arXiv:2304.10174v1 [math.RT] 20 Apr 2023

# 极性 Brauer 范畴与李超代数表示

G.I. LEHRER 和 R.B. ZHANG

Abstract. 我们定义并研究一类范畴，其态射是“极性 Brauer 图”的线性组合；极性 Brauer 图是 Brauer 图的极化扩展。我们证明，这些范畴本身具有丰富的结构，并为弦图代数提供了自然的背景，使其取代 Brauer 代数，成为范畴中对象的自同态代数。我们利用 $\mathfrak{g}$ 的 Casimir 代数，定义从极性 Brauer 图范畴到李超代数 $\mathfrak{g}$ 的模的某些全子范畴的函子，并证明在某些特殊情况下，这些函子是满的。其中一个函子为研究包络超代数 $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ 提供了有用工具。它给出了中心 $Z(\mathrm{U}(\mathfrak{g}))$ 的范畴描述，并导出了 $\mathrm{U}(\mathfrak{g}) \otimes \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ 中的“特征恒等式”，其中 $V$ 是自然 $\mathfrak{g}$- 模。

## Contents

1. 引言 2 1.1. 极性 Brauer 图的范畴 3 1.2. 极性图范畴的应用 4 1.3. 相关工作 5 2. 极化 Brauer 范畴 6 2.1. Brauer 范畴 6 2.2. 极性图 7 2.3. 极图的复合 9 2.4. 图的并置与水平乘法 10 2.5. 极性 Brauer 图 11 2.6. 极化 Brauer 范畴 $\mathcal{AB}(\delta)$ 13 2.7. 极化 Temperley-Lieb 范畴 20 3. $\mathcal{AB}(\delta)$中对象的自同态代数 23 3.1. 弦图与 Brauer 代数 23 3.2. 弦图与仿射 Brauer 代数 26 4. 极性 Brauer 范畴的表示 28 4.1. Casimir 代数 28 4.2. 四元代数族 30 4.3. 极性 Brauer 范畴的表示 33 5. 在包络超代数中的应用 36 5.1. $\mathrm{U}(\mathfrak{osp}(V;\omega))$中心的范畴构造 36 5.2. $\mathfrak{so}_m$ 和 $\mathfrak{sp}_{2n}$ 39的特征恒等式的范畴化

2020 年数学主题分类。主要分类：16G30、17B10；次要分类：22E46。关键词和短语：极性 Brauer 图，李超代数，Casimir 元素，普遍包络代数，张量范畴。

6. 在范畴 $\mathcal{O}$ 上的应用 $\mathfrak{sp}_2$ 42
7. 评论与展望 44
7.1. 与其他工作的关系 45
7.2. 展望 46
附录 A. 李超代数 $\mathfrak{osp}(V;\omega)$基础知识 47
A.1. $\mathfrak{osp}(V;\omega)$的张量记号 48
A.2. 引理 4.3 的证明 49
A.3. U($\mathfrak{osp}(V;\omega)$)中心元的公式 50
致谢 50
参考文献 51

## 1. Introduction

继 [5], 的开创性工作之后，现已公认，例如在 [20, 22, 23,24, 26] 及其他研究中（另见 [1, 28] 及其中的参考文献），图表可用于分析李代数、李超代数或相关量子群的某些模的张量积。基于图示技术形成的一种通用方法，使得能够对某些类别的模的张量积进行整体研究。具体而言，人们构造图范畴，并寻求从这些图范畴到李（超）代数 $\mathfrak{g}$的相应模范畴的函子。图范畴中态射的图形化描述通常能够简化目标范畴中 $\mathfrak{g}$-模之间态射的描述，从而有助于更深入地理解后者。

一个被广泛研究的例子是文献 [22] 中引入的 Brauer 范畴，以及从该范畴到自然模的张量幂范畴 $V^{\otimes r}$ 的函子，其中自然模对应于正交或辛李代数，或正交辛李超代数。类似地，Brauer 范畴的一个有向版本（参见例如 [27]）可用于研究一般线性李（超）代数的自然模及其对偶模的重复张量积。

利用这些图范畴 [22]，人们发展出了经典（超）群及相应量子（超）群不变量理论的现代范畴表述。由此，人们对自同态代数 $\mathrm{End}^{\mathrm{U}(\mathfrak{g})}(V^{\otimes r})$ [21, 22, 33], 有了许多新的认识，例如以显式生成元和关系的形式为它们构造表示。

在 [15] 中，我们引入了极性辫图的概念，并定义了以这类图为基的图范畴。研究具有如下形式的量子群模时，自然会出现这些范畴： $M \otimes V^{\otimes r}$，其中 $M$是任意模，而 $V$ 是有限维单模。我们在前引文中证明，形式为 $M \otimes V^{\otimes r}$ 的 $\mathrm{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$ 表示范畴（其中 $M$ 是投射 Verma 模， $V$是二维 Weyl 模）可以与某个由这类极性辫图构成的范畴相识别。

本文的主要目的是发展一种新型图示范畴理论，以应用于李理论背景下的表示论。

我们引入一个由极性 Brauer 图构成的范畴 $\mathcal{AB}(\delta)$。从直观上说，该范畴以一阶近似于极化 BMW 范畴 [15] to $\hbar$ 中的 $q \approx 1 + \hbar$（见第 7.1 节）。这个范畴特别适合研究以下类型的模

$M \otimes V^{\otimes r}$ 正交辛李超代数的模，其中 $M$ 是任意模， $V$ 是自然模。

我们将看到，弦图代数（见第 3 节）和 Casimir 代数（见定义 4.1）自然地由 $\mathcal{AB}(\delta)$ 理论导出。弦图代数在文献中出现于多个背景下，例如构形空间上联络的 holonomy（KZ 联络）以及纯辫群的表示（一个很好的参考来源是 [18, §XX]）。它通过 Casimir 代数进入李（超）代数的表示论 [19], ，并在前引文献中促成了对经典群不变量理论的统一处理。

我们发展图示范畴 $\mathcal{AB}(\delta)$ 及其某些商范畴的结构理论，并探讨 $\mathcal{AB}(\delta)$ 的若干应用，以展示它与表示论的联系。更具技术性的应用将在其他地方阐述。

现在，我们将更精确地阐述本文的几个要点。

1.1. 极性 Brauer 图的范畴。设 $K$ 为交换环（“基环”），并设 $\delta \in K$ 为任意但固定的参数。我们引入一个预加性的 $K$-线性图示范畴 $\mathcal{AB}(\delta)$，它是 Brauer 范畴的“极性”扩展。范畴 $\mathcal{AB}(\delta)$ 的对象集为 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$，其态射的 $K$-模由某些图表张成，我们将在下文对其加以定义。这些“极性图”是以特定方式连接到一个极上的 Brauer 图。态射的复合本质上由图表的复合给出。范畴 $\mathcal{AB}(\delta)$ 称为图示仿射 Brauer 范畴，而每个态射图称为仿射 Brauer 图。我们也将宽泛地把 $\mathcal{AB}(\delta)$ 称为极性 Brauer 范畴。

类别 $\mathcal{AB}(\delta)$ 包含一个与通常的 Brauer 图范畴 $\mathcal{B}(\delta)$ 同构的子范畴。它具有一个双函子 $\otimes\colon \mathcal{AB}(\delta) \times \mathcal{B}(\delta) \longrightarrow \mathcal{AB}(\delta)$，该函子由仿射 Brauer 图（置于左侧）与普通 Brauer 图并置而得，这使得 $\mathcal{AB}(\delta)$ 成为单幺范畴 $\mathcal{B}(\delta)$ 上的右模范畴。 $\mathcal{AB}(\delta)$ 的 $K$-模态射将通过生成元和关系来描述，类似于 [22] 中对 $\mathcal{B}(\delta)$ 的描述。

范畴 $\mathcal{AB}(\delta)$ 与弦图代数 $T_r$（见第 3 节）有密切关系，适用于所有整数 $r \geq 2$。这些代数出现在李理论表示论的多个不同方面，并且在我们的范畴 $\mathcal{AB}(\delta)$ 中发挥着与 Brauer 范畴中的 Brauer 代数类似的作用。在 Brauer 范畴中，不同次数的 Brauer 代数作为对象的自同态代数出现；而对于每个对象 $r \in \mathcal{AB}(\delta)$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{AB}(\delta)}(r, r)$ 是代数 $T_r$ 的一个商，后者是次数为 $r$ 的 Brauer 代数的仿射推广。

代数 $T_r$ 在某种意义上是 $r$-股辫群的群环 $K'(q)B_r$ 的半经典极限，其中 $K'$ 是 $K$ 的一个适当的整扩张，而 $q$ 是一个不定元。由于辫群 $B_r$ 通过 $R$- 矩阵作用于量子群模的张量积上，我们的理论可以被视为与这一作用相关。

范畴 $\mathcal{AB}(\delta)$ 为 Casimir 代数 $C_r(\mathfrak{g})$ 和弦图代数 $T_r$ 在不变量理论 [19]中的应用提供了自然框架。 $\mathcal{AB}(\delta)$ 内在的图示方法，带来了对 $T_r$这些商代数的图形化描述，这本身也颇具意义。

$\mathcal{AB}(\delta)$ 的结构远比 Brauer 范畴 $\mathcal{B}(\delta)$ 丰富。甚至自同态代数 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{AB}(\delta)}(0,0)$ 和 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{AB}(\delta)}(1,1)$ 也相当有趣，后文将对此加以说明。我们将看到，它们在范畴化构造 $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ 的中心，以及研究 Bracken 在其论文 [3, §4.10] 中发现的正交李代数和辛李代数的特征恒等式时，都发挥着重要作用；相关研究还见论文 [4, 14]（另见 [9]）。

范畴 $\mathcal{AB}(\delta)$ 的一个特定商范畴 $\mathcal{ATL}(\delta)$，我们称之为图示仿射坦普利-利布范畴或极化 Temperley-Lieb 范畴，其中包含一个与通常的 Temperley-Lieb 范畴 [15] 同构的子范畴。我们能够相当完整地确定其结构；特别是，给定 $r$ 和 $s$，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{ATL}(\delta)}(r,s)$ 是一个在 $K$ 上的多项式代数上的自由模，并且我们确定了它的秩。

范畴 $\mathcal{ATL}(\delta)$ 有一个依赖于另一参数 $\mu$ 的商范畴 $\mathcal{TLB}(\delta,\mu)$，与 $B$ [13, 15] 型的 Temperley-Lieb 范畴类似。

1.2. 极图范畴的应用。本文引入的图范畴与其他领域有着深刻的联系。我们探讨其中一些最直接的应用。

对于任意一对固定的非负整数$m$ 和 $n$，设 $V=\mathbb{C}^{m|2n}$，并设 $\omega$ 是 $V$ 上的非退化超对称偶双线性型。设 $\omega$ 是 $V$ 上的非退化、超对称、偶双线性型。用 $\mathfrak{g}=\mathfrak{osp}(V;\omega)$ 表示相应的正交辛李超代数。令 $\mathcal{T}(V)$ 为 $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$-模的满子范畴，其对象为所有 $r\in\mathbb{N}$ 对应的 $V^{\otimes r}$。存在一个张量函子 $\mathcal{F}\colon\ \mathcal{B}(\mathrm{sdim})\longrightarrow\mathcal{T}(V)$，其中 $\mathcal{B}(\delta)$ 是相关的 Brauer 范畴，已在文献中得到充分研究（例如参见 [23]）。这里，$\mathrm{sdim}:=\mathrm{sdim}(V)=m-2n$ 是 $V$ 的超维数。

给定任意一个 $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$-模 $M$，我们考虑 $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$-模的全子范畴 $\mathcal{T}_M(V)$，其对象为所有 $r\in\mathbb{N}$ 的 $M\otimes V^{\otimes r}$。存在一个张量积函子 $\otimes\colon\ \mathcal{T}_M(V)\times\mathcal{T}(V)\longrightarrow\mathcal{T}_M(V)$，其定义显而易见。我们构造一个函子 $\mathcal{F}_M\colon\ \mathcal{AB}(\mathrm{sdim})\longrightarrow\mathcal{T}_M(V)$，它以交换图 (4.17) 所表达的意义保留张量积 $\otimes:\mathcal{AB}(\delta)\times\mathcal{B}(\delta)\longrightarrow\mathcal{AB}(\delta)$。显然，当 $M$ 取为 $V$ 时，$\mathcal{T}_M(V)=\mathcal{T}(V)$，且此时 $\mathcal{F}_M$ 本质上与 $\mathcal{F}$ 一致。

函子 $\mathcal{F}_M\colon\ \mathcal{AB}(\mathrm{sdim})\longrightarrow\mathcal{T}_M(V)$ 的构造推广了 $\mathfrak{g}$ 的 Casimir 代数 $C_{r+1}(\mathfrak{g})$ 在任意 $r$ 上的自然作用；这一构造利用了 $T_{r+1}$ 与 $C_{r+1}(\mathfrak{g})$ 之间的联系。对于所有 $r$，这一情形可由下列交换图简洁地概括：

$$\begin{array}{ccc} T_{r+1} & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{AB}(\mathrm{sdim})}(r,r) \\ \downarrow & \searrow & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{F}_M|_r} \\ C_{r+1}(\mathfrak{g}) & \longrightarrow & \mathrm{End}_{\mathcal{T}_M(V)}(M\otimes V^{\otimes r}), \end{array}$$

其中，底部的水平映射是 $C_{r+1}(\mathfrak{g})$ 在 $M\otimes V^{\otimes r}$ 上的自然作用，而 $\mathcal{F}_M|_r$ 是 $\mathcal{F}_M$ 在 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{AB}(\mathrm{sdim})}(r,r)$ 上的限制。

在后续的一篇论文中，我们将详细研究函子 $\mathcal{F}_M$ ，它作用于 $\mathfrak{g}$ 的某个抛物范畴 $\mathcal{O}$ 中的广义 Verma 模 $M$ 。对于一类投射广义 Verma 模，相应的因子是满的。

1.2.2. 范畴 $\mathcal{O}$ of $\mathfrak{sp}_2(\mathbb{C})$。当 $V = \mathbb{C}^{0|2}$ thus sdim $= -2$ 时，相应的李超代数 $\mathfrak{osp}(V;\omega)$ 就是普通李代数 $\mathfrak{sp}_2(\mathbb{C})$。当 $M$ 是具有最高权 $\lambda$ 的 Verma 模 $M_\lambda$ ，或是 $\mathfrak{sp}_2(\mathbb{C})$ 的单模 $L_\lambda$ 时，我们将证明函子 $\mathcal{F}_M$: $\mathcal{AB}(-2) \longrightarrow \mathcal{T}_M(V)$ 可通过商范畴（Temperley-Lieb）范畴 $\mathcal{TLB}(-2,\lambda)$ 分解。此外，若 $M_\lambda$ 在 $\mathfrak{sp}_2(\mathbb{C})$ 的 O 类别 $\mathcal{O}$ 中是投射的，我们将证明 $\mathcal{TLB}(-2,\lambda)$ 与 $\mathcal{T}_{M_\lambda}(V)$ 同构。这一结果是某个 B 型 Temperley-Lieb 代数与一个无限维 $\mathrm{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$-模范畴之间等价关系的经典类比，该等价关系已在 [15] 中得到证明；它为 $\mathcal{T}_{M_\lambda}(V)$ 中的同态提供了明确描述。

1.2.3. 包络超代数。对于任意正交辛李超代数$\mathfrak{g} = \mathfrak{osp}(V;\omega)$，若 $\mathfrak{g}$-模 $M$ 本身就是包络超代数 $\mathrm{U} = \mathrm{U}(\mathfrak{g})$，则函子 $\mathcal{F}_\mathrm{U}$ 从 $\mathcal{AB}(\mathrm{sdim})$到 $\mathcal{T}_\mathrm{U}(V)$为研究该包络超代数提供了有效工具。

我们证明，可以通过考察 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{AB}(\mathrm{sdim})}(0,0)$ 在函子 $\mathcal{F}_U$下的像来分析 $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ 的中心；特别地，由此得到中心的显式生成元。

一般而言， $\mathcal{F}_\mathrm{U}$ 到 $\mathrm{Hom}^{\mathcal{AB}(\mathrm{sdim})}(1,1)$ 的限制 $\mathcal{F}_\mathrm{U}|_1$ 具有非平凡的核，而 $\ker(\mathcal{F}_\mathrm{U}|_1)$ 中的非零元素会在 $\mathrm{U}(\mathfrak{g}) \otimes \mathrm{End}_\mathbb{C}(V)$ 中导出有趣的恒等式。在 $n = 0$ 或 $m = 0$ 的特殊情形下，它们分别对应于 $\mathfrak{g}$ 为$\mathfrak{so}_m$ 或 $\mathfrak{sp}_{2n}$；我们由此得到这些李代数的特征恒等式的范畴论推导，这些恒等式最初见于 [3,§4.10] 和 [4, 14]。

这些特征恒等式为数理物理文献中的李理论计算提供了有用工具，并已得到广泛应用（例如，参见 [16] ，其中有简要综述及参考文献）。我们的工作可视为对这些恒等式的范畴化。

1.3. 相关工作。论文 [15] 引入了极化辫图，并构造了以此类图为态射的范畴。极化辫图是带有一个极的辫图，该极是位于图左侧的一条竖直开放粗弦，细弦可以绕着它缠绕。此类范畴之一是极化 Temperley-Lieb 范畴；已证明它同构于一个无限维 $\mathrm{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$-表示范畴，也同构于 [12] 中引入的仿射坦普利-利布范畴。

尽管它并未涉及本工作的核心主题“极性”，我们仍应提及，在 [19], 中已证明，如果 $V_1, \ldots, V_r$ 是任意一组有限维简单 $\mathfrak{sl}_2$-模，则有满射 $T_r \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathfrak{sl}_2}(V_1 \otimes \ldots \otimes V_r)$。这也有一个范畴论背景。

存在一个仿射 Brauer 范畴，见 [28, 定义 1.2] ，以及一个相关的仿射 VW 超范畴，见 [1, §1.4], ；它们的自同态代数分别是仿射 Nazarov-Wenzl 代数（见 [8, 定义 2.1]）及其若干变体（见 [1, 定义 39] ）。这些范畴 [1, 28] 是用带点的 Brauer 图来呈现的（类似于 [12]中的带点 Temperley-Lieb 图），采用的图示方法不同于 $\mathcal{AB}(\delta)$ 中的极性 Brauer 图。不过，这些

范畴旨在研究正交李代数、辛李代数以及 periplectic 李超代数的 $M\otimes V^{\otimes r}$ 型模（分别见 $\mathfrak{p}(n)$），其中 $V$ 是自然模，因此在整体特征上与我们的范畴十分相似。我们将在第 7.1 节中具体比较我们的范畴与 [1, 28] 中的范畴。

我们指出，对于以某些类型的投射抛物 Verma 模为 $M$ 的模 $M\otimes V^{\otimes r}$，Schur–Weyl 对偶已在 [8, 28]中建立。

## 2. The polar Brauer category

在本节中，我们将给出所研究范畴的基本定义和性质。设 $K$ 为带单位元的交换环。

**2.1. Brauer 范畴。**定义在 $K$ 上、带有固定参数 $\delta\in K$ 的 Brauer 范畴 $\mathcal{B}(\delta)$ 于 [22] 中引入；其对象为 $\mathbb{N}=\{0,1,2,\dots\}$，且态射的 $K$-模以 Brauer 图为基。它是一个张量范畴，其张量积函子 $\otimes:\ \mathcal{B}(\delta)\times\mathcal{B}(\delta)\longrightarrow\mathcal{B}(\delta)$ 满足：对所有对象，$r\otimes s=r+s$；对任意 Brauer 图 $A$、$B$，$A\otimes B$ 是将它们并置而成的图，其中 $A$ 位于左侧。

据上述文献证明，在复合和张量积运算下，所有 Brauer 图构成的集合由图 1 所示的基本 Brauer 图 $I, X, \cap, \cup$ 生成。

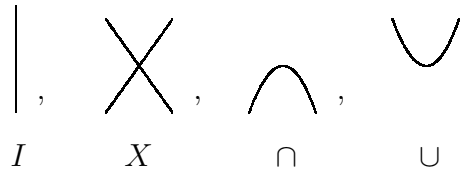



Figure 1. Brauer 图的生成元

生成元之间的定义关系见 [22]。

对于任意 $r\in\mathbb{N}$，自同态代数 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}(\delta)}(r,r)$ 是参数为 $\delta$、定义在 $K$ 上的 $r$ 次 Brauer 代数 $B_r(\delta)$，其单位元为 $I_r=\underbrace{\big|\ \big|\dots\big|}_{r}$.

考虑元素 $H=X-(\cup\circ\cap)\in B_2(\delta)$；其图示见图 2，且它将在后文发挥重要作用。容易看出，$H$ 满足

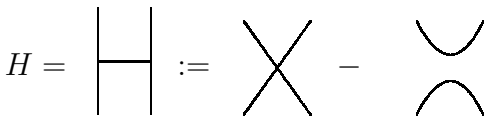



Figure 2. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}(\delta)}(2,2)$ 中的元素 $H$

图 3 所示的关系，称为 $H$ 的斜对称性。

为方便读者，我们给出这一关系的一个简短代数证明。图 3 左侧可写作 $(I\otimes\cap\otimes I)\circ(X\otimes H)\circ(I\otimes\cup\otimes I)$。利用 $H$ 的公式，并运用 Brauer 范畴中的关系展开并化简后，可得 $(\cup\circ\cap)-X=-H$。

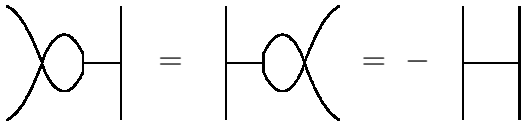


FIGURE 3. $H$的斜对称性

设 $\mathrm{Hom}(\mathcal{B}(\delta)) = \sum_{r,s} \mathrm{Hom}^{\mathcal{B}(\delta)}(r,s)$。将张量积限制在态射上，可得到一个结合乘法 $\otimes : \mathrm{Hom}(\mathcal{B}(\delta)) \times \mathrm{Hom}(\mathcal{B}(\delta)) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{B}(\delta))$，我们称之为 $\mathrm{Hom}(\mathcal{B}(\delta))$ 的水平乘法。这个结合代数记作 $(\mathrm{Hom}(\mathcal{B}(\delta)) \otimes)$。其单位元为空 Brauer 图（$\in \mathrm{Hom}^{\mathcal{B}(\delta)}(0,0)$）。

本节将对新极化范畴 $\mathcal{AB}(\delta)$ 中的态射作类似的描述。

2.2. 极性图。首先介绍极性图，这是构建范畴 $\mathcal{AB}(\delta)$ 所需的一个中间概念。

设 $r_0, r_1, \ldots, r_k \in \mathbb{N}$，并且对每个 $i = 1, \ldots, k$，令 $D_i$ 为任意一个 Brauer $(r_{i-1}, r_i)$-图。我们引入一个与这些数据相关联的图，如图 4 所示。

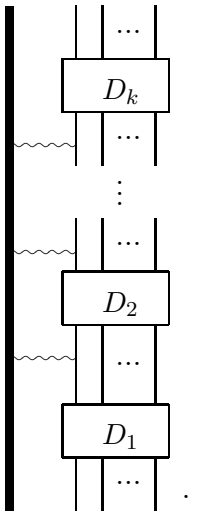



FIGURE 4. 极图

通常的布劳尔图的弦以细弧绘制。存在唯一一条称为极的粗弧，它始终垂直，并放置在图表的左边界上；波浪线始终水平；波浪线的左端与极相连，右端与一条垂直细线相连，如图所示；极和波浪线均不与任何弧相交。

注释 2.1。将连接极与 Brauer 图的“波浪线”称为“连接器”。

2.2.1. 极图之间的关系。设 P 为自由的 $K$-模，其基由上述图表组成，并设 $0_{\mathcal{B}}$ 为由下述元素生成的 $K$-子模。

(1) 上升关系与下降关系。对于 P 中任意图表 $\mathbb{D}$，若图 5 的左（分别为右）侧出现在其中作为子图，则将其替换为右（分别为左）侧，得到图表 $\mathbb{D}'$。那么 $\mathbb{D}-\mathbb{D}'$ 是 $\mathbf{0}_{\mathcal{B}}$的一个生成元。

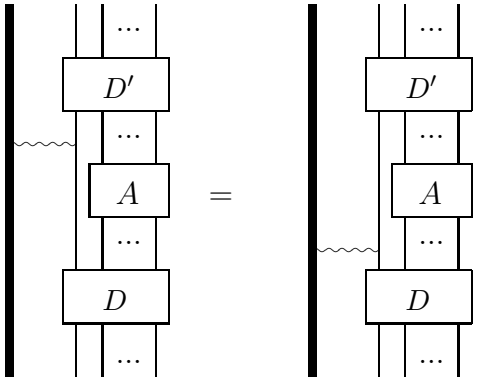



FIGURE 5. $A$ 可以移至连接线的上方或下方

(2) 删除自由环。将上升关系和下降关系应用于 $\mathbb{D}\in$ P 时，会涉及 Brauer 图的复合，这可能会引入自由环，即未连接到任何连接线的环。从 $\mathbb{D}$ 中删除所有自由环后，得到图表 $\mathbb{D}\in$P。若 $\ell(\mathbb{D})$ 表示 $\mathbb{D}$ 中自由环的数量，则 $\mathbb{D}-\delta^{\ell(\mathbb{D})}\widetilde{\mathbb{D}}$ 是 $\mathbf{0}_{\mathcal{B}}$ 的一个生成元。

(3) 其他 Brauer 关系。更一般地，若 $\mathbb{D}$ 属于 P，且 $\lambda\mathbb{D}'\in$ P（$\lambda\in K$）由 $\mathbb{D}$ 经反复应用上升关系、下降关系以及 Brauer 范畴中由不含中间连接线的复合所产生的关系得到，则 $\mathbb{D}-\lambda\mathbb{D}'\in\mathbf{0}_{\mathcal{B}}$。

定义 2.2。令 H $=$ P$/\mathbf{0}_{\mathcal{B}}$。将任意图表 $\mathbb{D}\in$ P 在 H 中的像称为极图。它将用与 $\mathbb{D}$ 相同的图形表示（如图 4 所示）。

注意，上述关系包括 $\mathcal{B}(\delta)$ 中所有不与极相连的 Brauer 图的关系。

图 4 所示的极图在底部有 $r_0+1$ 个端点（顶部有 $r_k+1$ 个端点），其中一个是极的下端点（上端点），其余端点属于细弧。它称为一个极性（$r_0, r_k$）-图。该极图中的连接器数量为 $k-1$。这就是该图的阶。

显然，H 是一个自由的 $K$-模。若 H$(r,s)$ 表示由极性（$r,s$）-图张成的 $K$-子模，则 H $=\sum_{r,\ s}$H$(r,s)$。注意，H 按极图的阶进行 $\mathbb{Z}_+$-分次。我们将 $\mathbf{H}_d$ 和 H$(r,s)_d$ 分别记为 H 和 H$(r,s)$ 的 $d$ 次齐次分量，并将 $\pi_d:\mathbf{H}\longrightarrow\mathbf{H}_d$ 记为到 $d$ 次齐次分量的投影映射。

引理 2.1. 对于任意给定的 $(r,s)$，存在一个 $K$-模同构

$$\iota:\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}(\delta)}(r,s)\longrightarrow\mathbf{H}(r,s)_0,$$

它将 Brauer 图 $A\in$ Hom$^{\mathcal{B}(\delta)}(r,s)$ 映射到图 6 所示的唯一一个阶数为 0 的极性 $(r,s)$-图$\mathbb{A}_0$。

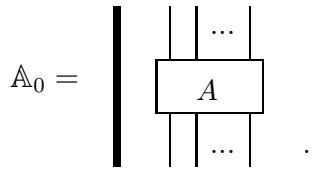



FIGURE 6. 阶数为 0 的图表

H这里给出一些简单的极图，它们将在后文中发挥关键作用：

- $(0,0)$-图由单独一个极组成；而 $(r,r)$-图$\mathbb{I}_r = \mathbb{A}_0$ 对于 $A = I_r$，其中 $r \geq 1$ 如图6所定义；
- $(1,1)$-图 $\mathbb{H}$、 $\mathbb{H}^T$ 以及 $(\mathbb{H}^\ell)^T$ （对于 $\ell \geq 1$）如图7所示；
- $(r,r)$-图 $\mathbb{H}_{0i}(r)$，对于 $i = 1$、2、...、$r$ 以及 $r = 1$、...，如图8所示。
- $(r,r)$-图 $\mathbb{H}_{ij}(r)$，对于 $1 \leq i < j \leq r$ 和 $r = 1$、...，如图9所示。注意，每个 $\mathbb{H}_{ij}(r)$ 都是两个图的线性组合。

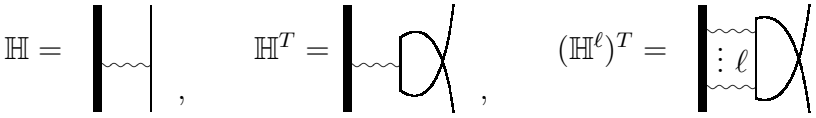



FIGURE 7. 图表 $\mathbb{H}$、 $\mathbb{H}^T$ 和 （$\mathbb{H}^\ell$） $^T$

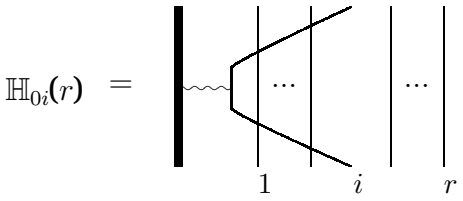



FIGURE 8. 图表 $\mathbb{H}_{0i}(r)$

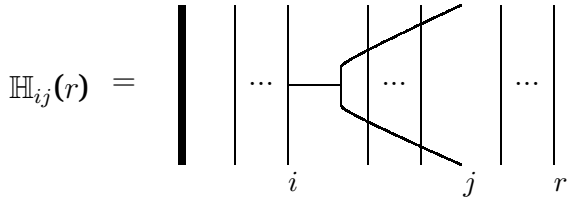



FIGURE 9. 图表 $\mathbb{H}_{ij}(r)$

2.3. 极图的复合。

定义2.3。对于任意的 $r$、 $r'$、 $s$，我们定义一个 $K$-双线性映射。

$$\mathbf{H}(r,r') \times \mathbf{H}(r',s) \longrightarrow \mathbf{H}(r,s) \tag{2.1}$$

通过图表的复合。具体而言，对于图10前两个图中所示的任意极性 $(r,r')$-图 $\mathbb{A}$ 和 $(r',s)$-图 $\mathbb{B}$，其复合 $\mathbb{B}\mathbb{A}$ 是图10最后一个图中描绘的极性 $(r,s)$-图，其中 $BA'$ 是

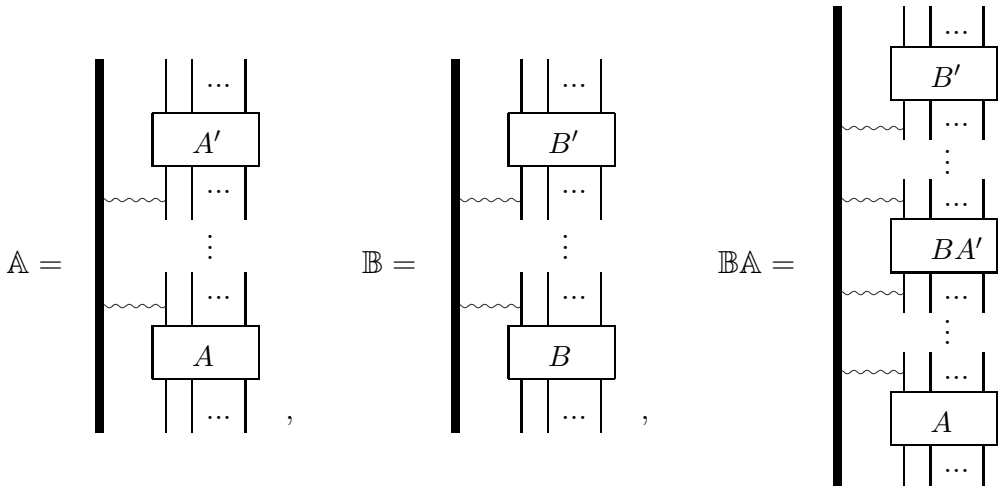



FIGURE 10. 极图的复合

通常的布劳尔图 $B$ 和 $A'$的复合，其中可应用 $\mathcal{B}(\delta)$中的关系来简化 $BA'$。因此，两个极图的复合结果通常是图表的线性组合。我们将所有 $r, r', s$ 对应的映射 (2.1) 称为 H 中的垂直乘法。

运算 (2.1) 为任意 $r$ 下的 H$(r, r)$ 赋予一个含单位元的结合 $K$-代数结构。很容易验证该乘法具有以下简单性质。

引理 2.2. a) 对任意极性 $(r, s)$-图 $\mathbb{A}$,

$$\mathbb{A}\mathbb{I}_r = \mathbb{I}_s\mathbb{A} = \mathbb{A}.$$

b) 对任意通常的布劳尔图 $A \in \mathrm{Hom}^{\mathcal{B}(\delta)}(r, r')$ 和 $B \in \mathrm{Hom}^{\mathcal{B}(\delta)}(r', s)$，记作$D = BA$，则

$$\mathbb{D}_0 = \mathbb{B}_0\mathbb{A}_0,$$

其中，图 6 所示的是阶为 0 的极图 $\mathbb{A}_0$ 等。

c) 垂直乘法保持由阶定义的分级，即两个齐次极图 $\mathbb{B}$ 和 $\mathbb{A}$ 的复合 $\mathbb{BA}$ 是齐次的，其阶等于 $\mathbb{B}$ 和 $\mathbb{A}$的阶之和。

注 2.4. 若规定集合 $\mathbb{I}_r$ 中的元素在垂直乘法下两两正交且幂等，即对所有 $r, s$，都有 $\mathbb{I}_r\mathbb{I}_s = \delta_{rs}$，那么 H 在垂直乘法作为乘法运算时便成为一个结合代数。

2.4. 图表的并置与水平乘法。对于任意极性 $(r, s)$-图和通常的 Brauer $(k, \ell)$ 图 $B$，我们将 $\mathbb{A}$ 与 $B$ 并置，即将 $B$ 放在 $\mathbb{A}$ 右侧且不重叠。由此得到一个极性 $(r + k, s + \ell)$-图，记作 $\mathbb{A} \otimes B$。我们可以将并置 $K$双线性扩张为一个映射

$$\otimes : \mathbf{H} \times \mathrm{Hom}(\mathcal{B}(\delta)) \longrightarrow \mathbf{H}, \tag{2.2}$$

这使得 H 成为 (Hom($\mathcal{B}(\delta)$) $\otimes$) 上的自由右模。我们将此映射称为 H 与 Hom($\mathcal{B}(\delta)$) 的水平张量乘法，或称（右）张量乘法。

在此背景下，我们采用以下记号

$$\mathbb{H}_{01}(r) = \mathbb{H} \otimes I_{r-1}, \quad \mathbb{A}_0 = \mathbb{I}_0 \otimes A \text{ for any Brauer diagram } A. \tag{2.3}$$

有了这一记号，下面的结论显然成立。

引理 2.3. (1) 极性图由 $\mathbb{I}_0, \mathbb{H}$ 和通常的布劳尔图在竖直乘法与水平乘法下生成。

(2) 对任意 $A, B \in \mathrm{Hom}^{\mathcal{B}(\delta)}$，只要 $BA$ 有定义，

$$(\mathbb{I}_0 \otimes B)(\mathbb{I}_0 \otimes A) = \mathbb{I}_0 \otimes BA;$$
$$(\mathbb{H} \otimes B)(\mathbb{I}_1 \otimes A) = (\mathbb{I}_1 \otimes B)(\mathbb{H} \otimes A) = \mathbb{H} \otimes BA.$$

证明. 任意极图都可以如图 4 所示用图形表示，由此可见，它是 $\mathbb{I}_0 \otimes D_i$ 和 $\mathbb{H}_{01}$（$r_i$）的复合。引理的第 (2) 部分是上升关系和下降关系的推论。□

2.5. 极性 Brauer 图。正如注 2.4 所指出的，竖直乘法使 H 成为一个代数。现在我们考虑这个代数的一个特定商。根据引理 2.3(1)，我们只需在其中出现的生成元之间施加关系。

如果 J 是 H 的一个 $K$-子模，并且相对于垂直乘法是一个双边理想，同时相对于水平乘法是 (Hom($\mathcal{B}(\delta)$) $\otimes$) 的右子模，我们称 J 为一个关于垂直乘法和水平乘法的 2-理想。

记 $\mathbb{H}_{0i} = \mathbb{H}_{0i}$(2) 为 $i = 1$（如图8所示），以及 $\mathbb{H}_{12} = \mathbb{I}_0 \otimes H$，其中 $H$ 是图2所示的 Brauer (2, 2)-图表的组合。我们还回顾图7中的元素 $\mathbb{H}$、$\mathbb{H}^T$。

定义 2.5. 称 $\widehat{\mathrm{H}} = \mathrm{H}/\langle\mathcal{R}\rangle$ 为仿射（或极性）Brauer 图的 $K$-模，其中 $\langle\mathcal{R}\rangle$ 是由生成的 H 的 2-理想。

$$\mathcal{R} = \{[\mathbb{H}_{01}, \mathbb{H}_{02} + \mathbb{H}_{12}],\ \mathbb{H}^T + \mathbb{H}\}$$

通过与 Hom($\mathcal{B}(\delta)$) 进行水平乘法和垂直乘法。

我们注意到，这些关系是为我们后续使用 H 来分析 $\mathfrak{osp}(m|2n)$-模 $M \otimes V^{\otimes r}$ 而调整的，其中 $M$ 是任意的，而 $V$ 是 $\mathfrak{osp}(m|2n)$ 的自然模。

给定 H 中任意一个极性（$r, s$）-图，我们将使用同一图形表示其在 H 中的像，并称其为仿射或极性 Brauer（$r, s$）-图。我们将仿射 Brauer（$r, s$）-图的$\wedge K$-模记为 $\widehat{\mathrm{H}}$（$r, s$）。

注意，$\mathcal{R}$ 中的元素 $[\mathbb{H}_{01}, \mathbb{H}_{02} + \mathbb{H}_{12}]$ 不是齐次的，因此阶不再为 H 提供一个 $\mathbb{Z}_+$-分次。相反，对于任意（$r, s$），我们有滤过

$$F\widehat{\mathbf{H}}(r,s)_0 \subset F\widehat{\mathbf{H}}(r,s)_1 \subset F\widehat{\mathbf{H}}(r,s)_2 \subset \ldots, \tag{2.4}$$

其中，$\widehat{\mathrm{H}}$（$r, s$）$_i$是 $\widehat{\mathrm{H}}^i$（$r, s$）中 $\sum_{j<i}$ 的像。记 $\widehat{\mathrm{H}}^k = \sum_{r,s} F\widehat{\mathrm{H}}$（$r, s$）$_k$。

垂直乘法显然下降到 $\widehat{\mathrm{H}}$。注意，作为 $K$-模，$F\widehat{\mathrm{H}}_0 \cong \widehat{\mathrm{H}}_0 \cong \mathrm{Hom}(\mathcal{B}(\delta))$. 我们将 $\widehat{\mathrm{H}}_0$ 记作 $F\widehat{\mathrm{H}}_0$。因此，水平乘法也降至 H，从而得到映射

$$\otimes : \widehat{\mathbf{H}} \times \mathrm{Hom}(\mathcal{B}(\delta)) \longrightarrow \widehat{\mathbf{H}}, \tag{2.5}$$

其定义了 H 上的一个右 (Hom($\mathcal{B}(\delta)$) $\otimes$)-模结构。

我们用相同的符号表示 H 中由 引理 2.3所述的元素的像；这些元素生成 H。按照这一约定，空间 H 可用生成元和关系描述如下。

定理 2.6. H 由所有 $A \in$Hom($\mathcal{B}(\delta)$) 的元素 $\mathbb{I}_0$、$\mathbb{H}$ 和 $\mathbb{A}_0 = \mathbb{I}_0 \otimes A$ 生成，并通过垂直乘法和水平乘法 (2.5) 运算，满足以下关系。

(1) Brauer 关系：对于所有满足 $BA$ 有定义的 $A$、$B \in \mathrm{Hom}^{\mathcal{B}(\delta)}$，

$$(\mathbb{I}_0 \otimes B)(\mathbb{I}_0 \otimes A) - \mathbb{I}_0 \otimes BA = 0;$$
$$(\mathbb{H} \otimes B)(\mathbb{I}_1 \otimes A) = (\mathbb{I}_1 \otimes B)(\mathbb{H} \otimes A) = \mathbb{H} \otimes BA;$$

(2) 四项关系：

$$[\mathbb{H}_{01}, \mathbb{H}_{02} + \mathbb{H}_{12}] = 0;$$

(3) 斜对称性：

$$\mathbb{H}^T + \mathbb{H} = 0.$$

证明。由引理 2.3(1)可知，H 由给定的元素生成。Brauer 关系已内置于 H 的定义中，而 $\mathbb{H}$ 的四项关系和斜对称性则是从 H 过渡到商 H$/\langle\mathcal{R}\rangle$所需的附加关系。□

图示表示。四项关系可用图 11 以图示方式表示，而 $\mathbb{H}$ 的斜对称性可用图 12 表示。这些图形表示为后续章节将引入的各类范畴的图示研究奠定了基础。

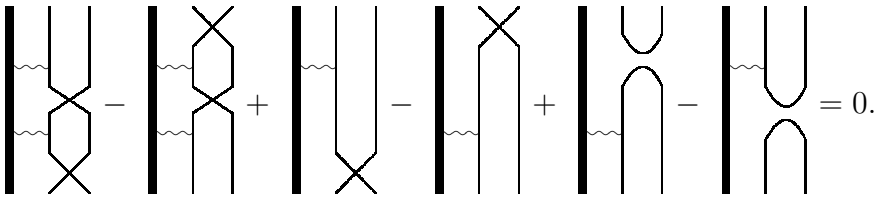


FIGURE 11. 四项关系

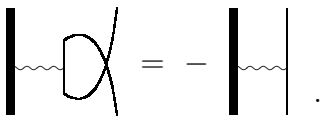


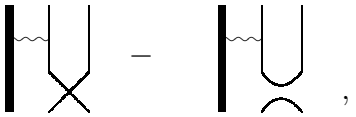
FIGURE 12. 斜对称性 $\mathbb{H}$

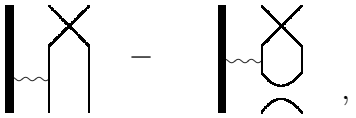
下述结果可由定义直接推出。

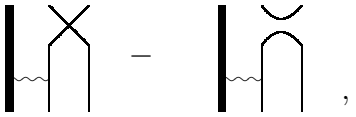
引理 2.4. 以下恒等式在 H 中成立。

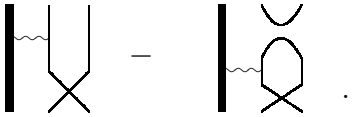
$$[\mathbb{H}_{01} + \mathbb{H}_{02}, \mathbb{H}_{12}] = 0.$$

证明。这是 $\mathbb{H}$ 的斜对称性的一个推论，与四项恒等式无关。证明完全直接明了，但也为我们提供了一个很好的机会来说明如何运用 $\mathbb{H}$ 的斜对称性。因此，我们将其详细写出。我们有

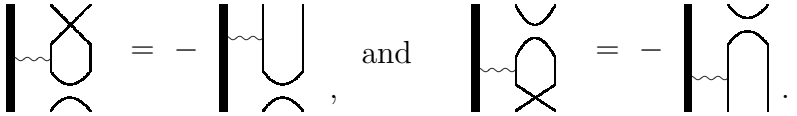
$\mathbb{H}_{01}\mathbb{H}_{12}$ =  ,

$\mathbb{H}_{02}\mathbb{H}_{12}$ =  ,

$\mathbb{H}_{12}\mathbb{H}_{01}$ =  ,

$\mathbb{H}_{12}\mathbb{H}_{02}$ =  .

$\mathbb{H}$ 的斜对称性意味着



将这些关系代入上面的公式，我们得到

$$(\mathbb{H}_{01}+\mathbb{H}_{02})\mathbb{H}_{12}=\mathbb{H}_{12}(\mathbb{H}_{01}+\mathbb{H}_{02}),$$

由此完成证明。 □

下一个结果显而易见。

推论 2.7。在 H 中，以下恒等式成立。

(1) 我们有 $[\mathbb{H}_{01},\mathbb{H}_{12}]=[\mathbb{H}_{12},\mathbb{H}_{02}]=[\mathbb{H}_{02},\mathbb{H}_{01}]$。

(2) 仅给定 $\mathbb{H}$ 的斜对称性，四项恒等式等价于

$$[\mathbb{H}_{02},\mathbb{H}_{01}+\mathbb{H}_{12}]=0. \tag{2.6}$$

证明. (1) 中第一项与第三项相等即为四项恒等式。第一项与第二项相等即为引理 2.4。第二项与第三项相等显然是前两者的形式推论。

现在我们已经看到，引理 2.4 的证明并不依赖于四项恒等式。但由 (1) 可知，四项恒等式是 (2.6) 和引理 2.4 的推论。结论得证。□

2.6.极化Brauer 范畴 $\mathcal{AB}(\delta)$.我们现在介绍图示仿射Brauer 范畴 $\mathcal{AB}(\delta)$ 及其一些商范畴，并阐述它们的基本性质。

2.6.1. $\mathcal{AB}(\delta)$ 的定义。

定义 2.8。固定 $\delta \in K$。 $K$ 上的预加性范畴 $\mathcal{AB}(\delta)$ 由以下性质定义。

(1) 其对象是 $\mathbb{N}$ 的元素；(2) 对任意对象 $r, s$ ，同态集 Hom$(r, s)$ 是 $K$-模 H$(r, s)$；并且(3) 态射的复合是 H 中的垂直乘法。

将此范畴记为 $\mathcal{AB}(\delta)$，并称其为图示仿射 Brauer 范畴，或极化 Brauer 范畴，其参数为 $\delta$。

以下定理的第 (1) 部分和第 (2) 部分可由 H 的构造以及 $\mathcal{AB}(\delta)$ 的定义直接得出。

定理 2.1. (1) 图示仿射 Brauer 范畴 $\mathcal{AB}(\delta)$ 有一个子-范畴 $\mathcal{AB}_0(\delta)$，其对象为 $\mathbb{N}$ ，同态集 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{AB}_0}(\delta)(r, s) = \mathrm{H}(r, s)_0$ ，对任意对象 $r, s$ 均成立。此范畴与 Brauer 范畴 $\mathcal{B}(\delta)$ 同构。出现的图均为秩 0 的图。(2) 存在一个双函子 $\otimes$: $\mathcal{AB}(\delta) \times \mathcal{B}(\delta) \longrightarrow \mathcal{AB}(\delta)$，使得对于 $\mathcal{AB}(\delta)$ 中的对象 $r$ 和 $\mathcal{B}(\delta)$ 中的对象 $r_0$， $r \otimes r_0 = r + r_0$ ；对于 $\mathcal{AB}(\delta)$ 中的态射 $\mathbb{A}$ 和 $\mathcal{B}(\delta)$ 中的态射 $B$， $\mathbb{A} \otimes B$ 由水平乘法 (2.5) 定义。因此， $\mathcal{AB}(\delta)$ 是幺半范畴 $\mathcal{B}(\delta)$ 上的右模范畴。(3) 存在一个函子 $\varpi : \mathcal{AB}(\delta) \longrightarrow \mathcal{B}(\delta)$，它将 $\mathcal{AB}(\delta)$ 中的任意对象 $r$ 映为 $r + 1$，将态射 $\mathbb{I}_0$ 映为 $I$，将 $\mathbb{H}$ 映为 $H$，并且与 $\mathcal{B}(\delta)$ 的张量积相容，具体而言，下图交换，

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{AB}(\delta) \times \mathcal{B}(\delta) & \xrightarrow{\otimes} & \mathcal{AB}(\delta) \\ {\scriptstyle \varpi \times \mathrm{id}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varpi} \\ \mathcal{B}(\delta) \times \mathcal{B}(\delta) & \xrightarrow[\otimes]{} & \mathcal{B}(\delta). \end{array}$$

证明。只有第 (3) 部分需要证明。注意，给定条件唯一确定了 $\varpi$，因此我们只需验证 $\varpi$ 满足 $\mathbb{H}$的四项关系和斜对称性。

$H$的斜对称性如图 3 所示，并在该图下方予以证明，这表明 $\varpi$ 满足 $\mathbb{H}$的斜对称性。 $\varpi$ 满足四项关系这一事实可直接由引理 3.1 得出。为了独立证明这一事实，令 $H_{01} = H \otimes I, H_{02} = (I \otimes X)(H \otimes I)(I \otimes X)$ 和$H_{12} = I \otimes H$。由推论 2.7(2)可知，四项关系归结为 $\mathcal{B}(\delta)$中的以下陈述。

$$[H_{02}, H_{01} + H_{12}] = 0. \tag{2.7}$$

经过细致但直接的计算可知，用图 22 和图 24 中的记号表示，有

$$\begin{aligned} [H_{02}, H_{01}] &= s_1 s_2 - s_2 s_1 + e_2 s_1 + e_1 e_2 - e_1 e_2 s_1 - s_1 e_2 - e_2 e_1 + s_1 e_2 e_1 \\ &= [H_{12}, H_{02}], \end{aligned}$$

由此证明了 (2.7)。定理得证。 □

注记 2.9. $\mathcal{AB}(\delta)$ 的范畴代数是配备垂直乘法的 H。

接下来我们描述 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{AB}(\delta)}(0,0)$ 和 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{AB}(\delta)}(1,1)$ 的结构。以下研究包络超代数时将用到这些结果。

2.6.2. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{AB}(\delta)}(0,0)$ 和 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{AB}(\delta)}(1,1)$ 的描述。

分别用 $\Pi$ 和 $\amalg$ 表示图 13 所示的仿射 Brauer $(2,0)$-图和 $(0,2)$-图，并令 $\mathbb{X}_0 = \mathbb{I}_0 \otimes X$ 与 $X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}(\delta)}(2,2)$ 为图 1 所示的 $\mathcal{B}(\delta)$ 的通常生成元。

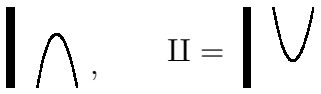


FIGURE 13. 仿射 Brauer 图 $\Pi$ 和 $\amalg$

引入 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{AB}(\delta)}(0,0)$ 的以下元素

$$Z_\ell = \Pi(\mathbb{H}^\ell \otimes I)\amalg, \quad \ell \geq 1, \tag{2.8}$$

它们可用图 14 直观表示。

我们有如下结果。

引理 2.5。元素 $Z_1$、$Z_2$ 和 $Z_3$ 具有以下性质：

(1) 如果 $K$ 的特征不为二，则 $Z_1 = 0$，且 $2Z_3 = (2-\delta)Z_2$；(2) $Z_2 \otimes 1$ 与 $\mathbb{H}$ 可交换。因此，$Z_2$ 是中心的，即对于所有 $\mathbb{A} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{AB}(\delta)}(r,s)$，$(Z_2 \otimes I_s)\mathbb{A} = \mathbb{A}(Z_2 \otimes I_r)$。

证明。由 $\mathbb{H}$ 的斜对称性可立即得出：若 $2 \neq 0$，则 $Z_1 = -Z_1 = 0$。

为证明式 (1) 中的第二个关系，我们将图 11 中的四项关系左乘（垂直方向）$\Pi$，然后多次应用 $\mathbb{H}$ 的斜对称性，得到图 15 所示的关系。接着，将图 15 中的每个图右乘（垂直方向）$(\mathbb{H} \otimes I)\amalg$，并再次应用 $\mathbb{H}$的斜对称性。这直接得到 $2Z_3 = (2-\delta)Z_2$.

为了证明第 (2) 部分，我们定义

$$\mathbb{B}_\ell = (\mathbb{I}_0 \otimes I \otimes \cap)\left((\mathbb{H}_{02} + \mathbb{H}_{12})^\ell \otimes I\right)(\mathbb{I}_0 \otimes I \otimes \cup). \tag{2.9}$$

于是，四项关系很容易推出

$$\mathbb{H}\mathbb{B}_\ell = \mathbb{B}_\ell\mathbb{H}, \quad \forall \ell. \tag{2.10}$$

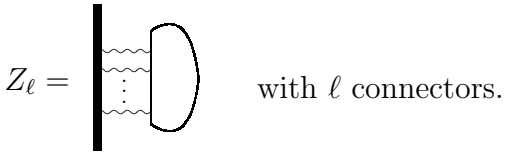



FIGURE 14. 中心元 $Z_\ell$

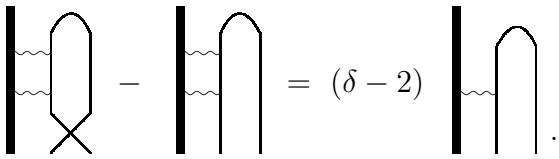


FIGURE 15. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{AB}(\delta)}(1,1)$ 中的一个关系

在 $\ell = 2$ 的情形下，我们有 $\mathbb{B}_2 = Z_2 \otimes I + 2(\delta-1)\mathbb{I}_0 \otimes I$，因此由 (2.10) 得 $\mathbb{H}(Z_2 \otimes I) = (Z_2 \otimes I)\mathbb{H}$，其中 $\mathbb{B}_2$ 与 $Z_2 \otimes I$ 之间的关系由这些公式得出.

$$(\mathbb{I}_0 \otimes I \otimes \cap)(\mathbb{H}_{02}^2 \otimes I)(\mathbb{I}_0 \otimes I \otimes \cup) = Z_2 \otimes I,$$
$$(\mathbb{I}_0 \otimes I \otimes \cap)((\mathbb{H}_{02}\mathbb{H}_{12} + \mathbb{H}_{12}\mathbb{H}_{02}) \otimes I)(\mathbb{I}_0 \otimes I \otimes \cup) = 0,$$
$$(\mathbb{I}_0 \otimes I \otimes \cap)(\mathbb{H}_{12}^2 \otimes I)(\mathbb{I}_0 \otimes I \otimes \cup) = 2(\delta-1)\mathbb{I}_0 \otimes I.$$

第 (2) 部分的第二个断言由第一个断言推出，因为 $\mathbb{A}(\delta)$ 的任意态射 $\mathcal{AB}$ 都可通过复合和张量积，由 $\mathbb{H}$ 与普通 Brauer 图构造而成，而现在已知这两者都与 $Z_2 \otimes I^{\otimes r}$ 交换。□

引理2.6. 设 $\mathbb{G}_\ell = Z_\ell \otimes I - \mathbb{H}^\ell$，且 $\Phi = (1-\delta)\mathbb{I}_0 \otimes I - \mathbb{H}$。则对于 $\ell \geq 0$，以下关系在 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{AB}(\delta)}(1,1)$ 中成立，

$$(\mathbb{H}^{\ell+1})^T - (\mathbb{H}^\ell)^T\Phi - \mathbb{G}_\ell = 0, \tag{2.11}$$
$$(\mathbb{H}^{\ell+1})^T - \Phi(\mathbb{H}^\ell)^T - \mathbb{G}_\ell = 0, \tag{2.12}$$

其中 $(\mathbb{H}^\ell)^T$ 是图 7 所示的图。此外，对于所有 $k, \ell$， $\mathbb{H}^k$ 与 $(\mathbb{H}^\ell)^T$ 交换。

证明. 若 $\ell = 0$，两个等式都等价于 $\mathbb{H}$ 的斜对称性，因为注意到 $\mathbb{G}_0 = (\delta-1)\mathbb{I}_0 \otimes I$。对于任意 $\ell \geq 1$，我们有迭代的四项关系（图 16）。

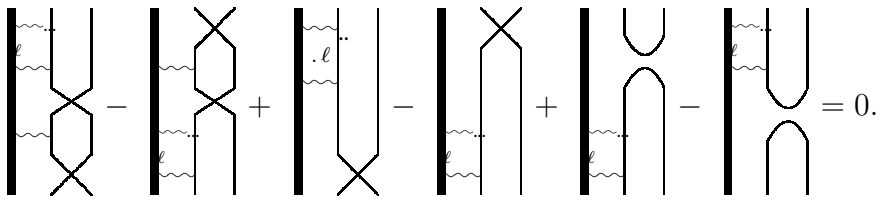


FIGURE 16. 迭代四项关系

将图16中的关系左乘（竖直方向） $\Pi$，并利用 $\mathbb{H}$的斜对称性，我们得到图17。类似地，将图16中的关系右乘（竖直方向） $\Pi$，并利用 $\mathbb{H}$的斜对称性，我们得到图18所示的关系。

为了证明 (2.11)，我们在关系图 17 的右侧乘以 $\mathbb{X}_0$，然后将右下端点向上拉。我们得到

$$(\mathbb{H}^{\ell+1})^T + (\mathbb{H}^\ell)^T\mathbb{H} + \mathbb{H}^\ell - (1-\delta)(\mathbb{H}^\ell)^T - Z_\ell \otimes I = 0,$$

这就得到了方程 (2.11)。

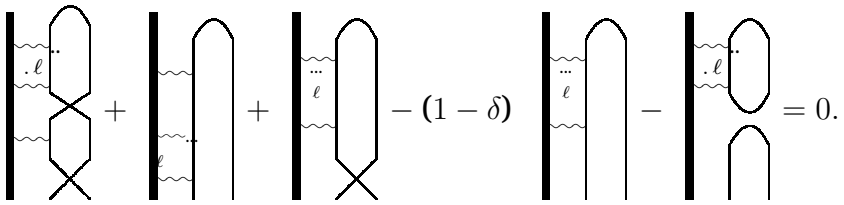


FIGURE 17. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{AB}(\delta)}(2,0)$ 中的一个关系

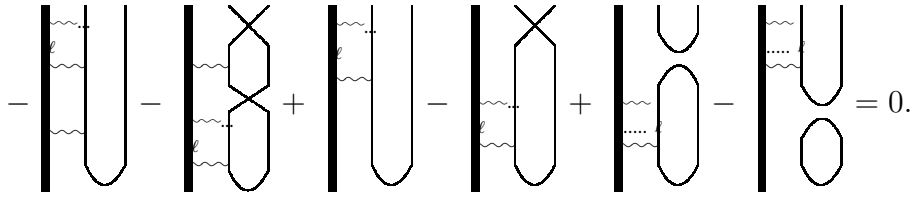


FIGURE 18. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{AB}(\delta)}(0,2)$ 中的一个关系

方程（2.12）可以用类似的方法证明。我们在关系左侧乘以 $\mathbb{X}_0$，然后将右上端点移到底部。由此得到该关系

$$-(\mathbb{H}^{\ell+1})^T - \mathbb{H}(\mathbb{H}^{\ell})^T + (\mathbb{H}^{\ell})^T - \mathbb{H}^{\ell} + Z_\ell \otimes I - \delta(\mathbb{H}^{\ell})^T = 0,$$

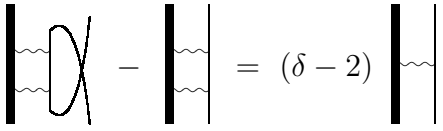
由此得到方程（2.12）。

将方程（2.11）和（2.12）相减，可见 $\mathbb{H}$ 与所有 $(\mathbb{H}^{\ell})^T$ 对易。这意味着引理的最后一个结论。□

注2.10. 如果 $K$ 的特征不为 2，那么

$$(\mathbb{H}^2)^T = \mathbb{H}^2 + (\delta - 2)\mathbb{H}; \tag{2.13}$$

这个等式可以用图形表示为



这可由图15直接得出。

推论 2.11. 保留引理2.6 中的记号。对于所有 $\ell \geq 0$，以下关系在 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{AB}(\delta)}(1,1)$ 中成立：

$$(\mathbb{H}^{\ell+1})^T = \sum_{i=1}^{\ell} \mathbb{G}_i \Phi^{\ell-i} - \mathbb{H}\Phi^{\ell}, \quad (\mathbb{H}^{\ell+1})^T = \sum_{i=1}^{\ell} \Phi^{\ell-i}\mathbb{G}_i - \Phi^{\ell}\mathbb{H}, \tag{2.14}$$

这尤其意味着

$$\sum_{i=1}^{\ell-1} [Z_i \otimes I, \Phi^{\ell-i}] = 0, \quad \forall \ell. \tag{2.15}$$

证明。通过反复应用方程（2.11），我们得到

$$(\mathbb{H}^{\ell+1})^T = \sum_{i=1}^{\ell} \mathbb{G}_i \Phi^{\ell-i} + \mathbb{H}^T\Phi^{\ell} = \sum_{i=1}^{\ell} \mathbb{G}_i \Phi^{\ell-i} - \mathbb{H}\Phi^{\ell},$$

其中，最后一个等式是利用 $\mathbb{H}$ 的斜对称性得到的。这证明了第一个关系。第二个关系是方程（2.12）的推论。对这两个关系作差，得到（2.15）。证明完毕。□

定理 2.12. 假设 $2 \neq 0 \in K$ （因此 $Z_1 = 0$）。那么

(1) 所有 $Z_\ell$ 在 $\mathcal{AB}(\delta)$ 中都是中心元，具体而言：对于任意 $r$、$s$ 和 $\ell$ ，

$$(Z_\ell \otimes I_s)\mathbb{D} = \mathbb{D}(Z_\ell \otimes I_s), \quad \forall \mathbb{D} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{AB}(\delta)}(r, s);$$

(2) 对于所有 $j \geq 1$ ，元素 $Z_{2j+1}$ 都属于由 1 和 $Z_{2\ell}$ 生成的子代数，其中 $\ell \geq 1$。

证明。为证明第 (1) 部分，我们只需证明对于所有 $\ell$， $[\mathbb{H}, Z_\ell \otimes I] = 0$。我们将对 $\ell$ 使用 (2.15) 进行归纳法。首先将 $\ell$ 替换为 $\ell + 1$ ，并将 (2.15) 重写为

$$\sum_{i=1}^{\ell} [\Phi^{\ell+1-i}, Z_i \otimes I] = 0, \quad \forall \ell.$$

注意， $Z_1 = 0$，并且我们已经证明 $Z_2$ （因而 $Z_3$）与 $\mathbb{H}$ 可交换。因此，它们也与 $\Phi = (1-\delta)\mathbb{I}_0 \otimes I - \mathbb{H}$ 可交换。假设对于所有 $i < \ell$，所有 $Z_i$ 都与 $\Phi$ 可交换。那么由上述关系立即得到 $[\Phi, Z_\ell \otimes I] = 0$，进而得到 $[\mathbb{H}, Z_\ell \otimes I] = 0$。

现在我们证明（2）部分。回顾引理2.6中用 $\mathbb{H}$ 和 $Z_j$ 表示 $\Phi$ 和 $\mathbb{G}_i$ 的表达式，我们可以将推论 2.11 中的第一个关系改写为

$$(\mathbb{H}^{\ell+1})^T = (1)^{\ell+1}\mathbb{H}^{\ell+1} + \sum_{i=0}^{\ell} f_i(Z_2, Z_3, \ldots, Z_\ell)\mathbb{H}^i, \tag{2.16}$$

其中， $f_i(Z_2, Z_3, \ldots, Z_\ell)$ 是 1、$Z_2$、$Z_3$、.....、$Z_\ell$ 的线性组合。将等式（2.16）两边与 $I$ 作张量积，得到 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{AB}(\delta)}(3, 3)$ 中的一个关系。先将所得关系左乘 $\Pi$ ，再右乘 $\amalg$，并利用 $\Pi Z_{\ell+1}\left((\mathbb{H}^{\ell+1})^T \otimes I\right)\amalg = Z_{\ell+1}$，得到

$$\left(1 - (1)^{\ell+1}\right) Z_{\ell+1} = \sum_{i=0}^{\ell} f_i(Z_2, Z_3, \ldots, Z_\ell) Z_i.$$

设 $\ell = 2j$，则此关系允许我们在 $k \leq 2j$ 的条件下将 $Z_{2j+1}$ 表示为 $Z_k$。从 $j = 0$ 开始，关于 $j$ 作归纳法，并结合 $Z_1 = 0$，即可完成定理的证明。□

注意，只需稍微扩展定理 2.12(2) 的证明，即可得到对所有 $\ell$ 都成立的关系 $\sum_{i=0}^{2\ell+1} f_i(Z_2, Z_3, \ldots, Z_{2\ell+1})Z_i = 0$。

引理 2.13. 对于 $p \geq 1$ 和 $k_i \geq 1$，元素 $Z(k_1, k_2, \ldots, k_p) = \Pi\mathbb{H}^{k_1}\mathbb{X}_0\mathbb{H}^{k_2}\mathbb{X}_0 \ldots \mathbb{X}_0\mathbb{H}^{k_p}\amalg$ 可以用复合表示为 $\ell \geq 2$ 中的 $\mathbb{I}_0$ 和 $Z_\ell$。

证明。保留记号 $\mathrm{H}(r, s)$ 表示 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{AB}(\delta)}(r, s)$。现在， $Z(k_1, k_2, \ldots, k_p)$ 属于 $F\mathrm{H}(0, 0)_k$，其中 $k = \sum_i k_i$。我们的证明对 $k$ 使用归纳法。若 $k = 1$，则命题显然。注意， $F\mathrm{H}(0, 0)_k$ 由我们所考虑类型的图表张成，即 $\{Z(k_1, k_2, \ldots, k_p) \mid \sum_i k_i \leq k\}$。

若 $k_1 = 1$，由 $\mathbb{H}$ 的斜对称性可知，$Z(k_1, k_2, \ldots, k_p) = -Z(k_1 + k_2, k_3, \ldots, k_p)$，而当 $k_p = 1$ 时也有类似的关系。因此，我们可以假设 $k_1, k_p \geq 2$。

我们现在描述两种约化，分别适用于情形 $k_2 = 1$ 和 $k_2 > 1$。

(1) 如果 $k_2 = 1$，通过反复应用模 $F\mathbf{H}(0,0)_{k-1}$ 意义下的四项关系，我们得到

$$Z(k_1, k_2, \ldots, k_p) = -Z(k_1 + k_2 + k_3, k_4, \ldots, k_p) \mod F\widehat{\mathbf{H}}(0,0)_{k-1}.$$

(2) 若 $k_2 \geq 2$，我们写作 $Z(k_1, k_2, \ldots, k_p) = \amalg\mathbb{H}^{k_1}\mathbb{X}_0\mathbb{H}\mathbb{X}_0\mathbb{X}_0\mathbb{H}^{k_2-1}\mathbb{X}_0\ldots\mathbb{X}_0\mathbb{H}^{k_p}\amalg$。然后应用归约 (1)，我们得到

$$\begin{aligned} Z(k_1, k_2, \ldots, k_p) &= -\amalg\mathbb{H}^{k_1+1}\mathbb{X}_0\mathbb{H}^{k_2-1}\mathbb{X}_0\ldots\mathbb{X}_0\mathbb{H}^{k_p}\amalg \mod F\widehat{\mathbf{H}}(0,0)_{k-1} \\ &= -Z(k_1 + 1, k_2 - 1, \ldots, k_p) \mod F\widehat{\mathbf{H}}(0,0)_{k-1}. \end{aligned}$$

如果为 $k_2 - 1 \geq 2$，重复此过程，最终到达

$$Z(k_1, k_2, \ldots, k_p) = (-1)^{k_2-1}Z(k_1 + k_2 - 1, 1, \ldots, k_p) \mod F\widehat{\mathbf{H}}(0,0)_{k-1},$$

且我们处于（1）的情形。

上述两个约化使我们能够在模 $F\mathbf{H}(0,0)_{k-1}$ 的意义下，将 $Z(k_1, k_2, \ldots, k_p)$ 约化为 $Z(k-1, 1)$ 或 $-Z(k-1, k)$。根据 $\mathbb{H}$ 的斜对称性，这些又等于模 $F\mathbf{H}(0,0)_{k-1}$ 的 $\pm Z_k$（对某个 $k$）。因此，对 $k$ 使用归纳法可知，我们能够将 $Z(k_1, k_2, \ldots, k_p)$ 表示为关于 $Z_\ell$ 的多项式，其中 $\ell \leq k$ 的系数为 $\pm 1$。这就完成了引理的证明。□

现在很容易推出以下事实。

**定理 2.14.** 自同态代数 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{AB}(\delta)}(0,0)$ 和 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{AB}(\delta)}(1,1)$ 具有以下性质。

(1) 代数 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{AB}(\delta)}(0,0)$ 是交换的，并由 $\ell \geq 1$ 的元素 $\mathbb{Z}_{2\ell}$ 生成。(2) 所有 $Z \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{AB}(\delta)}(0,0)$ 在 $\mathcal{AB}(\delta)$ 中都是中心元，具体而言，对于任意 $r, s$，

$$(Z \otimes I_s)\mathbb{D} = \mathbb{D}(Z \otimes I_s), \quad \forall \mathbb{D} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{AB}(\delta)}(r, s).$$

(3) 代数 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{AB}(\delta)}(1,1)$ 由 $\mathbb{H}$ 及所有 $\ell$ 对应的元素 $Z_{2\ell} \otimes I$ 生成，因此是交换的。(4) 对于 $\ell \geq 1$，元素 $Z_{2\ell}$ 代数无关。

证明。记 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{AB}(\delta)}(0,0)$ 中由所有 $\ell$ 对应的元素 $\mathbb{Z}_{2\ell}$ 生成的子代数为 $Z(0,0)$；根据定理 2.12，这些元素都是中心元素。于是，根据定理 2.12(2)，所有 $Z_\ell \in Z(0,0)$ 都是中心元素。由上述引理，所有 $Z(k_1, k_2, \ldots, k_p) \in Z(0,0)$，因此都是中心元素。利用这一事实，我们容易看出，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{AB}(\delta)}(1,1)$ 由元素 $(\mathbb{H}^\ell)^T$,$\mathbb{H}^k$ 以及所有 $k_1, \ldots, k_p$ 和 $k, \ell, p$ 对应的 $Z(k_1, k_2, \ldots, k_p) \otimes I$ 生成。推论 2.11 指出，$(\mathbb{H}^\ell)^\ell$ 都可以表示为元素 $\mathbb{H}^k$ 和 $Z(k_1, k_2, \ldots, k_p) \otimes I$。这便推出了结论 (3)。

由于 $\amalg(\mathbb{D} \otimes I)\amalg$ 对于 $\mathbb{D} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{AB}(\delta)}(1,1)$ 的元素张成了 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{AB}(\delta)}(0,0)$，根据第 (3) 部分，我们有 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{AB}(\delta)}(0,0) = Z(0,0)$。现在第 (2) 部分显然成立。

我们将在第 5.1 节末尾利用定理 4.4 中构造的函子的一个特殊情形，给出第 (4) 部分的证明。□

2.7. 一个极化 Temperley-Lieb 范畴。现在我们引入 Temperley-Lieb 范畴的一个仿射版本（参见 [13, 15]），它是 $\mathcal{AB}(\delta)$ 的一个商范畴。

定义 2.15. 我们可以如下定义参数为 $\delta$ 的仿射坦普利-利布范畴 $\mathcal{ATL}(\delta)$。$K$-模态射 $\mathcal{ATL}(\delta)$ 由极性坦普利-利布图张成，它们是没有交叉的仿射 Brauer 图的类似物，并满足下文给出的关系 (2.18)。

此定义对 $\delta$没有限制，仍然有效。

若 $\delta$ 是可逆元，则更方便的做法是将 $\mathcal{ATL}(\delta)$视为 $\mathcal{AB}(\delta)$的一个商，这个商是通过对 $\mathcal{AB}(\delta)$ 的态射施加形如 $\mathbb{D} \otimes L = 0$的关系得到的，其中 $L$如图19右侧所示， $a$ 是 $K$中的可逆元。

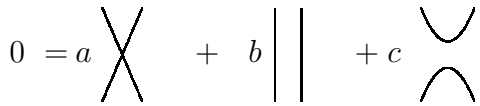



FIGURE 19. 作为商的 Temperley–Lieb

为了得到一个有趣的商范畴，我们假设拟幂等元 $I_2 - X$ 和 $\cup \circ \cap$（它们彼此正交）在由满足图19所给关系的 $B_2(\delta)$ 构成的商代数中的像非零。分别将该关系乘以 $I_2 - X$ 和 $\cup \circ \cap$，我们得到

$$a - b = 0, \text{ and } a + b + \delta c = 0,$$

这意味着 $2a + \delta c = 0$. 因此，

$$\delta \text{ is a unit, and } c = -\frac{2a}{\delta}.$$

因此，图19右侧是图20中定义的元素 $\Theta$ 的标量倍数；该元素也是 $B_2(\delta)$ 中的拟幂等元。

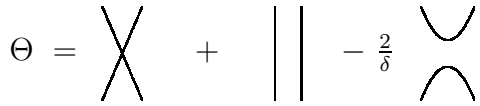



FIGURE 20. Temperley-Lieb 条件

假设 $\delta$ 是 $K$ 中的可逆元。将 $\mathcal{B}(\delta)$ 按 Hom($\mathcal{B}(\delta)$) 中由 $\Theta$ 生成的 2-理想取商，可得 Temperley-Lieb 范畴 $\mathcal{TL}(\delta)$。由此得到仿射 Temperley-Lieb 范畴 $\mathcal{ATL}(\delta)$ 的以下定义。

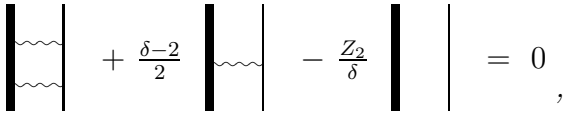
定义 2.16。假设 $\delta$ 是 $K$ 中的可逆元。令 $\langle\Theta\rangle$ 为 Hom($\mathcal{AB}(\delta)$) 中由元素 $\mathbb{D} \otimes \Theta$ 生成的 2-理想，其中 $\mathbb{D} \in$ Hom($\mathcal{AB}(\delta)$)。商范畴 $\mathcal{ATL}(\delta) = \mathcal{AB}(\delta)/\langle\Theta\rangle$ 称为图示仿射 Temperley-Lieb 范畴或极化 Temperley-Lieb 范畴。

如上所述， $\mathcal{ATL}(\delta)$ 的 $K$-态射模块由类似于仿射 Brauer 图但不含任何交叉的图表张成。这类图表将被称为仿射或极性 Temperley-Lieb 图表。

今后我们假设 $\delta$ 是 $K$中的一个可逆元。

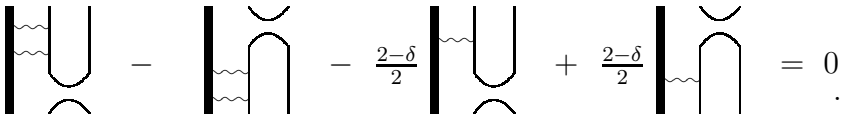
我们首先指出，现在图表的复合遵循新的规则。特别地，我们有以下结果。

引理 2.7. 四项关系化简为 $\mathcal{ATL}(\delta)$ 中的以下关系,

(2.17) 

其中第三项是 $-\frac{1}{\delta}Z_2 \otimes I$ 的图示表示。

证明。利用关系 $\Theta = 0$，消去图 11 所示四项关系中所有图表里的细弧交叉，我们得到关系

(2.18) 

将 (2.18) 右乘以 $\cup$，得到一个涉及三个 (0,2)-图表的关系。将每个图表中细弧的右端点移至底部，即得 (2.17)。最后，给定 (2.17)，关系 (2.18) 在 $\mathcal{ATL}(\delta)$ 中恒成立。□

注 2.17。注意，上述内容表明，如果 $\delta - 2 = 0$，那么 $\mathbb{H}^2 = \frac{1}{\delta}Z_2 \otimes I$，我们的许多结果都会退化。因此，以下我们假设 $\delta \neq 0$、2。

以下结果可由引理 2.7 和引理 2.5 直接得出。

推论 2.1. 仿射坦普利-利布范畴具有以下性质。

(i) $(Z_2 \otimes I)\mathbb{H} = \mathbb{H}(Z_2 \otimes I)$，因此对于任意仿射坦普利-利布 $(r, s)$ 图 $\mathbb{D}$，$\mathbb{D}(Z_2 \otimes I_r) = (Z_2 \otimes I_s)\mathbb{D}$。(ii) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{ATL}(\delta)}(0, 0) = K[Z_2]$，即 $Z_2$ 中的多项式代数；(iii) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{ATL}(\delta)}(1, 1) = (K[Z_2] \otimes I) \oplus (K[Z_2] \otimes I)\mathbb{H}$，它是一个交换的 $K$-代数。

证明. 第 (1) 部分是引理 2.5(2) 的推论。引理的其余部分由 (2.17) 和第 (1) 部分得出。□

为简化记号，对于任意 $f(Z_2) \in K[Z_2]$ 和仿射坦普利-利布 $(r, s)$-图 $\mathbb{D}$，我们将 $f(Z_2)\mathbb{D}$ 同时记作 $\mathbb{D}(f(Z_2) \otimes I_r)$ 和 $(f(Z_2) \otimes I_s)\mathbb{D}$。由推论 2.1 的 (i) 和 (ii) 两部分可知，这样做不会造成混淆。

现在，$\mathrm{Hom}(\mathcal{ATL}(\delta))$ 可以视为一个 $K[Z_2]$-模，显然是自由模。特别要注意，对任意 $N$，仿射坦普利-利布 $(0, 2N)$-图都是某个 $Z_2$ 的幂与图 21 所示形式的图的乘积，其中有 $t$ 个连接器，其上带有 $0 \leq t \leq N$，且每个 $A_j$ 都是没有交叉的通常布劳尔 $(0, 2r_j)$-图，并满足 $\sum_j r_j = N - t$。我们称这样的仿射坦普利-利布图为标准图。

我们有如下结果。

定理 2.2. 对任意满足 $r \leq 2N$ 的非负整数 $N$ 和 $r$，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{ATL}(\delta)}(r, 2N - r)$ 在 $K[Z_2]$ 上的秩等于 $\binom{2N}{N}$。

证明。我们将 [15, 引理 3.24]证明中的一些关键思路应用于当前情形。设$K$为 $K[Z_2]$的分式域。对所有 $W$，有$r(s) = K \otimes_{K[Z_2]} \mathrm{Hom}_{\mathcal{ATL}(\delta)}(r, s)$

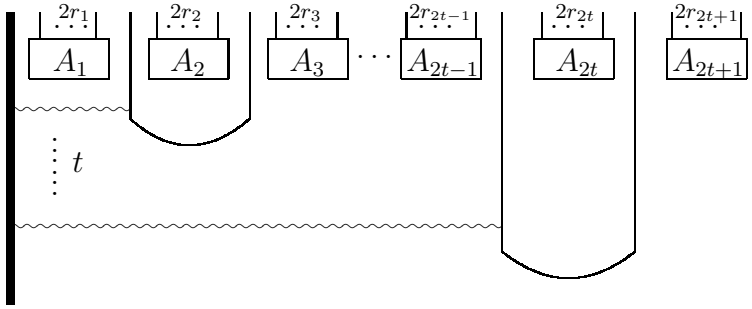



FIGURE 21. 标准仿射坦普利-利布图

对所有 $r$、$s$均成立，并记 $W(2N)$为 $= W(0, 2N)$。标准仿射 Temperley-Lieb $(0, 2N)$-图表构成 $W(0, 2N)$的一组基。对于每个 $i \leq N$，至多含有 $i \leq N$个连接器的标准 $(0, 2N)$-$\widehat{}$图表张成 $K$-子空间 $F_iW(2N)$，它是 $W(2N)$的子空间，因此我们得到 $W(2N)$的如下滤过。

$$W(2N) = F_NW(2N) \supset F_{N-1}W(2N) \supset \cdots \supset F_0W(2N) \supset 0. \tag{2.19}$$

注意，对于任意 $n$，由不含连接器的仿射 Tem-$\widehat{}$perley -Lieb $(n, n)$-图表张成的 $W(n, n)$ 的子空间 $E_n^0$ 构成一个 $K$-代数，它与次数为 $n$、参数为 $\delta$ 的 Temperley-Lieb 代数 $\mathrm{TL}_n(\delta)$ 同构；特别地，$E_{2N}^0 = \mathrm{TL}_{2N}(\delta)$。

现在，$\mathrm{TL}_{2N}(\delta)$通过在 $\mathcal{ATL}(\delta)$中态射的复合自然地作用于 $W(2N)$，且每个 $F_iW(2N)$都构成一个$\mathrm{TL}_{2N}(\delta)$-子模。因此，(2.19)是一个由$\mathrm{TL}_{2N}(\delta)$-模组成的滤过。由(2.17)以及 $\mathbb{H}$的斜对称性可知，对于每个 $i$，$W_{2i}(2N) :=_{F_iW(2N)} {}_{F_{i-1}W(2N)}$都是一个简单的$\mathrm{TL}_{2N}(q)$-模。回忆一下，这个简单$\mathrm{TL}_{2N}(\delta)$-模的维数由$\dim \hat{\kappa}(W_{2i}(2N))$ $= \binom{2N}{N-i} - \binom{2N}{N-i-1}$给出。因此，$\dim \hat{\kappa}(W(2N)) = \sum_i \dim \hat{\kappa}(W_{2i}(2N))$ $= \binom{2N}{N}$。

然而，对于所有满足 $0 \leq r \leq 2N$ 的 $r$，都有 $\dim \hat{\kappa}(W(r, 2N-r)) = \dim \hat{\kappa}(W(2N))$，因为通过拉动弦可知，$W(a, b)$ 与 $W(0, a+b)$ 作为 $K$ 上的向量空间同构$\widehat{}$，对所有 $a, b$ 均成立。定理的证明到此完成。□

由于 $Z_2$ 在 $\mathcal{ATL}(\delta)$ 中是中心元，我们可以通过将 $Z_2$ 设为某个固定参数，对该范畴取商。

定义 2.18. 固定 $\lambda \in K$。将 $\mathcal{ATL}(\delta)$ 通过设定下述条件得到的商范畴记为 $\mathcal{TLB}(\delta, \lambda)$

$$\frac{Z_2}{\delta} = -\lambda\left(\frac{\delta-2}{2} - \lambda\right),$$

并称其为 $B$ 型的 Temperley-Lieb 范畴。

我们继续用相同的符号 $\mathbb{H}$ 表示 $\mathbb{H}$ 在 $\mathcal{TLB}(\delta, \lambda)$ 中的像。我们有如下结果。

引理 2.19. 以下关系在 $\mathcal{TLB}(\delta,\lambda)$ 中成立。

$$(\mathbb{H}+\lambda)\left(\mathbb{H}+\frac{\delta-2}{2}-\lambda\right)=0.$$

证明。由引理 2.7 可知， $\mathbb{H}$ 满足关于 $\widehat{K}$ 的二次关系 $\mathbb{H}^2+(\frac{\delta-2}{2})\mathbb{H}-\frac{Z_2}{\delta}=0$。□

范畴 $\mathcal{TLB}(-2,\lambda)$ 与一个无限维 $\mathfrak{sp}_2$-表示范畴之间有密切联系，我们将在第 6 节详细研究这一联系。

## 3. Endomorphism algebras of objects in $\mathcal{AB}(\delta)$

接下来我们研究 $\mathcal{AB}(\delta)$ 中对象的自同态代数。事实证明，这些代数是弦图代数的某些商代数（例如，参见 [18,§XX.3], [19]）。对于任意固定整数 $r\geq 2$，弦图代数记为 $T_r$，它是一个含单位元的结合 $K$-代数，其生成集为 $\{t_{ij}\mid 1\leq i<j\leq r\}$，定义关系为

$$[t_{ij},t_{k\ell}]=0,\quad [t_{ik}+t_{i\ell},t_{k\ell}]=0,\quad [t_{ij},t_{ik}+t_{jk}]=0, \tag{3.1}$$

其中 $i$、$j$、$k$ 和 $\ell$ 是两两不同的指标， $[\ ,\ ]$ 表示通常定义的交换子：对所有 $X$、$Y$，均有 $[X,Y]=XY-YX$。

3.1. 弦图与 Brauer 代数。首先说明 Brauer 代数 $B_r(\delta)$ 如何作为弦图代数 $T_r$ 的一个商出现。尽管已有文献 [19] 利用代数 $T_r$ 描述了正交群和辛群的张量模的自同态代数，但本文的新意在于直接建立 $T_r$ 与 $B_r(\delta)$ 之间的联系。下文为此发展的图表方法本身或许也值得关注。

设 $s_i$、$e_i$（其中 $i=1$、2、.....、$r-1$）为带参数 $\delta$ 的 $r$ 股 Brauer 代数 $B_r(\delta)$ 的标准生成元。它们的图示见图 22。

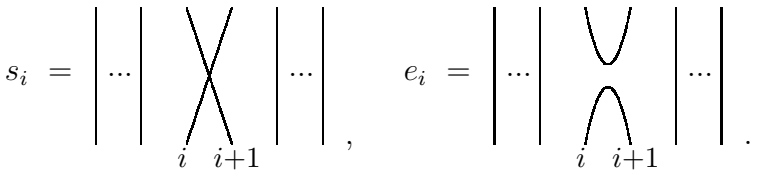
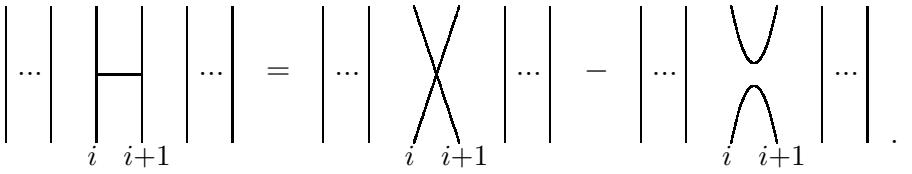



Figure 22. $B_r(\delta)$的生成元

定义以下 $B_r(\delta)$的元素，

$$H_i=s_i-e_i,\quad i=1,2,\dots,r-1.$$

我们将元素 $H\in \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}(\delta)}(2,2)$ 的图形表示推广为图示方式来表示 $H_i$，如图 23 所示，其中右端是下方所示两个 Brauer 图的线性组合



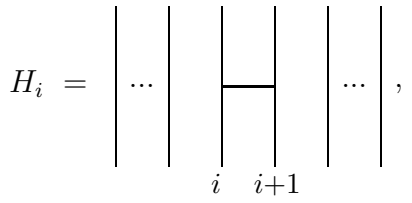
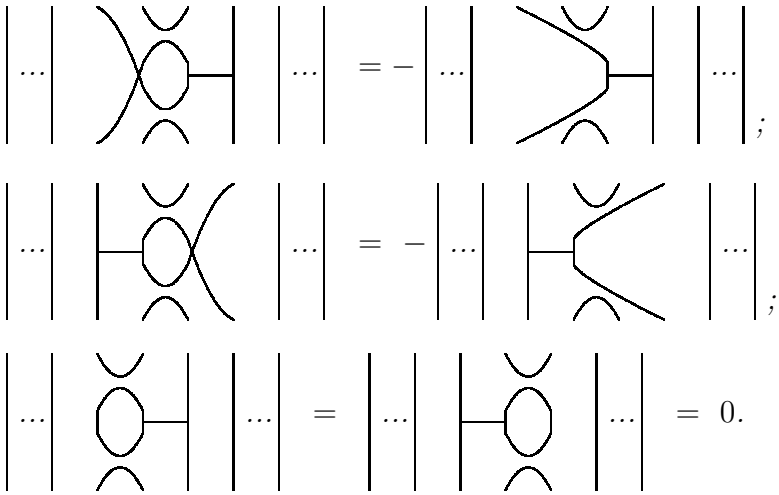



FIGURE 23. $H_i = s_i - e_i$ 的图片

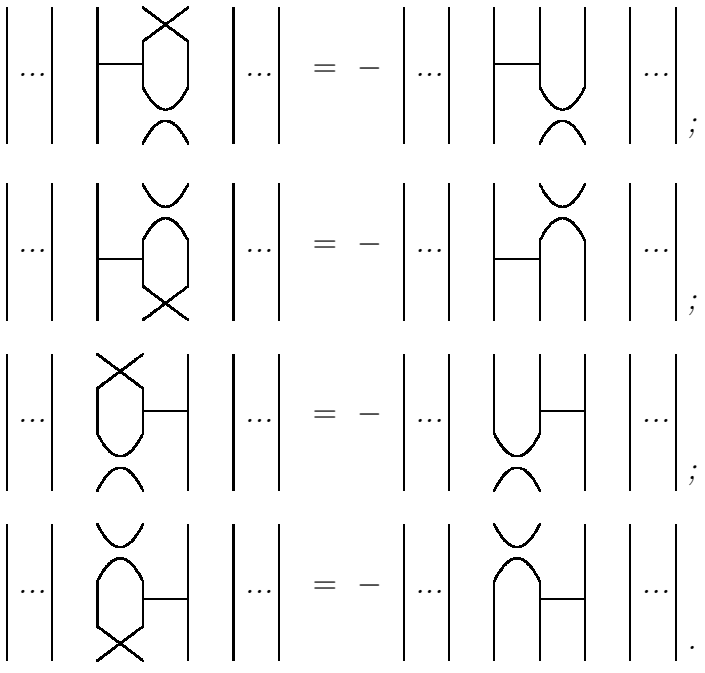
元素 $H_i$ 满足一些有趣的关系。

引理 3.1。在 $B_r(\delta)$ 中，以下关系成立。




这些是图 3 所示的 $H$ 斜对称性的直接推论。引理 3.1 中的第一和第二个关系有如下重新解释。

引理 3.2. 以下关系在 $B_r(\delta)$ 中成立。



对于任意 $1 \le i < j \le r$，令 $X_{ij} = s_{j-1}s_{j-2}\dots s_{i+1}$ 和 $X_{ji} = s_{i+1}s_{i+2}\dots s_{j-1}$；显然 $X_{ji} = X_{ij}^{-1}$。这些关系在图 24 中以示意图表示。注意，可以将 $X_{ij}$ 相乘（通常有多种方式），从而得到任意置换 $w \in \mathsf{Sym}_r \subset \mathcal{B}_r(\delta)$。

定义 $B_r(\delta)$的以下元素。

$$H_{ij} = X_{i+1,j}H_iX_{j,i+1}, \quad 1 \le i < j \le r. \tag{3.2}$$

$H_{ij}$ 元素 $H_{ij}$ 在图 25 中以图表形式表示。

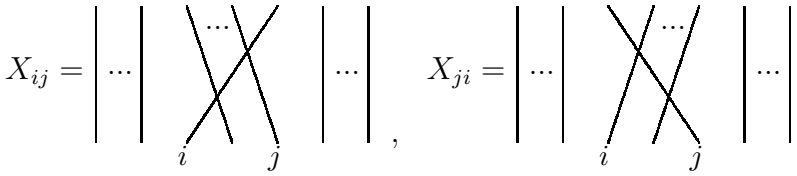



FIGURE 24. 对于 $i < j$，元素 $X_{ij}$ 和 $X_{ji}$

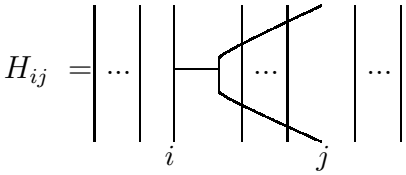



FIGURE 25. 元素 $H_{ij}$

我们有以下结论。

引理 3.1. 对于任意两两不同的 $i$、$j$、$k$、$\ell$，我们有（参见推论 2.7）

$$[H_{ij}, H_{k\ell}] = 0, \quad [H_{ik} + H_{i\ell}, H_{k\ell}] = 0, \quad [H_{ij}, H_{ik} + H_{jk}] = 0.$$

证明. 注意，如图 24 所示，通过用适当的 $X_{ij}$ 共轭 $H$，我们可以将第二个和第三个关系变为

$$[H_{12}, H_{13} + H_{23}] = 0, \quad [H_{12} + H_{13}, H_{23}] = 0. \tag{3.3}$$

为了证明这些关系，通过依次用置换 $X_{ij}$ 进行共轭，显然只需验证它们对 $r = 3$ 成立。直接计算可得

$$H_{12}(H_{13} + H_{23}) = (H_{13} + H_{23})H_{12}$$



and

$$(H_{12} + H_{13})H_{23} = H_{23}(H_{12} + H_{13})$$



这证明了关系 (3.3)。

为证明第一个关系，只需分别证明关于 $i<j<k<\ell$、$i<k<j<\ell$ 和 $i<k<\ell<j$ 的三种情形。同样，通过用适当的 $X_{ij}$ 共轭 $H$，我们总能将它们变换为这些关系。

$$[H_{12},H_{34}]=0,\quad [H_{13},H_{24}]=0,\quad [H_{14},H_{23}]=0.$$

这些关系中的第一个和最后一个完全显然；第二个关系等价于 $s_2[H_{12},H_{34}]s_2=0$，显然可由第一个关系推出。

这就完成了证明。 □

第一种下面定理的陈述是引理 3.1 的直接推论。

定理 3.1. 对于所有 $i<j$，映射 $t_{ij}\mapsto H_{ij}$ 可扩张为唯一的 $K$-代数同态 $\varphi_r$：$T_r\longrightarrow B_r(\delta)$；当 $\delta-2$ 是 $K$ 中的可逆元时，该同态为满射。

证明。由引理 3.1 和 $T_r$ 的定义关系 (3.1) 可立即得出，映射 $t_{ij}\mapsto H_{ij}$ 可唯一地延拓为一个代数同态。

为证明定理的第二个结论，我们注意到 $H_i^2=1+(\delta-2)e_i$，因此利用 $H_i=s_i-e_i$，

$$(\delta-2)e_i=H_i^2-1,\quad (\delta-2)s_i=H_i^2+(\delta-2)H_i-1. \tag{3.4}$$

若 $\delta-2$ 是 $K$ 中的可逆元，则 (3.4) 表明 $s_i$ 和 $e_i$ ($\in B_r(\delta)$) 属于 $\varphi_r$ 的像。这证明了在满足给定的 $\delta$ 条件时，$\varphi_r$ 是满射，从而完成定理的证明。□

注 3.2。定理 3.1 在 [19], 中已有隐含表述，但 Brauer 元素 $H_{ij}$ 的图示作用显然使这一结果具有了更有趣的诠释。

3.2. 弦图与仿射 Brauer 代数。接下来，对于 $\mathcal{AB}(\delta)$ 中任意对象 $r$，我们考察自同态代数 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{AB}(\delta)}(r,r)$。它包含由元素 $Z_\ell\otimes I_r$ 生成的子代数，其中 $Z_\ell\in \mathrm{Hom}_{\mathcal{AB}(\delta)}(0,0)$ 在引理 2.5 中定义。

回顾一下，我们有一个典范嵌入 $\iota$，将通常布劳尔图的 $K$-模嵌入仿射布劳尔图的 $K$-模中。它将一个布劳尔图$A$映射为其像 $\iota(A)=\mathbb{A}_0$，其中 $\mathbb{A}_0$ 如图6所示。特别地，对于 $k=1,2,\ldots,r-1$，我们有$\iota(s_k)$ $\iota(e_k)$ $\in \mathrm{Hom}_{\mathcal{AB}(\delta)}(r,r)$，其中 $s_k,e_k$ 是 $B_r(\delta)$ 的生成元。

令 $AB_r(\delta)$ 为由以下元素生成的 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{AB}(\delta)}(r,r)$ 的 $K$-子代数：

$$\{\mathbb{H}_{0j}(r)\mid j=1,\ldots,r\}\bigcup\{\iota(s_k),\iota(e_k)\mid k=1,2,\ldots,r-1\},$$

并将其称为参数为 $\delta$、次数为 $r$ 的图示仿射布劳尔代数。注意，元素 $Z_\ell\otimes I_r$ 不属于 $AB_r(\delta)$。

对于所有满足 $i<j$ 的 $i,j=1,2,\ldots,r$，由图9给出的元素 $\mathbb{H}_{ij}(r)$ 可表示为

$$\mathbb{H}_{ij}(r)=\iota(H_{ij}).$$

这些是 $AB_r(\delta)$ 中的 0 阶仿射 Brauer 图。我们还有图8中给出的所有 $j=1,2,\ldots,r$ 对应的 1 阶仿射 Brauer 图 $\mathbb{H}_{0j}(r)\in AB_r(\delta)$。我们有定理 3.1 的以下仿射类比。

定理 3.2. 映射 $t_{ij}\mapsto \mathbb{H}_{i-1,j-1}(r)$ 对所有 $1\le i<j\le r+1$ 都成立，并可扩张为唯一的代数同态 $\Phi_r: T_{r+1}\longrightarrow AB_r(\delta)$；若 $\delta-2$ 在 $K$ 中是一个可逆元，则该同态为满射。

证明。考虑定理的第一条陈述。我们要证明，对于 $0 \le i < j \le r$， $\mathbb{H}_{ij}(r)$ 满足 (3.1) 中的关系。情形 $r = 2$ 已由 $\mathcal{AB}(\delta)$ 定义中的四项关系以及引理 2.4 中的关系所蕴含；利用引理 3.1，我们也可以轻易地将此推广到 $r = 3$ 。事实上， $r = 3$ 是关键情形；如引理 3.1 的证明所示，所有其他情形都可利用置换化归到这一情形。

如果 $\mathbb{H}_{ij}$ 与 $1 \le i < j \le r$ 生成一个与 $B_r(\delta)$同构的子代数，那么第二个陈述成立。根据 (3.4)，给定的关于 $\delta$ 的条件可保证这一点。□

为了更好地理解 $AB_r(\delta)$的结构，我们首先注意到下面定义的元素，

$$\Theta_j(r) = \sum_{0 \le a < j} \mathbb{H}_{aj}, \quad j = 1, 2, \ldots, r, \tag{3.5}$$

具有以下性质。

定理 3.3. 对所有合法指标 $i$、 $j$、 $k$，以下关系在 $AB_r(\delta)$ 中成立。 :

$$\iota(e_1)(\Theta_1)^{\ell}\iota(e_1) = Z_{\ell}\iota(e_1), \tag{3.6}$$
$$\Theta_i(r)\Theta_j(r) = \Theta_j(r)\Theta_i(r), \quad \textit{for all } i, j, \tag{3.7}$$
$$\iota(s_k)\Theta_j - \Theta_j\iota(s_k) = 0, \quad \textit{if } j \notin \{k, k+1\}, \tag{3.8}$$
$$\iota(e_k)\Theta_j - \Theta_j\iota(e_k) = 0, \quad \textit{if } j \notin \{k, k+1\}, \tag{3.9}$$
$$\iota(s_k)\Theta_k - \Theta_{k+1}\iota(s_k) = \iota(e_k) - \mathbb{I}_r, \tag{3.10}$$
$$\Theta_k\iota(s_k) - \iota(s_k)\Theta_{k+1} = \iota(e_k) - \mathbb{I}_r, \tag{3.11}$$
$$\iota(e_k)\left(\Theta_k(r) + \Theta_{k+1}(r)\right) = (1-\delta)\iota(e_k), \tag{3.12}$$
$$\left(\Theta_k(r) + \Theta_{k+1}(r)\right)\iota(e_k) = (1-\delta)\iota(e_k). \tag{3.13}$$

证明。(3.6)、(3.8) 和 (3.9) 这些关系显然成立，而 (3.10) 和 (3.11) 则由以下显而易见的事实推出:

$$\iota(s_k)\Theta_k\iota(s_k) = \Theta_{k+1} - \mathbb{H}_{k,k+1}.$$

为证明 (3.7)，注意到四项关系蕴含:

$$[\mathbb{H}_{0i}(r), \mathbb{H}_{0j}(r) + \mathbb{H}_{ij}(r)] = 0, \forall 0 < i < j.$$

此外，从图示上不难看出:

$$[\mathbb{H}_{0i}(r), \mathbb{H}_{kj}(r)] = 0, \quad \forall j \neq i \neq k. \tag{3.14}$$

这些关系蕴含: 若 $i < j$，则 $[\mathbb{H}_{0i}(r)\ \Theta_j(r)] = 0$ 。此外，由 (3.14) 和引理 3.1 可得: 对于 $k < i < j.$， $[\mathbb{H}_{ki}(r)\ \Theta_j(r)] = 0$ 。最后两个关系蕴含: 若 $i < j$，则 $[\Theta_i(r)\ \Theta_j(r)] = 0$ 。

(3.12) 和 (3.13) 这些关系是由 $\mathbb{H}$ 和 $H$ 的斜对称性以及以下关系推出的:

$$\cap H = (1-\delta)\cap, \quad H\cup = (1-\delta)\cup.$$

为证明这些结论，我们定义元素 $\Pi_i(r) = \mathbb{I}_0 \otimes I^{\otimes(i-1)} \otimes \cap \otimes I^{\otimes(r-i-1)}$ 和 $\Pi_i(r) = \mathbb{I}_0 \otimes I^{\otimes(i-1)} \otimes \cup \otimes I^{\otimes(r-i-1)}$，其中 $i = 1$，2，.....，$r-1$。注意， $\Pi_i(r) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{AB}(\delta)}(r, r-2)$

且 $\Pi_i(r) \in \mathrm{Hom}_{AB(\delta)}(r-2, r)$。那么，(3.12) 和 (3.13) 可由以下关系推出，其中任意 $i < r$:

$$\Pi_i(r)\left(\Theta_i(r) + \Theta_{i+1}(r)\right) = (1-\delta)\Pi_i(r), \tag{3.15}$$

$$\left(\Theta_i(r) + \Theta_{i+1}(r)\right)\Pi_i\,(r) = (1-\delta)\,\Pi_i\,(r). \tag{3.16}$$

我们通过以下计算验证 $i = 1$ 的情形 (3.15):

$$\Pi_1(r)\left(\Theta_1(r) + \Theta_2(r)\right) = \Pi_1(r)\mathbb{H}_{01}(r) + \Pi_1(r)\mathbb{H}_{02}(r) + \mathbb{I}_0 \otimes \cap H \otimes I^{\otimes r-2},$$

右侧的前两项因 $\mathbb{H}$与 $H$的斜对称性而抵消，第三项等于 $(1-\delta)\Pi_1(r)$。对 $i$ 进行平凡的归纳法即可证明一般情形。关系 (3.16) 可用同样的方法证明。

至此，定理得证。 □

请注意，定理 3.3 中的公式与 [8, Definition 2.1] 中定义的、次数为 $r$ 的 Nazarov–Wenzl 代数的定义关系非常相似。我们的代数 $AB_r(\delta)$ 与后者之间的关系将在定理 7.1 中讨论。

## 4. Representations of the polar Brauer category

从此我们取 $K$ 为复数域 $\mathbb{C}$ 。

**4.1. Casimir 代数。**首先介绍研究图示仿射 Brauer 范畴表示所需的一些背景知识，同时也借此固定记号。

**4.1.1. Casimir 代数。**设 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\bar{0}} + \mathfrak{g}_{\bar{1}}$是域 $\mathbb{C}$上的有限维李超代数；当 $\mathfrak{g}_{\bar{1}} = 0$时，它退化为通常的李代数。记 $\mathfrak{g}$ 中的李乘积为 $[-,-]$，并用 ad 表示 $\mathfrak{g}$ 在自身上的伴随作用，因此对 $x, y \in \mathfrak{g}$，有 $\mathrm{ad}(x)y := [x, y]$. 。我们假设 $\mathfrak{g}$ 带有一个非退化的超对称偶双线性型 $\kappa: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{C}$，且该型在 $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$作用下不变。也就是说，对 $\mathfrak{g}$中的 $x, a$ 和 $b$，有

$$\kappa(\mathrm{ad}(x)a, b) + (-1)^{[a]([a]+[b])}\kappa(a, \mathrm{ad}(x)b) = 0, \tag{4.1}$$

其中 $[a]$ 和 $[b]$ 分别表示元素 $a, b \in \mathfrak{g}$ 的 $\mathbb{Z}_2$-次数。这里，若 $\kappa(x, y) = (-1)^{[x][y]}\kappa(y, x)$，则称 $\kappa$ 为超对称的；若 $\kappa(\mathfrak{g}_{\bar{0}}, \mathfrak{g}_{\bar{1}}) = 0$，则称其为偶的。

令 $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ 为 $\mathfrak{g}$ 的包络超代数；我们将 $\mathfrak{g}$ 按照典范方式视为嵌入 $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ 中。设 $\{X_\alpha \mid \alpha = 1, 2, \ldots, \dim(\mathfrak{g})\}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一组基，$\{X^\alpha \mid \alpha = 1, 2, \ldots, \dim(\mathfrak{g})\}$ 是关于形式 $\kappa$ 的对偶基，即 $\kappa(X^a, X_b) = \delta^a_b$。那么，下文定义的元素 $C$ 属于 $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ 的中心，是 $\mathfrak{g}$ 的二次 Casimir 元。

$$C = \sum_{\alpha=1}^{\dim(\mathfrak{g})} X_\alpha X^\alpha, \tag{4.2}$$

显然，$C$ 与基底的选取无关，并且由双线性型 $\kappa$ 的超对称性可得 $C = \sum_{\alpha=1}^{\dim(\mathfrak{g})} (-1)^{[X_\alpha]} X^\alpha X_\alpha$ 。

众所周知，U(𝔤) 带有 Hopf超代数 [30] 结构，其余乘法由 $\Delta(X) = X \otimes 1 + 1 \otimes X$ 给出，其中 $X \in \mathfrak{g}$。因此，对于 $r = 2$、3、.....，我们有迭代余乘法 $\Delta^{(r-1)} : \mathrm{U}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathrm{U}(\mathfrak{g})^{\otimes r}$，其中

$$\Delta^{(r-1)} = \left(\Delta \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{U}(\mathfrak{g})}^{\otimes(r-2)}\right) \circ \Delta^{(r-2)}, \tag{4.3}$$

它们是超代数同态。

由此可知，无论 $M_1$、$M_2$、.....、$M_r$ 是哪些 U(𝔤)-模，我们都可以在 $M_1 \otimes \ldots \otimes M_r$ 上定义一个 U(𝔤)- 作用，因为显然 $M_1 \otimes \ldots \otimes M_r$ 是一个 $\mathrm{U}(\mathfrak{g})^{\otimes r}$- 模，且存在同态 $\Delta^{(r-1)} : \mathrm{U}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathrm{U}(\mathfrak{g})^{\otimes r}$。

如下定义元素 $t \in \mathrm{U}(\mathfrak{g})^{\otimes 2}$：

$$t = \frac{1}{2}\left(\Delta(C) - C \otimes 1 - 1 \otimes C\right). \tag{4.4}$$

由双线性型的超对称性可知，显然 $t = \sum_\alpha X_\alpha \otimes X^\alpha = \sum_\alpha (-1)^{[X_\alpha]} X^\alpha \otimes X_\alpha$。此外，给定一个固定的正整数 $r$，我们有元素 $C_{ij} \in \mathrm{U}(\mathfrak{g})^{\otimes r}$、$1 \leq i < j \leq r$，其定义如下:

$$C_{ij} := \sum_{\alpha=1}^{\dim(\mathfrak{g})} 1^{\otimes(i-1)} \otimes X_\alpha \otimes 1^{\otimes(j-i-1)} \otimes X^\alpha \otimes 1^{\otimes(r-j)}, \tag{4.5}$$

尤其是，$C_{12} = t \otimes 1^{\otimes(r-2)}$。

我们将 $t$ 称为$\mathrm{U}(\mathfrak{g})^{\otimes 2}$ 的温和Casimir元，并将 $C_{ij}$ 称为 $t$的展开式。

定义 4.1. 记 $C_r(\mathfrak{g})$为由所有 $1 \leq i < j \leq r$的元素 $C_{ij}$ 生成的$\mathrm{U}(\mathfrak{g})^{\otimes r}$ 的子代数，并称其为 𝔤的Casimir 代数。

对我们的目的而言，注意到对于所有 $z \in C_r(\mathfrak{g})$，都有

$$[z, \Delta^{(r-1)}(x)] = 0, \quad \forall x \in \mathrm{U}(\mathfrak{g}). \tag{4.6}$$

容易证明 [19]，对于两两不同的指标 $i$、$j$、$k$、$\ell$，以下关系在 $C_r(\mathfrak{g})$中成立。

$$[C_{ij}, C_{k\ell}] = 0, \quad [C_{ik} + C_{i\ell}, C_{k\ell}] = 0, \quad [C_{ij}, C_{ik} + C_{jk}] = 0. \tag{4.7}$$

这些关系与（4.6）一起推出以下结果。

定理 4.1 ([19])。对于所有 $1 \leq i < j \leq r$，映射 $t_{ij} \mapsto C_{ij}$ 可扩张为唯一的满代数同态 $\psi_r : T_r \longrightarrow C_r(\mathfrak{g})$。此外，对于任意 $\zeta \in T_r$,

$$[\psi_r(\zeta), \Delta^{(r-1)}(x)] = 0, \quad \forall x \in \mathrm{U}(\mathfrak{g}).$$

该定理与 U(𝔤) 的表示论直接相关。设 $V_1$、$V_2$、.....、$V_r$ 是 U(𝔤) 的任意（左）模。那么，$V_1 \otimes V_2 \otimes \ldots \otimes V_r$ 以显然的方式成为一个 $\mathrm{U}(\mathfrak{g})^{\otimes r}$-模，并可限制为一个 $C_r(\mathfrak{g})$-模。因此，同态 $\psi : T_r \longrightarrow C_r(\mathfrak{g})$ 定义了 $T_r$ 在 $V_1 \otimes \ldots \otimes V_r$ 上的作用。另一方面，迭代余乘法 $\Delta^{(r-1)}$ 定义了 U(𝔤) 在 $V_1 \otimes V_2 \otimes \ldots \otimes V_r$ 上的作用。这就是表示 $V_i$ 的“张量积”；针对特定的 $V_i$ 和 $r$ 对这类张量积的分析，已有大量文献研究。

现在， $T_r$ 在 $V_1 \otimes \ldots \otimes V_r$ 上的作用与 U(g)-作用 (4.6) 可交换，因此我们有一个代数同态

$$\eta_{V_1,\ldots,V_r} : T_r \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathrm{U}(\mathfrak{g})}(V_1 \otimes \ldots \otimes V_r). \tag{4.8}$$

显然，(4.8) 的效用在很大程度上取决于表示 $V_1, \ldots, V_r$ 的选择。在此阶段，这些表示可以完全任意。然而， [19] 中证明了，如果 $V_1 = V_2 = \cdots = V_r = V$ 是单李代数 $\mathfrak{g}$ 的"强无重数"模，那么 $\eta_{V,\ldots,V}(T_r)$ 本质上是 U(g)-模 $V^{\otimes r}$ 的完备交换子，并且是半单的。因此，可以通过研究 $\eta_{V,\ldots,V}(T_r)$ 的结构来分析模 $V^{\otimes r}$ 。

此外， [19, §4] 中说明了，当 $V$ 是自然 $\mathfrak{g}$-模时，Brauer 代数在 $\mathrm{End}_{\mathfrak{g}}(V^{\otimes r})$ 中的像如何出现在 $\eta_{V,\ldots,V}(T_r)$ 中，其中 $\mathfrak{g}$ 是正交或辛李代数。这表明，Brauer 范畴中的图示等方法可用于研究 $T_r$ 在李超代数表示论中的应用。

4.1.2. 正交辛李超代数。本节和第 5 节后续内容中用到的正交辛李超代数相关细节，可见附录 A。为保持叙述连贯，这里仅回顾一些基本概念。

给定一对非负整数 $m$和 $n$ ，其中至少一个非零，令 $V = \mathbb{C}^{m|2n}$。我们用 $[v] = 0, 1$ 表示齐次元素$v \in V$的 $\mathbb{Z}_2$-度，并分别用 dim($V$) $= m + 2n$ 和 sdim ( $V$) $= m - 2n$ 表示 $V$的维数和超维数。我们在 $V$ 上赋予一个非退化双线性型 $\omega$, 并假设它是偶且超对称的。这里，偶是指 $\omega(V_{\bar{0}}, V_{\bar{1}}) = \omega(V_{\bar{1}}, V_{\bar{0}}) = \{0\}$；超对称是指，对于任意 $v, v' \in V$，有 $\omega(v, v') = (-1)^{[v][v']}\omega(v', v)$。

令 $\mathfrak{osp}(V;\omega)$ 为保持双线性型$\omega$的正交辛李超代数。我们在附录 A 中详细讨论 $\mathfrak{osp}(V;\omega)$ 及其包络超代数 U($\mathfrak{osp}(V;\omega)$)。 $\mathfrak{osp}(V;\omega)$ 的偶李子代数为 $\mathfrak{osp}(V;\omega)_0 = \mathfrak{so}(V_{\bar{0}}; \omega|_{\bar{0}}) \oplus \mathfrak{sp}(V_{\bar{1}}; \omega|_{\bar{1}})$，其中，对于 $\alpha = \bar{0}$ 和$\bar{1}$， $\omega|_\alpha$ 是 $\omega$ 在 $V_\alpha \times V_\alpha$ 上的限制。特别地，当 $m = 0$ 时， $\mathfrak{osp}(V;\omega)$ 化为 $\mathfrak{sp}_{2n}$ ；当 $n = 0$ 时，则化为 $\mathfrak{so}_m$ 。

记 OSp($V;\omega$) 为保持双线性型 $\omega$ 的、作用于 $V$上的正交辛超群。OSp($V;\omega$) 的偶子群为 OSp($V;\omega$)$_0$ = SO($V_{\bar{0}};\omega|_{\bar{0}}$) ×Sp($V_{\bar{1}};\omega|_{\bar{1}}$)。从概念上说，将正交辛超群视为群概形颇具吸引力；然而，就本文的目的而言，我们将遵循 [7] ，把 OSp($V;\omega$) 视为 Harish-Chandra 对 (OSp($V;\omega$)$_0$,U($\mathfrak{osp}(V;\omega)$))，其中 OSp($V;\omega$)$_0$ 通过共轭作用于 U($\mathfrak{osp}(V;\omega)$)。

记号约定。此后，我们固定 $V = \mathbb{C}^{m|2n}$ 并记作

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{osp}(V;\omega), \quad G = \mathrm{OSp}(V;\omega), \quad G_0 = \mathrm{SO}(V_{\bar{0}};\omega|_{\bar{0}}) \times \mathrm{Sp}(V_{\bar{1}};\omega|_{\bar{1}}). \tag{4.9}$$

我们也将 sdim = sdim ($V$) 记作.....。

4.2. 四元代数族。我们将探讨代数四元组 $T_r$, $B_r$(sdim )、Casimir 代数 $C_r(\mathfrak{g})$ 以及 $\mathrm{End}_{\mathfrak{g}}(V^{\otimes r})$ 之间的关系，其中 $\mathfrak{g} = \mathfrak{osp}(V;\omega)$。

我们将 $C$ 取为由 (A.4) 定义的 U(g) 的二次卡西米尔算子；相应的温和 Casimir 算子 $t$ 由 (A.5) 给出。我们定义这些元素

$C_{ij}$，从而得到 $\mathfrak{g}$ 的 Casimir 代数 $C_r(\mathfrak{g})$，使用这一温和 Casimir 算子。

注 4.2. 在附录 A 中，我们通过直接计算，求得由 (A.4) 定义的 Casimir 算子$C$ 在 $V$中的特征值 $\chi_V(C) = \mathrm{sdim} - 1$；见 (A.8)。一般而言， $C$在最高权为 $\lambda$的单 $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$-模 $L_\lambda$上以特征值 $(\lambda+2\rho,\lambda)$ 作用，其中权空间上的双线性型经过归一化，使得$sup\{|(\alpha,\alpha)| \mid \alpha \text{ 是一个根}\} = 4$。按照惯例， $2\rho$ 是正根的带符号和。

记 $\mu$ 为 $V$上的自然 $\mathfrak{g}$-作用，它可扩张为 $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$-作用。对每个 $r$，记$E_r(V) = \mathrm{End}_{\mathrm{U}(\mathfrak{g})}(V^{\otimes r})$。我们有 $C_r(\mathfrak{g})$的如下表示，

$$\mu_r = \mu^{\otimes r} : C_r(\mathfrak{g}) \longrightarrow E_r(V).$$

我们还有由 (4.8) 定义的 $T_r$ 的表示。

$$\eta_r = \eta_{V,\dots,V} : T_r \longrightarrow E_r(V)$$

非退化双线性型 $\omega$ 以典范方式诱导出一个同构 $j: V \otimes V \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$，其中对所有 $v, v' \in V$，均有 $v \otimes v' \mapsto v\omega(v', -)$。关于 $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ 上的 $\mathfrak{g}$-作用，这是一个$\mathfrak{g}$-模映射；该作用对任意 $X \in \mathfrak{g}$ 及$\varphi \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ 定义为

$$(X.\varphi)(v) = X.(\varphi(v)) - (-1)^{[X][\varphi]}\varphi(X.v), \quad \forall v \in V. \tag{4.10}$$

设 $(e_a)$、 $a = 1$、.....、sdim $(V)$ 是 $V$ 的一组齐次基，并设 $(e^a)$、 $a$ =1、.....、sdim $(V)$ 是关于 $\omega$ 的对偶基，使得

$$\omega(e^a, e_{a'}) = \delta_{a,a'}. \tag{4.11}$$

现在定义以下线性映射，

$$\begin{aligned} &\hat{c} : V \otimes V \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \hat{c}(v \otimes w) = \omega(v, w), \\ &\check{c} : \mathbb{C} \longrightarrow V \otimes V, \quad \check{c}(1) = j^{-1}(\mathrm{id}_V). \end{aligned} \tag{4.12}$$

这些是 $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$-模同态 [22, 23] ，并且容易验证 $\check{c}(1) = \sum_{a=1}^{\dim(V)} e_a \otimes e^a$。

它们满足以下关系：$(\mathrm{id}_V \otimes \hat{c})(\check{c} \otimes \mathrm{id}_V) = \mathrm{id}_V$，且 $\hat{c} \circ \check{c}(1) = \mathrm{sdim}$。
给定任意 $\mathbb{Z}_2$-分次向量空间 $M$ 和 $M'$，存在典范线性映射

$$\tau_{M,M'} : M \otimes M' \longrightarrow M' \otimes M, \tag{4.13}$$

定义为 $v \otimes v' \mapsto (-1)^{[v][v']} v' \otimes v$，对任意 $v \in M$、 $v' \in M'$均成立。特别地，我们有置换映射 $\tau := \tau_{V,V} : V \otimes V \longrightarrow V \otimes V$。记

$$e = \check{c} \circ \hat{c}. \tag{4.14}$$

$\tau$和 $e$ 都属于 $\mathrm{End}_{\mathrm{U}(\mathfrak{g})}(V \otimes V)$。
存在 Brauer 代数的典范表示 [23]

$$\nu_r : B_r(\mathrm{sdim}) \longrightarrow E_r(V) \tag{4.15}$$

由 $\nu_r(s_i) = \mathrm{id}_V^{\otimes(i-1)} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}_V^{r-i-1)}$ 和 $\nu_r(e_i) = \mathrm{id}_V^{\otimes(i-1)} \otimes e \otimes \mathrm{id}_V^{r-i-1)}$. 定义。下述定理描述了代数四元组 $T_r$,$B_r$(sdim ), $C_r(\mathfrak{g})$ 和 $E_r(V)$ 之间的相互关系。

定理 4.2. 保留上述记号。设 $C_r(\mathfrak{g})$ 为相对于二次卡西米尔算子 (A.4) 定义的 $\mathfrak{g}$ Casimir 代数。下图交换。

$$\begin{array}{ccc} T_r & \xrightarrow{\phi_r} & B_r(\mathrm{sdim}\,) \\ \downarrow{\scriptstyle \psi_r} & \searrow^{\eta_r} & \downarrow{\scriptstyle \nu_r} \\ C_r(\mathfrak{g}) & \xrightarrow{\mu_r} & E_r(V), \end{array}$$

其中 $\eta_r = \eta_{V,\dots,V}$ 由 (4.8) 定义。

证明。注意，根据定义，$\eta_r = \mu_r\psi_r$。对于所有 $i < j$，我们有 $\nu_r\phi_r(t_{ij}) = \nu_r(H_{ij})$；根据定理 4.1，还有 $\mu_r\psi_r(t_{ij}) = \mu_r(C_{ij})$。下面的引理 4.3 表明，对于所有 $i < j$，$\mu_r(C_{ij}) = \nu_r(H_{ij})$；由此可知，该图是交换的。□

接下来证明以下结果。

引理 4.3（关键引理）。温和Casimir元 $t$ 满足关系

$$(\mu \otimes \mu)(t) = \tau - e. \tag{4.16}$$

证明说明。该引理即为定理 A.1，其证明见附录 A：利用 $V$ 的标准基，显式写出 $t$ 在 $V \otimes V$ 上的作用，然后通过直接计算验证 (4.16) 确实成立。

虽然附录 A 中的证明完全是初等的，但并不十分具有启发性。当 $\mathrm{sdim}\,(V) = m - 2n \neq 0$ 时，我们有一个关于 (4.16) 的表示论证明，它更具概念性，也有助于理解为何该关系成立。在这种情况下，张量积 $V \otimes V$ 是半单且无重数的，并具有三个简单的 U(g)-子模，$V \otimes V = L_s \oplus L_a \oplus L_0$，其中 $L_s \oplus L_0$ 和 $L_a$ 分别是 $\tau$ 对应特征值 $+1$ 和 $-1$ 的特征子空间。令 $P_i$：$V \otimes V \longrightarrow L_i$ 为分别对应于 $i = s$、$a$、0 的幂等投影；它们两两正交且完备。于是

$$P_s + P_0 = \frac{1}{2}(1+\tau), \quad P_a = \frac{1}{2}(1-\tau), \quad P_0 = \frac{e}{\mathrm{sdim}\,(V)}.$$

记 Casimir 算子 $C$（见 (A.4)）在每个简单子模 $L_i$ 上的特征值为 $\chi_i(C)$，在 $V$ 上的特征值为 $\chi_V(C)$。我们有（见注 4.2）

$$\chi_V(C) = \mathrm{sdim}\,(V) - 1, \quad \chi_s(C) = 2\mathrm{sdim}\,(V),$$
$$\chi_a(C) = 2(\mathrm{sdim}\,(V) - 2), \quad \chi_0(C) = 0.$$

$L_i$ 中的 $t$ 的特征值由 $\chi_i(t) = \frac{1}{2}\chi_i(C) - \chi_V(C)$给出，因此我们有

$$\chi_s(t) = 1, \quad \chi_a(t) = -1, \quad \chi_0(t) = -\mathrm{sdim}\,(V) + 1.$$

因此，$(\mu \otimes \mu)(t) = P_s - P_a + (-\mathrm{sdim}\,(V) + 1)P_0 = \tau - e$，证毕。 □

备注 4.4。请注意，$C$ 所述的归一化对于定理 4.2 至关重要。

4.3. 极性 Brauer 范畴的表示。沿用上述记号。记 $\mathcal{T}(V)$ 为 U($\mathfrak{g}$)-模的满子范畴，其对象对所有 $r \in \mathbb{N}$ 均为 $V^{\otimes r}$，其中 $V^{\otimes 0} = \mathbb{C}$。注意，$\mathcal{T}(V)$ 是一个张量范畴。

以下定理可由 [23] 或 [6]推得。

定理 4.3. 存在一个张量函子 $\mathcal{F}\colon \mathcal{B}(\mathrm{sdim}) \longrightarrow \mathcal{T}(V)$，它将对象 $r$ 映射到 $V^{\otimes r}$，并将态射的生成元映射为

$$\mathcal{F}\left(\ \middle|\ \right) = \mathrm{id}_V, \qquad \mathcal{F}\left(\ \times\ \right) = \tau,$$

$$\mathcal{F}\left(\ \cap\ \right) = \hat{c}, \qquad \mathcal{F}\left(\ \cup\ \right) = \check{c}.$$

$\mathcal{F}$到 $B_r(\mathrm{sdim}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}(\mathrm{sdim})}(r, r)$ 的限制与由 (4.15) 定义的 Brauer 代数表示一致。

注 4.5. (1) 在 [23] 中，我们构造了一个满张量函子，它从 $\mathcal{B}(\mathrm{sdim})$ 映到 $G = \mathrm{OSp}(V;\omega)$ 的表示所构成的满子范畴，其对象为所有 $r \in \mathbb{N}$ 的 $V^{\otimes r}$。注意

$$\mathrm{Hom}_G(V^{\otimes r}, V^{\otimes s}) = \left\{\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{U}(\mathfrak{g})}(V^{\otimes r}, V^{\otimes s}) \mid \eta.\varphi = \varphi, \forall \eta \in G_0\right\}.$$

(2) 定理 4.3 中的函子通常不是满函子。在 $V^{\otimes r_c}$ 中，对于 $r_c = m(2n+1)$，存在一个由超 Pfaffian $\widetilde{\Omega}$ [25]，张成的一维 U($\mathfrak{g}$)-子模，它满足 $\eta.\widetilde{\Omega} = \mathrm{sdet}(\eta)\widetilde{\Omega}$，对所有 $\eta \in G_0$ 均成立，因此它不属于 $\mathcal{F}\left(\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}(\mathrm{sdim})}(0, r_c)\right) = \mathrm{Hom}_G(\mathbb{C}, V^{\otimes r_c})$ 中任何态射的像。这个问题在 $\mathfrak{so}_n$ 的不变量理论中已经出现过，并在 [24] 中通过引入“增强 Brauer 范畴”得到处理。

给定任意 U($\mathfrak{g}$)-模 $M$，我们将对应的表示记为 $\mu_M\colon \mathrm{U}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(M)$。令 $\mathcal{T}_M(V)$ 为 U($\mathfrak{g}$)-模构成的满子范畴，其对象为对所有 $r \in \mathbb{N}$ 的 $M \otimes V^{\otimes r}$。存在一个双函子 $\otimes\colon \mathcal{T}_M(V) \times \mathcal{T}(V) \longrightarrow \mathcal{T}_M(V)$，使得对任意 $r, r_0$,

$$M \otimes V^{\otimes r} \times V^{\otimes r_0} \mapsto M \otimes V^{\otimes r} \otimes V^{\otimes r_0} = M \otimes V^{\otimes (r+r_0)}$$

且对任意 U($\mathfrak{g}$)-模同态 $g \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{U}(\mathfrak{g})}(M \otimes V^{\otimes r}, M \otimes V^{\otimes s})$ 和 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{U}(\mathfrak{g})}(V^{\otimes k}, V^{\otimes \ell})$,

$$g \times f \mapsto g \otimes_{\mathbb{C}} f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{U}(\mathfrak{g})}(M \otimes V^{\otimes (r+k)}, M \otimes V^{\otimes (s+\ell)}).$$

所述双函子定义了 $\mathcal{T}_M(V)$ 上的模范畴结构，其中 $\mathcal{T}(V)$ 是一个幺半范畴。

现在我们将证明定理 4.3 的以下仿射版本。

定理 4.4. 保留上述记号。令 $C$ 为 $\mathfrak{g}$ 的二次 Casimir 元算子，如 (A.4) 所示，$t = \frac{1}{2}(\Delta(C) - C \otimes 1 - 1 \otimes C)$ 为相应的温和 Casimir 算子。存在唯一的函子

$$\mathcal{F}_M : \mathcal{AB}(\mathrm{sdim}) \longrightarrow \mathcal{T}_M(V),$$

它将任意对象 $r$ 映射为 $\mathcal{F}_M(r) = M \otimes V^{\otimes r}$，并将任意 $A \in \mathrm{Hom}(\mathcal{B}(\mathrm{sdim}))$ 中的态射 $\mathbb{I}_0$、$\mathbb{H}$ 和 $\mathbb{A}_0$ 分别映射为图 6 所示的态射。

$$\mathcal{F}_M(\mathbb{I}_0) = \mathrm{id}_M, \quad \mathcal{F}_M(\mathbb{H}) = (\mu_M \otimes \mu)(t), \quad \mathcal{F}_M(\mathbb{A}_0) = \mathrm{id}_M \otimes \mathcal{F}(A),$$

并且在以下意义下保持张量积 $\mathcal{AB}(\mathrm{sdim}\,)\otimes\mathcal{B}(\mathrm{sdim}\,)\longrightarrow\mathcal{AB}(\mathrm{sdim}\,)$：下图交换。

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{AB}(\mathrm{sdim}\,)\times\mathcal{B}(\mathrm{sdim}\,) & \xrightarrow{\mathcal{F}_M\times\mathcal{F}} & \mathcal{T}_M(V)\times\mathcal{T}(V)\\ \otimes\downarrow & & \downarrow\otimes\\ \mathcal{AB}(\mathrm{sdim}\,) & \xrightarrow{\quad\mathcal{F}_M\quad} & \mathcal{T}_M(V).\end{array}\tag{4.17}$$

证明。由于 $\mathcal{AB}(\mathrm{sdim})$ 的态射由所有通常的布劳尔图 $B$ 对应的 $\mathbb{I}_0$、$\mathbb{H}$ 和 $B$ 生成，因此函子 $\mathcal{F}_M$ 被唯一确定。为了证明该定理，我们只需证明 $\mathcal{F}_M$ 保持 $\mathbb{H}$ 的四项关系和斜对称性；根据定理 4.3，其余部分显而易见。

回忆记号 $\mathbb{X}_0=\mathbb{I}_0\otimes X$，其中布劳尔 (2, 2)-图 $X$ 如图 2 所示。于是我们有

$$\mathbb{H}_{01}=\mathbb{H}\otimes I,\quad \mathbb{H}_{02}=\mathbb{X}_0\mathbb{H}_{01}\mathbb{X}_0,\quad \mathbb{H}_{12}=\mathbb{I}_0\otimes H,$$

由此可得

$$\begin{aligned}&\mathcal{F}_M(\mathbb{H}_{01})=(\mu_M\otimes\mu\otimes\mu)(C_{12}),\\ &\mathcal{F}_M(\mathbb{H}_{12})=(\mu_M\otimes\mu\otimes\mu)(C_{23}),\\ &\mathcal{F}_M(\mathbb{H}_{02})=(\mu_M\otimes\mu\otimes\mu)(C_{13}),\quad C_{ij}\in C_3(\mathfrak{g}).\end{aligned}$$

第一个和第二个关系显然成立。为证明第三个关系，我们利用 $\mathcal{F}_M(\mathbb{H}_{01})=\sum_a\mu_M(X_a)\otimes\mu(X^a)\otimes\mathrm{id}_V$ 将 $\mathcal{F}_M(\mathbb{H}_{02})$ 表示为

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_M(\mathbb{H}_{02})&=(\mathrm{id}_M\otimes\mathcal{F}(X))\mathcal{F}_M(\mathbb{H}_{01})(\mathrm{id}_M\otimes\mathcal{F}(X))\\ &=(\mathrm{id}_M\otimes\tau)\left(\sum_a\mu_M(X_a)\otimes\mu(X^a)\otimes\mathrm{id}_V\right)(\mathrm{id}_M\otimes\tau)\\ &=\sum_a\mu_M(X_a)\otimes\mathrm{id}_V\otimes\mu(X^a)=(\mu_M\otimes\mu\otimes\mu)(C_{13}).\end{aligned}$$

现在由 $C_3(\mathfrak{g})$ 的 (4.7) 可得

$$[\mathcal{F}_M(\mathbb{H}_{01}),\mathcal{F}_M(\mathbb{H}_{02})+\mathcal{F}_M(\mathbb{H}_{12})]=(\mu_M\otimes\mu\otimes\mu)\left([C_{12},C_{13}+C_{23}]\right)=0.$$

这证明函子 $\mathcal{F}_M$ 保持四项关系。

为了证明函子 $\mathcal{F}_M$ 遵循 $\mathbb{H}$的斜对称性，我们注意到，

$$\mathcal{F}_M(\mathbb{H}^T)=\sum_a\mu_M(X_a)\otimes\mu^\omega(X^a),$$

其中，对于任意 $Y\in\mathfrak{g}\hookrightarrow\mathrm{U}$，$\mu^\omega(Y):=(\hat{}c\otimes\mathrm{id}_V)(\mu(Y)\otimes\tau)(\check{}c\otimes\mathrm{id}_V)$】【。

对于任意 $v\in V$，我们有 $\mu^\omega(Y)(v)=(\hat{}c\otimes\mathrm{id}_V)(\mu(Y)\otimes\tau)(\check{}c(1)\otimes v)$，这可以改写为

$$\mu^\omega(Y)(v)=\sum_a(-1)^{[e_a][v]}\omega(\mu(Y)e^a,v)e_a$$

利用 $\check{c}$、$\hat{c}$ 的定义。右端还可以利用 $\omega$ 的性质进一步化简，得到

$$\begin{aligned}\mu^{\omega}(Y)(v) &= -\sum_a (-1)^{[e_a]([v]+[Y])}\omega(e^a,\mu(Y)v)e_a \quad (\mathfrak{g}\text{ invariance of }\omega)\\ &= -\sum_a (-1)^{[e_a]}(e^a,\mu(Y)v)e_a \qquad (\text{evenness of }\omega)\\ &= -\sum_a (\mu(Y)v,e^a)e_a \qquad (\text{supersymmetry of }\omega)\\ &= -\mu(Y)v,\end{aligned}$$

也就是说，$\mu^{\omega}(Y) = -\mu(Y)$。由此可得

$$\mathcal{F}_M(\mathbb{H}^T) = -\sum_a \mu_M(X_a)\otimes\mu(X^a) = -\mathcal{F}_M(\mathbb{H}).$$

这证明函子 $\mathcal{F}_M$ 保持了 $\mathbb{H}$ 的斜对称性，从而完成了该定理的证明。□

回顾一下，U(g) 作为 Hopf超代数 [30], 的对极，我们记作 $S$，是一个超代数反自同构，满足 $S(uv) = (-1)^{[u][v]}S(v)S(u)$，且对任意 $u$、$v \in \mathrm{U}(\mathfrak{g})$ 以及 $X \in \mathfrak{g} \hookrightarrow \mathrm{U}(\mathfrak{g})$，有 $S(X) = -X$。类似于上述的论证表明，对所有 $u \in \mathrm{U}(\mathfrak{g})$，$\mu^{\omega}(u) = \mu(S(u))$。特别地，这得到

$$\mathcal{F}_M((\mathbb{H}^{\ell})^T) = (\mu_M\otimes\mu S)(t^{\ell}), \quad \forall \ell \geq 1. \tag{4.18}$$

注 4.6。U(g)-模映射 $Pf\colon \mathbb{C} \longrightarrow V^{\otimes m_{(2n+1)}}$，其中 $Pf$(1) 为超 Pfaffian。根据注 4.5(2)，该映射不属于 $\mathcal{F}$(Hom($\mathcal{B}$(sdim )))，因此 $\mathrm{id}_M\otimes Pf \notin \mathcal{F}_M$(Hom($\mathcal{AB}$( sdim ))。不过，我们预期，若 $M$ 是一个投射 U(g)-模，则 $\mathcal{F}_M$ 会诱导一个满函子，从 $\mathcal{AB}$(sdim ) 到商范畴 $\mathcal{T}_M(V)/\langle \mathrm{id}_M\otimes Pf\rangle$。

写作 $E_{M,\ r}(V) = \mathrm{End}_{\mathrm{U}}(M\otimes V^{\otimes r})$。将 $\mathcal{F}_M$ 限制到 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{AB}(\mathrm{sdim})}(r,r)$，记为 $\mathcal{F}_M|_r$，便得到仿射 Brauer 代数的一个表示:

$$\mathcal{F}_M|_r : AB_r(\mathrm{sdim}) \longrightarrow E_{M,r}(V).$$

以下结果是定理 4.4 的一个直接推论。

推论 4.7。下图交换。

$$\begin{array}{ccc} T_{r+1} & \xrightarrow{\Phi_r} & AB_r(\mathrm{sdim}) \\ \downarrow{\scriptstyle \psi_{r+1}} & \searrow^{\eta_{M,r}} & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{F}_M|_r} \\ C_{r+1}(\mathfrak{g}) & \xrightarrow{\mu_{M,r}} & E_{M,r}(V), \end{array}$$

其中 $\eta_{M,\ r} = \eta_{M,\ V,\ \ldots\ldots,\ V}$ 由 (4.8) 定义。

本文稍后将深入研究定理4.4 中函子 $\mathcal{F}_M\colon\ \mathcal{AB}(\mathrm{sdim}) \longrightarrow \mathcal{T}_M(V)$ 的特殊情形。

## 5. Application to universal enveloping superalgebras

我们将上述发展的 $\mathcal{AB}(\delta)$图示方法应用于研究 $\mathrm{U}(\mathfrak{osp}(V;\omega))$的中心，并给出特征恒等式 [3, §4.10],[4, 14] 关于正交李代数和辛李代数的范畴推导。

李代数 $\mathfrak{g}$ 的特征恒等式遵循凯莱–哈密顿定理的思路，但针对的是一种具有 $\mathfrak{g} \hookrightarrow \mathrm{U}(\mathfrak{g})$ 中元素作为条目的特定类型方阵。它指出，该矩阵满足一个系数取自 $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ 中心的首一多项式方程。量子群 [10] 的特征恒等式的推广也已为人所知。

保留上一节的记号，并记

$$\mathcal{F}_M|_r : \mathrm{Hom}_{AB_r(\mathrm{sdim})}(r,r) \longrightarrow E_{M,r}(V) \tag{5.1}$$

函子 $\mathcal{F}_M\colon \mathcal{AB}(\mathrm{sdim}) \longrightarrow \mathcal{T}_M(V)$ 在 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{AB}(\mathrm{sdim})}(r,r)$ 上的限制；该限制在右侧的自同态代数中诱导出 $\mathrm{Hom}_{AB_r(\mathrm{sdim})}(r,r)$ 的一个表示。

5.1. $\mathrm{U}(\mathfrak{osp}(V;\omega))$ 中心的范畴构造。保留第 4.1.2 节中的记号，尤其是 (4.9)，并将 $G = \mathrm{OSp}(V;\omega)$ 与 Harish-Chandra 对 $(G_0,\mathrm{U}(\mathfrak{g}))$。注意，任何 $\eta \in G_0$ 都具有如下形式 $\eta = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ 其中 $\alpha \in \mathrm{O}(V_{\bar 0};\omega_{\bar 0})$ 且 $\beta \in \mathrm{Sp}(V_{\bar 1};\omega_{\bar 1})$。因此 Berezinian $\mathrm{sdet}(\eta)$ 等于 $\det(\alpha)\det(\beta)^{-1} = \det(\alpha)$，其值为 1 或 $-1$。

$G$ 和 $\mathfrak{g}$分别通过伴随作用作用于 $\mathfrak{g}$，且这些作用可扩展为对包络超代数 $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ 的作用。对于任意 $X \in \mathfrak{g}$和 $g \in G_0$，我们将它们对任意 $u \in \mathrm{U}(\mathfrak{g})$ 的作用分别记为 $X.u$ 和 $g.u$。$\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ 的代数结构在以下意义下保持不变：对于任意 $u, v \in \mathrm{U}(\mathfrak{g})$,

$$X.(uv) = (X.u)v + (-1)^{[X][u]}u(X.v), \quad g.(uv) = (g.u)(g.v). \tag{5.2}$$

记 $Z(\mathrm{U}(\mathfrak{g}))$ 为 $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ 的中心，它是子代数 $\mathrm{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} = \{z \in \mathrm{U}(\mathfrak{g}) \mid X.z = 0, \forall X \in \mathfrak{g}\}$，由 $\mathfrak{g}$-不变量构成。我们还有由 $G$-不变量定义的子代数 $\mathrm{U}(\mathfrak{g})^G = \{z \in \mathrm{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \mid \eta.z = z, \forall \eta \in G_0\}$。关于 $G$-不变量与 $\mathfrak{g}$-不变量之间的关系，文献 [25] 对此进行了研究。考虑 $\mathrm{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ 的以下子空间。

$$\mathrm{U}(\mathfrak{g})^{G,\mathrm{sdet}} = \{z \in \mathrm{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \mid \eta.z = \mathrm{sdet}(\eta)z, \ \forall \eta \in G_0\}.$$

那么对于所有的 $\alpha, \beta \in \mathrm{U}(\mathfrak{g})^{G,\ \mathrm{sdet}}$，我们有 $\alpha\beta \in \mathrm{U}(\mathfrak{g})^G$。此外,

$$\mathrm{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} = \mathrm{U}(\mathfrak{g})^G \bigoplus \mathrm{U}(\mathfrak{g})^{G,\mathrm{sdet}}, \quad \text{if } \{\eta \in G_0 \mid \mathrm{sdet}(\eta) = -1\} \neq \emptyset.$$

我们有如下结果。

引理 5.1. 若 $\dim(V_{\bar 0})$ 为奇数或 0，则 $Z(\mathrm{U}(\mathfrak{g})) = \mathrm{U}(\mathfrak{g})^G$。

证明. 若 $\dim(V_{\bar 0}) = 0$，则有 $G = G_0 = \mathrm{Sp}_{2n}$，因此对所有$\eta \in G_0$，$\mathrm{sdet}(\eta) = 1$。在此情形下，$Z(\mathrm{U}(\mathfrak{g})) = \mathrm{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} = \mathrm{U}(\mathfrak{g})^G$。

若 $\eta_0 \in \{\eta \in G_0 \mid \mathrm{sdet}(\eta) = -1\} \neq \emptyset$，则 $\mathrm{U}(\mathfrak{g})^{G,\ \mathrm{sdet}} = \{z \in \mathrm{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \mid \eta_0.z = -z\}$，且与此类 $\eta_0$ 的选取无关。假设 $\dim(V_{\bar 0})$ 为奇数。令 $\eta_0 \in G_0$为元素 $\eta_0 = -id_V$。显然 $\mathrm{sdet}(g_0) = -1$，且对所有 $X \in \mathfrak{g}$，$\eta_0.X = X$。因此 $\mathrm{U}(\mathfrak{g})^{G,\ \mathrm{sdet}} = 0$，从而 $Z(\mathrm{U}(\mathfrak{g})) = \mathrm{U}(\mathfrak{g})^G$。□

由于 $G$ 自然作用于 $V$，因而对任意 $r$ 也作用于 $V^{\otimes r}$，可知 $G$作用于 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V^{\otimes r}, V^{\otimes s})$（固定 $r,s\in\mathbb{N}$）。任意 $g\in G_0$ 和 $X\in\mathfrak{g}$ 在 $\varphi\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V^{\otimes r},V^{\otimes s})$（固定 $r$, $s\in\mathbb{N}$）上的作用为

$$(X.\varphi)(\mathbf{v})=X.(\varphi(\mathbf{v}))-(-1)^{[X][\varphi]}\varphi(X.\mathbf{v}),$$
$$(g.\varphi)(\mathbf{v})=g.(\varphi(g^{-1}.\mathbf{v})),\quad \forall \mathbf{v}\in V^{\otimes r}.$$

此 $G$-作用按如下方式扩展到 $\mathrm{U}(\mathfrak{g})\otimes\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V^{\otimes r},V^{\otimes s})$。对于任意 $X\in\mathfrak{g}$, $g\in G_0$,$u\in\mathrm{U}(\mathfrak{g})$，以及 $\varphi\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V^{\otimes r},V^{\otimes s})$,

$$X.(u\otimes\varphi)=X.u\otimes\varphi+(-1)^{[X][u]}X.\varphi,\quad g.(u\otimes\varphi)=g.u\otimes g.\varphi. \tag{5.3}$$

现在显然，$\mathrm{U}(\mathfrak{g})\otimes\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V^{\otimes r},V^{\otimes s})\otimes\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V^{\otimes r'},V^{\otimes r'})$ 也具有 a$G$-模结构。

对于任意 $u,u'\in\mathrm{U}(\mathfrak{g})$、$\varphi\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V^{\otimes r},V^{\otimes r'})$ 和 $\psi\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V^{\otimes r'},V^{\otimes s})$，我们有复合 $(u'\otimes\psi)(u\otimes\varphi)=(-1)^{[u][\psi]}u'u\otimes\psi\varphi$。容易验证，由 (5.3) 定义的 $G$-作用与复合相容。

记 $\mathrm{U}=\mathrm{U}(\mathfrak{g})$，并将其视为一个左 U-模，其中作用为乘法。于是，针对 $M=$U 的函子 $\mathcal{F}_M$ 变为

$$\mathcal{F}_{\mathrm{U}}:\mathcal{AB}(\mathrm{sdim}\,)\longrightarrow\mathcal{T}_{\mathrm{U}}(V), \tag{5.4}$$

其中 $\mathcal{F}_{\mathrm{U}}(\mathbb{I}_0)=1\in\mathrm{U}$，且 $\mathcal{F}_{\mathrm{U}}(\mathbb{H})=(\mathrm{id}_{\mathrm{U}}\otimes\mu)(t)$。显然，$\mathcal{F}_{\mathrm{U}}(\mathbb{H})$ 关于作用 (5.3) 是 $G$-不变的，因此，对于 $\mathcal{B}(\mathrm{sdim}\,)$ 的任意态射 $D$，$\mathcal{F}(D)$ 也具有这一性质。由于 $\mathbb{I}_0$、$\mathbb{H}$ 以及所有 $D$ 都生成 $\mathcal{AB}(\mathrm{sdim}\,)$ 的态射,

$$\mathcal{F}_{\mathrm{U}}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{AB}(\mathrm{sdim}\,)}(r,s))\subseteq\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{U}\otimes V^{\otimes r},\mathrm{U}\otimes V^{\otimes s})^G. \tag{5.5}$$

现在我们可以证明以下关键结果。

**定理 5.1.** 单位元与 $\{\mathcal{F}_{\mathrm{U}}(Z_{2\ell})\mid \ell\geq 1\}$ 共同生成 $\mathrm{U}(\mathfrak{g})^G$。此外，如果 $\dim(V_{\bar{0}})$ 为奇数或 0，则这些元素生成 $Z(\mathrm{U}(\mathfrak{g}))$。

证明。我们首先为该证明做一些准备。对于任意 $G$-模 $M$，令 $T(M)=\oplus_{r\geq 0}M^{\otimes r}$为 $M$ 上的张量代数。对于每个 $r$，在 $M^{\otimes r}$ 上都有通常的半单 $\mathrm{Sym}_r$ 作用，它与 $G$-作用相交换。令 $\Sigma_{\pm 1}=\sum_{\sigma\in\mathrm{Sym}_r}(\mp 1)^{\ell(\sigma)}\sigma$，其中 $\ell(\sigma)$ 是 $\sigma$的长度。于是 $\Sigma_{-1}$（分别为 $\Sigma_{+1}$）是与形状为（$r$）（分别为（$1^r$））的标准杨表相对应的杨对称化子。记 $S^k_{gr}(M)=\Sigma_{-1}M^{\otimes r}$和 $\wedge^k_{gr}M=\Sigma_{+1}M^{\otimes r}$；它们是 $M^{\otimes r}$ 的 $G$-模直和项。记 $S_{gr}(M)=\oplus_r S^k_{gr}M$和 $\wedge_{gr}(M)=\oplus_r\wedge^k_{gr}M$。它们是张量代数 $T(M)=\oplus_r M^{\otimes r}$ 的 $G$-模直和项。

现在考虑自然的 $G$-模 $V$，以及下面的 $G$-模同构

$$j:\wedge^2_{gr}V\xrightarrow{\sim}\mathfrak{g},\quad e_a\wedge e_b\mapsto X_{ab}\quad\forall a,b,$$

其中 $e_a\wedge e_b=e_a\otimes e_b-(-1)^{[a][b]}e_b\otimes e_a$，而 $X_{ab}$ 是 A.2 节中定义的 $\mathfrak{g}$ 的基元素。我们将映射 $j$ 扩展为 $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$-模同构 $\Upsilon{:}S_{gr}(\wedge^2_{gr}V)\xrightarrow{\sim}\mathrm{U}(\mathfrak{g})$，方式如下。

对于任意 $r\geq 2$，对称群 $\mathrm{Sym}_r$ 通过置换因子并赋予适当的符号作用于 $\mathrm{U}(\mathfrak{g})^{\otimes r}$。具体而言，$\mathrm{Sym}_r$ 的生成元 $s_i$ 通过 $\mathrm{id}^{\otimes(i-1)}{}_{\mathrm{U}}\otimes\tau_{\mathrm{U},\mathrm{U}}\otimes\mathrm{id}^{\otimes(r-i-1)}{}_{\mathrm{U}}$ 作用，其中 $\tau_{\mathrm{U},\mathrm{U}}$ 由 (4.13) 定义。如上所述，令 $\Sigma_{-1}\in\mathbb{C}\mathrm{Sym}_r$ 为与形状 $(r)$ 相对应的杨对称化子。此外，令 $\mathfrak{M}_r:\mathrm{U}(\mathfrak{g})^{\otimes r}\longrightarrow\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ 为由 $u_1\otimes u_2\otimes\ldots\otimes u_r\mapsto u_1u_2\ldots u_r$ 定义的乘法,

对任意 $u_1, \dots, u_r \in \mathrm{U}(\mathfrak{g})$。现在我们定义 $\Upsilon$，要求它将任意元素$Y_1 Y_2 \dots Y_r \in S^r_{gr}(\wedge^2_{gr} V)$映射为 $\frac{1}{r!}$ $\mathfrak{M}_r \Sigma_{-1}(j(Y_1) \otimes j(Y_2) \otimes \dots \otimes j(Y_r))$，其中该元素属于 $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$，对任意 $r$ 均成立。

现在我们证明该定理。显然，$(S_{gr}(\wedge^2_{gr} V))^G = \sum_{k\geq 0} (S^k_{gr}(\wedge^2_{gr} V))^G$ 是 $\mathbb{Z}_+$-分次的，且具有 $(S^0_{gr}(\wedge^2_{gr} V))^G = \mathbb{C}$ 和 $(S^1_{gr}(\wedge^2_{gr} V))^G = 0.$。由关于 $G$ [6, 23] 的不变量理论第一基本定理可知，这些元素

$$\widehat{T}[\ell] = \sum_{a_1,\dots,a_{\ell-1},b} (-1)^{\sum_{i=1}^{\ell-1}[a_i]} j^{-1}(X^{a_1}_b) j^{-1}(X^{a_2}_{a_1}) j^{-1}(X^{a_3}_{a_2}) \dots j^{-1}(X^{b}_{a_{\ell-1}}), \quad \ell \geq 2,$$

连同单位元生成 $(S_{gr}(\wedge^2_{gr} V))^G$。方程 (A.10) 表明

$$\mathcal{F}_{\mathrm{U}}(Z_\ell) = \sum_{a_1,\dots,a_{\ell-1},b=1}^{m+2n} (-1)^{\sum_{i=1}^{\ell-1}[a_i]} X^{a_1}_b X^{a_2}_{a_1} X^{a_3}_{a_2} \dots X^{b}_{a_{\ell-1}}.$$

因此，对于任意 $\ell$，有

$$\Upsilon^{-1}(\mathcal{F}_{\mathrm{U}}(Z_\ell)) = \widehat{T}[\ell] \mod (S^{\ell-1}_{gr}(\wedge^2_{gr} V))^G. \tag{5.6}$$

特别地，$\Upsilon^{-1}(\mathcal{F}_{\mathrm{U}}(Z_2)) = \widehat{T}[2]$，并且根据引理 2.5，$\Upsilon^{-1}(\mathcal{F}_{\mathrm{U}}(Z_3)) = \widehat{T}[3]$。此外显然

$$\Upsilon^{-1}(\mathcal{F}_{\mathrm{U}}(Z_k Z_\ell)) = \widehat{T}[k]\widehat{T}[\ell] \mod (S^{k+\ell-1}_{gr}(\wedge^2_{gr} V))^G. \tag{5.7}$$

利用关系 (5.6) 和 (5.7)，我们可以按 $(S_{gr}(\wedge^2_{gr} V))^G$ 的次数进行归纳，证明单位元以及对所有 $\ell \geq 2$ 的 $\Upsilon^{-1}(\mathcal{F}_{\mathrm{U}}(Z_\ell))$ 生成 $(S_{gr}(\wedge^2_{gr} V))^G$。由于 $\Upsilon^{-1}(\mathrm{U}(\mathfrak{g})^G) = (S_{gr}(\wedge^2_{gr} V))^G$，单位元和对 $\ell \geq 2$ 的元素 $\mathcal{F}_{\mathrm{U}}(Z_\ell)$ 一起生成 $\mathrm{U}(\mathfrak{g})^G$。根据定理 2.14(2)，对所有 $\ell \geq 1$ 的元素 $Z_{2\ell}$ 生成 $\mathrm{Hom}^{\mathcal{AB}(\mathrm{sdim})}(0, 0)$，因此得到定理的第一项结论。

该定理的第二个结论现由引理 5.1 得出。证明至此完成。□

总之，我们有

推论 5.1. 对任意 $r$、$s$，函子 $\mathcal{F}_{\mathrm{U}}$ 将 $\mathrm{Hom}^{\mathcal{AB}(\mathrm{sdim})}(r, s)$映到 $G$-不变子空间 $(\mathrm{U} \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V^{\otimes r}, V^{\otimes s}))^G$。特别地，

$$\mathcal{F}_{\mathrm{U}}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{AB}(\mathrm{sdim})}(0, 0)) = \mathrm{U}(\mathfrak{g})^G. \tag{5.8}$$

此外，若 $\dim(V_{\bar{0}})$ 为奇数或 0，则 $Z(\mathrm{U}(\mathfrak{g})) = \mathcal{F}_{\mathrm{U}}(\mathrm{Hom}^{\mathcal{AB}(\mathrm{sdim})}(0, 0))$。

证明. 第一个结论由 (5.5) 得出，而 (5.8) 由定理 5.1 得出。若 $\dim(V_{\bar{0}})$ 为奇数或 0，则由引理 5.1 可知 $\mathrm{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} = \mathrm{U}(\mathfrak{g})^G$。推论的证明至此完成。□

作为本节的结束，我们完成定理 2.14 的证明。先回顾正交李代数 $\mathfrak{so}_m$ 的普遍包络代数 $\mathrm{U}(\mathfrak{so}_m)$ 中关于中心元的一些众所周知的事实。

注 5.1. 令 $V = \mathbb{C}^m$ 为纯偶空间，并配备双线性型 $\omega(e^i, e^j) = \delta_{ij}$，对附录 A.1 中所有 $i, j$，我们得到正交李代数$\mathfrak{so}_m$，它由 $J_{ij} = E^i_j - E^j_i$ 张成，其中 $i, j = 1, 2, \dots, m$，这里 $E^i_j$ 是偶矩阵单位。记 $X_{ij}$ 为 $J_{ij}$ 在 $\mathrm{U}(\mathfrak{so}_m)$ 中的像。于是立即可得

由正交群$O_m(\mathbb{C})$的不变量理论第一基本定理可知，作为 U($\mathfrak{so}_m$) 的子代数，U($\mathfrak{so}_m$)$^{O_m(\mathbb{C})}$ 由以下元素生成

$$I(r)=\sum_{i_1,i_2,\dots,i_r} X_{i_1i_2}X_{i_2i_3}\dots X_{i_r,i_1},\quad r\geq 2.$$

众所周知，对于 $j=1,\ 2,\ \dots,\ \left[\frac{m}{2}\right]$，中心元 $I(2j)$ 代数无关，并生成 U($\mathfrak{so}_m$)$^{O_m(\mathbb{C})}$。按照 [2, §11] 中提出的推理思路，很容易证明这些事实。

同样容易验证，$I(2k+1)$ 可以显式写成 $I(2j)$ 的多项式。这也可由定理 2.12(2) 中更一般的陈述推出（该陈述独立证明），只需使用针对 $\mathfrak{so}_m$ 的函子 $\mathcal{F}_{\mathrm{U}}$。

定理 2.14(4) 的证明。沿用注 5.1 中的记号。令 $\mathfrak{g}=\mathfrak{so}_m$ 对任意 $m\geq 3$ 成立，因此 U($\mathfrak{g}$) =U($\mathfrak{so}_m$)。利用 (A.10)，我们得到

$$\mathcal{F}_{\mathrm{U}}(Z_{2j})=I(2j),\quad \forall j\geq 1.$$

现在，对于 $j=1,\ 2,\ \dots,\ \left[\frac{m}{2}\right]$，$I(2j)$ 代数无关。因此，对所有 $j=1,\ 2,\ \dots,\ \left[\frac{m}{2}\right]$，元素 $Z_{2j}$ 必须代数无关，这对任意 $m\geq 3$ 都成立。这就证明了定理 2.14(4)。□

5.2. 关于 $\mathfrak{so}_m$ 和 $\mathfrak{sp}_{2n}$的特征恒等式的范畴化。一般而言，ker($\mathcal{F}_{\mathrm{U}}$) $\neq 0$，而 ker($\mathcal{F}_{\mathrm{U}}|_r$) 的非零元素会在 U$\otimes$End$_{\mathbb{C}}(V^{\otimes r})$ 中导出有趣的恒等式。布拉肯和格林 [3, §4. 10], [4, 14] 发现了李代数在 U $\otimes$ End$_{\mathbb{C}}(V)$ 中的某些“特征恒等式”，这些恒等式可以这样解释。数理物理文献中已广泛研究这类特征恒等式（简要综述及更多参考文献见 [16] ）。

本节中，$V$ 要么是 $\mathbb{C}^{m|0}$，要么是 $\mathbb{C}^{0|2n}$，因此 $\mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{so}_m$ 或 $\mathfrak{sp}_{2n}$。我们将 $d=$ 记作 dim($V$)。

5.2.1. 正交李代数和辛李代数的特征恒等式。我们先准确说明“特征恒等式”一词对 $\mathfrak{g}$ 的含义 [3,4, 14] （另见 [9]）。设 $E$ 是 U($\mathfrak{g}$) $\otimes$ End$_{\mathbb{C}}(V)$ 中由$E=$ (id$_{\mathrm{U}(\mathfrak{g})}\otimes\mu$)($t$) 给出的元素，其中，照例，$\mu$ 表示 $\mathfrak{g}$ 在 $V$ 上的作用，而 $t$ 是温和Casimir元。。我们称 $E$ 满足特征恒等式，若存在明确已知的中心元 $Q_i\in\mathbb{Z}$ (U($\mathfrak{g}$))，使得

$$E^d+Q_1E^{d-1}+Q_2E^{d-2}+\dots+Q_d=0. \tag{5.9}$$

这里，（5.9）中的 $Q_i$ 是已知的，具体而言，其在 Harish-Chandra 同构下的像已明确给出，正如定理 5.2 的证明中所述。

引理 5.2. 任意特征恒等式中出现的中心元 $Q_i$ 均属于 U($\mathfrak{g}$)$^G$。 (5.9)

证明。由引理 5.1 可知，对于所有 $i$，若 $\mathfrak{g}=\mathfrak{sp}_{2n}$ 或 $\mathfrak{so}_m$，则奇数 $m$时 $Q_i\in$ U($\mathfrak{g}$)$^G$ 始终成立。若 $\mathfrak{g}=\mathfrak{so}_m$ 且 $m$ 为偶数，则令 $\eta_0\in$ O$_m$ 满足 det($\eta_0$) $=-1$。我们可以将 $Q_i$ 表示为 $Q_i=Q_{i,\ +}+Q_{i,\ -}$，其中$Q_{i,\ \pm}\in Z$(U($\mathfrak{g}$))满足$\eta_0.Q_{i,\ \pm}=\pm Q_{i,\ \pm}$，即

即，$Q_{i,+} \in \mathrm{U}(\mathfrak{g})^G$，且$Q_{i,-} \in \mathrm{U}(\mathfrak{g})^{G,\,\mathrm{sdet}}$。由于 $\eta_0.E = E$ 且$\eta_0.Q_i = Q_{i,+} - Q_{i,-}$，结合 (5.9) 可得

$$E^d + \eta_0.Q_1 E^{d-1} + \eta_0.Q_2 E^{d-2} + \cdots + \eta_0.Q_d = 0,$$

我们得到$E^d + Q_{1,+}E^{d-1} + Q_{2,+}E^{d-2} + \cdots + Q_{d,+} = 0.$ 这证明了该引理。 □

5.2.2. 特征恒等式的范畴化。下述定理给出了 $\mathfrak{so}_m$ 和 $\mathfrak{sp}_{2n}$ 的特征恒等式的一种范畴化推导。

定理 5.2。沿用上述记号，并记作 $d = \dim(V)$。存在$\widehat{}$元素 $Q_i \in \mathrm{Hom}^{\mathcal{AB}(\mathrm{sdim})}(0,0)$，对 $i = 1$、2、.....、$d = \dim(V)$，使得该元素

$$\widehat{\mathbb{Q}} := \mathbb{H}^d + \widehat{\mathbb{Q}}_1 \mathbb{H}^{d-1} + \widehat{\mathbb{Q}}_2 \mathbb{H}^{d-2} + \cdots + \widehat{\mathbb{Q}}_d$$

$\widehat{}$ $\widehat{}$属于 $\ker(\mathcal{F}_{\mathrm{U}|_1})$，其中 $\mathbb{Q}_i = Q_i \otimes I$。此外，特征恒等式$\widehat{}$(5.9)在当前语境下可简述为 $\mathcal{F}_{\mathrm{U}}(\mathbb{Q}) = 0.$

证明。此证明部分基于 [9]。记 $M_\lambda$ 为最高权为 $\lambda$ 的 Verma 模，记 $L_\lambda$ 为简单商模。于是 $M_\lambda \otimes V = \sum_{\lambda_i} M_{\lambda+\lambda_i}$，其中 $\lambda_i$ 对于 $i = 1$、2、.....、$d$ 是 $V$ 的一组权向量基的权。现在 $E$ 取特征值

$$e_i(\lambda) = \frac{1}{2}\left((\lambda + \lambda_i + 2\rho, \lambda + \lambda_i) - (\lambda + 2\rho, \lambda) - \chi_V(C)\right),$$

在每个子模 $M_{\lambda+\lambda_i}$ 中，其中 $\chi_V(C)$ 是 $V$ 中 $C$ 的特征值。令

$$R_\lambda = \prod_{i=1}^{d} \left(E - e_i(\lambda)\right).$$

于是 $(\mu_{M_\lambda} \otimes \mathrm{id})(R_\lambda) = 0$，作为 $\mathrm{End}_{\mathrm{U}}(M_\lambda \otimes V)$ 中的一个元素。这意味着

$$(\mu_{L_\lambda} \otimes \mathrm{id})(R_\lambda) = 0, \quad \forall \lambda. \tag{5.10}$$

我们将 $R_\lambda$ 展开为关于 $E$ 的多项式，得到

$$R_\lambda = E^d + P_1(\lambda)E^{d-1} + P_2(\lambda)E^{d-2} + \cdots + P_d(\lambda), \tag{5.11}$$

其中 $P_i(\lambda)$ 是关于 $\lambda$ 的函数 $e_j(\lambda)$ 的多项式，它们本质上是 $e_i(\lambda)$ 中的初等对称函数，并带有适当的符号；例如，$P_1(\lambda) = -\sum_i e_i(\lambda)$，$P_2(\lambda) = \sum_{i \neq j} e_i(\lambda)e_j(\lambda)$，等等。记 $E(\lambda) = (\mu_{L_\lambda} \otimes \mathrm{id})(E)$。那么 (5.10) 等价于

$$E(\lambda)^d + P_1(\lambda)E(\lambda)^{d-1} + P_2(\lambda)E(\lambda)^{d-2} + \cdots + P_d(\lambda) = 0, \quad \forall \lambda. \tag{5.12}$$

利用 $V$ 的权集合在 $\mathfrak{g}$ 的 Weyl 群 $W$ 的通常作用下保持不变这一事实，容易如 [9] 中那样证明，$P_i(\lambda)$ 在 $W$ 的点作用下均保持不变。因此，由 Harish-Chandra 同构，存在元素 $Q_i \in Z(\mathrm{U})$，使得对于所有 $i$，$\mu_{M_\lambda}(Q_i) = P_i(\lambda)$。我们定义

$$R = E^d + Q_1 E^{d-1} + Q_2 E^{d-2} + \cdots + Q_d, \tag{5.13}$$

这等于（5.9）式的左边。现在，（5.12）式变为

$$(\mu_{L_\lambda} \otimes \mathrm{id})(R) = 0, \quad \forall \lambda. \tag{5.14}$$

注意， $R$ 是一个元素属于 U(𝔤) 的方阵。上述方程表明，对于所有 $\lambda$， $R$ 的所有元素在不可约表示 $\mu_{L_\lambda}$ 中均为零。这意味着 $R=0$，即方程 (5.9)。

根据引理 5.2 和推论 5.1，存在 $Q_i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{AB}(\mathrm{sdim})}(0,0)$，使得 $1\le i\le d$ 满足 $Q_i=\mathcal{F}_{\mathrm{U}}(Q_i)$，因此 $Q_i\otimes \mathrm{id}_V=\mathcal{F}_{\mathrm{U}}(\mathbb{Q}_i)$。由于 $E=\mathcal{F}_{\mathrm{U}}(\mathbb{H})$，(5.9) 的左端是定理 5.2 中给出的元素 $Q$ 在 $\mathcal{F}_{\mathrm{U}}$ 下的像。这就证明了该定理。□

**Exa例 5.3**。当 $V=\mathbb{C}^{0|2}$ 时，我们讨论的是李代数 $\mathfrak{sp}_2$。于是

$$\widehat{\mathbb{Q}}=\mathbb{H}^2-2\mathbb{H}+\frac{1}{2}Z_2\otimes I$$

属于 $\mathcal{F}_{\mathrm{U}}|_1$ 的核，此时的特征恒等式为 $\mathcal{F}_{\mathrm{U}}(\mathbb{Q})=0$。

更明确地说，令 $X$、$Y$、$T$ 为 $\mathfrak{sp}_2=\mathfrak{sl}_2$ 的标准生成元，其中

$$[T,X]=2X,\quad [T,Y]=-2Y,\quad [X,Y]=T.$$

那么，二次卡西米尔算子 (A.4) 为

$$C=-2\left(\frac{H^2}{2}+XY+YX\right) \tag{5.15}$$

在当前记号下。由于 $V=\mathbb{C}^{0|2}$ 的最高权为 1， $V$中 $C$ 的特征值等于 $-2\left(\frac{1}{2}+1\right)=-3=\mathsf{sdim}\ -1$。标准生成元 $X$、$Y$、$T$相对于标准基在 $V$上的作用分别由矩阵 $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$、 $\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$表示。

相应的温和Casimir元为 $t=-2\left(\frac{T\otimes T}{2}+X\otimes Y+Y\otimes X\right)$。因此

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\mathrm{U}}(\mathbb{H})&=(\mathrm{id}_{\mathrm{U}}\otimes\mu)(t)\\&=-2\left(\frac{1}{2}T\otimes\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}+X\otimes\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+Y\otimes\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right)\\&=-2\begin{pmatrix}\frac{T^2}{2}&Y\\X&-\frac{T^2}{2}\end{pmatrix},\ \text{and}\\\mathcal{F}_{\mathrm{U}}(Z_2)&=\mathrm{str}(\mathcal{F}_{\mathrm{U}}(\mathbb{H})^2)=2C.\end{aligned}$$

**5.2.3.** 关于李超代数和量子群的特征恒等式的评论。文献中讨论过李超代数的特征恒等式（例如，参见 [17]），但大多采用式 (5.12) 的形式，适用于任意有限维单模 $L_\lambda$（即，将 $M_\lambda$ 替换为 $L_\lambda$）。对于一般的 $m$、$n$，似乎很难推广 [9] 的方法，将对所有 $\lambda$ 成立的式 (5.12) 提升为 U⊗End$_{\mathbb{C}}(V)$ 中关于 $\mathfrak{osp}_{m|2n}$ 和 $\mathfrak{gl}_{m|n}$ 的恒等式 (5.9)。问题在于，对于 atypical $\lambda$， $P_i(\lambda)$ 在沿 atypical 根 $\gamma$ 的标量倍数平移时并不保持不变；也就是说，对于非零 $c\in\mathbb{C}$ 和满足 $(\lambda+\rho,\gamma)=0$ 的各向同性根 $\gamma$，一般而言 $P_i(\lambda)\neq P_i(\lambda+c\gamma)$。根据李超代数的广义 Harish-Chandra 同构，U 中不存在这样的中心元：其特征值对所有 $\lambda$ 都是 $P_i(\lambda)$ 在 $M_\lambda$ 中的值。对于 $\mathfrak{osp}_{1|2n}$，这个问题并不存在，因为该李超代数没有 atypical 权。

然而，任何非零元素 $\mathbb{Q} \in \ker(\mathcal{F}_{\mathrm{U}}|_1)$ 都会导致 $\mathrm{U} \otimes \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ 中的一个恒等式 $\mathcal{F}_{\mathrm{U}}(\mathbb{Q}) = 0$，这可以视为上述特征恒等式的一种推广。为了构造此类恒等式，我们只需考虑 $\ker(\mathcal{F}_{\mathrm{U}}|_1)$ 作为 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{AB}(\mathrm{sdim})}(1,1)$ 中的一个双边理想时的生成元。

量子群的特征恒等式已在 [10] 中进行了研究（另见[32]）。采用 [15, §3.1、§3.2] 中引入的受限有色缠结范畴（仅含一个极），可以相当直接地对量子特征恒等式进行范畴化处理，类似于本文所述的方法。

## 6. $\mathrm{sp}_2$ 的范畴 O 中的应用

在本节中，我们始终假设 $V = \mathbb{C}^{0|2}$ 和 $\omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$。因此，$\mathfrak{osp}(V;\omega)$是李代数 $\mathfrak{sp}_2(\mathbb{C})$。

我们在这一特殊情形下深入考察定理 4.4 中的函子。显然，$\mathrm{sdim} = -2$。下面的结果表明，在此情形下，函子 $\mathcal{F}_M$ 可经由 Temperley-Lieb 范畴分解。

引理 6.1. 对任意 $\mathfrak{sp}_2$-模 $M$，定理 4.4 中给出的函子 $\mathcal{F}_M\colon \mathcal{AB}(-2) \longrightarrow \mathcal{T}_M(V)$可经由 $\mathcal{ATL}(-2)$分解；也就是说，存在唯一的函子$\mathcal{F}_M^{TL}\colon \mathcal{ATL}(-2) \longrightarrow \mathcal{T}_M(V)$，使下图交换，

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{AB}(-2) & \xrightarrow{\mathcal{F}_M} & \mathcal{T}_M(V) \\ \downarrow & \nearrow_{\mathcal{F}_M^{TL}} & \\ \mathcal{ATL}(-2). & & \end{array}$$

证明。注意到 $V \otimes V = \mathbb{C}^{0|2} \otimes \mathbb{C}^{0|2} = L_s \oplus L_a$ 作为 $\mathfrak{sp}_2$-模，其中 $L_s$ 和 $L_a$分别是维数为 1 和 3 的简单子模。因此，置换$\tau\colon V \otimes V \longrightarrow V \otimes V$由 $\tau = -P_a + P_s = 1 + 2P_s$ 给出。由于 $\mathrm{sdim}\,(V) = -2$，映射 $e$ 在 (4.14) 中在此情形下由 $e = -2P_s$ 给出，因而 $\tau = 1 - e.$ 这表明 $\mathcal{F}(\Theta) = 0$，因为 $\delta = \mathrm{sdim}\,(V) = -2$，其中 $\Theta$ 是图 14 中所示的 $\mathcal{AB}(-2)(2,2)$ 的元素。根据定义，这表明函子 $\mathcal{F}_M$ 通过$\mathcal{ATL}(-2)$分解。□

引理 6.2。沿用上述记号，并固定 $\lambda \in \mathbb{C}$。假设 $\mathfrak{sp}_2$-模 $M$ 或者是最高权为 $\lambda$ 的 Verma 模 $M_\lambda$，或者是简单模 $L_\lambda$。那么函子 $\mathcal{F}_M^{TL}\colon \mathcal{ATL}(-2) \longrightarrow \mathcal{T}_M(V)$ 通过 $\mathcal{TLB}(-2,\lambda)$分解，也就是说，存在唯一的函子 $\mathcal{F}_\lambda^{TLB}\colon \mathcal{TLB}(-2,\lambda) \longrightarrow \mathcal{T}_M(V)$，使得下图交换，

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{ATL}(-2) & \xrightarrow{\mathcal{F}_M^{TL}} & \mathcal{T}_M(V) \\ \downarrow & \nearrow_{\mathcal{F}_\lambda^{TLB}} & \\ \mathcal{TLB}(-2,\lambda), & & \end{array}$$

其中垂直函子是商函子（见定义 2.16）。

证明。我们有 $\mathcal{F}_M^{TL}(Z_2) = 2C\colon M \longrightarrow M$，其中 $C$是式 (5.15) 中给出的二次 Casimir 元，它在 $M = M_\lambda$ 上的作用，因此也在 $L_\lambda$ 上的作用，都是乘以标量$\chi_\lambda(C) = -\lambda(\lambda+2)$。因此对于 $\delta = -2$,

$$\mathcal{F}_M^{TL}\left(\frac{Z_2}{\delta}\right) = \lambda(\lambda+2) = -\lambda\left(\frac{\delta-2}{2} - \lambda\right).$$

这表明 $\mathcal{F}_M^{TL}$可经由 $\mathcal{TLB}(-2,\lambda)$ 分解。 □

记 $\mathbb{Z}_{<-1} = \{-2,-3,-4,\dots\}$。对于任意给定的 $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}_{<-1}$，Verma 模 $M_\lambda$ 在范畴 $\mathcal{O}$ 中是投射的，其中 $\mathfrak{sp}_2$。

下一个定理是我们所讨论情形下 [15, Thm. 4.9] 的一个类比。

定理 6.3. 保持上述记号，并设 $M_\lambda$ 是 $\mathfrak{sp}_2$ 的 Verma 模，其最高权为 $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}_{<-1}$。那么函子 $\mathcal{F}_\lambda^{TLB}\colon \mathcal{TLB}(-2,\lambda) \longrightarrow \mathcal{T}_{M_\lambda}(V)$ 是一个范畴同构。

证明. 显然， $\mathcal{F}_\lambda^{TLB}$ 在对象上的限制是一个同构。由于带有 $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}_{<-1}$ 的 $M_\lambda$ 在范畴 $\mathcal{O}$ 中是投射的，我们有

$$\begin{aligned}\dim \mathrm{Hom}_{\mathfrak{sp}_2}(M_\lambda \otimes V^{\otimes r}, M_\lambda \otimes V^{\otimes s}) &\cong \dim \mathrm{Hom}_{\mathfrak{sp}_2}(M_\lambda, M_\lambda \otimes V^{\otimes(r+s)}) \\ &\cong \dim (V^{\otimes(r+s)})_0, \quad \forall r,s,\end{aligned}$$

其中，$(V^{\otimes(r+s)})_0$ 是 $V^{\otimes\,(r+s)}$ 的零权子空间；当$r+s=2N$为偶数时，其维数为 $\binom{2N}{N}$，否则为 0。由定理 2.2 可知，对于所有的 $r,s$,

$$\dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{TLB}(-2,\lambda)}(r,s) = \dim \mathrm{Hom}_{\mathfrak{sp}_2}(M_\lambda \otimes V^{\otimes r}, M_\lambda \otimes V^{\otimes s}).$$

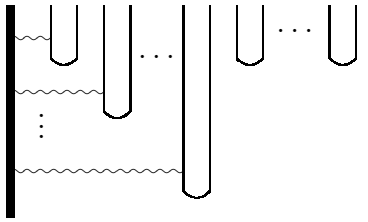
因此，只需证明 $\mathcal{F}_\lambda^{TLB}$在态射上的限制是单射。只需证明 $r+s=2N$ 的情形，我们将把 [15] 中处理 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ 表示时的主要思路改用于当前情形。

对所有 $r$，记 $\mathcal{W}(r,2N-r) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{TLB}\,(-2,\,\lambda)}(r,2N-r)$，并记 $\mathcal{W}(2N) = \mathcal{W}(0,2N)$。令 $E_{2N}^0$为 $\mathcal{W}(2N,2N)$的子代数，它由不含连接子的图表张成，并且同构于 Temperley-Lieb 代数 $TL_{2N}(-2)$。注意，$\mathcal{F}_\lambda^{TLB}(E_{2N}^0) = \mathcal{F}(E_{2N}^0) \cong E_{2N}^0$ 作为代数相同。此外， $\mathcal{W}(2N)$ 是该代数的一个模。我们要证明，作为 $TL_{2N}(-2)$-模， $\mathcal{F}_\lambda^{TLB}(\mathcal{W}(2N)) \cong \mathcal{W}(2N)$。

考虑图 21 所示的标准仿射坦普利-利布图的像，称之为类型为$B$的标准仿射坦普利-利布图。它们构成 $\mathcal{W}(2N)$ 的一组基。与定理 2.2 的证明中的情形一样，至多有 $i \le N$ 个连接器的标准 $(0,2N)$-图张成 $\mathcal{W}(2N)$ 的一个 $TL_{2N}(-2)$-子模 $F_i\mathcal{W}(2N)$，而 $\mathcal{W}_{2i}(2N) = {}^{F_i\mathcal{W}}{}_{(2N)}\,{}_{F_{i-1}\mathcal{W}}{}_{(2N)}$ 是一个简单的 $TL_{2N}(-2)$-模。因此，$\mathcal{F}_\lambda^{TLB}(\mathcal{W}_{2i}(2N)) = {}^{\mathcal{F}_\lambda^{TLB}}{}_{(F_i\mathcal{W}(2N))}\,\underline{\mathcal{F}_\lambda^{TLB}(F_{i-1}\mathcal{W}(2N))} \cong \mathcal{W}_{2i}(2N)$ 或为 0。我们证明对所有 $i$，它都非零。

设 $\mathbb{D}_t$ 为下图所示的带有 $t$ 个连接器的标准 $(0, 2N)$-图。

$\mathbb{D}_t$ =



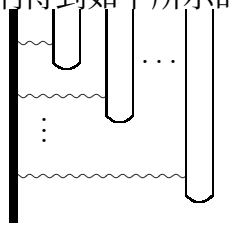
.

那么， $\mathbb{D}_t$属于 $F_t\mathcal{W}(2N)$，但不属于 $F_{t-1}\mathcal{W}(2N)$。在 $\mathbb{I}_{2t}\otimes\underbrace{\cap\cdots\cap}_{N-t}$右乘 $\mathbb{D}_t$后，

w

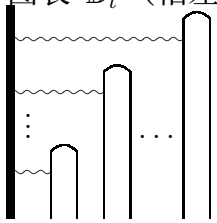
~我们得到如下所示的标准 $(0, 2t)$-图表 $\mathbb{D}_t$ （相差一个标量因子） .

$\widetilde{\mathbb{D}}_t$ =



;

$\widetilde{\mathbb{D}}_t^*$ =



.

~现在用 $(0, 4t)$-图表左乘张量积 $\mathbb{D}_t \otimes I_{2t}$

$\mathbb{A}_{4t}$ =




.

~本质上可得到上方所示的 $(2t, 0)$-图表 $\mathbb{D}_t^*$ （相差一个非零标量）。记 $m_+$ 为 $M_\lambda$ 的最高权向量。容易证明

$$\mathcal{F}_\lambda^{TLB}(\widetilde{\mathbb{D}}_t^*)(m_+ \otimes \underbrace{v_{-1} \otimes \ldots \otimes v_{-1}}_{2t}) = (-2Y)^t m_+ \neq 0. \tag{6.1}$$

设 $\mathbb{D}_{<t}$ 是 $F_{t-1}\mathcal{W}(2N)$中的一个元素。我们对 $\mathbb{D}_{<t}$执行与上面相同的操作~，得到一个元素 $\mathbb{D}_{<t}^* \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{TLB}(-2,\lambda)}(2t, 0)$，它可以表示为不超过 $t-1$ 个连接器的 $(2t, 0)$-图表的线性组合。因此， $\mathbb{D}_{<t}^*$ 中每个系数非零的 $(2t, 0)$-图表都必须含有一个形如 $\{\cap\}$ 的分支，该分支未通过连接器与极相连。注意，对所有$i+j = 2t-2$，我们有 $\mathrm{id}_{M_\lambda} \otimes \mathrm{id}_V^{\otimes i} \otimes \mathcal{F}(\cap) \otimes \mathrm{id}_V^{\otimes j}(m_+ \otimes \underbrace{v_{-1} \otimes \cdots \otimes v_{-1}}_{2t}) = 0$，因为

$\omega(v_{-1}, v_{-1}) = 0$。因此

$$\mathcal{F}_\lambda^{TLB}(\widetilde{\mathbb{D}}_{<t}^*)(m_+ \otimes \underbrace{v_{-1} \otimes \ldots \otimes v_{-1}}_{2t}) = 0. \tag{6.2}$$

比较上面的两个方程，我们得出对所有 $t$， $\mathcal{F}_\lambda^{TLB}(\mathcal{W}_{2t}(2N)) \neq 0$，因此根据胞腔理论， [11], $\mathcal{F}_\lambda^{TLB}(\mathcal{W}_{2t}(2N)) \cong \mathcal{W}_{2t}(2N)$。这表明将 $\mathcal{F}_\lambda^{TLB}$ 限制在态射上时是单射的，从而完成了定理的证明。□

## 7. 评论与展望

我们指出了进一步研究的方向，并进一步评论本文与其他工作的关系。

7.1. 与其他工作的关系。

7.1.1. 关于其他工作的评论。与 [28, 1], 中的范畴不同（这两个范畴都是幺半范畴），我们的范畴 $\mathcal{AB}(\delta)$ 的设计目标仅是允许与通常的 Brauer 范畴$\mathcal{B}(\delta)$ 相伴的张量积函子 $\otimes\colon \mathcal{AB}(\delta) \times \mathcal{B}(\delta) \longrightarrow \mathcal{AB}(\delta)$，而不赋予自然的幺半结构。原因在于，我们希望利用 $\mathcal{AB}(\delta)$ 来研究 $\mathfrak{g}$-模范畴 $\mathcal{T}_M(V)$，其对象为 $M \otimes V^{\otimes r}$；它与模的范畴$\mathcal{T}(V)$ 之间只有自然的张量积 $\otimes\colon \mathcal{T}_M(V) \times \mathcal{T}(V) \longrightarrow \mathcal{T}_M(V)$。我们不允许使用会将极闭合成环的杯和帽，因为 $M$ 可能是无限维的。

为了将我们的范畴与 [28], 的范畴进行比较，我们考察相应的自同态代数。[28]中该范畴的自同态代数是在不同次数下的 Nazarov–Wenzl 代数，其定义见 [8, 定义 2.1] ，具有生成元和关系（$VW.1$）–（$VW.8$）；其中涉及一族无限的任意参数 $w_k$，适用于所有非负整数 $k$，参见 [8,定义 2.1]中的（$VW.3$）和（$VW.4$）。

考察所讨论代数的结构后，我们认为应考虑如下定义的 $\mathrm{Hom}^{\mathcal{AB}(\delta)}(r,r)$ 的商代数。给定任意标量$z_{2\ell}$（其中 $\ell = 0$ = 1, 2, . . .），令 $\mathfrak{M}_z$ 为 $\mathrm{Hom}^{\mathcal{AB}(\delta)}(0,0)$ 中由所有 $\ell$对应的 $Z_{2\ell} - z_{2\ell}$ 生成的极大理想。于是 $\mathrm{Hom}^{\mathcal{AB}(\delta)}(0,0)/\mathfrak{M}_z \cong K$，因为所有 $Z_{2\ell}$ 均代数无关，而且所有 $Z_{2j+1}$ ($Z_1 = 0$)都可以表示为元素$Z_{2\ell}$的多项式，如定理 2.12 所示。记 $z_{2\ell+1}$ 为所有 $\ell$对应的 $Z_{2\ell+1}$ 的像。于是特别地，我们有 $z_1 = 0$。

利用定理 3.3 中对 $\mathrm{Hom}^{\mathcal{AB}(\delta)}(r,r)$ 的描述，可立即得到以下事实。

定理 7.1. 给定任意满足 $z_0 = \delta$ 的标量 $z_{2\ell} \in \mathbb{C}$ （对应 $\ell \geq 0$），并令 $z_{2\ell+1} \in \mathbb{C}$ 如上定义。存在一个代数同态，将 $\mathrm{Hom}^{\mathcal{AB}(\delta)}(r,r)/\mathfrak{M}_z \otimes I_r$ 映到次数为 $r$ 的 Nazarov–Wenzl 代数（采用 [8, 定义 2.1] 中的记号），其参数为 $w_0 = \delta$ 和 $w_k = \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} \left(\frac{1-\delta}{2}\right)^i z_i$（对应 $k \geq 1$），定义如下：

$$\iota(s_i) \mapsto s_i, \quad \iota(e_i) \mapsto e_i, \quad \Theta_i + \frac{1-\delta}{2}\mathbb{I}_r \mapsto y_i. \tag{7.1}$$

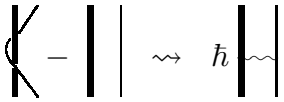
这表明， [28] 的仿射 Brauer 范畴是 $\mathcal{AB}(\delta)$ 的一个商。

[1] 中的仿射 VW 超范畴是为研究 $\mathcal{T}_M(V)$ 而构造的，所针对的是 periplectic 李超代数 $\mathfrak{p}(n)$。仿射 VW 超范畴中的杯与帽（对应于我们的 $\mathcal{AB}(\delta)$ 中的 $\cup$ 和 $\cap$ ）旨在体现自然模 $V$ 上的奇非退化双线性型。这使得该超范畴从根本上不同于 $\mathcal{AB}(\delta)$。

不过，考察可见，仿射 VW 超范畴的自同态代数与 $\mathcal{AB}(\delta)$ 在 $\delta = 0$ 处的自同态代数具有相似的整体特征，只是定义关系中的符号有所不同。沿着 [1] 继续研究，构造一种先验的带点 Brauer 图的仿射 VW 范畴，使之适用于研究 $\mathfrak{osp}_{m|2n}$ (ℂ) 模，将会很有意义。届时一个重要的问题是：它是否等价于本文引入的范畴。

量子与经典。从启发式角度看， [15] 可视为本工作的量子版本。本文研究的图示仿射 Brauer 范畴可能是

被视为极化 BMW 范畴 [15] 的“半经典极限”。我们将极化辫图中细弦的上交叉与下交叉视为相同，并将以下关系左侧的极化辫图组合替换为



通过右侧仿射 Brauer 图的组合。因此，仿射 Brauer 图 $\rightsquigarrow$ 是发展我们的图示仿射 Brauer 范畴所需的新要素，可视为上述关系左侧乘以 $\frac{1}{\hbar}$ 后的 $\hbar \to 0$ 极限。正是这类启发促使我们开展本文的研究。我们指出，类似的启发也出现在 [1, §5] 中。

7.2. **Out**展望。本研究指出了若干值得进一步探索的方向 .

有向仿射 Brauer 范畴。回顾 [27, §4] 中的有向 Brauer 范畴$\mathcal{OB}(\delta)$，它是研究一般线性超代数 $\mathfrak{gl}(V)$ 的表示所需的自然图示范畴，其类型为 $V^{\otimes(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_r)} := V^{\varepsilon_1} \otimes V^{\varepsilon_r} \otimes \ldots \otimes V^{\varepsilon_r}$，对所有 $r \in \mathbb{N}$ 均成立，其中 $\varepsilon_i = \pm$， $V^+ = V$ 是自然模，而 $V^- = V^*$ 是对偶模。

$\mathcal{OB}(\delta)$的对象是形如（$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_r$）的序列，其中 $r \in \mathbb{N}$满足 $\varepsilon_i = \pm$；态射由有向 Brauer 图张成，也就是说，由带方向弦的 Brauer 图张成。一个有向 Brauer（$k, \ell$）图属于 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{OB}(\delta)}(s(\Gamma)\ t(\Gamma))$，其中 $s(\Gamma) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_k)$，目标为 $t(\Gamma) = (\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, ..., \varepsilon'_\ell)$；若对每个 $p = 1, \ldots, k$，第 $p$个底部顶点是某条弦的端点，且当 $\varepsilon_p = +$（分别为 $\varepsilon_p = -$）时，箭头朝外（分别朝内）；并且对每个 $q = 1, \ldots, \ell$，第 $q$个顶部顶点是某条弦的端点，且当 $\varepsilon'_q = +$（分别为 $\varepsilon'_q = -$）时，箭头朝内（分别朝外）。态射的复合保持方向。

根据图 26，在 $\mathcal{OB}(\delta)$ 中定义定向的 $H$-图表。

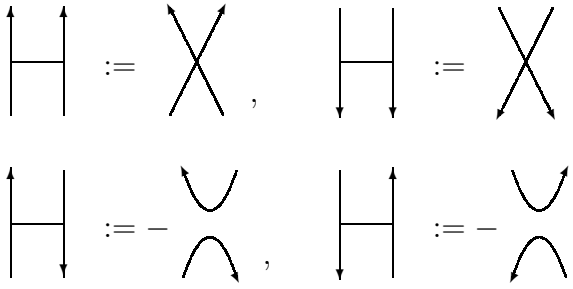


FIGURE 26. 定向 $H$-图表

图示仿射 Brauer 范畴$\mathcal{AB}(\delta)$有一个自然的有向版本。为了构造这样的范畴，我们引入 $\mathbb{H}$的两个有向类比，如图 27 所示。然后，我们可以像图 4 那样，用有向 Brauer 图和有向 $\mathbb{H}$-图来构造有向仿射 Brauer 图，它们满足

i) 定向四项关系，以及 ii) 定向 $\mathbb{H}$ 图表的斜对称性。

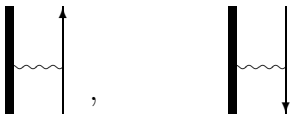


FIGURE 27. 定向 $\mathbb{H}$-图

定向四项关系涉及 $\mathbb{H}_{12}$ 的定向类似物，即将一个极与图 26 所示的任意定向 $H$ 图表并置。定向 $\mathbb{H}$ 图表的斜对称性如图 28 所示。请注意，图 26 中的定向$H$图表也具有类似的斜对称性。



FIGURE 28. 定向 $\mathbb{H}$-图的斜对称性

现在，定向图示仿射 Brauer 范畴 $\mathcal{OAB}(\delta)$ 与 $\mathcal{OB}(\delta)$ 具有相同的对象，其态射是定向仿射 Brauer 图的线性组合。

存在一个从 $\mathcal{OAB}(\mathrm{sdim}\,(V))$ 到 $\mathfrak{gl}(V)$-模范畴的函子，其对象为 $M\otimes V^{\otimes(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_r)}$，其中 $M$ 是任意但固定的 $\mathfrak{gl}(V)$-模。特别地，文献 [29] 的工作可以纳入这一框架。对于文献 [29] 研究的任意一类特殊典型 Kac 模 $M$（它们是有限维 $\mathfrak{gl}(V)$-模范畴中的投射对象），该函子是满的。

增强仿射 Brauer 范畴。正如我们在注 4.5 中指出的，虽然 Brauer 范畴使我们能够描述正交辛超群 $\mathrm{OSp}(V;\omega)$ 的自然模 $V$ 的张量幂之间的所有态射，但它并不能给出自然模的张量幂之间所有的 $\mathfrak{osp}(V;\omega)$ 态射。即使对于正交李代数 $\mathfrak{so}_m(\mathbb{C})$，这一问题也存在。我们通过在文献 [24], 中引入增强 Brauer 范畴，解决了 $\mathfrak{so}_m(\mathbb{C})$ 情形下的这一问题；该范畴存在一个满函子，映到以 $(\mathbb{C}^m)^{\otimes r}$（对所有 $r\in\mathbb{N}$）为对象的 $\mathfrak{so}_m(\mathbb{C})$-模全子范畴。

按照第 2 节的步骤，将通常的布劳尔图替换为 [24] 的增强 Brauer 图，即可直接构造出增强仿射 Brauer 范畴。这样的范畴将使我们能够解决备注 4.6 中讨论的 $\mathfrak{so}_m$ 情形下的问题，也就是说，该范畴可以计数映射 $\mathrm{id}_M\otimes\det:$ $M\longrightarrow M\otimes(\mathbb{C}^m)^{\otimes m}\mathrm{with}\ \ \mathbb{C}\det(1)\ =\wedge^m(C^m)$。一旦针对一般的 $\mathfrak{osp}$ 情形开发出类似于 [24] 的“增强 Brauer 范畴”，也可以构造出这样的范畴。

## APPENDIX A. BASICS OF THE LIE SUPERALGEBRA $\mathfrak{osp}(V;\omega)$

我们沿用第 4.1.2 节中的记号。特别地，$V=\mathbb{C}^{m|2n}$ 配备了一个偶且超对称的非退化双线性型 $\omega$，并记作 $\mathfrak{g}=\mathfrak{osp}(V;\omega)$。

我们给出（4.16）的完整证明。当 $\mathrm{sdim}\,(V)\neq 0$ 时，公式（4.16）可以使用第 4.2 节中的表示理论论证加以证明。然而，

当 sdim $(V) = 0$ 时，证明会更加困难；最高效的方法是利用 $V$ 和 $\mathfrak{g}$ 的适当基进行显式计算。

我们还自成体系地介绍了 U(g) 的二次 Casimir 元，并得到了中心元的显式公式，这些中心元基本上生成了中心。

**A.1.** $\mathfrak{osp}(V;\omega)$ 的张量记号。取 $V$ 的标准基 $\{e^a \mid 1 \leq a \leq m+2n\}$，其中该基是齐次的，且对于所有 $i \leq m$， $e^i$ 均为偶，而对于所有 $j \geq 1$， $e^{m+j}$ 均为奇。我们用 $[v] = 0, 1$ 表示齐次元素 $v \in V$ 的 $\mathbb{Z}_2$ 次数，并为简化记号，对所有 $a$ 均记作 $[a] = [e^a]$。

形式 $\omega$ 可由关于 $V$ 的标准基 $\{e^a \mid a = 1, 2, \ldots, m+2n\}$ 的可逆矩阵 $g^{-1} = (g^{ab})$ 表示，其中对于所有 $a$、$b$，均有 $g^{ab} = \omega(e^a, e^b)$。我们记作 $g = (g_{ab})$。注意， $g$ 具有以下对称性质：当且仅当 $[a] = [b]$ 时， $g_{ab} \neq 0$，且 $g_{ab} = (-1)^{[a]} g_{ba} = (-1)^{[b]} g_{ba}$。元素 $e_b = \sum_c g_{bc} e_c$ 满足

$$\omega(e_b, e^a) = \sum_c g_{bc}\omega(e^c, e^a) = \sum_c g_{bc} g^{ca} = \delta_b^a,$$

其中 $\delta_b^a$ 是通常的克罗内克 δ，当 $a = b$ 时其值为 1，否则为 0。因此，$\{e_a \mid a = 1, 2, \ldots, m+2n\}$ 是与标准基对偶的 $V$的一组基。我们有 $e^a = \sum_b g^{ab} e_b$。特别注意，(4.12) 中的元素 $j^{-1}(\mathrm{id}_V)$ 可表示为 $j^{-1}(\mathrm{id}_V) = \sum_{a=1}^{m+2n} e^a \otimes e_a$。

令 $E_b^a \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$（其中 $a, b = 1, 2, \ldots, m+2n$）为相对于标准基定义的矩阵单位，即 $E_b^a(e^c) = \delta_b^c e^a$。令 $E_{ab} = \sum_c g_{ac} E_b^c$，则$E_{ab}(e^c) = e_a \delta_b^c$。引入 $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ 中的以下元素，

$$J_{ab} = E_{ab} - (-1)^{[a][b]} E_{ba}, \quad a, b = 1, 2, \ldots, m+2n, \tag{A.1}$$

显然，其中 $J_{ab} = -(-1)^{[a][b]} J_{ba}$。我们还令

$$J_b^a := \sum_{a'} g^{aa'} J_{a'b} = E_b^a - (-1)^{[a][b]} \sum_{b', a'} g^{aa'} g_{bb'} E_{a'}^{b'}.$$

元素 $J_{ab}$ 满足以下对易关系 [17, 31]

$$\begin{aligned}[J_{ab}, J_{cd}] = {} & g_{cb} J_{ad} + (-1)^{[a]([b]+[c])} g_{da} J_{bc} \\ & - (-1)^{[c][d]} g_{db} J_{ac} - (-1)^{[a][b]} g_{ca} J_{bd},\end{aligned} \tag{A.2}$$

其中 $[X, Y] = XY - (-1)^{[X][Y]} YX$ 是 $\mathbb{Z}_2$-分次对易子的 $X, Y$。它们张成正交辛李超代数 $\mathfrak{g}$。显然， $J_{ij}$, $J_{i,m+k}$ 和 $J_{m+k,m+\ell}$ 与 $1 \leq i < j \leq m$, $1 \leq k \leq \ell \leq 2n$ 线性无关，因此 $\dim(\mathfrak{g}) = \frac{1}{2}m(m-1) + \frac{1}{2}2n(2n+1) + 2mn$。

下面验证双线性型 $\omega$ 确实关于该李超代数不变。注意

$$J_{ab}(e^c) = e_a \delta_b^c - (-1)^{[a][b]} e_b \delta_a^c. \tag{A.3}$$

利用这一关系，我们得到

$$\begin{aligned}\omega(J_{ab}(e^c), e^d) &= \delta_a^d \delta_b^c - (-1)^{[a][b]} \delta_b^d \delta_a^c, \\ \omega(e^c, J_{ab}(e^d)) &= -(-1)^{([a]+[b])[c]} \left(\delta_a^d \delta_b^c - (-1)^{[a][b]} \delta_b^d \delta_a^c\right),\end{aligned}$$

这立即导致了

$$\omega(J_{ab}(e^c), e^d) + (-1)^{([a]+[b])[c]} \omega(e^c, J_{ab}(e^d)) = 0, \quad \forall a, b, c, d.$$

这证明了 $\omega$ 关于由元素 $J_{ab}$张成的李超代数的不变性。

A.2. 引理 4.3 的证明。记 $X_{ab}$（分别为 $X_b^a$）为 $J_{ab}$（分别为 $J_b^a$）在典范嵌入 $\mathfrak{g} \hookrightarrow \mathrm{U}(\mathfrak{g})$ 下映入 $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ 的像。现在我们使用“张量缩并”写出 $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ 的二次 Casimir 元,

$$C = \frac{1}{2} \sum_{a,b=1}^{m+2n} (-1)^{[b]} X_b^a X_a^b, \tag{A.4}$$

其中归一化因子 $_{1\ 2}$ 的选取是为了使定理 A.1 成立。

注 A.1. 当 $\mathfrak{sp}_2 = \mathfrak{sl}_2$ 为 $-2$ 时，Casimir 算子 (A.4) 是 $\mathfrak{sl}_2$ 的标准 Casimir 算子的 $-2$ 倍，见例 5.3。

Now 温和Casimir元 $t = \frac{1}{2}(\Delta(C) - C \otimes 1 - 1 \otimes C)$ 等于

$$t = \frac{1}{2} \sum_{a,b=1}^{m+2n} X_b^a \otimes (-1)^{[b]} X_a^b. \tag{A.5}$$

引理 A.1. 我们有如下公式。

$$(\mathrm{id}_{\mathrm{U}} \otimes \mu)(t) \quad = \quad \sum_{a,b} X_b^a \otimes (-1)^{[b]} E_a^b. \tag{A.6}$$

*Proof.* 利用 $\mu(X_b^a) = J_b^a$和 $X_a^b = \sum_c g^{bc} X_{cb}$，我们可以将 $2(\mathrm{id}_{\mathrm{U}} \otimes \mu)(t)$ 表示为

$$\begin{aligned} 2(\mathrm{id}_{\mathrm{U}} \otimes \mu)(t) = & \sum_{a,b} X_a^b \otimes (-1)^{[a]} E_b^a \\ & - \sum_{a,b,c} g^{bc} X_{ca} \otimes (-1)^{[a][b]} \sum_{b',a'} g^{aa'} g_{bb'} E_{a'}^{b'}. \end{aligned}$$

注意，第一项等于 (A.6) 的右端，因此我们要证明第二项也相同。利用 $g$ 的对称性，可以将第二项改写为

$$-\sum_{a,b,c} X_{ca} \otimes (-1)^{[a][c]+[a]+[c]} g^{ab} E_b^c = -\sum_{a,b,c} g^{ba} (-1)^{[a][c]} X_{ca} \otimes (-1)^{[c]} E_b^c.$$

利用 $X_{ca} = -(-1)^{[a][c]} X_{ac}$，我们可以将上述恒等式的右端改写为

$$\sum_{a,b,c} g^{ba} X_{ac} \otimes (-1)^{[c]} E_b^c = \sum_{b,c} X_c^b \otimes (-1)^{[c]} E_b^c,$$

这等于 (A.6) 的右端。证明至此完成。 □

下面的结果是关键引理（即引理 4.3），它在本文正文中起着至关重要的作用。

定理 A.1。 $t$ 在 $V \otimes V$ 上的作用由下式给出。

$$(\mu \otimes \mu)(t) = \frac{1}{2} \sum_{a,b} J_b^a \otimes (-1)^{[b]} J_a^b = \tau - e. \tag{A.7}$$

证明。利用（A.1）将 $J$ 表示为 $E$，由（A.6）得

$$(\mu\otimes\mu)(t)=\frac{1}{2}\sum_{a,b}J_b^a\otimes(-1)^{[b]}J_a^b=\sum_{a,b}J_b^a\otimes(-1)^{[b]}E_a^b=T_1-T_2,$$

其中

$$T_1=\sum(-1)^{[b]}E_b^a\otimes E_a^b,$$
$$T_2=\sum(-1)^{[b]}(-1)^{[a]([a]+[b])}g_{bb''}E_{a''}^{b''}g^{a''a}\otimes E_a^b.$$

显然，$T_1=\tau$。对于任意 $e^c\otimes e^d$，经过冗长的手算可得

$$T_2(e^c\otimes e^d)=g^{cd}\check{c}(1)=\check{c}\circ\hat{c}(e^c\otimes e^d),$$

也就是说，$T_2=e$。证明至此完成。 □

让我们计算 $C$ 在 $V$ 中的特征值。

引理 A.2. $C$ 在 $V$ 中的特征值等于

$$\chi_V(C)=\mathrm{sdim}\,(V)-1. \tag{A.8}$$

证明。我们有 $\chi_V(C)\mathrm{id}_V=\frac{1}{2}\sum_{a,\ b}J_b^a(-1)^{[b]}J_a^b=\sum_{a,\ b}J_b^a(-1)^{[b]}E_a^b$. 将 $J$ 表示为 $E$ 的形式，可得 $\chi_V(C)\mathrm{id}_V=Q_1-Q_2$，其中

$$Q_1=\sum(-1)^{[b]}E_b^aE_a^b,$$
$$Q_2=\sum(-1)^{[b]}(-1)^{[a]([a]+[b])}g_{bb''}E_{a''}^{b''}g^{a''a}E_a^b.$$

利用 $g$ 的性质并仔细追踪符号因子，可以证明 $Q_1=\mathrm{sdim}\,(V)\mathrm{id}_V$ 且 $Q_2=\mathrm{id}_V$。这立即导出 (A.8)。□

A.3. $\mathrm{U}(\mathfrak{osp}(V;\omega))$ 中心元的公式。令 $T[1]_b^a=X_b^a$，并递归地为 $k>1$ 定义$T[k]_b^a$：

$$T[k]_b^a=\sum_c(-1)^{[c]}X_b^cT[k-1]_c^a.$$

利用 (A.6)，我们容易得到以下公式。

$$(\mathrm{id}_{\mathrm{U}}\otimes\mu)(t^k)\ =\ \sum_{a,b}T[k]_b^a\otimes(-1)^{[b]}E_a^b. \tag{A.9}$$

回顾由 (2.8) 定义的、当 $\ell\geq1$ 时的元素 $Z_\ell\in\mathrm{Hom}^{\mathcal{AB}(\delta)}(0,0)$。已知 $Z_1=0$。将 $\mathcal{F}_{\mathrm{U}}$ 应用于这些元素，并利用 (A.9)，可得 $\mathcal{F}_{\mathrm{U}}(Z_\ell)=\sum_cT[\ell]_c^c$，它可以表示为

$$\mathcal{F}_{\mathrm{U}}(Z_\ell)=\sum_{a_1,\dots,a_{\ell-1},b=1}^{m+2n}(-1)^{\sum_{i=1}^{\ell-1}[a_i]}X_b^{a_1}X_{a_1}^{a_2}X_{a_2}^{a_3}\dots X_{a_{\ell-1}}^b. \tag{A.10}$$

定理 5.1 表明，这些元素都是中心元；并且当 $\mathrm{sdim}\,(V)$ 为奇数时，它们生成 $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ 的中心 $Z(\mathrm{U}(\mathfrak{g}))$。

致谢。感谢 Tony Bracken、Mark Gould 和 Yang Zhang 通过 Zoom 进行讨论并通过电子邮件通信，也感谢 Catherina Stroppel 参与讨论。

## References

[1] Balagovic, M.; Daugherty, Z.; Entova–Aizenbud, I.; Halacheva, I.; Hennig, J.; Im, M. S.; Letzter, G.; Norton, E.; Serganova, V.; Stroppel, C.《仿射 VW 超范畴》。1, 1.3, 7.1.1, 7.1.1, 7.1.1[2] Bincer, Adam, 《李群与李代数——物理学家的视角》。牛津大学出版社, 牛津, 插图版, 2012。5.1[3] Bracken, A. J.; 重子三局域模型中的群论应用。阿德莱德大学博士论文, 1970。1.1, 1.2.3, 5, 5.2, 5.2.1[4] Bracken, A. J.; Green, H. S.《SO(n) 的向量算子与一个多项式恒等式》。J. Mathematical Phys. 12 (1971), 2099–2106。1.1, 1.2.3, 5, 5.2, 5.2.1[5] Richard Brauer, 《关于与半单连续群相关的代数》, Ann. of Math. (2) 38 (1937), no. 4, 857–872。1[6] Deligne, P.; Lehrer, G. I.; Zhang, R. B.《正交辛超群的不变量理论第一基本定理》, Adv. Math. 327 (2018), 4–24。4.3, 5.1[7] Deligne, Pierre; Morgan, John W.《超对称性笔记（承 Joseph Bernstein 讲授）》。数学家课程：量子场与弦, 卷 1、2（美国新泽西州普林斯顿, 1996/1997）, 41–97, 美国数学学会, 普罗维登斯, 罗德岛州, 1999。4.1.2[8] Ehrig, Michael; Stroppel, Catharina, 《Nazarov–Wenzl 代数、余理想子代数与范畴化的斜 Howe 对偶》。Adv. Math. 331 (2018) 58–142。1.3, 3.2, 7.1.1, 7.1[9] Gould, M. D.《半单李代数的特征恒等式》。J. Austral. Math. Soc. Ser. B 26 (1985), no. 3, 257–283。1.1, 5.2.1, 5.2.2, 5.2.2, 5.2.3[10] Gould, M. D.; Zhang, R. B.; Bracken, A. J.《量子群的广义 Gel'fand 不变量与特征恒等式》。J. Math. Phys. 32 (1991) 2298–2303。5, 5.2.3[11] Graham, J. J. and Lehrer, G. I., 《胞腔代数》, Invent. Math. 123 (1996), no. 1, 1–34。6[12] Graham, J. J. and Lehrer, G. I., 《仿射 Temperley-Lieb 代数的表示论》, Enseign. Math. (2) 44 ( 1998), no. 3-4, 173–218。1.3[13] Graham, J. J. and Lehrer, G. I., 《根单位处的图代数、Hecke 代数与分解数》, Ann. Sci. ´Ecole Norm. Sup. (4) 36 (2003), no. 4, 479–524。1.1, 2.7[14] Green, H. S.《GL(n)、O(n) 和 SP(n) 生成元的特征恒等式》。J. Mathematical Phys. 12 (1971), 2106–2113。1.1, 1.2.3, 5, 5.2, 5.2.1[15] Iohara, K.; Lehrer, G. I.; Zhang, R. B.《扭结范畴与无限维 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$-模范畴的等价性》。Represent. Theory 25 (2021), 265–299。1, 1.1, 1.2.2, 1.3, 2.7, 2.7, 5.2.3, 6, 6, 7.1.1[16] Phillip S Isaac1, Jason L Werry and Mark D Gould, 《李（超）代数的特征恒等式》。J. Phys.: Conf. Ser. 597 (2015) 012045。1.2.3, 5.2[17] Jarvis, P. D.; Green, H. S.《一般线性、特殊线性与正交辛分次李代数生成元的 Casimir 不变量和特征恒等式》。J. Math. Phys. 20 (1979), no. 10, 2115–2122。5.2.3, A.1[18] Kassel, Christian, 《量子群》。数学研究生文本, 155。Springer-Verlag, 纽约, 1995。1, 3[19] Lehrer, G. I.; Zhang, R. B.《李代数与量子群的强无重模块》。J. Algebra 306 (2006), no. 1, 138–174。1, 1.1, 1.3, 3, 3.1, 3.2, 4.1.1, 4.1, 4.1.1[20] Lehrer, G. I.; Zhang, R. B., 《BMW 代数的 Temperley-Lieb 类比》, 代数群与量子群的表示论, 155–190, 数学进展, 284, Birkh¨auser/Springer, 纽约, 2010。1[21] Lehrer, G. I.; Zhang, R. B., 《正交群的不变量理论第二基本定理》。Ann. of Math. (2) 176 (2012), no. 3, 2031–2054。1[22] Lehrer, G. I.; Zhang, R. B.《Brauer 范畴与不变量理论》, J. Europ. Math. Soc. 17 (2015) 2311–2351。1, 1.1, 2.1, 2.1, 4.2[23] Lehrer, G. I.; Zhang, R. B.《正交辛超群的不变量理论第一基本定理》。Comm. Math. Phys. 349 (2017), no. 2, 661–702。1, 1.2.1, 4.2, 4.2, 4.3, 1, 5.1

[24] Lehrer, Gustav I.; Zhang, Ruibin《特殊正交群的不变量与扩展的 Brauer 范畴》。Enseign. Math. 63（2017），第 1–2 期，181–200。1, 2, 7.2[25] Lehrer, G. I.; Zhang, R. B.《正交辛李超代数的不变量与超 Pfaffian》。Math. Z. 286（2017），第 3–4 期，89–917。2, 5.1[26] Lehrer, G. I.; Zhang, R. B.《正交辛超群不变量理论的第二基本定理》。Nagoya Math. J. 242（2021），52–76。1[27] Lehrer, G. I.; Zhang, R. B.《经典群与超群的图范畴及不变量理论》。即将发表于《国际华人数学家大会论文集》，2019年6月，北京。1, 7.2[28] Rui, Hebing；Song, Linliang.《B、C、D 型的仿射 Brauer 范畴与抛物范畴 O》。Math. Z. 293（2019），第 1–2 期，503–550。1, 1.3, 7.1.1, 7.1.1[29] Rui, Hebing；Su, Yucai，《仿射墙 Brauer 代数与超 Schur–Weyl 对偶》。Adv. Math. 285（2015），28–71。7.2[30] Zhang, R. B.《量子一般线性超群的结构与表示》。Comm. Math. Phys. 195（1998），第 3 期，525–547。4.1.1, 4.3[31] Zhang, R. B.《量子 Kepler 问题的超空间类比中的正交辛李超代数》。Comm. Math. Phys. 280（2008），第 2 期，545–562。A.1[32] Zhang, R. B.; Gould, M. D.; Bracken, A. J.《量子群不变量与链多项式》，Commun. Math. Physics 37（1991）13–27。5.2.3[33] Zhang, Yang，《正交辛超群不变量理论的第二基本定理》。J. Algebra 501（2018），394–434。1

School of Mathematics and Statistics, University of Sydney, N.S.W. 2006, Australia电子邮箱地址：gustav.lehrer@sydney.edu.au，ruibin.zhang@sydney.edu.au