arXiv:2304.10202v1 [math.CO] 20 Apr 2023

最大权有向割的界

Jiangdong Ai* Stefanie Gerke† Gregory Gutin‡

Anders Yeo§ Yacong Zhou¶

摘要

我们为带权有向图和加权有向无环图类，以及它们的一些子类中的有向割最大权重，给出了下界和上界。我们将这些结果与无权有向图中有向割最大规模的相关结果进行了比较。特别地，我们证明，Alon、Bollob´as、Gy´af´as、Lehel 和 Scott（J Graph Th 55(1) (2007)）为无权有向无环图得到的一个下界，可以推广到圈的最大长度有常数上界且每条弧的权重至少为一的带权有向图。我们还提出了一些未解决的问题。

1 引言

设 $D=(V(D),A(D),w_D)$ 是一个带权有向图，其权重函数为 $w_D:A(D)\to\mathbb{R}_+$，其中 $\mathbb{R}_+$ 是非负实数集。对于 D 的子图 H，$w_D(H)$ 表示 H. 中各弧的权重之和（下文中，如果有向图或无向图可由上下文明确判断，我们将省略用于标识它们的下标）。设 X 和 Y 是 $V(D)$ 的一个划分。则 D 的有向割（简称有向割）(X,Y) 是由从 X 指向 Y 的弧所诱导的 D 的二分子图；其权重记作 $w(X,Y)$。Maximum Weight Directed Cut 问题的目标是求一个

*南开大学数学科学学院与陈省身数学研究所。JiangdongAi95@gmail.com。

†伦敦大学皇家霍洛威学院数学系。stefanie.gerke@rhul.ac.uk。

‡伦敦大学皇家霍洛威学院计算机科学系。g.gutin@rhul.ac.uk。§南丹麦大学数学与计算机科学系。andersyeo@gmail.com，以及约翰内斯堡大学数学系。

¶伦敦大学皇家霍洛威学院计算机科学系。Yacong.Zhou.2021@live.rhul.ac.uk。

D 的最大权重有向割。该权重记作 mac(D)。类似地，无向图 G 中最大割的权重记作 mac(G)。

显然， Maximum Weight Directed Cut 是 Maxi-mum Weight Cut 在有向图中的推广，因此是NP困难的 [15]。尽管关于 Maximum Cut 下界的论文很多（例如见[1, 4, 10, 16, 18]），其中每条边的权重均为1，但据我们所知，关于 Maximum Weight Cut下界的论文只有两篇：Poljak和Turz´ık的著名论文 [18]，以及Gutin和Yeo最近发表的论文 [13]。虽然已有关于 Maximum Directed Cut的论文，例如Alon、Bollob´as、Gy´af´as、Lehel和Scott的论文 [2]；Lehel、Maffray和Preissman的论文 [17]；Xu和Yu的论文 [21]；以及Chen、Gu和Li的论文 [9],，但据我们所知，我们的论文是首篇研究 Maximum Weight Directed Cut下界的论文。

对于任意 $v \in V(D)$，令 $w^+(v)$ 表示离开 v 的弧的权重之和， $w^-(v)$ 表示进入 v 的弧的权重之和，而 $r(v) = w^+(v) - w^-(v)$。注意，$\sum_{v \in V(D)} r(v) = 0$. 令

$$r^+(D) = \sum_{r(x)>0} r(x) = \sum_{x \in V(D)} |r(x)|/2.$$

注意，对于任意割 (X, Y)，我们有

$$\sum_{x \in X} r(x) = w_D(X, Y) - w_D(Y, X) \leq \mathrm{mac}(D). \tag{1}$$

取 X 为所有满足 $r(v) > 0$ 的顶点 v 所组成的集合，立即可得

$$r^+(D) \leq \mathrm{mac}(D). \tag{2}$$

本节余下部分将先概述本文，再介绍其他术语和记号。

论文概述 在第 2 节中，我们证明了式 (2) 的一些基本推广，并利用这些界限展示了 mac(D) 与 D 的底层图的最大割权重之间的一些关系。随后，我们使用随机划分，为某些类别的有向图证明下界。例如，我们为最大半度有界的加权有向图中的有向割最大权重获得了一个紧下界，这推广了 Alon、Bollob´as、Gy´af´as、Lehel 和 Scott [2] 的一项结果。我们还给出了 Gutin 和 Yeo [13] 针对有向割证明的一项结果的一个有用的类似结论。在本文后续部分，我们将在主要结果的证明中使用这一类似结论。

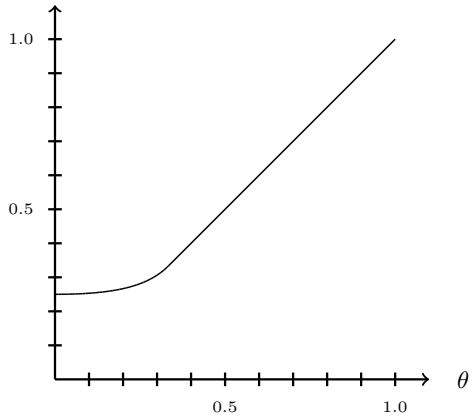

图 1：函数 $l(\theta)$。

令 $\theta(D) = r^+(D)/w(D)$，并且对于所有 $0 \le \theta \le 1$，令 $l(\theta)$ 为

$$l(\theta) = \begin{cases} \left(\frac{1}{4} + \frac{\theta^2}{4(1-2\theta)}\right) & \text{if } \theta < 1/3; \\ \theta & \text{if } \theta \ge 1/3. \end{cases}$$

函数 $l(\theta)$ 如图 1 所示。我们证明，如果 $\theta(D) \ge 1/3$，那么界 $\mathrm{mac}(D) \ge l(\theta(D))w(D)$（等价于 (2)）是最优的，因为存在达到该界的有向图。对于 $\theta(D) < 1/3$，我们证明 $\mathrm{mac}(D) \ge l(\theta(D))w(D)$，并且对于所有 $\epsilon > 0$，都存在一个有向图 D，使得 $\mathrm{mac}(D) < (1+\epsilon)l(\theta(D))w(D)$。

在第3节中，我们考虑无环有向图。令 $h(m)$为满足以下条件的最大整数：每个含有 m 条弧的无环有向图都有一个大小至少为$h(m)$的有向割。Alon、Bollob´as、Gy´af´as、Lehel 和 Scott 在 [2] 中的主要结果是[1]$h(m) = m/4 + O(m^{4/5})$以及 $h(m) = m/4 + \Omega(m^{3/5})$。这里我们考虑无环有向多重图和加权无环有向图的类似函数。令$h_\mu(m)$为满足以下条件的最大整数：每个含有 m 条弧的无环有向多重图都有一个大小至少为 $h_\mu(m)$的有向割。令 $\mathcal{D}_\omega$ 为所有每条弧的权重至少为1的加权有向图构成的集合，并令 $\mathcal{D}_\omega(w)$为 $\mathcal{D}_\omega$ 的子集，使得对每个 $D \in \mathcal{D}_\omega(w)$，都有 $w = w(D)$。那么，对每个 $w \ge 1$，令$h_\omega(w)$为满足以下条件的实数 g 的上确界：每个无环 $D \in \mathcal{D}_\omega(w)$都有一个权重至少为 g的有向割。注意，每个加权无环有向图 H都可以转换为某个$w' \ge w(H)$对应的加权无环有向图 $D_H \in \mathcal{D}_\omega(w')$，使得 H 中弧数最少的最大权有向割

[1]注意， [2] 在定理2中存在一个笔误，声称 $h(m) = m/4 + \Omega(m^{2/3})$，而不是 f $h(m) = m/4 + \Omega(m^{3/5})$；参见 [3], 其中定理2的表述是正确的 [12]。

是 D_H 中的最大有向割，而 D_H 中的最大权有向割是 H中的最大权有向割。事实上，如果 D_H 是通过删除 H 中所有权重为零的弧，并在最小（正）弧权重小于1时将所有弧权重除以该最小弧权重而得到的，那么这一结论成立。

显然，对于每个整数 $m \geq 1$， $h_\omega(m) \leq h_\mu(m) \leq h(m)$。对于任意 $w \geq 1$，我们将通过证明 $h_\mu(m) = m/4+O(m^{3/4})$ 并利用 $h_\omega(w)$ 的单调性，来证明 $h_\omega(w) = w/4+O(w^{3/4})$。我们还将证明 $h_\omega(w) = w/4+\Omega(w^{3/5})$。注意，对于总权重为 $w = w(D) < 1.$ 的加权有向图 D，这一下界并不成立。事实上，如果 $w < 1$ 和 $0 < \alpha < 1$，那么 $w^\alpha > w$。注意，尽管我们对 $h_\mu(m)$ 给出的上界优于 $h(m)$ 的上界，但二者并不可比。相比之下，我们的下界将 [2] 的结果从无环有向图推广到了加权无环有向图。我们的证明不同于 [2] 中的证明，因为我们无法将 [2] 的证明推广到加权有向图。函数 h、 h_μ 和 h_ω 的渐近值仍然是一个有趣的开放问题。

在第 4 节中，我们研究路径长度有界的加权无环有向图的最佳下界。具体而言，对于每个整数 $\nu \geq 2$，我们研究最大的可能系数 $c_\nu > 0$，使得对于每个最长路径包含 ν 个顶点的加权无环有向图 D，都有 $\mathrm{mac}(D) \geq c_\nu w(D)$。当 $\nu \leq 11$ 时， c_ν 的精确值已确定（见附录）。不过，本节的主要目标是给出 c_ν 的一般界，并证明$c_\nu = 1/4 + O(\nu^{-1/2})$，且 $c_\nu = 1/4 + \Omega(\nu^{-2/3})$。确定 c_ν 的渐近值仍是一个开放问题。

在第5节中，我们得到了本文的主要结果：第3节中针对无环 $D \in \mathcal{D}_\omega(w)$ 的下界，即 $h_\omega(w) = w/4 +\Omega(w^{3/5})$，当圈的最大长度有常数上界时，仍然渐近成立。事实上，我们证明了一个更强的结果。具体而言，我们证明，对于任意 $0 < \alpha < 1$，如果下界 $\mathrm{mac}(D) = w(D)/4 + \Omega(w(D)^\alpha)$ 对所有加权有向无环图 $D \in \mathcal{D}_\omega(w)$均成立，那么即使允许存在长度至多为某个常数的任意圈，同样的下界仍然渐近成立。在证明中，我们使用了 Bondy 的一个定理 [8]，该定理指出，有向图 D 的底层图的色数至多为 D中最长圈的长度。

补充术语与符号约定 有向图 D 的顶点 v 称为源点（汇点），当且仅当 $d^-(v) = 0$ ($d^+(v) = 0$)成立。 有向图中的所有路径和圈均为有向的。圈或路径的长度是其弧的数量。 k-路径（k-圈）是指长度为 k的路径（圈）。带权有向图 $D = (V(D), A(D), w_D)$的底层图是一个带权图 $UG(D)$，其顶点集与 D相同，其中，当且仅当 x 与 y 之间存在一条弧时， G 中的两个顶点x 和 y 相邻（$UG(D)$没有重弧），并且如果 $xy \in A(D)$，但是 $yx \notin A(D)$，那么 $w_G(xy) = w_D(xy)$，并且如果

$xy \in A(D)$ 和 $yx \in A(D)$，那么 $w_G(xy) = w_D(xy) + w_D(yx)$。若 D 是连通的，则有向图 $UG(D)$ 连通。有向图 D 的子图 H 是 D的一个连通分量，当且仅当 $UG(H)$ 是 $UG(D)$ 的一个连通分量。有向图或无向图的阶是其顶点数。本文未定义的有向图术语和记号可参见 [5, 6]。

2 任意带权有向图的界

本节分为两个小节。在第一个小节中，我们证明 mac(D) 的若干基本下界和上界；在第二个小节中，我们利用第 1 节引入的参数 $\theta(D)$ 研究 mac(D) 的一个下界。

2.1 基本界

定理 2.1. 设 $D = (V(D), A(D), w_D)$ 为一个带权有向图，且令$G = UG(D)$。

(a) 如果 D 的有向割的最小权重为 k，那么 $r^+(D) + k \leq \text{mac}(D)$。

<escape>(b) $\frac{\text{mac}(G)}{2} \leq \text{mac}(D) \leq \text{mac}(G)+r^+(D)$ 2 .</escape>

(c) $\frac{\text{mac}(G)/2+r^+(D)}{2} \leq \text{mac}(D) \leq \text{mac}(G)+r^+(D)$。

(d) 设 G 的色数为 χ。若 χ 为偶数，则

$$\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4(\chi-1)}\right) w(D) \leq \text{mac}(D);$$

若 χ 为奇数，则

$$\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4\chi}\right) w(D) \leq \text{mac}(D).$$

证明。对于 (a)，设 X 包含所有顶点 x，且 $r(x) \geq 0$。则由 (1) 得

$$r^+(D) = w_D(X,Y) - w_D(Y,X) \leq w_D(X,Y) - k \leq \text{mac}(D) - k.$$

对于 (b)，根据定义，对于任意割 (X,Y)

$$w_G(X,Y) = w_D(X,Y) + w_D(Y,X).$$

特别地，这个等式对于 G 中的最大割也成立，因此在这种情况下，$w_D(X,Y)$ 或 $w_D(Y,X)$ 至少要为 mac(G)/2，这表明了下界。对于上界，将这个等式加到 (1) 中，我们得到

$$w_G(X,Y) + \sum_{x \in X} r(x) = 2w_D(X,Y).$$

由于 $\sum_{x\in X} r(x) \le r^+(D)$ 且 $w_G(X,Y) \le \mathrm{mac}(G)$，这意味着

$$2w_D(X,Y) \le \mathrm{mac}(G) + r^+(D)$$

对于任意割，特别是当 (X,Y) 是 D 的最大权重割时。

(c) 的下界可通过将 (2) 和 (b) 相加后再除以二得到，而其上界与 (b) 中的相同。

对于 (d)，考虑将 $V(D)$ 划分为 χ 个独立集 $V_1,\ldots,V_\chi$。我们构造一个辅助加权无向完全图 G'，其包含 χ 个顶点 $v_1,\ldots,v_\chi$，并且对于 $i<j$，边 $\{v_i,v_j\}$ 的权重为 $w'(v_iv_j) = w(V_i,V_j) + w(V_j,V_i)$。注意，$w'(G') = w(D)$，并且 G' 中的每个割 (X',Y') 都对应于 D 中的两个割 (X,Y) 和 (Y,X)，使得 $w'(X',Y') = w(X,Y) + w(Y,X)$。如果 $\chi = 2t$ 是偶数，则我们将 $V(G')$ 随机且均匀地划分为两个部分 X' 和 Y'，每部分大小为 t。对于一条边 $e \in E(G')$，当 e 的一个端点位于 X' 中，另一个端点位于 Y' 中时，令其 $I(e)$ 为 $= w'(e)$；否则，令其为 $I(e) = 0$。然后

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(w'(X',Y')) &= \mathbb{E}\left(\sum_{e\in E(G')} I(e)\right) = \sum_{e\in E(G')} \mathbb{E}(I(e)) \\ &= \sum_{e\in E(G')} w'(e)\frac{2\binom{2t-2}{t-1}}{\binom{2t}{t}} = \frac{t}{2t-1}w'(G') = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\chi-2}\right)w(D).\end{aligned}$$

如果 $\chi = 2t+1$ 是奇数，那么我们将 V（G'）随机且均匀地划分为两部分 X' 和 Y'，大小分别为 $t+1$ 和 t。对于一条边 $e \in E$（G'），若 e 的一个端点位于 X' 中，另一个位于 Y' 中，则令 I（e）为 $= w'$（e）；否则令 I（e）为 $= 0$。于是

$$\mathbb{E}(w'(X',Y')) = \sum_{e\in E(G')} w'(e)\frac{2\binom{2t-1}{t-1}}{\binom{2t+1}{t}} = \frac{t+1}{2t+1}w'(G') = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\chi}\right)w(D).$$

无论哪种情况，在 G' 中都存在一个割（X''，Y''），使得 w'（X''，Y''）为 $\ge \mathbb{E}$（w（X'，Y'））；结论由此可得，因为存在相应的割（X，Y）和（Y，X），使得 w'（X''，Y''）为 $= w$（X，Y）$+ w$（Y，X）。 □

定理 2.1 的 (b) 部分表明，如果 $r^+(D) = 0$，那么 $\mathrm{mac}(D) = \mathrm{mac}(G)/2$。令 D 为任意强有向图（不带弧权重），并令 G 为 D 的底层图。我们可以如下为 D 指定弧权重，使得 $r^+(D) = 0$。初始时令所有权重为零。对于每条弧 $uv \in A(D)$，令 C_{uv} 为包含 uv 的一个圈，并将 C_{uv} 中所有弧的权重加一。对所有弧 uv 完成此操作后，我们注意到所有权重均为正，且 $r^+(D) = 0$。因此，对于有向图

D 采用这些权重时，我们有 $\mathrm{mac}(D) = \mathrm{mac}(G)\ 2$。注意，$\mathrm{mac}(D) \geq \mathrm{mac}(G)\ 2$（根据 (b)）。因此，对于一般有向图或一般强有向图，我们能得到的最佳界限（如果不以任何方式限制弧权重），恰好与将 D 的底层图的界限除以 2 后所得的界限相同。

定理 2.1 的 (d) 部分使我们能够立即得到一些研究较为充分的图类的下界。例如，对于任意整数 $k > 0$，如果一个图G 的任意诱导子图的最小度数都不超过 k，则称该图为 k-退化图。众所周知，如果一个图是 k-退化图，则其色数至多为 $k + 1$。如果 $D = (V, A, w)$ 是一个最大出度为 $\Delta^+(D) \leq k$ 或最大入度为 $\Delta^-(D) \leq k$ 的带权有向图，那么 D 的底层图是 $2k$-退化图。事实上，假设 $\Delta^+(D) \leq k$，并令 G 为 D的底层图。由于 $\Delta^+(D) \leq k$，对于 D的任意诱导子有向图 D'，总存在一个顶点 $v \in V(D')$，其入度至多为 k，这意味着 $d_{G[V(D')]}(v) = d^+_{D'}(v) + d^-_{D'}(v) \leq 2k$。因此，$G$ 是一个 $2k$-退化图。将 Δ^+ 和 Δ^- 互换，同样的论证依然成立。因此，我们得到以下命题。

命题 2.2. 设 $D = (V, A, w)$ 是一个带权有向图，具有 $\Delta^+(D) \leq k$或 $\Delta^-(D) \leq k$。则 $\mathrm{mac}(D) \geq (\frac{1}{4} + \frac{1}{8k+4})w(D)$。

设 T_k 为 k-正则竞赛图，K_{2k+1} 为阶数为 $2k + 1$ 的完全图，且这两个图中每条弧的权重均为一。注意，$r^+(T_k) = 0$，因此 $\mathrm{mac}(T_k) = \mathrm{mac}(K_{2k+1})\ 2$。于是我们有

$$\mathrm{mac}(T_k) = \frac{\mathrm{mac}(K_{2k+1})}{2} = \frac{k(k+1)}{2} = k(2k+1)\frac{k+1}{4k+2} = \frac{k+1}{4k+2}w(T_k).$$

因此，命题 2.2 是紧的。

利用以下 Gallai-Hasse-Roy-Vitaver 定理 [11, 14, 19, 20]，不难给出最大有向割的一个紧下界，其中有向图的最长路径的阶为 ν。

定理2.3。 *[11, 14, 19, 20]*每个有向图 D 都包含一条有向路径，其$\chi(D)$个顶点。

定理 2.4. 如果 D 中最长路径的顶点数 ν 为奇数（分别为偶数），那么 D 有一个权重至少为 $(\frac{1}{4} + \frac{1}{4\nu})w(D)$ $((\frac{1}{4} + 4^{-1}_{(\nu-1)})w(D)$ 的有向割（分别如此）。

同样，很容易验证这个界对正则竞赛图是紧的。

令 $\mathcal{B}(D)$ 表示 D 的二部子有向图 R 的集合，其中对于 R 的每个连通分量 R_1，若其二部划分为 (X_1, X_2)，则 X_1 和Y_1 在 D 中均诱导出独立集。

引理 2.5。设 $D = (V, A, w)$ 是一个带权有向图。如果 $R \in \mathcal{B}(D)$，那么 $\mathrm{mac}(D) \geq \frac{w(D)}{4} + \frac{w(R)}{4}$。

证明。设 $R_1, \ldots, R_t$ 为 R 的连通分量，且 (X_i, Y_i) 是 R_i, $i \in [t]$ 的二部划分。我们将按照如下方式构造 $V(D)$ 的一个随机划分 (X, Y)。对于每个 $i \in [t]$，我们以 $1/2$ 的概率令 X_i 属于 X 且 Y_i 属于 Y，并以 $1/2$ 的概率令 X_i 属于 Y 且 Y_i 属于 X。因此，X_i 和 Y_i 永远不会属于划分 (X, Y) 中的同一个集合。对于任何不属于 $V(R)$ 的顶点，我们以 $1/2$ 的概率将其分配给 X，以 $1/2$ 的概率将其分配给 Y。

我们注意到，$A(R)$ 中的每条弧以概率 $1/2$ 属于有向割 (X, Y)，而 D 中的每条其他弧以至少 $1/4$ 的概率属于有向割 (X, Y)。因此，划分 (X, Y) 的平均权重至少为 $w_{(R)}\frac{2}{} + \frac{w(D)}{4} = \frac{w_{(R)}(D)+w(R)}{4}$，这就证明了该定理。□

由于 D 中的任意匹配显然都属于 $\mathcal{B}(D)$，因此有以下结论。

推论 2.6. 设 $D = (V, A, w)$ 为一个带权有向图，且 M 是 D 中的一个匹配。那么 $\mathrm{mac}(D) \geq \frac{w_{(D)}}{4} + \frac{w_{(M)}}{4}$

2.2 给定 $\theta(D)$ 的界限

回顾一下，$\theta(D) = r^+(D)/w(D)$。我们将给出 $\mathrm{mac}(D)$ 关于 $\theta(D)$ 和 $w(D)$ 的界。回顾一下，

$$l(\theta) = \begin{cases} \left(\frac{1}{4} + \frac{\theta^2}{4(1-2\theta)}\right) & \text{if } \theta < 1/3; \\ \theta & \text{if } \theta \geq 1/3. \end{cases}$$

我们来讨论一下，为什么要研究以 $\theta(D)$ 表示的 $\mathrm{mac}(D)$ 下界。如果 $r^+(D)/w(D) = 0$，那么该问题等价于底层图的 MaximumWeighted Cut 问题（参见定理 2.1 证明后的注释）。因此，能够得到的最佳界为 $\mathrm{mac}(D) \geq w(D)/4$。如果 $r^+(D)/w(D) = 1$，那么 D 的加权最大割包含 D 中的所有弧，因此该问题很容易，且 $\mathrm{mac}(D) = w(D)$。

因此，在 $0 < r^+(D)/w(D) < 1$ 的情况下，寻找最佳界似乎很自然。将 D 中的所有权重乘以常数 c，会使 $r^+(D)$、$w(D)$ 和 $\mathrm{mac}(D)$ 都增加 c 倍。因此，有意义的参数是 $r^+(D)/w(D)$，因为将所有权重乘以给定常数不会改变它。于是，我们希望找到 $\mathrm{mac}(D)$ 的最佳界，其形式为 $\mathrm{mac}(D) \geq f(\theta(D)) \cdot w(D)$，其中 f 为某个函数。

引理 2.7. $\mathrm{mac}(D) \geq l(\theta(D)) \cdot w(D)$】【。

证明。注意，对于 $\theta(D) \geq 1/3$，界就是 (2)。因此，以下我们假设 $\theta < 1/3$。设 D 为任意带权有向图，并令 $\theta = \theta(D)$。令

R^+包含所有顶点 x，且在 D 中满足 $r(x) > 0$，并令 $R^- = V(D) \setminus R^+$。也就是说，对于所有 $y \in R^-$，都有 $r(y) \leq 0$。

令 $\bar{p} = \frac{\theta}{2(1-2\theta)}$，并以概率 $(1/2 + \bar{p})$ 将 R^+ 中的任意顶点放入 X，以概率 $(1/2 - \bar{p})$ 将 R^- 中的任意顶点放入 X。令 $Y = V(D) \setminus X$。对于一条弧 $a = uv$，若 $u \in X$ 且 $v \in Y$，则令 $I(a) = w(a)$；否则令 $I(a) = 0$。于是

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(w(X,Y)) &= \mathbb{E}\left(\sum_{a \in A(D)} I(a)\right) = \sum_{a \in A(D)} \mathbb{E}(I(a)) \\
&= \sum_{u,v \in R^+} \mathbb{E}(I(uv)) + \sum_{u,v \in R^-} \mathbb{E}(I(uv)) + \sum_{\substack{u \in R^+ \\ v \in R^-}} \mathbb{E}(I(uv)) + \sum_{\substack{u \in R^- \\ v \in R^+}} \mathbb{E}(I(uv)) \\
&= \sum_{u,v \in R^+} w(uv)\left(\frac{1}{4} - \bar{p}^2\right) + \sum_{u,v \in R^-} w(uv)\left(\frac{1}{4} - \bar{p}^2\right) + \\
&+ \sum_{\substack{u \in R^+ \\ v \in R^-}} w(uv)\left(\frac{1}{2} + \bar{p}\right)^2 + \sum_{\substack{u \in R^- \\ v \in R^+}} w(uv)\left(\frac{1}{2} - \bar{p}\right)^2 \\
&= \left(\frac{1}{4} - \bar{p}^2\right) w(D) + (2\bar{p}^2 + \bar{p}) w(R^+, R^-) + (2\bar{p}^2 - \bar{p}) w(R^-, R^+) \\
&= \left(\frac{1}{4} - \bar{p}^2\right) w(D) + 2\bar{p}^2 (w(R^+, R^-) + w(R^-, R^+)) + \\
&+ \bar{p}(w(R^+, R^-) - w(R^-, R^+)).
\end{aligned}$$

由于 $w(R^+, R^-) - w(R^-, R^+) = r^+(D)$，且 $r^+(D) = \theta \cdot w(D)$，

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(w(X,Y)) &\geq \frac{w(D)}{4} + \bar{p}^2\left(-w(D) + 2\theta w(D) + \frac{\theta w(D)}{\bar{p}}\right) \\
&= \frac{w(D)}{4} + \left(\frac{\theta}{2(1-2\theta)}\right)^2 w(D)\left(-1 + 2\theta + \frac{\theta \cdot 2(1-2\theta)}{\theta}\right) \\
&= \frac{w(D)}{4} + \frac{\theta^2}{4(1-2\theta)^2} w(D)\left(-1 + 2\theta + 2(1-2\theta)\right) \\
&= \frac{w(D)}{4} + \frac{\theta^2}{4(1-2\theta)} w(D).
\end{aligned}$$

这意味着存在一个权重至少为 $\left(\frac{1}{4} + \frac{\theta^2}{4(1-2\theta)}\right) \cdot w(D)$ 的割，正如所需。

□

以下引理将有助于我们分析某些带权有向图的割大小。

引理 2.8. 设 Q 和 k 为正实数，且 $g(x,y) = Qxy + x(k-x)/2 + y(k-y)/2$。若 $0 < Q \leq 1/2$，则函数 $g(x,y)$ 取最大值

当 $x = y = 2^{k(1-Q)}$ 时，在 $x, y \in [0,k]$ 上；且 $g(2^{k(1-Q)}, 2^{k(1-Q)}) = 4^{k^2(1-Q)}$。若 $1/2 < Q < 1$，则函数 $g(x,y)$ 在 $x, y \in [0,k]$ 上取最大值，当 $x = y = k$ 且 $g(k,k) = Qk^2$ 时。

证明。我们有

$$\frac{\partial g}{\partial x} = Qy + \frac{k}{2} - x,$$
$$\frac{\partial g}{\partial y} = Qx + \frac{k}{2} - y.$$

因此，临界点为 $(2^{k(1-Q)}, 2^{k(1-Q)})$，且 $g(2^{k(1-Q)}, 2^{k(1-Q)}) = 4^{k^2(1-Q)}$。由于 $g(x,y)$ 是连续函数，且其一阶偏导数始终存在，因此最优值要么位于边界上，要么位于临界点处。因此，我们只需将临界点处的函数值与边界上的函数值进行比较。由于 $g(x,y)$ 是对称函数，因此下面将分别讨论 $x = k$ 和 $x = 0$ 的情况。如果 $x = k$，则注意到，当 $Q > 1/2$ 时，$g(k,y)$ 的最大值在 $y = k$ 处取得，且 $g(k,k) = Qk^2$；而当 $Q \le 1/2$ 时，$g(k,y)$ 的最大值在 $y = k(Q+1/2)$ 处取得，且 $g(k, k(Q+1/2)) = k^2 \frac{Q^2+Q+1/4}{2}$。如果 $x = 0$，则 $g(x,y)$ 的最大值在 $(0, k/2)$ 处取得，且 $g(0, k/2) = k^2/8$。

若 $Q \le 1/2$，则有 $2^{k(1-Q)} \le k$，且 $4^{k^2(1-Q)} \ge \max\{\frac{Q^2+Q+1/4}{2}k^2, \frac{k^2}{8}\}$，这证明了第一部分。若 $Q > 1/2$，则 $2^{k(1-Q)} > k$，因此结论由 $Qk^2 \ge \frac{k^2}{8}$ 得出。 □

定理 2.9. 设 θ 满足 $0 \le \theta \le 1$。

- 若 $0 \le \theta \le 1/3$，则对每个 $\epsilon > 0$，都存在一个有向图 D，满足 $\theta(D) = \theta$，且满足

$$\mathrm{mac}(D) < w(D) \cdot (1+\epsilon) l(\theta).$$

- 若 $1/3 < \theta \le 1$，则存在一个有向图 D，满足 $\theta(D) = \theta$，且满足 $\mathrm{mac}(D) = \theta \cdot w(D)$ $(= l(\theta) \cdot w(D))$。

证明。若 $\theta = 1$，则 $\mathrm{mac}(D) = w(D) = r^+(D)$ 始终成立，因此假设 $\theta < 1$。设 D_k 为一个由两个顶点不相交的正则竞赛图组成的有向图，A_k 和 B_k 的阶均为 k，并且包含从 A_k 到 B_k 的所有弧，且没有从 B_k 到 A_k 的弧。定义 Q 如下。

$$Q = \frac{\theta(1-1/k)}{1-\theta}.$$

设从 A_k 到 B_k 的每条弧的权重为 Q，设 A_k 和 B_k 中每条弧的权重均为 1。

设 (X,Y) 是 D_k 中的一个最大割，并设 $x = |V(A_k) \cap X|$ 以及 $y = |V(B_k) \cap Y|$。则有以下结论。

• $\mathrm{mac}(D_k) = Qxy + x(k-x)/2 + y(k-y)/2$，因为该割包含来自 A_k 的 $x(k-x)/2$ 条弧，以及来自 B_k 的 $y(k-y)/2$ 条弧（因为对于每个 $x \in V(T)$，都有 $d_T^+(x) = d_T^-(x)$，其中 $T \in \{A_k, B_k\}$；对于每个 $S \subseteq V(T)$，离开 S 的弧数等于进入 S 的弧数）。

• $r^+(D_k) = Qk^2$，因为对于所有 $a \in V(A_k)$，$r(a) = kQ$，且对于所有 $b \in V(B_k)$，$r(b) = -kQ$。

• $w(D_k) = 2 \cdot \binom{k}{2} + Qk^2 = k^2 - k + Qk^2$.

• $\theta(D_k) = r^+(D_k)/w(D_k) = Qk^2/(k^2 - k + Qk^2) = Q/(1 + Q - 1/k)$。

• $\theta(D_k) = \theta$，正如我们所定义的 $Q = \theta(1 - 1/k)/(1 - \theta)$，这等价于 $\theta(1 + Q - 1/k) = Q$，因此由上述陈述可知该结论成立。

假设 $0 \le \theta \le 1/3$。注意，对于任意 k，$Q < 1/2$。选择足够大的 k，使得

$$\frac{1}{4(1-Q^2) - 4(1-Q)/k} \le (1+\epsilon)\frac{1}{4(1-Q^2)}.$$

令 $\theta = \theta(D_k)$。那么，根据引理 2.8、我们对 k 的选择以及 Q 的定义，可得

$$\begin{aligned}
\mathrm{mac}(D_k) &\le \tfrac{k^2}{4(1-Q)} \\
&= (k^2 - k + Qk^2) \cdot \left(\tfrac{k^2}{4(1-Q)(k^2-k+Qk^2)}\right) \\
&= w(D)\left(\tfrac{1}{4(1-Q)(1-1/k+Q)}\right) \\
&= w(D)\left(\tfrac{1}{4(1-Q^2)-4(1-Q)/k}\right) \\
&\le (1+\epsilon)w(D)\left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{\theta^2}{4(1-2\theta)}\right).
\end{aligned}$$

如果 $1/3 < \theta \le 1$，那么我们选择足够大的 k，使得 $Q > 1/2$。根据引理 2.8 以及我们先前的观察

$$\mathrm{mac}(D_k) = Qk^2 = r^+(D_k) = \theta \cdot w(D_k).$$

□

定义 2.10. 对于每个 $\theta \in [0,1]$，令 $f(\theta)$ 为所有实数 g 的上确界，使得对于所有满足 $\theta = \theta(D)$ 的加权有向图 D，$\mathrm{mac}(D) \ge g \cdot w(D)$ 成立。

下一个定理由引理 2.7 和定理 2.9 得出。

定理 2.11。我们有 $f(\theta) = l(\theta)$。

3 加权有向无环图的界

回顾一下， $h_\mu(m)$ 是满足以下条件的最大整数：每个具有 m 条弧的无环有向多重图都包含一个大小至少为 $h_\mu(m)$ 的有向割。令 $\mathcal{D}_\omega(w)$ 表示权重为 $w = w(D)$ 的带权有向图集合，其中 D 的每条弧的权重至少为 1。于是，对于每个 $w \geq 1$，令 $h_\omega(w)$ 表示实数 g 的上确界，使得每个无环 $D \in \mathcal{D}_\omega(w)$ 都包含一个权重至少为 g 的有向割。显然，对于每个整数 $m \geq 1$，都有 $h_\omega(m) \leq h_\mu(m)$。在本节中，我们重点给出 $h_\omega(m)$ 的界。首先，我们在定理 3.1 中证明 $h_\mu(m) = \frac{m}{4} + O(m^{3/4})$，从而推出 $h_\omega(w) = \frac{w}{4} + O(w^{3/4})$。随后，在定理 3.3 中，我们证明 $h_\omega(w) = \frac{w}{4} + \Omega(w^{3/5})$。

定理 3.1。存在一个常数 k_1，使得对每个整数 $m \geq 1$，都存在一个有向无环多重图 D'_m，其含有 m 条弧，使得

$$\operatorname{mac}(D'_m) \leq \frac{m}{4} + k_1 m^{3/4}.$$

证明。首先，我们按如下方式构造一个有向多重图 D，其顶点为 $n \geq 4$。令 $V(D) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$，并令 $q = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$。令 T_i 表示顶点为 q 的传递竞赛图 $\{v_i, v_{i+1}, \ldots, v_{i+q-1}\}$，其中所有指标均按模 n 计算，且所有弧都沿着次序 $(v_i, v_{i+1}, \ldots, v_{i+q-1})$ 向前指向。令 $A(D) = \cup_{i=1}^{n} A(T_i)$，并注意到 D 是一个正则有向多重图。此外， $|A(D)| = n\binom{q}{2}$。

设 (X, Y) 是 D 中的一个最优割。由于对于每个 $i = 1, 2, \ldots, n$，(X, Y) 至多包含来自 T_i 的底层图的 $q^2/4$ 条边（因为 T_i 的底层图是一个具有 q 个顶点的完全图），我们注意到，(X, Y) 至多包含来自 D 的底层多重图的 $nq^2/4$ 条边。由于 D 是正则的，我们注意到 $\operatorname{mac}(D) \leq nq^2/8$。

令 D_n 由 D 删除所有满足 $j > i$的弧 $v_j v_i$ 得到。注意，对于每个 $s = 1$、2、3、.....、$q-1$，我们恰好从 T_{n+1-s} 中删除 $s(q-s)$ 条弧。因此，

$$\begin{aligned}
|A(D_n)| &= |A(D)| - \sum_{s=1}^{q-1} (qs - s^2) \\
&= \frac{nq(q-1)}{2} - q\left(\sum_{s=1}^{q-1} s\right) + \left(\sum_{s=1}^{q-1} s^2\right) \\
&= \frac{nq^2}{2} - \frac{nq}{2} - q\frac{q(q-1)}{2} + \frac{(q-1)q(2q-1)}{6} \\
&= \frac{nq^2}{2} - \frac{nq}{2} - \frac{3q^3 - 3q^2}{6} + \frac{2q^3 - 3q^2 + q}{6} \\
&= \frac{nq^2}{2} - \frac{nq}{2} - \frac{q^3}{6} + \frac{q}{6}.
\end{aligned}$$

整理出 $\frac{nq^2}{2}$ 项，然后两边同除以四，得到

$$\mathrm{mac}(D_n) \le \mathrm{mac}(D) \le \frac{nq^2}{8} = \frac{|A(D_n)|}{4} + \frac{nq}{8} + \frac{q^3}{24} - \frac{q}{24} \le \frac{|A(D_n)|}{4} + \frac{3nq+q^3}{24}.$$

根据 q 的定义，存在某个 $\alpha \ge 1$ 使得 $n = \alpha q^2$，因此

$$\mathrm{mac}(D_n) \le \frac{|A(D_n)|}{4} + q^3 \times \frac{3\alpha+1}{24}.$$

另请注意,

$$|A(D_n)|^{3/4} = \left(\frac{nq^2}{2} - \frac{nq}{2} - \frac{q^3}{6} + \frac{q}{6}\right)^{3/4} = q^3\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2q} - \frac{1}{6q} + \frac{1}{6q^3}\right)^{3/4}$$

这意味着

$$\mathrm{mac}(D_n) \le \frac{|A(D_n)|}{4} + \frac{|A(D_n)|^{3/4}}{\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2q} - \frac{1}{6q} + \frac{1}{6q^3}\right)^{3/4}} \times \frac{3\alpha+1}{24}.$$

由于 $\alpha = n/q^2$，我们有

$$1 \le \frac{n}{\lfloor\sqrt{n}\rfloor^2} = \alpha = \frac{(\sqrt{n})^2}{q^2} \le \frac{(q+1)^2}{q^2} = \left(1+\frac{1}{q}\right)^2 \le 2.25.$$

因此,

$$\frac{3\alpha+1}{24\left(\alpha\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2q}\right) - \frac{1}{6q} + \frac{1}{6q^3}\right)^{3/4}} \le \frac{7.75}{24\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2q} - \frac{1}{6q}\right)^{3/4}} \le \frac{7.75}{24\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{12}\right)^{3/4}}.$$

所以，若令 $k_1' = \frac{7.75}{24\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{12}\right)^{3/4}}$，则

$$\mathrm{mac}(D_n) \le \frac{|A(D_n)|}{4} + k_1'|A(D_n)|^{3/4}.$$

为了完成证明，我们将证明该界限可以扩展到具有 n 个顶点和 $m \ge 1$ 条弧的每一个有向多重图 D_m'。对于任意整数$n \ge 2$，定义函数

$$f(n) = \frac{nq^2}{2} - \frac{nq}{2} - \frac{q^3}{6} + \frac{q}{6},$$

其中 $q = \lfloor\sqrt{n}\rfloor$. 我们首先证明 $f(n)$ 是一个单调递增函数。令 $n \ge 3$. 首先假设 $\lfloor\sqrt{n}\rfloor = \lfloor\sqrt{n-1}\rfloor = q$. 那么

$$f(n) - f(n-1) = q(q-1)/2 \ge 0.$$

现在假设 $\lfloor\sqrt{n-1}\rfloor = q-1$. 那么

$$\begin{aligned} f(n) - f(n-1) &= \frac{nq(q-1)}{2} - \frac{q^3}{6} + \frac{q}{6} - \left(\frac{(n-1)(q-1)(q-2)}{2} - \frac{(q-1)^3}{6} + \frac{q-1}{6}\right) \\ &= (q-1)(n-1) \geq 0. \end{aligned}$$

由于 $q/2 \leq n-1$，我们始终有 $f(n) - f(n-1) \leq (q-1)(n-1)$。令 n 为满足 $m \leq |A(D_n)| = f(n)$ 的最小整数，即 $f(n-1) < m \leq f(n)$。令 $m_n = |A(D_n)|$。令 D'_m 为从 D_n 中删除任意 $m_n - m$ 条弧后得到的图。注意，

$$m_n - m = f(n) - m \leq f(n) - f(n-1) \leq (q-1)(n-1) \leq nq \leq n^{3/2}.$$

此外，

$$\begin{aligned} m &> f(n-1) \\ &\geq \frac{(n-1)\lfloor\sqrt{n-1}\rfloor^2}{2} - \frac{(n-1)\lfloor\sqrt{n-1}\rfloor}{2} - \frac{\lfloor\sqrt{n-1}\rfloor^3}{6} + \frac{\lfloor\sqrt{n-1}\rfloor}{6} \\ &> \frac{(n-1)(\sqrt{n-1}-1)^2}{2} - \frac{(n-1)\sqrt{n-1}}{2} - \frac{\sqrt{n-1}^3}{6} \\ &= \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} - \frac{5(n-1)\sqrt{n-1}}{3}. \end{aligned}$$

我们将证明 $m > \frac{n^2}{144}$ 当且仅当 $n \geq 12$。如果我们能够证明对于所有 $n \geq 12$，那么这便可由上述结论推出。

$$\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} - \frac{5(n-1)\sqrt{n-1}}{3} > \frac{n^2}{144}.$$

这等价于

$$n^2\left(1 - \frac{1}{72}\right) > n + \frac{10(n-1)\sqrt{n-1}}{3}.$$

由于 $n \geq 12$，我们有 $(1-1/72)\cdot\sqrt{n} > 3.41$，这意味着

$$n^{3/2}\cdot n^{1/2}\left(1 - \frac{1}{72}\right) > 3.41\cdot n^{3/2} > n + \frac{10(n-1)\sqrt{n-1}}{3}.$$

因此，如果 $m > \frac{n^2}{144}$ 则 $n \geq 12$。如果 $n < 12$，我们有 $m \geq 1 > n^2/144$，所以 $m > \frac{n^2}{144}$ 始终成立。这意味着 $m^{3/4} > \frac{n^{3/2}}{144^{3/4}}$，因此 $42m^{3/4} > 144^{3/4}m^{3/4} >$。

$n^{3/2}$。现在，

$$\begin{aligned}\mathrm{mac}(D'_m) \le \mathrm{mac}(D_n) &\le \frac{|A(D_n)|}{4} + k'_1|A(D_n)|^{3/4} \\ &= \frac{m + (m_n - m)}{4} + k'_1(m + (m'_n - m))^{3/4} \\ &< \frac{m + n^{3/2}}{4} + k'_1(m + n^{3/2})^{3/4} \\ &< \frac{m + 42m^{3/4}}{4} + k'_1(m + 42m^{3/4})^{3/4} \\ &< \frac{m}{4} + 11m^{3/4} + k'_1(43m)^{3/4} \\ &= \frac{m}{4} + \left(11 + k'_1 \cdot 43^{3/4}\right) m^{3/4}.\end{aligned}$$

因此，对于所有满足 $k_1 = 11 + k'_1 \cdot 43^{3/4}$ 的 m，所需的界限都成立。 □

根据 $h_\omega(w)$ 的单调性，定理 3.1 推出以下推论。

推论 3.2. $h_\omega(w) = \frac{w}{4} + O(w^{3/4})$.

定理 3 3 $D \in \mathcal{D}_\omega$ w D $\ge \frac{w}{4} + \ldots$ 对所有无环有向图 ( )，我们有 mac( ) (D) ( ) 24。

证明. 设 D 是 $\mathcal{D}_\omega(w)$ 中的一个加权有向无环图，并设 $P = p_1p_2 \ldots p_l$ 是 D 中的一条最长路径。若 $l \ge w(D)^{0.6}$，则考虑两个匹配 $M_0 = \{p_1p_2, p_3p_4, p_5p_6, \ldots\}$ $M_1 = \{p_2p_3, p_4p_5, p_6p_7, \ldots\}$ w M_0 + 和 . w M_1 = w P $\ge l - 1 \ge w$ D $^{0.6} - 1$ 注意到 ( ) ( ) ( ) ( )。由推论 . 可得 mac(D) $\ge \frac{w}{4}$ (D $\frac{2\ 6}{w(M_0)}$)，且 mac(D) $\ge$ ^{w} (D) 4 + ^{w} (M_1) 4，这在 $w(D) \ge 2$ 时推出以下结论。

$$\mathrm{mac}(D) \ge \frac{w(D)}{4} + \frac{w(M_0) + w(M_1)}{8} \ge \frac{w(D)}{4} + \frac{w(D)^{0.6} - 1}{8} \ge \frac{w(D)}{4} + \frac{w(D)^{0.6}}{24}.$$

并且，如果 $w(D) < 2$ 那么 $|A(D)| \le 1$ 且 mac(D) $= w(D) \ge \frac{w}{4}$ (D + $\frac{w(D)^{0.6}}{24}$)。因此，我们可以假设 $l < w(D)^{0.6}$，由定理 4.4 可得[2] 如下结论：

$$\mathrm{mac}(D) \ge \frac{w(D)}{4} + \frac{k_2 \cdot w(D)}{l^{2/3}} \ge \frac{w(D)}{4} + \frac{k_2 \cdot w(D)}{(w(D)^{0.6})^{2/3}} \ge \frac{w(D)}{4} + k_2 \cdot w(D)^{0.6}.$$

那么我们就完成了，因为 $k_2 > \frac{1}{24}$。 □

[2]注意，定理 4.4 的证明并未使用定理 3.3，也就是说，这两个定理之间不存在循环依赖。

令 α_0 为满足以下条件的 $\alpha > 0$ 的上确界：存在一个常数 $k > 0$，使得对于下述类别中的所有有向图，以下结论成立：$\mathrm{mac}(D) \geq_{w(D)_4} + kw(D)^{\alpha}$。我们有:

关于 α_0，我们了解多少			
	加权 有向图 $D \in \mathcal{D}_{\omega}(w)$	无权重 有向 多重有向图	 简单 有向图
任意有向图	$\alpha_0 = 0.5$	$\alpha_0 = 0.5$	$\alpha_0 = 0.5$
无环有向图	$\alpha_0 \in [0.6, 0.75]$	$\alpha_0 \in [0.6, 0.75]$	$\alpha_0 \in [0.6, 0.80]$

自然地，我们有如下结论:

开放问题 3.4。上表中 α_0 的精确值是多少?

4 有界路径长度的无环有向图

在本节中，我们研究以下问题。

开放问题 4.1。对于每个 $\nu \geq 1$，确定 $c \geq 0$ 的上确界 c_{ν}，使得所有最大路径阶数为 ν 的加权有向无环图均满足 $\mathrm{mac}(D) \geq c \cdot w(D)$。

注意，上述问题并未对弧权重施加任何约束。注意，c_{ν} 是非递增的。事实上，对于任意具有最长路径序 ν 且满足 $\mathrm{mac}(D) = c \cdot w(D)$ 的有向图 D，我们都可以通过添加一个新顶点以及一条权重为 0 的新弧，将其最长路径延长，从而由 D 构造出有向图 D'，使得 D' 的最长路径包含 $\nu+1$ 个顶点。因此，$\mathrm{mac}(D') = \mathrm{mac}(D) = c \cdot w(D) = c \cdot w(D')$。这意味着 $c_{\nu+1} \leq c_{\nu}$。

当 $\nu \leq 11$ 时，我们可以计算出 c_{ν} 的精确值（见附录）。在本节中，我们重点研究 c_{ν} 的界。由于定理 3.1 中 D_n 的最长路径所包含的顶点数为 n，因此通过考虑 D_{ν}，我们可以轻松得到以下上界。

定理 4.2。对于 $\nu \geq 12$，我们有 $c_{\nu} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{3\sqrt{\nu}-10}$。

证明。对于每个 $\nu \geq 12$，令 D_{ν} 按照定理 3.1 中的定义。回顾一下，

$$\begin{aligned} \mathrm{mac}(D_{\nu}) &\leq \frac{|A(D_{\nu})|}{4} + \frac{3\nu\lfloor\sqrt{\nu}\rfloor + \lfloor\sqrt{\nu}\rfloor^3}{24} \\ &= |A(D_{\nu})| \left(\frac{1}{4} + \frac{3\nu\lfloor\sqrt{\nu}\rfloor + \lfloor\sqrt{\nu}\rfloor^3}{24\left(\frac{\nu\lfloor\sqrt{\nu}\rfloor^2}{2} - \frac{\nu\lfloor\sqrt{\nu}\rfloor}{2} - \frac{\lfloor\sqrt{\nu}\rfloor^3}{6} + \frac{\lfloor\sqrt{\nu}\rfloor}{6}\right)} \right). \end{aligned}$$

利用 $\sqrt{\nu}-1 \le \lfloor\sqrt{\nu}\rfloor \le \sqrt{\nu}$，我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{mac}(D_\nu) &\le |A(D_\nu)|\left(\tfrac{1}{4}+\tfrac{\nu^{3/2}}{3\nu(\sqrt{\nu}-1)^2-3\nu^{3/2}-\nu^{3/2}+\sqrt{\nu}-1}\right)\\ &\le |A(D_\nu)|\left(\tfrac{1}{4}+\tfrac{\nu^{3/2}}{3\nu^2-10\nu^{3/2}}\right)\\ &= |A(D_\nu)|\left(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{3\sqrt{\nu}-10}\right).\end{aligned}$$

因此， $c_\nu \le \frac{1}{4}+\frac{1}{3\sqrt{\nu}-10}$，证明至此完成。 □

本节的主要目标是证明 c_ν 的一个下界。我们得到所有 ν 的下界的主要思路大致如下：首先证明（定理 4.3）对于每个 $\nu \in N^*$，都有 $c_\nu = \frac{1}{4}+\Omega(\nu^{-2/3})$，其中$N^*=\{n_i^*:\quad i\in\mathbb{N}, i\ge 2\}$（ N^* 的元素将在后文定义）。因此，对于任意 $\nu \ge n_2^*$，我们可以假设 $n_{k-1}^* \le \nu < n_k^*$ 对某个 k 成立。接下来我们将证明，这两个数之间的差距相对于ν 并不太大（即 $n_k^*-n_{k-1}^*=O(\nu^{2/3})$）。由于 c_ν 单调不增，我们得出$c_\nu \ge c_{n_k^*}=\frac{1}{4}+\Omega({n_k^*}^{-2/3})=\frac{1}{4}+\Omega((\nu+O(\nu^{2/3}))^{-2/3}) = \frac{1}{4}+\Omega(\nu^{-2/3})$。对于每个整数 $k\ge 2$，令

$$\begin{aligned}n_k^* &= 2k+2\sum_{i=1}^{\lfloor\sqrt{k/2}\rfloor}\left(2\left\lfloor\frac{2k-2i^2-i}{2}\right\rfloor+i\right)\\ &= 2k+4k\lfloor\sqrt{k/2}\rfloor-2\left\lfloor\frac{\sqrt{k/2}+1}{2}\right\rfloor-4\sum_{i=1}^{\lfloor\sqrt{k/2}\rfloor}i^2\\ &= 2k+4k\lfloor\sqrt{k/2}\rfloor-2\left\lfloor\frac{\sqrt{k/2}+1}{2}\right\rfloor-\frac{2}{3}\lfloor\sqrt{k/2}\rfloor(\lfloor\sqrt{k/2}\rfloor+1)(2\lfloor\sqrt{k/2}\rfloor+1).\end{aligned}$$

定理 4.3. 对任意整数 $k\ge 7$，我们有 $c_{n_k^*}\ge\frac{1}{4}+\frac{1}{8{n_k^*}^{2/3}-4}$。

证明. 对任意正整数 $k\ge 7$ 和 $0\le q\le z=\lfloor\sqrt{k/2}\rfloor$，令 $f(q)=\left\lfloor\frac{2k-2q^2-q}{2}\right\rfloor$。令 S_q 为任意一个大小为 $2f(q)+q$ 的集合。
断言 A：令 (X,Y) 为 S_q 的一个随机划分，其中 $|X|=f(q)+q$ 且 $|Y|=f(q)$。对于任意不同的 s_1、$s_2\in S_q$，$s_1\in X$ 和 $s_2\in Y$ 同时成立的概率至少为 $\frac{k}{4k-2}$。

命题 A 的证明： $s_1\in X$ 是 $\frac{f\ q\ +q}{2f\ q\ +q}()()$的概率。而在给定 $s_1\in X$的情况下， $s_2\in Y$是$^{f}{}_{(q)\ 2f(q)+q-1}$的概率。因此， $s_1\in X$ 和 $s_2\in Y$的概率如下：

$$\mathbb{P}(s_1 \in X,\ s_2 \in Y) = \frac{f(q)+q}{2f(q)+q} \times \frac{f(q)}{2f(q)+q-1}.$$

我们首先考虑 q 为偶数的情况，此时 $f(q) = k-q^2-\frac{q}{2}$。在这种情况下，$\mathbb{P}(s_1 \in X,\ s_2 \in Y) \geq \frac{k}{4k-2}$ 等价于以下不等式。

$$\frac{(k-q^2+q/2)(k-q^2-q/2)}{(2k-2q^2)(2k-2q^2-1)} \geq \frac{k}{4k-2}.$$

这等价于以下内容：

$$(4k-2)\left[(k-q^2)^2-\frac{q^2}{4}\right] \geq 4k(k-q^2)\left(k-q^2-\frac{1}{2}\right).$$

从两边减去 $4k(k-q^2)^2$，得到以下等价不等式。

$$(-2)\cdot\left[(k-q^2)^2-\frac{q^2}{4}\right] - kq^2 \geq -2k(k-q^2).$$

因此，

$$0 \geq 2k^2 - 4kq^2 + 2q^4 - \frac{q^2}{2} + kq^2 - 2k(k-q^2).$$

注意，这等价于 $0 \geq 2q^4 - kq^2 - \frac{q^2}{2}$。回忆一下$q \leq \lfloor\sqrt{k/2}\rfloor$，这意味着 $kq^2 \geq 2q^4$，进而意味着 $0 \geq 2q^4 - kq^2 - \frac{q^2}{2}$成立。因此，$\mathbb{P}(s_1 \in X,\ s_2 \in Y) \geq \frac{k}{4k-2}$也成立。

现在考虑 q 为奇数的情形，此时 $f(q) = k-q^2-\frac{q}{2}-0.5$。令 $k^* = k-1/2$，并注意以下结论成立。

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(s_1 \in X,\ s_2 \in Y) &= \frac{f(q)+q}{2f(q)+q} \times \frac{f(q)}{2f(q)+q-1} \\ &= \frac{(k-q^2+q/2-0.5)(2k-q^2-q/2-0.5)}{(2k-2q^2-1)(2k-2q^2-1-1)} \\ &= \frac{(k^*-q^2+q/2)(k^*-q^2-q/2)}{(2k^*-2q^2)(2k^*-2q^2-1)}.\end{aligned}$$

使用与上述相同的计算（但将 k 替换为 k^*），我们注意到 $\mathbb{P}(s_1 \in X,\ s_2 \in Y) \geq \frac{k^*}{4k^*-2}$ 等价于 $0 \geq 2q^4 - k^*q^2 - \frac{q^2}{2}$。由于 $kq^2 \geq 2q^4$，我们有 $2q^4 \leq kq^2 = k^*q^2 + q^2/2$，这意味着 $0 \geq 2q^4 - k^*q^2 - \frac{q^2}{2}$成立。因此，以下结论成立。

$$\mathbb{P}(s_1 \in X,\ s_2 \in Y) \geq \frac{k^*}{4k^* - 2} = \frac{k - 1/2}{4k - 4} \geq \frac{k}{4k - 2}.$$

这就完成了断言 A 的证明。 (□)

设 $n_q = 2f(q) + q$，并设 D 为任意最长路径阶数为 n_k^* 的无环有向图。回忆一下，n_k^* 是

$$n_k^* = 2k + 2 \sum_{i=1}^{\lfloor \sqrt{k/2} \rfloor} (2f(i) + i) = 2k + 2 \sum_{i=1}^{\lfloor \sqrt{k/2} \rfloor} n_i.$$

引理 B：$n_k^* \geq k^{3/2}$。

引理 B 的证明：设 $z = \lfloor \sqrt{k/2} \rfloor$。由于对所有 $k \geq 7$，$\frac{5\sqrt{2}}{3} - 3k^{-1/2} - \frac{5\sqrt{2}}{6}k^{-1} - k^{-3/2} \geq 1$ 成立，因此有以下结论。

$$\begin{aligned}
n_k^* &= 2k + 2\sum_{i=1}^{z}(2f(i) + i) \\
&= 2k + 2\sum_{i=1}^{z}\left(2\left\lfloor \frac{2k - 2i^2 - i}{2} \right\rfloor + i\right) \\
&= 2k - 2\left\lfloor \frac{z+1}{2} \right\rfloor + 2\sum_{i=1}^{z}\left(2\left(\frac{2k - 2i^2 - i}{2}\right) + i\right) \\
&= 2k - 2\left\lfloor \frac{z+1}{2} \right\rfloor + 4kz - 4\sum_{i=1}^{z} i^2 \\
&= 2k - 2\left\lfloor \frac{z+1}{2} \right\rfloor + 4kz - 4 \times \frac{2z^3 + 3z^2 + z}{6} \\
&= 2k - 2\left\lfloor \frac{z+1}{2} \right\rfloor + 4kz - \frac{4z^3 + 6z^2 + 2z}{3}.
\end{aligned}$$

利用 $\sqrt{x}-1 \le \lfloor \sqrt{x} \rfloor \le \sqrt{x}$，我们有

$$\begin{aligned} n_k^* &\ge 2k - 2\left(\frac{(k/2)^{1/2}+1}{2}\right) + 4k((k/2)^{1/2}-1) - \frac{\sqrt{2}k^{3/2}+3k+\sqrt{2}k^{1/2}}{3} \\ &\ge \frac{5\sqrt{2}}{3}k^{3/2} - 3k - ((k/2)^{1/2}+1) - \frac{\sqrt{2}k^{1/2}}{3} \\ &= \frac{5\sqrt{2}}{3}k^{3/2} - 3k - \frac{5\sqrt{2}}{6}k^{1/2} - 1 \\ &= k^{3/2}\left(\frac{5\sqrt{2}}{3} - 3k^{-1/2} - \frac{5\sqrt{2}}{6}k^{-1} - k^{-3/2}\right) \\ &\ge k^{3/2}. \end{aligned}$$

至此，命题 B 的证明完成。 (□)

令 T_1 包含 D 中的所有源点，并令 T_2 包含 $D - T_1$中的所有源点。以此类推，我们得到集合 T_1、T_2、…、$T_{n_k^*}$。将每个 T_i收缩为顶点 v_i，并令 D' 表示所得的有向图。注意，D' 是无环的，并且 $(v_1, v_2, \ldots, v_{n_k^*})$ 是 D'的一个无环序（即，如果 $v_iv_j \in A(D')$，则 $i < j$）。弧 v_iv_j 的权重就是 D'中所有从 T_i 到 T_j 的弧的权重之和。

令 A_{-z} 表示序列中的前 n_z 个顶点。因此，

$$A_{-z} = \{v_1, v_2, \ldots, v_{n_z}\}.$$

令 $A_{-(z-1)}$ 表示接下来的 n_{z-1} 个顶点，并继续这一过程，直到定义出 A_{-1}。现在令 A_0 表示序列中接下来的 $2k$ 个顶点。令 A_1 表示接下来的 n_1 个顶点，并令 A_2 表示接下来的 n_2 个顶点。继续这一过程，直到定义出 A_z，并注意 A_z 表示无环序中的最后 n_z 个顶点（即 $A_z = \{v_{n_k^*-n_z+1}, v_{n_k^*-n_z+2}, \ldots, v_{n_k^*}\}$）。

我们现在按如下方式生成一个“随机”解。随机选取 A_i 的一个划分 (X_i, Y_i)，使得对于每个 $-z \le i \le 0$，$|X_i| = f(|i|) + |i|$ 且 $|Y_i| = f(|i|)$；再随机选取 A_i 的一个划分 (X_i, Y_i)，使得对于每个 $1 \le i \le z$，$|X_i| = f(i)$ 且 $|Y_i| = f(i) + i$。令 $X^* = \cup_{i=-z}^{z} X_i$ 和 $Y^* = \cup_{i=-z}^{z} Y_i$。

我们将在引理 C 中证明，D' 的每条弧属于有向割（X^*, Y^*）的概率至少为 $k/(4k-2)$。

引理 C：$\mathbb{E}(w(X^*, Y^*)) \ge w(D') \times \frac{k}{4k-2}$。

引理 C 的证明：设 $uv \in A(D')$ 是任意一条弧。如果 $uv \in A_i$，对于某个 i，那么根据引理 A，uv 以至少 $\frac{k}{4k-2}$ 的概率属于有向割 (X^*, Y^*)。因此，假设 $u \in A_s$ 且 $v \in A_t$，其中 $s < t$。

令 $w_i \in A_i$ 为任意值，并注意到 $w_i \in X^*$ 的概率如下。

$$\mathbb{P}(w_i \in X^*) = \begin{cases} \frac{f(|i|)+|i|}{2f(|i|)+|i|} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4f(|i|)/|i|+2} & \text{if } i < 0, \\ \frac{f(i)}{2f(i)+i} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4f(i)/i+2} & \text{if } i \geq 0. \end{cases}$$

当 $i \geq 0$ 时，由于 $f(i)$ 是递减的，因此 $f(i)/i$ 显然也是递减的，进而 $\mathbb{P}(w_i \in X^*)$ 递减。当 $i < 0$ 时，$f(|i|)/|i| = f(-i)/-i$ 递增，这意味着 $\mathbb{P}(w_i \in X^*)$ 也递减。这些结论与以下事实：当 $i < 0$ 时，$\mathbb{P}(w_i \in X^*) > 1/2$；当 $i \geq 0$ 时，$\mathbb{P}(w_i \in X^*) \leq 1/2$，共同表明 $\mathbb{P}(w_i \in X^*) > \mathbb{P}(w_j \in X^*)$ 当且仅当 $i < j$。类似地，$\mathbb{P}(w_i \in Y^*) < \mathbb{P}(w_j \in Y^*)$ 当且仅当 $i < j$。

现在我们考虑以下两种情况，它们涵盖了所有可能性，因为 $s < t$。

情况 C.1. $t > 0$：注意，由于 $s \leq t-1$，$\mathbb{P}(u \in X^*) \geq \mathbb{P}(w_{t-1} \in X^*)$。因此，以下结论成立（这里考虑给定 $v \in Y^*$ 的情况），其中 q_t 是 $A_t \setminus v$ 中的任意顶点。

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(u \in X^* \mid v \in Y^*) &= \mathbb{P}(u \in X^*) \\ &\geq \mathbb{P}(w_{t-1} \in X^*) \\ &= \frac{f(t-1)}{2f(t-1)+(t-1)}. \end{aligned}$$

由于 $f(t-1) \geq f(t)$，我们注意到 $\frac{f(t-1)}{2f(t-1)+(t-1)} \geq \frac{f(t)}{2f(t)+(t-1)}$，这就推出了如下结论（由上文可知）。

$$\mathbb{P}(u \in X^* \mid v \in Y^*) \geq \frac{f(t)}{2f(t)+(t-1)} = \mathbb{P}(q_t \in X^* \mid v \in Y^*).$$

因此，uv 属于划分(X^*, Y^*)的概率至少与 $q_t v$ 属于划分(X^*, Y^*)的概率一样大。因此，由于断言 A 表明 $\mathbb{P}(q_t v \in (X^*, Y^*)) \geq \frac{k}{4k-2}$，我们已完成情形 C.1。

情形 C.2. $s < 0$：该情形可通过类似于情形 C.1 的方法证明，即令 $q_s \in A_s \setminus \{u\}$ 为任意顶点，并证明以下结论。

$$\mathbb{P}(v \in Y^* \mid u \in X^*) \geq \mathbb{P}(q_s \in Y^* \mid u \in X^*).$$

然后利用断言 A 证明 $\mathbb{P}(uq_s \in (X^*, Y^*)) \geq \frac{k}{4k-2}$，从而完成情形 C.2。

(□)

根据引理 B，我们有 $n_k^* \geq k^{3/2}$，这意味着 $k \leq {n_k^*}^{2/3}$。根据引理 C，

$$\mathbb{E}(w(X^*, Y^*)) \geq w(D') \times \frac{k}{4k-2} \geq w(D) \times \frac{{n_k^*}^{2/3}}{4{n_k^*}^{2/3} - 2},$$

由此完成证明。 □

定理 4.4。设 $k_2 = \frac{1}{8 \times 3^{2/3}}$。那么对于任意 $\nu \geq 1$，我们有 $c_\nu \geq \frac{1}{4} + k_2 \nu^{-2/3}$。

证明。当 $\nu < 36$ 时，根据 $\frac{1}{4} + \frac{1}{4\nu} > \frac{1}{4} + k_2 \nu^{-2/3}$ 和定理 2.4 即可得证。因此，我们假设 $\nu \geq n_7^* = 36$。不失一般性，设 $n_{k-1}^* \leq \nu \leq n_k^*$。回顾 n_k^* 的定义：

$$\begin{aligned} n_k^* &= 2k + 2 \sum_{i=1}^{\lfloor \sqrt{k/2} \rfloor} \left(2 \left\lfloor \frac{2k - 2i^2 - i}{2} \right\rfloor + i \right) \\ &= 2k + 4k \lfloor \sqrt{k/2} \rfloor - 2 \left\lfloor \frac{\sqrt{k/2} + 1}{2} \right\rfloor - 4 \sum_{i=1}^{\lfloor \sqrt{k/2} \rfloor} i^2 \end{aligned}$$

对于 $k \geq 7$，我们有

$$\begin{aligned} n_k^* - n_{k-1}^* &\leq 2 + 4k(\lfloor \sqrt{k/2} \rfloor - \lfloor \sqrt{(k-1)/2} \rfloor) + 4 \lfloor \sqrt{(k-1)/2} \rfloor \\ &\leq 2 + 4k + 2\sqrt{2(k-1)} \\ &\leq 6k. \end{aligned}$$

最后一个不等式由 $k \geq 7$ 这一事实得出。根据定理 4.3 中的引理 B，$\nu \geq n_{k-1}^* \geq (k-1)^{3/2}$，$k \leq \nu^{2/3} + 1$。因此，$n_k^* - \nu \leq n_k^* - n_{k-1}^*$ 和 $n_k^* \leq n_k^* - n_{k-1}^* + \nu \leq \nu + 6\nu^{2/3} + 6$。由于 c_ν 是非递增的，我们有

$$\begin{aligned} c_\nu &\geq c_{n_k^*} \\ &\geq \frac{1}{4} + \frac{1}{8{n_k^*}^{2/3} - 4} \\ &\geq \frac{1}{4} + \frac{1}{8(\nu + 6 + 6\nu^{2/3})^{2/3} - 4} \\ &\geq \frac{1}{4} + \frac{1}{8 \times 3^{2/3} \nu^{2/3}} \\ &= \frac{1}{4} + k_2 \nu^{-2/3}, \end{aligned}$$

其中，最后一个不等式由以下事实可得：$\nu \geq 36$。证明至此完成。

□

我们以以下结果结束本节：

开放问题 4.5。确定满足 $c_\nu = 1/4 + O(\nu^\alpha)$ 的 $\alpha > 0$ 的下确界 α_U，以及满足 $c_\nu = 1/4 + \Omega(\nu^\alpha)$ 的 $\alpha > 0$ 的上确界 α_L，将会很有意思。$\alpha_U = \alpha_L$ 吗?

我们已经从上界和下界得知 $-2/3 \leq \alpha_L \leq \alpha_U \leq -1/2$。

5 定理 3.3 的推广

在本节中，我们将定理 3.3 中关于加权无环有向图的下界推广到 $\mathcal{D}_\omega(w)$ 中的加权有向图，其中每个圈的长度均由一个常数所界定。我们的证明将用到 Bondy 的以下定理。令 $\mathrm{circ}(D)$ 表示有向图 D 的周长，即 D 中最长圈的长度。有向图 D 的色数 $\chi(D)$ 是 D. 的底层图的色数。

定理 5.1. *[8]* 对于所有强有向图 D，我们有 $\chi(D) \leq \mathrm{circ}(D)$.

定理 5.2. 假设存在常数 $k > 0$ 和 $0 < \alpha < 1$，使得对于所有无环有向图 $H = (V(H), A(H), w_H) \in \mathcal{D}_\omega(w)$，均有 $\mathrm{mac}(H) \geq \frac{w_H(H)}{4} + k w_H(H)^\alpha$。设 $D = (V(D), A(D), w)$ 是 $\mathcal{D}_\omega(w)$ 中的任意一个有向图，并令 A_s 由 D 中包含在 D 的强连通分量内的所有弧组成，且令 $A_a = A(D) \setminus A_s$。则以下结论成立。

$$\mathrm{mac}(D) \geq \frac{w(D)}{4} + \frac{k}{(4k+1) \cdot \mathrm{circ}(D) + 1} \times (w(D[A_a])^\alpha + w(D[A_s])).$$

证明。令 D、A_s 和 A_a 如定理陈述中所定义。令 S_1、S_2、.....、S_r 表示 D 的强连通分量，并令 D_a 表示通过将每个 S_i 收缩为顶点 u_i 而从 D 得到的无环有向图（注意，S_i 的阶数可能为一）。此外，如果从某个 u_i 到 u_j 存在多条弧，则将它们替换为一条弧，其权重等于所有这些弧的权重之和。令 w_a 表示 D_a 上这个新的权重函数。注意，$w_a(D_a) = w(D[A_a])$，因此

$$\begin{aligned} \mathrm{mac}(D) \geq \mathrm{mac}(D_a) &\geq \frac{w_a(D_a)}{4} + k \cdot w_a(D_a)^\alpha \\ &= \frac{w(D) - w(D[A_s])}{4} + k \cdot w(D[A_a])^\alpha. \end{aligned} \tag{3}$$

现在我们使用定理 5.1 证明一个替代界。根据定理 5.1，我们知道 D 中的每个强连通分量 S_i 都满足 $\chi(S_i) \leq \mathrm{circ}(D)$。令

$l = \mathrm{circ}(D)$，并设 $C_1^i, C_2^i, \ldots, C_l^i$ 为 $V(S_i)$ 的一个划分，使得每个 C_j^i 都是 D 中的一个独立集（某些 C_j^i 可能为空）。按照定理 2.1 (d) 的证明中类似的方法，我们通过在所有相差至多一个元素的划分方式中均匀随机地将 $C_1^i, C_2^i, \ldots, C_l^i$ 分成两个集合，从而构造一个割 (X, Y)。其中一部分将属于 X，另一部分将属于 Y。注意，如果 l 为奇数，则 S_i 中的每条弧以 $\frac{1}{4} \times \frac{l+1}{l}$ 的概率成为一条 (X, Y)-弧；如果 l 为偶数，则该概率为 $\frac{1}{4} \times \frac{l}{l-1}$。此外，对于 A_a 中的所有弧，它们成为 (X, Y)-弧的概率为 $1/4$，因为 $I \neq I'$, C_j^I 和 $C_{j'}^{I'}$ 以相互独立的概率 $1/2$ 属于 X。因此,

$$\mathrm{mac}(D) \geq \frac{w(D)}{4} + \left(\frac{l+1}{4l} - \frac{1}{4}\right) w(D[A_s]) = \frac{w(D)}{4} + \frac{w(D[A_s])}{4l}. \quad (4)$$

将不等式 (3) 与 $4lk + l$ 倍的不等式 (4) 相加，得到

$$(4lk + l + 1)\mathrm{mac}(D) \geq \frac{(4lk + l + 1) \cdot w(D)}{4} + k \cdot w(D[A_a])^\alpha + k \cdot w(D[A_s]).$$

这意味着

$$\mathrm{mac}(D) \geq \frac{w(D)}{4} + \frac{k}{(4k+1) \cdot l + 1}(w(D[A_a])^\alpha + w(D[A_s])),$$

由此完成定理的证明。 □

推论 5.3. 假设存在常数 $k > 0$ 和 $0 < \alpha < 1$，使得对于所有无环有向图 $H \in \mathcal{D}_\omega(w)$，均有 $\mathrm{mac}(H) \geq \frac{w_H(H)}{4} + k w_H(H)^\alpha$。令 $D = (V(D), A(D), w)$ 为 $\mathcal{D}_\omega(w)$ 中任意一个有向图，且对某个固定的 l，$\mathrm{circ}(D) \leq l$。则下述结论成立。

$$\mathrm{mac}(D) \geq \frac{w(D)}{4} + \frac{k}{(4k+1) \cdot l + 1} \times w(D)^\alpha.$$

证明. 令 A_s 包含 D的强连通分量内部的所有 D 的弧。由定理 5.2 可得下述结论（因为 $w(D) \geq 1$ 且$0 < \alpha < 1$），因此推论成立。

$$\begin{aligned} \mathrm{mac}(D) &\geq \tfrac{w(D)}{4} + \tfrac{k}{(4k+1)\cdot circ(D)+1} \times (w(D - A_s)^\alpha + w(D[A_s])) \\ &\geq \tfrac{w(D)}{4} + \tfrac{k}{(4k+1)\cdot l+1} \times (w(D)^\alpha - w(D[A_s])^\alpha + w(D[A_s])) \\ &\geq \tfrac{w(D)}{4} + \tfrac{k}{(4k+1)\cdot l+1} \times w(D)^\alpha, \end{aligned}$$

由此完成证明。 □

利用上述结果和定理 3.3，我们得到如下结论：

定理 5.4. 对于任意整数 $l > 0$，存在一个常数 $k(l) > 0$，使得以下结论成立。对于所有满足每条弧的权重至少为一且 $\mathrm{circ}(D) \leq l$ 的弧加权有向图 D，我们有 $\mathrm{mac}(D) \geq {}^{w_{(D)}}{}_{4} + k(l) \cdot w(D)^{0.6}$。

参考文献

[1] N. Alon，二部子图，Combinatorica 16 (1996), 301–311.[2] N. Alon，B. Bollob´as，A. Gy´arf´as，J. Lehel 和 A. Scott，无环有向图中的最大有向割。Journal of Graph Theory 55(1) (2007), 1–13.[3] N. Alon，B. Bollob´as，A. Gy´arf´as，J. Lehel 和 A. Scott，无环有向图中的最大有向割。修订版本见 http://www.math.tau.ac.il/~nogaa/PDFS/abgls4.pdf[4] N. Alon，B. Bollob´as，M. Krivelevich 和 B. Sudakov，无短圈图中的最大割与审慎划分，Journal of Combinatorial Theory, Series B 88 (2003), 329–346.[5] J. Bang-Jensen 和 G. Gutin，《有向图：理论、算法与应用》，第2版，Springer，伦敦，2009年。[6] J. Bang-Jensen 和 G. Gutin（编），《有向图类》，Springer，伦敦，2018年。[7] C. Berge，C..巴黎科学院院刊，数学系列 I 247，(1958) 258–259；以及《图与超图》（第8章，定理12），North-Holland，阿姆斯特丹，1973年。[8]J.A. Bondy，二连通定向与 Las Vergnas 猜想，Journal of the London Mathematical Society 14 (1976), 277–282.[9] G. Chen，M. Gu，N. Li，关于连通有向图的最大边割，Journal of Graph Theory 76 (2014), no. 1, 1–19.[10]C.S. Edwards，二部子图的一些极值性质，Canadian Journal of Mathematics 25 (1973), 475–485.[11] T. Gallai，关于有向路径与回路。1968年《图论》（会议论文集，蒂豪尼，1966年），第115–118页，Academic Press，纽约。[12] G. Gutin 与 N. Alon 的私人通信，2023年3月。[13] G. Gutin 和 A. Yeo，《最大加权割的下界》，arXiv:2104.05536，已被 SIAM Journal on Discrete Mathematics 接收发表。

[14]M. Hasse, 《图论的代数基础》。I, 《数学新闻》（德文），28（1965），275–290。[15] R.M. Karp, 《组合问题之间的可约性》，载于《计算机计算的复杂性》，第85–103页。Springer，1972。[16] M. Laurent, 《最大割问题》，载于《组合优化注释书目》（M. Dell' Amico、F. Maffioli 和 S. Martello 编），约翰·威立父子公司，英国奇切斯特，1997，第241–259页。[17] J. Lehel、F. Maffray 和 M. Preissmann, 《度限制下有向图中的最大有向割》，Journal of Graph Theory 61(2)（2009），140–156。[18] S. Poljak 和 D. Turzik, 《一种用于某些子图问题且具有保证最坏情况界的多项式时间启发式算法》，《离散数学》58（1986），99–104。[19] B. Roy, 《图的色数与最长路径》（法文），《法国运筹学与信息学评论》1(5)（1967），129–132。[20] L.M. Vitaver, 《利用关联矩阵的布尔幂确定图顶点的最小着色》（俄文），《苏联科学院院报》147（1962），758–759。[21] B. Xu 和 X. Yu, 《度约束下图中的最大有向割》，《图与组合》28(4)（2012），563–574。

附录

对于较小的 ν，以下结论成立。

定理 A $c_2 = 1, c_3 = c_4 = \frac{1}{2}, c_5 = c_6 = \frac{2}{5}, c_7 = \frac{3}{8}$和 $c_8 = \frac{4}{11}$。

证明。设 D 为一个无环有向图，其最长路径的阶数为 ν，其中$\nu \in \{2,3,4,5,6,7,8\}$。令 S_1 表示 D中的所有源点。对于所有 $i = 2, 3, \ldots, \nu$，令 $D_i = D_{i-1} - S_{i-1}$，并令 S_i 表示 D_i中的所有源点。

注意，$V(D) = S_1 \cup \cdots \cup S_\nu$和 D中的每条弧都是某个 $i < j$ 的 (S_i, S_j)-弧。令 D'由 D 收缩每个 S_i为一个顶点 s_i得到，其中 $i = 1, \ldots, \nu$。令 D'中弧 $s_i s_j$的权重为 $w(s_i s_j) = w(S_i, S_j)$（即所有 (S_i, S_j)-弧的权重之和）。

注意，$\mathrm{mac}(D) \geq \mathrm{mac}(D')$，因为 D' 中的任意有向割 (X', Y') 都可以通过将每个 s_i 扩展为 S_i，转化为 D 中权重相同的有向割。令 $l_2 = 1, l_3 = l_4 = \frac{1}{2}, l_5 = l_6 = \frac{2}{5}, l_7 = \frac{3}{8}$ 和 $l_8 = \frac{4}{11}$。显然，$c_2 = 1$，因为有向割 $(\{s_1\}, \{s_2\})$ 包含 D' 中的所有弧（因为 $A(D') = \{s_1 s_2\}$），因此 $\mathrm{mac}(D') = w(D')$。在图 2 中，我们看到了无环有向图的示例，D_ν，其最大路径阶数为 ν，其中对于 $\nu = 3, 4, 5, 6, 7, 8$，有 $\mathrm{mac}(D_\nu) = l_\nu \cdot w(D_\nu)$。因此，为了完成证明，我们只需证明对于所有 $\nu = 3, 4, 5, 6, 7, 8$，均有 $\mathrm{mac}(D') \geq l_\nu \cdot w(D')$。

若 $\nu = 3$，则考虑有向割 $C_1^3 = (\{s_1, s_2\}, \{s_3\})$ 和 $C_2^3 = (\{s_1\}, \{s_2, s_3\})$。$A(D')$ 中的每条弧至少属于其中一个有向割，因此 $\mathrm{mac}(D') \geq w(D')/2$。

若 $\nu = 4$，则考虑有向割 $C_1^4 = (\{s_1, s_2\}, \{s_3, s_4\})$ 和 $C_2^4 = (\{s_1, s_3\}, \{s_2, s_4\})$。如下表所示，$A(D')$ 中的每条弧都至少属于其中一个有向割，因此 $\mathrm{mac}(D') \geq w(D')/2$。

有向割 $C_i^4 = (X, Y)$			包含以下弧					
i	X	Y	s_1s_2	s_2s_3	s_3s_4	s_1s_3	s_2s_4	s_1s_4
1	s_1, s_2	s_3, s_4		+		+	+	+
2	s_1, s_3	s_2, s_4	+		+			+

如果 $\nu = 5$则考虑有向割 $C_1^5 = (\{s_1, s_2, s_3\}, \{s_4, s_5\})$、$C_2^5 = (\{s_1, s_2\}, \{s_3, s_4, s_5\})$、$C_3^5 = (\{s_1, s_3, s_4\}, \{s_2, s_5\})$、$C_4^5 = (\{s_1, s_3\}, \{s_2, s_4, s_5\})$和 $C_5^5 = (\{s_1, s_2, s_4\}, \{s_3, s_5\})$。如下表所示，$A(D')$ 中的每条弧都至少属于这五个有向割中的两个，因此 $\mathrm{mac}(D') \geq 2w(D')/5$。

有向割 $C_i^5 = (X, Y)$			包含以下弧								
i	X	Y	s_1s_2	s_2s_3	s_3s_4	s_4s_5	s_1s_3	s_2s_4	s_3s_5	s_1s_4	s_2s_5	s_1s_5
1	s_1, s_2, s_3	s_4, s_5			+			+	+	+	+	+
2	s_1, s_2	s_3, s_4, s_5		+			+	+		+	+	+
3	s_1, s_3, s_4	s_2, s_5	+			+			+			+
4	s_1, s_3	s_2, s_4, s_5	+		+				+	+		+
5	s_1, s_2, s_4	s_3, s_5		+		+	+				+	+

如果 $\nu = 6$，则考虑有向割 $C_1^6 = (\{s_1, s_2, s_5\}, \{s_3, s_4, s_6\})$、$C_2^6 = (\{s_1, s_3, s_4\}, \{s_2, s_5, s_6\})$、$C_3^6 = (\{s_1, s_2, s_3\}, \{s_4, s_5, s_6\})$、$C_4^6 = (\{s_1, s_3, s_5\}, \{s_2, s_4, s_6\})$ 和 $C_5^6 = (\{s_1, s_2, s_4\}, \{s_3, s_5, s_6\})$。如下表所示，$A(D')$ 中的每条弧至少属于这五个有向割中的两个，因此 $\mathrm{mac}(D') \geq 2w(D')/5$。

有向割 $C_i^6 = (X, Y)$			包含以下弧														
			s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_1	s_2	s_3	s_4	s_1	s_2	s_3	s_1	s_2	s_1
i	X	Y	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_3	s_4	s_5	s_6	s_4	s_5	s_6	s_5	s_6	s_6
1	s_1, s_2, s_5	s_3, s_4, s_6		+			+	+	+			+				+	+
2	s_1, s_3, s_4	s_2, s_5, s_6	+			+				+	+			+	+		+
3	s_1, s_2, s_3	s_4, s_5, s_6			+				+	+		+	+	+	+	+	+
4	s_1, s_3, s_5	s_2, s_4, s_6	+		+		+					+		+			+
5	s_1, s_2, s_4	s_3, s_5, s_6		+		+		+			+		+		+	+	+

现在考虑 $\nu = 7$ 的情况。定义以下有向割。

有向割 $C_i^7 = (X, Y)$ Â	X 包含顶点						
	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7
$C_1^7 = (\{s_1, s_2, s_3, s_5\}, \{s_4, s_6, s_7\})$	+	+	+		+		
$C_2^7 = (\{s_1, s_2, s_3, s_6\}, \{s_4, s_5, s_7\})$	+	+	+			+	
$C_3^7 = (\{s_1, s_2, s_4, s_5\}, \{s_3, s_6, s_7\})$	+	+		+	+		
$C_4^7 = (\{s_1, s_2, s_4\}, \{s_3, s_5, s_6, s_7\})$	+	+		+			
$C_5^7 = (\{s_1, s_2, s_6\}, \{s_3, s_4, s_5, s_7\})$	+	+				+	
$C_6^7 = (\{s_1, s_3, s_4, s_6\}, \{s_2, s_5, s_7\})$	+		+	+		+	
$C_7^7 = (\{s_1, s_3, s_4\}, \{s_2, s_5, s_6, s_7\})$	+		+	+			
$C_8^7 = (\{s_1, s_3, s_5\}, \{s_2, s_4, s_6, s_7\})$	+		+		+		

注意，$\sum_{i=1}^{8} w(C_i^7) \geq 3w(D')$，因此 $\mathrm{mac}(D') \geq 3w(D')/8$。最后我们考虑 $\nu = 8$ 的情况。定义以下有向割。

有向割 $C_i^8 = (X, Y)$ Â	X 包含顶点							
	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8
$C_1^8 = (\{s_1, s_2, s_3, s_5\}, \{s_4, s_6, s_7, s_8\})$	+	+	+		+			
$C_2^8 = (\{s_1, s_2, s_3, s_6\}, \{s_4, s_5, s_7, s_8\})$	+	+	+			+		
$C_3^8 = (\{s_1, s_2, s_3, s_7\}, \{s_4, s_5, s_6, s_8\})$	+	+	+				+	
$C_4^8 = (\{s_1, s_2, s_4, s_5\}, \{s_3, s_6, s_7, s_8\})$	+	+		+	+			
$C_5^8 = (\{s_1, s_2, s_4, s_6\}, \{s_3, s_5, s_7, s_8\})$	+	+		+		+		
$C_6^8 = (\{s_1, s_2, s_4, s_7\}, \{s_3, s_5, s_6, s_8\})$	+	+		+			+	
$C_7^8 = (\{s_1, s_2, s_5, s_6\}, \{s_3, s_4, s_7, s_8\})$	+	+			+	+		
$C_8^8 = (\{s_1, s_3, s_4, s_5\}, \{s_2, s_6, s_7, s_8\})$	+		+	+	+			
$C_9^8 = (\{s_1, s_3, s_4, s_6\}, \{s_2, s_5, s_7, s_8\})$	+		+	+		+		
$C_{10}^8 = (\{s_1, s_3, s_4, s_7\}, \{s_2, s_5, s_6, s_8\})$	+		+	+			+	
$C_{11}^8 = (\{s_1, s_3, s_5, s_7\}, \{s_2, s_4, s_6, s_8\})$	+		+		+		+	

注意到 $\sum_{i=1}^{11} w(C_i^8) \geq 4w(D')$，因此 $\mathsf{mac}(D') \geq 4w(D')/11$。

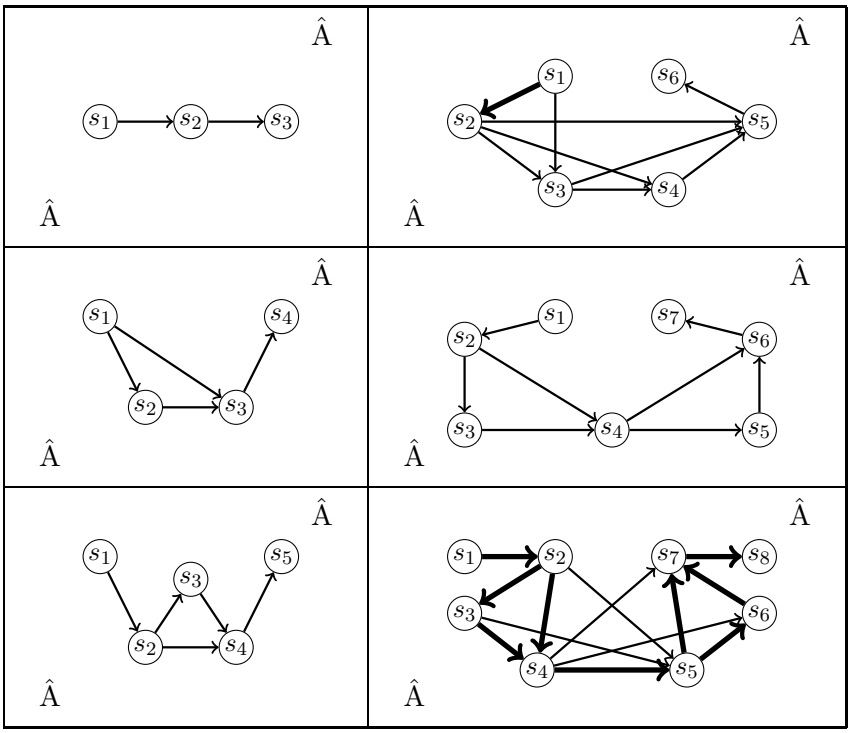

图 2：为 $\nu \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ 给出 c_ν 上界的有向图。粗弧的权重为 2，所有其他弧的权重均为 1。

□

回顾一下，$c_2 = 1$ $c_3 = c_4 = 0.5$ $c_5 = c_6 = 0.4$ $c_7 = 0.375$ $c_8 = \frac{4}{11} \approx$、$0.363636\overline{}$和。通过计算机，我们还可以证明 $c_9 = \frac{13}{37} \approx 0.35135$ 和$c_{10} = \frac{9}{26} \approx 0.34615$ 和 $c_{11} = \frac{31}{92} \approx 0.33696$。