arXiv:2304.10198v1 [math.GR] 20 Apr 2023

正规子群超循环嵌入的新刻画*

Chenchen Cao宁波大学数学与统计学院，中华人民共和国浙江省宁波市，315211 电子邮箱：caochenchen@nbu.edu.cnZhenfeng Wu江南大学理学院，中华人民共和国江苏省无锡市，214122 电子邮箱：zhfwu@jiangnan.edu.cnChi Zhang†中国矿业大学数学系，中华人民共和国江苏省徐州市，221116 电子邮箱：zclqq32@cumt.edu.cn

摘要

如果群 G 的正规子群 E 满足以下条件之一：$E=1$ 或 $E\neq 1$，并且 G 中位于 E 以下的每个主因子都是循环的，则称其在 G 中超循环嵌入。本文给出正规子群超循环嵌入的一些新的刻画，并对这一领域近期的一些结果进行了推广和统一。

1 引言

本文中，所讨论的所有群都是有限的，并且我们始终用 G 表示有限群。$\mathbb{P}$ 是所有素数的集合，n 是一个整数。符号 $\pi(n)$ 表示整除 n 的所有素数的集合；特别地，$\pi(G)=\pi(|G|)$ 是整除 G 的阶 $|G|$ 的所有素数的集合。

*本研究得到中国国家自然科学基金（12101339，12001526）和江苏省自然科学基金（BK20210442，BK20200626）资助。

†通讯作者 关键词：有限群；超循环嵌入子群；模子群；弱 m-$\mathcal{H}$-可置换子群；超可解群 数学主题分类（2020）：20D10，20D15，20D20，20D35

为方便起见，我们首先介绍本文中经常使用的一些符号和术语。设 $\sigma = \{\sigma_i | i \in I\}$ 为 $\mathbb{P}$ 的一个划分，且 $\sigma(G) = \{\sigma_i | \sigma_i \cap \pi(G) \neq \emptyset\}$。$\Pi$ 是集合 σ 的一个非空子集，Π' 表示 $\sigma \backslash \Pi$。根据[1–3]，若 $|\sigma(G)| \leq 1$，则称 G 为 σ-主的。若整数 n 满足 $\pi(n) \subseteq \bigcup_{\sigma_i \in \Pi} \sigma_i$，则称其为一个 Π-数；若 $|H|$ 是一个 Π-数，则称 G 的子群 H 为 G 的一个 Π-子群。若群 G 的子群集合 $\mathcal{H}$ 满足：$\mathcal{H}$ 中每个非单位元都是某个 i 对应的 G 的 Hall σ_i-子群，且对于每个 $\sigma_i \in \sigma(G)$，$\mathcal{H}$ 恰好包含一个 Hall σ_i-子群，则称 $\mathcal{H}$ 为一个完全 Hall σ-集。若 G 拥有一个完全 Hall σ-集，则称 G 为 σ-满的；若对于所有 $\sigma_i \in \sigma(G)$，G 的每个子群都是一个 D_{σ_i}-群，则称其为一个 Sylow 型的 σ-满群。若存在一个子群链 $A = A_0 \leq A_1 \leq \cdots \leq A_n = G$，使得其中要么 A_{i-1} 在 A_i 中正规，要么对于所有 $i \in \{1, \cdots, n\}$，$A_i/(A_{i-1})_{A_i}$ 都是 σ-主的，则称 G 的子群 A 在 G 中是 σ-次正规的。

此外，如果群 H 是 G 的子群，则称其在 G [1] 中为 σ-可置换的，如果 G 拥有一个完备的 Hallσ-集 $\mathcal{H}$，使得对于所有 $A \in \mathcal{H}$ 和所有 $x \in G$，均有 $HA^x = A^xH$；如果 $H = \langle A$，且对于某个模子群（按照 Kurosh [5, 第 43] 页的定义） A 和 G 的某个 σ-可置换子群 B，则称其为 m-σ-可置换的 [4]；如果存在 G 的一个 σ-次正规子群 T，使得 $G = HT$，且对于 G 的某个 m-σ-可置换子群 S，有 $H \cap T \leq S \leq H$，则称其在 G [4] 中为弱 m-σ-可置换的；如果对于 G 的某个完备 Hall σ-集 $\mathcal{H}$ 和所有 $A \in \mathcal{H}$，均有 $HA = AH$，则称其为 $\mathcal{H}$-可置换的 [6]。

回顾一下，如果正规子群 E 是 G 的正规子群，则称其在 G 中超循环嵌入（见 [5, 第 217] 页），记作 $E \leq Z_{\mathfrak{U}}(G)$，当且仅当 $E = 1$ 或 $E \neq 1$，且 G 中位于 E 之下的每个主因子都是循环群。众所周知，超循环嵌入子群在有限群理论中发挥着重要作用（参见著作 [5,7–9]），而子群的置换性和模性对正规子群是否超循环嵌入具有重要影响（例如，参见 [5,10]）。基于这一思路，研究人员研究了子群的广义置换性和模性，并获得了一些有趣的结果，在这些结果所满足的条件下，正规子群是超循环嵌入的（参见近期论文 [1, 2, 4, 6, 11–15]）。特别地，M. T. Hussain 等人 [15] 最近证明了以下结果。

定理 1.1. 设 G 是一个 σ-满的 Sylow 型群，E 是 G 的一个正规子群，$\mathcal{H}$ 是 G 的一个完备 Hall σ-集，且 $\mathcal{H}$ 的每个成员都是超可解的。若对于所有 $\sigma_i \in \sigma(E)$，{11}的任意非循环 Hall σ_i-子群的每个素数阶循环子群 H以及阶为 4 的循环子群（若 E 的 Sylow 2-子群非阿贝尔且 $H \not\leq Z_\infty(G)$）在 G 中都是弱 m-σ-可置换的，则 $E \leq Z_{\mathfrak{U}}(G)$。

作为 σ-可置换子群的推广，Guo 等人[6] 提出了 $\mathcal{H}$-可置换子群的概念。沿着这一思路，我们能否结合 $\mathcal{H}$-可置换子群和弱 m-σ-可置换子群，将定理 1.1 推广到更一般的情形?

本文给出了弱 m-$\mathcal{H}$-可置换子群的定义（该定义同时涵盖 $\mathcal{H}$-可置换子群和弱 m-σ-可置换子群，见下文示例），并通过弱 m-$\mathcal{H}$-

子群的置换性。

定义 1.2. 设 $\mathcal{H}$ 是 G 的一个完备 Hall σ-集。我们称 G 的子群 H 为：(i) m-$\mathcal{H}$-可置换的，如果对于某个模子群 A 和 G 的 $\mathcal{H}$-可置换子群 B，有 $H = \langle A, B\rangle$；(ii) 在 G 中弱 m-$\mathcal{H}$-可置换的，如果存在 G 的一个 σ-次正规子群 T，使得 $G = HT$，并且对于某个 G 的 m-$\mathcal{H}$-可置换子群 S，有 $H \cap T \leq S \leq H$。

在继续之前，我们先考虑以下事实：显然，$\mathcal{H}$-可置换子群、m-$\mathcal{H}$-可置换子群以及 G 的模子群都是 G 中的弱 m-$\mathcal{H}$-可置换子群。但以下示例表明，反过来的结论一般并不成立。

例 1.3. (i) 令 $G = A_4$，其中 A_4 是 4 次交错群。令 $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2\}$，其中 $\sigma_1 = \{2, 3\}$ 和 $\sigma_2 = \{2, 3\}'$。那么，显然，$\mathcal{H} = \{1, G\}$ 是 G 的一个完备 Hall σ-集，并且 G 的每个子群都是 $\mathcal{H}$-可置换的。因此，G 的每个子群在 G 中都是弱 m-$\mathcal{H}$-可置换的。令 H 为 G 的一个 2 阶子群。根据[5, 定理 5.1.14]，H 在 G 中不是模的。

(ii) 设 p、q、r、t 为互异素数，其中 q 整除 $p-1$，且 t 整除 $r-1$。设 $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$，其中 $\sigma_1 = \{p, q\}$、$\sigma_2 = \{r\}$ 和 $\sigma_3 = \{p, q, r\}'$。设 $V = Q \rtimes C_p$，其中 Q 是一个简单的 F_qC_p-模，在 C_p 上忠实。设 $C_r \rtimes C_t$ 是一个阶为 rt、$A = C_t$ 且 $G = (Q \rtimes C_p) \times (C_r \rtimes C_t)$ 的非阿贝尔群。设 T 是 G 的一个阶为 t 的子群，使得 $T \neq A$。则 $\mathcal{H} = \{1, V, C_r, T\}$ 是 G 的一个完备 Hall σ-集。设 B 是 Q 中一个阶为 q 的子群。由于 $p > q$，因此 $B < Q$，从而 B 是 $\mathcal{H}$-可置换的。设 $H = \langle A、B\rangle = A \times B$。根据 [5, 定理 5.1.9]，我们有 A 在 G 中是模的。因此 H 是 m-$\mathcal{H}$-可置换的，从而在 G 中弱 m-$\mathcal{H}$-可置换。假设 H 是 $\mathcal{H}$-可置换的。则 $HT = TH$，这表明 HT 是 G 的一个子群。由于 A 和 T 都是 HT 的 Sylow t-子群，因此存在一个元素 $g = th \in HT$，使得 $A = T^{th} = T^h$，其中 $t \in T$ 和 $h \in H$。但由于 $h \in H = A \times B$，我们有 $h = ab$，其中 $a \in A$ 和 $b \in B$ 是某些元素。由 $A = T^h$ 可得 $T = A^{h^{-1}} = A^{b^{-1}a^{-1}} = A$，这与 T 的选取矛盾。因此 H 不是 $\mathcal{H}$-可置换的。

注意，G的所有 σ- m子群和所有弱σ- G -m子群，对于某个 $\mathcal{H}$ 的完备Hall σ-集，都在 G 中弱$\mathcal{H}$-m- G。但下面的例子表明，G的弱 m-$\mathcal{H}$-{v?}子群不一定在 G中弱 m-σ-{v?}。

例 1.4. 设 $G = A_5$，其中 A_5 是 5 次交错群。设 H 是 G 的一个 5 阶子群，且 $K \cong A_4$ 是 G 的一个子群，其中 A_4 是 4 次交错群。设 $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2\}$，其中 $\sigma_1 = \{2, 3\}$ 且 $\sigma_2 = \{2, 3\}'$。显然，$\mathcal{H} = \{H, K\}$ 是 G 的一个 Hall σ-集，并且 H 是 $\mathcal{H}$-可置换的，因此 H 在 G 中是弱 m-$\mathcal{H}$-可置换的。假设 H 在 G 中是弱 m-σ-可置换的。那么存在一个 σ-次正规子群 T，使得 $G = HT$

并且 $H \cap T \leq S \leq H$ 对于某个 m-σ-可置换子群 S of G。由于 G 是单群且$|\sigma(G)| > 1$，我们得到，1 和 G 是 G的仅有的两个 σ-次正规子群。因此$T = G$，从而 $H = S$。令 $S = \langle A, B\rangle$，其中 A 是模的，且 B 在 G中是 σ-可置换的。若 $A \neq 1$，则 G 中介于 A^G 与 A_G 之间的每个主因子都是循环的（见下文引理 2.5），这就产生了矛盾。因此 $A = 1$，从而 $H = S = B$ 在 G中是 σ-可置换的。这意味着对于任意元素 $g \in G$，都有 $HH^g = H^gH$，这是不可能的。因此 H 不是弱 m-σ-可置换于 G。

事实上，我们在此的主要目标是证明以下更一般的结果。

定理 1.5. 设 G 是一个 σ-满的 Sylow 型群， E 是 G 的正规子群，并且 $\mathcal{H}$ 是 σ的 G 的完备 Hall 集，其中 $\mathcal{H}$ 的每个成员都是超可解的。若 E 的任意非循环 Hall σ_i-子群的每个素数阶循环子群 H，以及阶为 4 的循环子群（若 E 的 Sylow 2-子群非阿贝尔且 $H \not\leq Z_\infty(G)$），对所有 $\sigma_i \in \sigma(E)$，在 G 中都是弱 m-$\mathcal{H}$-可置换的，则 $E \leq Z_{\mathfrak{U}}(G)$。

注 1. 在经典情形中， $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \cdots\}$、 σ-可置换子群也称为 s-可置换子群。若 G 的子群 H 满足 G 有一个正规子群 T，使得 $G = HT$ 且 $H \cap T \leq H_G$，其中 H_G 表示包含在 H 中的 G 的最大正规子群，则称 H 在 G [16] 中是 c-正规子群。因此，根据定理 1.5，我们可以直接得到许多已知结果，例如 [15, 定理 1.3 和推论 1.6], [16, 定理 4.2], [17, 推论 3.6], [18, 定理 3.1] 以及 [19, 定理 3]。

本文结构安排如下。第 2 节引用一些证明中会用到的已知结果，并证明弱 m-$\mathcal{H}$-可置换子群的一些基本性质。第 3 节给出定理1.5的证明。第 4 节进一步介绍本结果的一些应用。

2 预备知识

按照 [1, 3], 的记号，我们用 $O^{\Pi}(G)$表示由 G 的所有 Π'-子群生成的子群。我们将 $O^{\{\sigma_i\}}(G)$ 简记为 $O^{\sigma_i}(G)$。

引理 2.1。[1, 引理 2.6] 设 A、K 和 N 是 G 的子群。假设 A 在 G 中是 σ-次正规子群，且 N 是 G 的正规子群。

(1) $A \cap K$ 在 K 中是 σ-次正规子群。(2) AN/N 在 G/N 中是 σ- 次正规子群。(3) 若 $|G : A|$ 是一个 Π-数，则 $O^{\Pi}(A) = O^{\Pi}(G)$。

假设 G 拥有一个完备的 Hall σ-集 $\mathcal{H} = \{H_1, \cdots, H_t\}$。按照 [6], ，对于 G的任意子群 H（分别地，正规子群 N），我们记 $H \cap \mathcal{H}$（分别地， $\mathcal{H}N/N$）表示集合$\{H \cap H_1, \cdots, H \cap H_t\}$（分别地， $\{H_1N/N, \cdots, H_tN/N\}$）。如果 H的一个完备 Hall σ-集是 $H \cap \mathcal{H}$，那么我们称 $\mathcal{H}$ 约化到 H。

引理 2.2. 设 $\mathcal{H}$ 是 G 的一个完备 Hall σ-集，且 R 是 G 的一个正规子群。假设 $H \leq E \leq G$，并且 H 在 G 中是 m-$\mathcal{H}$-可置换的。

(1) HR/R 在 G/R 中是 m-($\mathcal{H}R/R$)-可置换的。(2) 若 $\mathcal{H}$ 约化到 E，则 H 在 E中是 m-($E \cap \mathcal{H}$)-可置换的。(3) 若 E 在 G中正规，则 $\mathcal{H}$ 约化到 E，因此 H 在 E中是 m-($E \cap \mathcal{H}$)-可置换的。(4) 对于 G的任意 m-$\mathcal{H}$-可置换子群 K，群 $\langle H, K\rangle$ 在 G 中是 m-$\mathcal{H}$-可置换的。

证明 根据假设，我们可以假设 $H = \langle A, B\rangle$，其中 A 是模的，且 B 是 $\mathcal{H}$-可置换的。

(1) 鉴于[5, 第 201 页，性质 (3)]，，我们有 AR/R 在 G/R中是模的。由B 是 $\mathcal{H}$-可置换可知，BN/N 根据 $\mathcal{H}R/R$)-可置换，由 [6, 引理 2.1(1)]可得。此外，显然 $HR/R = \langle AR/R,\ BR/R\rangle$。因此，$HR/R$ 在 m-($\mathcal{H}R/R$)-可置换。 G/R。

(2) [5, p.201，性质 (2)] 表明 A在 E中是模的。此外，由于 $\mathcal{H}$ 约化到 E，根据 [6, 引理 2.1(2)]，我们得到 B 是 ($E \cap \mathcal{H}$)-可置换的。这表明 H 在 E中是 m-($E \cap \mathcal{H}$)-可置换的。

(3) [20, 第一章] 中的引理 3.2(c) 表明 $\mathcal{H}$ 约化到 E，因此根据 (2)， H 在 E 中是 m-($E \cap \mathcal{H}$)- 可置换的。

(4) 假设 $K = \langle C, D\rangle$，其中 C 是模的，且 D 是 $\mathcal{H}$-可置换的。那么，显然，$\langle H, K\rangle = \langle\langle A, C\rangle, \langle B, D\rangle\rangle$。根据 [5, 第 201 页的性质 (5)]， $\langle A, C\rangle$ 在 G 中是模的。此外，由于$\langle B, D\rangle$ 是 $\mathcal{H}$-可置换的（参见[20, 第 A 章，1.6(a)]），我们得到 $\langle H, K\rangle$ 在G 中是 m-$\mathcal{H}$-可置换的。2

引理 2.3. 设 $\mathcal{H}$ 是 G 的一个完备 Hall σ-集。假设 $H \leq E \leq G$ 和 H 在 G 中是弱 m-$\mathcal{H}$-可置换的。

(1) 如果 $\mathcal{H}$ 约化到 E，那么 H 在 E 中是弱 m-($E \cap \mathcal{H}$)-可置换的。(2) 如果 E 在 G 中正规，那么 $\mathcal{H}$ 约化到 E，因此 H 在E 中是弱 m-($E \cap \mathcal{H}$)-可置换的。(3) 如果 N 是 G 的正规子群且满足 $N \leq H$，那么 H/N 在 G/N 中是弱 m-($\mathcal{H}N/N$)-可置换的。(4) 如果 N是 G 的正规子群且满足 $(|H|, |N|) = 1$，那么 HN/N在 G/N 中是弱 m-($\mathcal{H}N/N$)-可置换的。

证明 根据假设，存在 σ-次正规子群 T of G，使得 $G = HT$ and$H \cap T \leq S \leq H$，其中 S 是 G 的某个 m-$\mathcal{H}$-可置换子群。

(1) 由于 $H \leq E$，我们有 $E = E \cap HT = H(E \cap T)$。根据引理 2.1(1)， $E \cap T$ 在 E 中是 σ-次正规子群。此外，由于 $\mathcal{H}$ 约化到 E，根据引理 2.2(2)， S 在 E 中是 m-$\mathcal{H}$-可置换的。注意到 $H \cap (E \cap T) = H \cap T \leq S \leq H$。这表明 H 在 E 中是弱 m-($E \cap \mathcal{H}$)-可置换的。

(2) 引理 2.3(3) 表明 $\mathcal{H}$ 约化到 E，因此根据 (1)， H 在 E 中是弱 m-($E \cap \mathcal{H}$)-可置换的。

(3) 由[20, 第一章] 中的引理 3.2(b)可知， $\mathcal{H}N/N$ 是 G/N的一个完备 Hall σ-集。显然， G/N =(H/N)(TN/N)。由引理 2.2(1)， SN/N在 G/N中是 m-($\mathcal{H}N/N$)-可置换的。此外，由于 $H/N \cap TN/N$ =($H \cap T$)$N/N \leq SN/N \leq H/N$，且根据引理 2.1(2)， TN/N是 G/N中的 σ-次正规子群，我们得到 H/N在 G/N中弱 m-($\mathcal{H}N/N$)-可置换。

(4) 显然， $\mathcal{H}N/N$是 G/N的一个完备 Hall σ-集。由于($|H|$,$|N|$) = 1，我们有($|G:\ T|$,$|N|$) = 1。由 $|G:\ T| = |G:\ NT||NT:\ T| = |G:\ NT||N:\ N \cap T|$可得$N \cap T = N$，因此 $N \leq T$。故 G/N =(HN/N)(T/N)。由引理 2.1(2)，我们知道T/N是 G/N中的 σ-次正规子群。由引理 2.2(1)可知， SN/N在 G/N中是 m-($\mathcal{H}N/N$)-可置换的。此外，由于(HN/N) $\cap$(T/N) =($H \cap T$) $N/N \leq SN/N \leq HN/N$，我们得到HN/N在 G/N中弱 m-($\mathcal{H}N/N$)-可置换。2

引理 2.4. [21, 引理 5] 设 H, K 和 N 是 G 的两两可置换子群，并设 H 是 G 的 Hall 子群。那么 $N \cap HK = (N \cap H)(N \cap K)$。

引理 2.5。[5,定理 5.2。5] 若 H 在 G 中是模的，则 G 与 H^G 之间的每个主因子都是循环的。

设 P 是一个 p-群。若 P 不是非阿贝尔 2-群，则用 Ω(P) 表示 $\Omega_1(P)$。否则，Ω(P) = Ω_2(P)。

引理 2.6。[22,引理 4。3] 设 C 是一个 p-群 P 的 Thompson 临界子群（见 [23, 第 185] 页）。

(1) 若 p 为奇数，则 Ω(C) 的指数为 p。(2) 若 P 是非阿贝尔
2-群，则 Ω(C) 的指数为 4。

引理 2.7。[22,引理 4.4] 设 P 是 G 的正规 p-子群，且 C 是 P 的 Thompson 临界子群。如果 Ω(C) 超循环嵌入于 G 中，则 P 超循环嵌入于 G 中。

3 定理的证明1.5

为证明我们的主要结果，我们可以先证明以下命题。

命题 3.1. 设 G 是一个 Sylow 型的 σ-满群， $\mathcal{H}$ 是 G 的一个完备 Hall σ-集，且 $\mathcal{H}$ 的每个成员都是超可解的。假设整除 $|G|$ 的最小素数为 p。如果 H 的每个阶为 p 和 4 的循环子群（若 $p = 2$，即 G 的一个 Sylow 2-子群是非阿贝尔群且 $H \not\leq Z_\infty(G)$）在 G 中都是弱 m-$\mathcal{H}$-可置换的，那么 G 是 p-幂零的。

证明 假设这一结论不成立，并设 G 为一个反例。则 G 不是 p-幂零的。因此，根据 [24, IV，定理 5。4] 和 [25, 定理 3.4。11]， G 含有一个 p-闭的施密特子群 $I = P \rtimes Q$，其中 P 是 p-子群的一个西洛 I 子群，其指数为 p 或 4（如果 P 是非阿贝尔 2-群）， Q 是一个西洛q-某个素数 q 的子群 $= p$, $P/\Phi(P)$ 是一个 I-主因子 , $Z_\infty(I) = \Phi(I)$ 和 $\Phi(I) \cap P = \Phi(P)$. 不失一般性，我们可以假设 $p \in \sigma_1$，并令 $H_1 \in \mathcal{H}$ 为 G 的一个 Hall σ_1-子群。我们断言: $|P: \Phi(P)| = p$。若 $q \in \sigma_1$，则 I 是 G 的一个 σ_1-子群，因此由 G，对某个 $g \in G$ 有 $I \leq H_1^g$，且 G 是 Sylow 型的 σ-满群。由于 H_1 是超可解的，且 $P/\Phi(P)$ 是一个 I-主因子，我们有 $|P: \Phi(P)| = p$。现在考虑 $q \notin \sigma_1$。假设 $X/\Phi(P)$ 是 $P/\Phi(P)$ 的一个极小子群。令 $x \in X \backslash \Phi(P)$，且 $L = \langle x \rangle$。于是 $X = L\Phi(P)$，且 $|L| = p$ 或 4（若 P 是非阿贝尔 2-群）。若 $L \leq Z_\infty(G)$，则 $L \leq Z_\infty(I) \cap P = \Phi(I) \cap P = \Phi(P)$，这与 L 的选取矛盾。因此 $L \not\leq Z_\infty(G)$。于是根据假设， L 在 G 中弱 m-$\mathcal{H}$-可置换。也就是说，存在 G 的一个 σ-次正规子群 T，使得 $G = LT$，并且对某个 m-$\mathcal{H}$-可置换子群 $S \leqslant G$ 有 $L \cap T \leq S \leq L$。由此可得 $I = I \cap LT = L(I \cap T)$，且由引理 2.1(1)，$(I \cap T)$ 在 I 中是 σ-次正规的。记 $T_1 = I \cap T$。由于 T_1 在 I 中是 σ-次正规的，且 $|I: T_1|$ 是一个 σ_1-数，由引理 2.1(3) 可得 $O^{\sigma_1}(T_1) = O^{\sigma_1}(I)$。但 $q \notin \sigma_1$ 且 $Q \leq O^{\sigma_1}(I)$，所以 $Q^I \leq O^{\sigma_1}(I)$。若 $Q^I \neq I$，则 Q $char$ $Q^I \trianglelefteq I$，因为 I 是一个施密特群，因此 $Q \trianglelefteq I$，矛盾。所以 $I = Q^I \leq O^{\sigma_1}(I)$。由 $O^{\sigma_1}(T_1) = O^{\sigma_1}(I)$ 可得 $T_1 = I$。因此 $L = L \cap T_1 \leq L \cap T \leq S \leq L$，从而 $L = S$。令 $S = \langle A, B \rangle$，其中 A 是模的，且 B 是 $\mathcal{H}$-可置换的。根据 [5, 第201页，性质 (2)], ，我们有 A 在 I 中是模的，因此由引理 2.5， I 的 A^I 与 A_I 之间的主因子是循环的。于是， $I/\Phi(P)$ 的 $A^I\Phi(P)/\Phi(P)$ 与 $A_I\Phi(P)/\Phi(P)$ 之间的主因子是循环的。此外，由于 $A\Phi(P)/\Phi(P) \leq L\Phi(P)/\Phi(P)$，且 $L\Phi(P)/\Phi(P) = X/\Phi(P)$ 是 $P/\Phi(P)$ 的一个极小子群，我们得到 $A\Phi(P)/\Phi(P) = L\Phi(P)/\Phi(P)$ 或 $A\Phi(P)/\Phi(P) = \Phi(P)/\Phi(P)$。在前一种情形下，我们得到 $A^I\Phi(P)/\Phi(P) = (A\Phi(P))^I/\Phi(P) = (L\Phi(P))^I/\Phi(P) = P/\Phi(P)$，且 $A_I\Phi(P)/\Phi(P) = (A\Phi(P))_I/\Phi(P) = (L\Phi(P))_I/\Phi(P) = \Phi(P)/\Phi(P)$，因为 $P/\Phi(P)$ 是一个 I-主因子。由此可得 $P/\Phi(P)$ 是循环的，因此 $|P: \Phi(P)| = p$，正如所需。在后一种情形下，我们得到 $A \leq \Phi(P)$，因此 $A < S = L$，因为 $L \not\leq \Phi(P)$。由 L 是一个阶为 p 或 4 的循环群可得 $A \leq \Phi(L)$。因此 $L = \langle A, B \rangle = B$，这表明 L 是 $\mathcal{H}$-可置换的。也就是说，对所有 $D \in \mathcal{H}$ 都有 $LD = DL$。假设 D 是 G 的一个 Hall σ_j-子群，其中 $q \in \sigma_j$。则对某个 $g \in G$ 有 $Q^g \leq D$。接下来，我们考虑群 $I^g = P^g \rtimes Q^g$ 及 I^g 的子群 L^g。用与上面类似的论证，我们有 $|P/\Phi(P)| = |P^g/\Phi(P)^g| = p$ 或 $L^gD = DL^g$。不失一般性，只需考虑 $L^gD = DL^g$ 的情形。由于 L 是循环的，由 [24, IV，定理 2.8]，可知 $L^gD = DL^g$ 是 p-幂零的。因此 $L^g \leq N_G(D)$。任取一个元素 $s \in Q$。于是 $[s, x] = s^{-1}x^{-1}sx = s^{-1}s^x = s^{-1}s^{gg^{-1}xgg^{-1}} = s^{-1}s^{gx^gg^{-1}} \in D^{g^{-1}}$。另一方面，我们有 $[s, x] = s^{-1}x^{-1}sx = (x^{-1})^s x \in P$。注意到 $(|P|, |D^{g^{-1}}|) = 1$，可得 $[s, x] = 1$，因此 $L \leq C_I(Q)$。由 $L\Phi(P)/\Phi(P) \trianglelefteq P/\Phi(P)$ 可得 $L\Phi(P)/\Phi(P) \trianglelefteq I/\Phi(P)$。因此 $L\Phi(P)/\Phi(P) = P/\Phi(P)$，因为 $P/\Phi(P)$ 是一个 I-主因子，这表明 $|P/\Phi(P)| = p$。

因此， P是循环的，所以根据上述结论， P的指数为 p。这意味着 P是一个阶为p的群。由于 $N_I(P)/C_I(P) \lesssim Aut(P)$是一个阶为 $p-1$的群，且 p是整除 $|E|$的最小素数，因此可得 $C_I(P) = N_I(P) = I$。于是 $Q \trianglelefteq I$。这一矛盾完成了证明。 2

命题 3.2. 设 G 是 Sylow 型的 σ-满群， $\mathcal{H}=\{H_1,\cdots,H_t\}$ 是 G 的一个完备 Hall σ-集，使得对于所有 $i\in\{1,\cdots,t\}$， H_i 都是超可解的 σ_i-子群。设 P 是 G 的一个正规 p-群，且对于某个 j， $P\leq H_j$。如果 P 的每个素数阶循环子群 H 以及 4 阶循环子群（若 P 是非阿贝尔 2-群且 $H\not\leq Z_\infty(G)$）在 G 中都是弱 m-$\mathcal{H}$-可置换的，那么 $P\leq Z_{\mathfrak{U}}(G)$。

证明 假设结论不成立，并设 (G,P) 是一个反例，其中 $|G|+|P|$ 取最小值。不失一般性，我们可以假设 $j=1$。

(1) *Let P/N be a chief factor of G. Then $N\leq Z_{\mathfrak{U}}(G)$. Hence N is the unique normal subgroup of G satisfying that P/N is a chief factor of G, and $|P/N|>p$。*

显然，(G,N) 满足该结果的假设。因此，根据 (G,P) 的选择， $N\leq Z_{\mathfrak{U}}(G)$。假设 G 还有另一个正规子群 $R\neq N$，使得 P/R 是 G 的一个主因子。那么 $R\leq Z_{\mathfrak{U}}(G)$。由此可得 $P/N=RN/N\leq Z_{\mathfrak{U}}(G/N)$，进而 $P\leq Z_{\mathfrak{U}}(G)$，这就产生了矛盾。根据上述分析，显然也有 $|P/N|>p$。

（2） *The exponent of P is p or 4 (if P is a non-abelian 2-group).*

设 C为 P的 Thompson 临界子群。如果 $\Omega(C)<P$，则根据断言（1），$\Omega(C)\leq N\leq Z_{\mathfrak{U}}(G)$。由引理 2.7，可得 $P\leq Z_{\mathfrak{U}}(G)$，这与假设矛盾。因此，我们有 $\Omega(C)=P$。由引理 2.6，可知 P 的指数为 p 或 4（如果 P 是一个非阿贝尔 2-群）。

(3) *Final contradiction*。

由于 H_1/N 是超可解的且 $|P/N|>p$，存在 H_1/N 的一个极小正规子群 L/N，使得 $1\neq L/N<P/N$ 且 L/N 是循环的。令 $x\in L\setminus N$ 和 $H=\langle x\rangle$。根据断言（2），则 $L=HN$ 和 $|H|=p$ 或 4（如果 P 是非阿贝尔 2-群）。假设 $H\leq Z_\infty(G)$，则根据 [8, 第 1 章定理 2.6(d)]，，$L/N=HN/N\leq Z_\infty(G)N/N\leq Z_\infty(G/N)$，这意味着 $Z_\infty(G/N)\cap P/N\neq 1$。因此 $P/N\leq Z_\infty(G/N)$，因为 P/N是 G的一个主因子。由断言（1）可知 $P\leq Z_{\mathfrak{U}}(G)$。这一矛盾表明 $H\not\leq Z_\infty(G)$。然后根据假设，存在 G 的一个 σ-次正规子群 T，使得 $G=HT$ 且 $H\cap T\leq S\leq H$，其中 S 是 G的某个 m-$\mathcal{H}$-可置换子群。因此根据引理 2.1(3)，我们有 $O^{\sigma_1}(T)=O^{\sigma_1}(G)$，因为 $|G:T|$ 是一个 σ_1-数。

我们断言 $O^{\sigma_1}(G/N)\leq N_{G/N}(L/N)$。首先假设 $P\cap O^{\sigma_1}(G)=P$，则 $H\leq P\leq O^{\sigma_1}(G)=O^{\sigma_1}(T)\leq T$。因此 $G=HT=T$，从而 $H=H\cap T\leq S\leq H$，这表明 $H=S$。令 $S=\langle A,B\rangle$，其中 A 是模的，且 B是 $\mathcal{H}$-可置换的。由于 $A\leq H<P$，由断言（1）可得 $A^G\leq P$和 $A_G\leq N$。若 $A^G=P$，则根据引理 2.5， P/N 是循环的，这与断言（1）矛盾。因此，再次由断言（1）可得 $A^G\leq N$。于是，根据引理 [6,引理 2.1(1)]， $L/N=HN/N=SN/N=\langle A,B\rangle N/N=BN/N$是 $(\mathcal{H}N/N)$-可置换的。也就是说，对所有 $D\in\mathcal{H}$，$(L/N)(DN/N)=(DN/N)(L/N)$。假设 D 不是 G的 Hall σ_1-子群。那么 DN/N 不是 σ_1-

G/N的 Hall 子群，并且根据引理 2.4，$P/N \cap (L/N)(DN/N) = (P/N \cap L/N)(P/N \cap DN/N) = L/N$。因此 $DN/N \leq N_G(L/N)$，这意味着 $O^{\sigma_1}(G/N) \leq N_{G/N}(L/N)$。现在，假设$P \cap O^{\sigma_1}(G) < P$。则由断言（1）可得 $P \cap O^{\sigma_1}(G) \leq N$。因此，根据 Dedekind 模定律，$O^{\sigma_1}(G/N) \cap P/N \leq O^{\sigma_1}(G)N/N \cap P/N = (O^{\sigma_1}(G) \cap P)N/N = 1$。由此可得 $O^{\sigma_1}(G/N) \leq C_{G/N}(P/N)$，从而 $O^{\sigma_1}(G/N) \leq N_{G/N}(L/N)$。此外，由于 $L/N \trianglelefteq H_1/N$，我们得到 $L/N \trianglelefteq G/N$，矛盾。至此，结果得证。2

定理的证明 1.5 假设结论不成立，并设 (G, E) 是一个具有最小 $|G|+|E|$ 的反例。令 p 为整除 $|E|$ 的最小素数，并令 P 为 p-子群 E。不失一般性，我们可以假设 $P \leq H_1 \cap E$，其中 $H_1 \in \mathcal{H}$。

(1) *E is p-nilpotent.*

鉴于引理 2.2(3)，我们有群 E 满足命题 3.1 的假设。因此 E 是 p-幂零的，这由命题 3.1 得出。

由断言（1），我们可令 $E_{p'}$ 为 E 的正规 Hall p'-子群。于是 $E_{p'} \trianglelefteq G$。

(2) *$E_{p'} = 1$, and so E is a p-group.*

假设 $E_{p'} \neq 1$。那么我们考虑商群 $G/E_{p'}$。显然，$\mathcal{H}E_{p'}/E_{p'} = \{H_1E_{p'}/E_{p'}, \cdots, H_tE_{p'}/E_{p'}\}$ 是 $G/E_{p'}$ 的一个完备 Hall σ-集，且 $H_iE_{p'}/E_{p'} \cong H_i/H_i \cap E_{p'}$ 是超可解的。

我们声称假设对 $(G/E_{p'}, E/E_{p'})$ 成立。事实上，$H_iE_{p'}/E_{p'} \cap E/E_{p'} = (H_i \cap E)E_{p'}/E_{p'} = 1$ 对 $i \in \{2, \cdots, t\}$ 成立，且 $H_1E_{p'}/E_{p'} \cap E/E_{p'} = (H_1 \cap E)E_{p'}/E_{p'} = E/E_{p'}$。当 $E/E_{p'}$ 为循环时，结论显然成立。因此，我们可以假设 $E/E_{p'}$ 不是循环的。设 $H/E_{p'}$是 $E/E_{p'}$ 的一个循环子群，其阶为 p 或 4（若 $E/E_{p'}$ 的 Sylow 2-子群非阿贝尔且 $H/E_{p'} \not\leq Z_\infty(G/E_{p'})$）。根据 Schur-Zassenhaus 定理，$H = E_{p'} \rtimes L$，其中 $L = \langle x \rangle$ 的阶为 p 或 4（若 E 的 Sylow 2-子群非阿贝尔）。若 $L \leq Z_\infty(G)$，则由 [8, Chapter 1, Theorem 2.6(d)]，有 $H/E_{p'} = LE_{p'}/E_{p'} \leq Z_\infty(G)E_{p'}/E_{p'} \leq Z_\infty(G/E_{p'})$。现在假设$L \not\leq Z_\infty(G)$。那么根据引理 2.3(4)，我们知道假设对 $(G/E_{p'}, E/E_{p'})$ 成立。因此$E/E_{p'} \leq Z_{\mathfrak{U}}(G/E_{p'})$。显然，假设对 $(G, E_{p'})$ 成立。因此，根据 (G, E) 的选取，$E_{p'} \leq Z_{\mathfrak{U}}(G)$。于是 $E \leq Z_{\mathfrak{U}}(G)$，矛盾。因此我们得到 (2)。

(3) *Final contradiction*。

显然，E 不是循环群，因此 (G, E) 满足命题 3.2 的假设，由该假设和断言 (2) 可知。因此 $E \leq Z_{\mathfrak{U}}(G)$，由命题 3.2 得证。□

4 结果的一些应用

回顾一下，若一个群类对于每个群 G，$G/G^{\mathfrak{F}}$的每个同态像都属于 $\mathfrak{F}$，则称其为一个形成。若一个形成 $\mathfrak{F}$ 满足 $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ 蕴含 $G \in \mathfrak{F}$，则称其为饱和形成。

鉴于[26, 定理　　根据 C] 和 [27, 引理 2.16]，，我们可以直接得到以下推论。

根据定理 1.5。

推论 4.1. 设 $\mathfrak{F}$ 为一个包含所有超可解群的饱和群系，且 E 是 G 的正规子群，其中 $G/E \in \mathfrak{F}$。假设 G 是一个 σ-满的 Sylow 型群，且 $\mathcal{H}$ 是 G 的一个完全 Hall σ-集，其中每个成员都是超可解的。如果对于任意 $\sigma_i \in \sigma(F^*(E))$， $F^*(E)$的任意非循环 Hall σ_i-子群的每个素数阶循环子群 H 以及 4 阶循环子群（若 E 的 Sylow 2-子群非阿贝尔且 $H \not\leq Z_\infty(G)$）在 G 中都是弱 m-$\mathcal{H}$-可置换的，则 $G \in \mathfrak{F}$。

在推论中， $F^*(E)$ 是 E 的广义拟合子群，即 E 的最大正规拟幂零子群（参见 [28,第 X 章]）。

定理 1.5 和推论 4.1 还涵盖了许多其他结果，例如 e,

推论 4.2. [29,定理 3.4] 设 $\mathfrak{F}$ 是一个包含所有超可解群的饱和群系，且 G 是一个群。若 $G^{\mathfrak{F}}$ 的每个素数阶循环子群及 4 阶循环子群 均 c-正规于 G，则$G \in \mathfrak{F}$。

推论 4.3. [29,推论 3.5] 设 G 是一个群。若 G 的每个素数阶循环子群及 4 阶循环子群均为 c-正规于 G，则 G 是超可解的。

推论 4.4. [30, 定理 2] 设 $\mathfrak{F}$ 是一个包含所有超可解群的饱和群系，且 E 是 G 的正规子群，满足 $G/E \in \mathfrak{F}$。若 E 的每个素数阶循环子群及 4 阶循环子群均可置换于 G，则 $G \in \mathfrak{F}$。

推论 4.5. [30, 定理 5] 设 $\mathfrak{F}$ 是一个包含所有超可解群的饱和群系，且 E 是 G 的正规子群，满足 $G/E \in \mathfrak{F}$。假设 G 有一个阿贝尔西洛 2- 子群。若 E 的每个素数阶循环子群均可置换于 G，则 $G \in \mathfrak{F}$。

推论 4.6. [31,定理] 设 $\mathfrak{F}$ 为包含所有超可解群的饱和群系， G 为一个群。假设 G 有一个可解正规子群 E ，且满足 $G/E \in \mathfrak{F}$。如果 $F(E)$ 的每个素数阶和 4 阶循环子群在 G 中都是 s-可置换的，那么 $G \in \mathfrak{F}$。

推论 4.7。[31, 推论 1] 假设 G 有一个可解正规子群 E ，且 G/E 是超可解的。如果 $F(E)$ 的每个素数阶子群和 4 阶循环子群在 G 中都是 s-可置换的，那么 G 是超可解的。

推论 4.8。[31, 推论 2] 设 G 为一个可解群。如果 F（E）的每个素数阶和 4 阶循环子群在 G 中都是 s-可置换的，那么 G 是超可解群。

推论 4.9. [32,定理 3.1] 设 N 为正规子群，且 G/N 是超可解群。若 $F^*(N)$ 的每个素数阶循环子群和 4 阶循环子群在 G 中都是 s-可置换的，则 G 是超可解群。

推论 4.10。[32,定理 3。3] 设 $\mathfrak{F}$ 是一个包含所有超可解群的饱和群系，且 G 是一个群。假设 G 有一个可解正规子群 E 满足 $G/E \in \mathfrak{F}$。若 $F^*(E)$ 的每个素数阶及阶为 4 的循环子群都是 s-可置换于 G，则 $G \in \mathfrak{F}$。

推论 4.11. [33,定理 2] 设 $\mathfrak{F}$ 是一个包含所有超可解群的饱和群系，且 G 是一个群。假设 G 有一个可解正规子群 E，满足 $G/E \in \mathfrak{F}$。如果 $F(E)$ 的每个素数阶和 4 阶循环子群在 G 中都是 c-正规，那么 $G \in \mathfrak{F}$。

推论 4.12. [33, 推论 3] 设 $\mathfrak{F}$ 为一个包含所有超可解群的饱和群系，且 E 为 G 的一个正规子群，其中 $G/E \in \mathfrak{F}$。如果 E 的所有非循环 Sylow子群的所有极小子群以及所有阶为 4 的循环子群在 G 中均为 c-正规，则 $G \in \mathfrak{F}$。

参考文献

[1] Skiba, A.N.：关于有限群的 σ-次正规和 σ-可置换子群。《代数杂志》436，1-16（2015）。[2] Skiba, A.N.：关于有限部分可解群理论中的若干结果。《通信数学与统计》4，281-309（2016）。[3] Zhang, C., Guo, W., Liu, A-M.：关于有限 T-群的一种推广，《通信数学与统计》。https://doi.org/10.1007/s40304-021-00240-z，（2021）。[4] Wei, X.：关于有限群的弱 m-σ-可置换子群。《代数通讯》47(3)，945-956（2019）。[5] Schmidt, R.：《群的子群格》。Walter de Gruyter，柏林（1994）。[6] Guo, W., Cao, C., Skiba, A.N., Sinitsa, D.A.：具有 $\mathcal{H}$-可置换子群的有限群。《通信数学与统计》5，83-92（2017）。[7] Ballester-Bolinches, A., Esteban-Romero, R., Asaad, M.：《有限群的乘积》。Walter de Gruyter，柏林，纽约（2010）。[8] Guo, W.：《有限群典范类的结构理论》。Springer，海德堡，纽约，多德雷赫特，伦敦（2015）。[9] Weinsten, M., 等：《介于幂零与可解之间》。Polygonal Publishing House，帕西帕尼（1982）。[10] Maier, R., Schmid, P.：有限群中可置换子群的嵌入。《数学杂志》131，269-272（1973）。

[11] Skiba, A. N.：关于 L.A. Shemetkov 提出的有限群中超循环嵌入子群的两个问题。《群论杂志》13，841-850（2010）。[12] Li, B.：关于有限群子群的 Π-性质和 Π-正规性。《代数杂志》334，321-337（2011）。[13] Guo, W., Skiba, A.N.：具有可置换的完全 Wielandt 子群集的有限群。《群论杂志》18，191-200（2015）。[14] Zhang, C., Wu, Z., Guo, W.：关于有限群的弱 σ-可置换子群。《德布勒森数学出版物》91(3-4)，489-502（2017）。[15] Hussain, M.T., Amjid, V.：具有弱 m-σ-可置换子群的有限群。《代数及其应用杂志》20，2150056（15页）（2021）。[16] Wang, Y.：群的 C-正规性及其性质。《代数杂志》180，954-965（1996）。[17] Shaalan, A.：某些子群的 π-拟正规性对有限群结构的影响。《匈牙利数学学报》56，287-293（1990）。[18] Asaad, M.：关于有限群的可解性。《数学档案》51，289-293（1988）。[19] Buckley, J.：极小子群均为正规的有限群。《数学杂志》116，15-17（1970）。[20] Doerk, K., Hawkes, T.：《有限可解群》。Walter de Gruyter，柏林（1992）。[21] Knyagina, V.N., Monakhov, V.S.：关于具有 Hallπ-子群的有限群的 π'-性质。《西伯利亚数学杂志》52(2)，297-309（2011）。[22] Guo, W., Skiba, A.N.：主子群满足广义 Ore 补充条件的有限群。《代数杂志》432，205-227（2015）。[23] Gorenstein, D.：《有限群》。Harper & Row 出版社，纽约、埃文斯顿、伦敦（1968）。[24] Huppert, B.：《有限群 I》。Springer-Verlag，柏林（1967）。[25] Guo, W.：《群类理论》。科学出版社-克吕维尔学术出版社，北京、纽约、多德雷赫特、波士顿、伦敦（2000）。[26] Skiba, A. N.：有限群中超循环嵌入子群的一种刻画。《纯粹与应用代数杂志》215，257-261（2011）。[27] Skiba, A.N.：关于有限群的弱 s-可置换子群。《代数杂志》315，192-209（2007）。

[28] Huppert, B., Blackburn, N.：《有限群》III。Springer-Verlag，柏林、纽约（1982）。[29] Ballester-Bolinches, A., Wang, Y.：具有某些 c-正规极小子群的有限群。《纯粹与应用代数杂志》153，121-127（2000）。[30] Ballester-Bolinches, A., Pedraza-Aguilera, M.C.：关于有限群的极小子群。《匈牙利数学学报》73，335-342（1996）。[31] Asaad, M., Csörgö, P.：极小子群对有限群结构的影响。数学档案（巴塞尔）72，401-404（1999）。[32] Li, Y., Wang, Y.：极小子群对有限群结构的影响。美国数学学会会刊131，337-341（2002）。[33] Wei, H.：关于有限群的Sylow子群的 c-正规极大子群和极小子群。代数通讯29(5), 2193-2200（2001）。