,v)\le\eta(u,v)\ \forall v\ge u$，$P(W>x)$ 的上界和下界立即得出。$\mathbb{P}(D>x)$ 的界由 $D=W+MY$ 得出。□