QMUL-PH-23-07

行列对偶与组合拓扑弦

Adrian Padellaro[a,♢], RajathRadhakrishnan[a,b,♣], Sanjaye Ramgoolam[a,c,♡]

[a]理论物理中心，物理与化学科学学院，伦敦玛丽女王大学，伦敦 E1 4NS，英国。[b] 国际理论物理中心，Strada Costiera 11，34151 的里雅斯特，意大利。[c] 国家理论物理研究所，物理学院与理论物理中心，金山大学，金山大学，2050，南非

2023年4月21日

arXiv:2304.10217v1 [hep-th] 20 Apr 2023

摘要

近期，研究者利用组合拓扑弦理论（CTST）推导出了有限群特征标表中沿列对不可约表示求部分和的整性性质。这些 CTST 建立在二维有限群平坦 G-丛的 Dijkgraaf-Witten 理论之上，记为 G-TQFTs。我们定义了与基于有限群融合系数的二维拓扑量子场论相关的类似组合拓扑弦。这些拓扑量子场论记为 $R(G)$-TQFTs，并可据此推导出类似的整性结果：对固定行中沿共轭类求特征标的部分行和。G-TQFTs 与 $R(G)$-TQFTs 之间的这种联系，为特征标表定义了行列对偶性，提供了一个物理框架，用于探索特征标表中行与列之间的数学类比。除了这些整性的构造性证明外，我们还利用更传统的伽罗瓦理论框架，证明了特征标表整性性质的类似且互补的结果。部分行和与部分列和用于定义整数行列和的广义分拆，这些分拆在组合表示论中颇受关注。

♢a.k.s.padellaro@qmul.ac.uk, ♣ rradhakr@ictp.it, ♡s.ramgoolam@qmul.ac.uk

目录

1 引言 4

2 行列对偶 6

2.1 G-CTST.6 2.2 来自 G-CTST 的整数部分列和.10 2.3 $R(G)$-CTST.12 2.4 来自 $R(G)$-CTST 的整数部分行和.16

3 行列对偶：行/列及广义分拆的精细整性性质 1 8

3.1 来自 G-CTST 的精细整数列和.19 3.2 来自 $R(G)$-CTST 的精细整数行和.22 3.3 整数行和的广义划分.24 3.4 整数列和的广义划分.27

4 伽罗瓦理论的特征标表 28

4.1 分圆域与伽罗瓦作用.29 4.2 伽罗瓦群作用下的不变元素.30 4.3 伽罗瓦作用对表示和特征标的作用.31 4.4 特征标的整数性.32 4.5 列上特征标和的整性.33 4.6 行上特征标和的整性.35

5 在数域中计数行与列 37

5.1 统计整数行和列.37 5.2 数域中的行和列计数.40 5.2.1 整数集$_6$ .40 5.2.2 整数集$_7$ $\rtimes$ 整数集$_3$ .41 5.2.3 整数集$_{24}$ $\times$整数集$_2$ .42 5.2.4 Q_8 $\times$整数集$_4$ .44

6 构造行列对偶 45

7 结论 50

$R(G)$-拓扑量子场论的 Frobenius 结构 53

B 逆 Vandermonde 引理 58

C 从 $R(G)$-CTST 得到共轭类大小和特征标 61

C.1 来自 $R(G)$-CTST 的共轭类大小.62 C.2 来自亏格 h 融合数据的共轭类大小水平集上的可约特征标 . . 63 C.3 在 R_1 的特征标水平集上构造 R_2 的特征标之和 . . 64

D 伽罗瓦群、整数行与列、E Harada 的猜想以及拓扑量子场论 **65**
的行列对偶性 **77**

1 引言

量子场论推动了新数学结构的发现，并使我们对数学的多个领域有了深刻的认识。一些例子包括：利用陈-西蒙斯理论 [1–3], 研究低维拓扑；从弦理论中发现镜像对称 [4], ；从共形场论中发现顶点算子代数[5–7] ；以及许多其他成果 [8]。

本文延续这一传统，研究弦论构造对有限群表示论的影响。 G-TQFT 是基于有限群 G [9–12] 的二维拓扑场论（TQFT）。其配分函数计算二维流形上平坦 G-丛的拓扑不变量。利用群代数 $\mathcal{Z}(\mathbb{C}(G))$ 的中心上的表示论傅里叶变换，这些配分函数也可以用表示论数据来表达。在组合表示论中，人们通过引入组合对象来研究群表示的性质（组合表示论综述参见 [13] ）。最近，基于 G-TQFT 的 [14], 组合拓扑弦理论（G-CTST）被用于构造表示论数据。人们提出了基于 G-CTST 中组合振幅的有限算法，用于计算整数。

$$\frac{|G|}{d_R}, \tag{1.1}$$

其中， d_R 是群 G的不可约表示 R 的维数。文中给出了从 G-CTST 振幅构造特征标的算法，并将其与计算特征标的 Burnside 算法联系起来。

这些结果在 [15] 中得到了进一步发展：文中利用 G-CTST 中的组合可观测量，推导出 C 在 G的不可约表示上的特征标部分和的整性性质。这些组合可观测量由任意亏格的曲面上、带有一个标记为固定共轭类 C的边界的平坦 G-丛的组合构造而成。这些部分和是沿着 G特征标表的列求得的。例如，命题 3.4.1-II [15] 指出，对于维数固定的表示，给定共轭类的不可约特征标之和为整数。因此，沿特征标表的列 C 对不可约特征标求和，所得的和 n_C是整数（参见命题 2.1，以及本文命题 2.2 中关于归一化特征标的一项正整性性质）。表示论中有一个众所周知的事实：群 G 沿着行 R的不可约特征标之和 n_R是正整数；而为这个正整数 [16, 寻找组合解释仍是一个未解决的问题。问题 12]。

这引出了一个问题：是否存在一种 CTST/拓扑量子场论方法，用于研究有限群 G 的特征标表各行的求和？本文通过引入一类相关的 CTST，基于融合代数 $R(G)$，对这一问题给出了肯定答案。在这种方法中，可以导出与来自 G-CTST 的结果互为补充的结果，其中列的作用与行的作用互换。因此，我们将 G-CTST 与 $R(G)$-CTST 之间的关系称为行列对偶。对于对应于共轭类 C 的列，将求和范围限制为维数固定的不可约表示时，部分列和具有整性；这一性质被推广，从而得到了适用于涉及.....的限制情形的整性。

其他具有这样性质的共轭类，即它们对所有行的特征标均为整数（例如， [15] 中的命题 3.4.1-III 和 3.4.1-IV）。这些整性性质是通过对曲面上的平坦 G-丛进行计数而得到的，其中一个边界由 C 标记，多个额外边界则由这些额外的共轭类标记。沿着行列对偶这一主题，我们将得到关于部分行和的类似结果。

$\mathcal{Z}(\mathbb{C}(G))$ 的代数结构是通过 G 的共轭类乘法及其分解为共轭类来定义的。类似地，融合代数 $R(G)$ 是通过 G 的表示的张量积及其分解为不可约表示来定义的。共轭类的乘法和表示的张量积，都在三维 G-拓扑量子场论[9]中线算符的融合规则中发挥着关键作用。在 [17], 中，有限群理论中的 Arad-Herzog 猜想 [18] 是在三维拓扑量子场论（TQFT）背景下研究的。研究表明，该猜想蕴含着这些拓扑量子场论中线算符的特殊融合规则。随后，这些特殊融合规则又由彼此独立的研究予以证明，为该猜想的正确性提供了证据。在一项密切相关的工作 [19], 中，研究者考察了基于有限群和李群的三维拓扑量子场论中的线算符特殊融合规则，并将其与这些群的表示论联系起来。

关于有限群特征标表整性性质的较为传统的方法采用伽罗瓦理论，并在这一框架下研究了行与列之间的类比关系 [20]。在本文中，我们将通过伽罗瓦理论方法补充针对特征标表性质的构造性拓扑量子场论（TQFT）/CTST 方法。我们利用伽罗瓦理论重新证明了部分行和与列和的整性性质。此外，受这些 TQFT/CTST 研究的启发，我们还推导出了一些新的结果。

每个特征标表至少有一个整数行和一个整数列：分别对应平凡表示和单位元。我们运用伽罗瓦理论的方法，研究整数行数等于整数列数的条件。我们进一步分析属于 Q 的域扩张的特征标表中的行数和列数。我们用两个图来刻画行和列的数论性质，其中一个图由特征标表的行定义，另一个由列定义。我们找到了这两个图同构的充分条件。

本文的安排如下。我们首先在第 2 节回顾 aG-CTST 的构造，随后在[15]回顾相关的整性结果。接着，我们引入 $R(G)$-CTST，并说明如何用它证明对偶整性结果。 G-拓扑量子场论通过一个半单交换的弗罗贝尼乌斯代数来定义，其基由共轭类标记，共轭类上的乘法继承自群乘法，并配备适当的弗罗贝尼乌斯配对。 $R(G)$-拓扑量子场论通过一组由不可约表示（不可约表示）标记的元素构成的基来定义，其乘法由不可约表示的张量积重数给出，并配备适当的弗罗贝尼乌斯配对（ [21]中定义了一种密切相关的拓扑量子场论，其乘法相同，但配对不同）。 G-拓扑量子场论的幂等元（投影算符）基自然地由不可约表示标记，而 $R(G)$-拓扑量子场论的幂等元基则自然地由共轭类标记。 $R(G)$-拓扑量子场论的幂等元基的性质表明，融合数据可用于构造 G的特征标。这类似于 Burnside 算法：利用群代数中心的结构常数构造特征标。第 3 节以此为基础。

第 2 节中，我们利用 CTST 证明特征标和的精细整性结果。这些精细整性结果将在下一小节中使用；在该小节中，我们给出整数 n_R 和 n_C 的广义整数分拆。这些分拆由以下表达式构成：将 n_R 或 n_C 表示为若干个零（每个零都带有重数）之和，再加上一个附有分拆的正整数，并减去另一个附有分拆的正整数。这些表达式是通过考察列 C 得到的：按照某个函数的水平集求和后得到 n_C；该函数由除 C 之外的所有列确定，而这些列都是整数。对于行 R，广义分拆是从用于 C 的构造的行列对偶中得到的。如前所述，伽罗瓦理论是研究特征标的数论和域论性质的强大工具。因此，我们专门用第 4 节讨论伽罗瓦理论对有限群的共轭类和表示的作用，以及这些作用带来的、与 CTST 相关的结果。我们先回顾背景知识，然后证明一组推广结果，这些结果由先前提及的 G-CTST 和 $R(G)$-CTST 整性结果得到。在第 5 节中，我们利用伽罗瓦理论研究特征标表的整数行数和整数列数。在第 6 节中，我们描述一种算法，它从 G-拓扑量子场论出发，得到 $R(G)$-拓扑量子场论。将同一算法应用于 $R(G)$-拓扑量子场论，则会得到 G-拓扑量子场论。如何从这一对偶性构造推导出第 2 节中的整性结果，仍存在一些挑战，我们将在文中讨论这些问题。

在附录 A 中，我们通过明确展示弗罗贝尼乌斯代数结构，证明融合代数定义了一个拓扑量子场论。附录 B 给出了范德蒙德矩阵引理的证明，该引理用于证明第 3 节中的精细整性结果。附录 C 中，我们基于 $R(G)$-CTST 给出了一些额外的构造性公式和算法。附录 D 包含一张阶不超过 100 的群的表格，其中列出了这些群的特征标表中的整数行和整数列的数量，以及其伽罗瓦群的同构类。我们还对零星群计算了这些数据。在附录 E 中，我们探讨了 Harada 猜想与行列对偶性之间一个有趣的联系。

2 行列对偶性

本节将按照 [14] 中的阐述，回顾基于有限群 G 的 Dijkgraaf-Witten理论中配分函数的组合构造。与此密切相关的讨论见 [22][23]，其动机是对虫洞物理低维模型的研究 [24]。接下来，我们回顾 [15] 中关于 G 的特征标表某一列上部分和的整性性质的推导。然后，我们将给出一种基于融合代数 $R(G)$ 的对偶拓扑量子场场论的组合描述，它给出沿行而非列的部分和的整性结果。

2.1 G-CTST

有限群 G 的 Dijkgraaf-Witten理论可描述如下。设 $\mathbb{C}(G)$ 是有限群 G 的群代数，而 $\mathcal{Z}(\mathbb{C}(G))$ 是由与所有 $\mathbb{C}(G)$ 交换的中心元素构成的子代数，也称为 $\mathbb{C}(G)$ 的中心。有限群的

代数有两个有用的基。第一个基基于集合

$$\mathrm{Cl}(G) = \{C_1, \ldots, C_K\}, \tag{2.1}$$

G 的不同共轭类，可用于标记中心的一组基元素，因为

$$|\mathrm{Cl}(G)| = \dim \mathcal{Z}(\mathbb{C}(G)). \tag{2.2}$$

对每个共轭类中的元素求和，所得结果是中心元

$$T_C = \sum_{g \in C} g\,. \tag{2.3}$$

集合

$$\{T_{C_1}, \ldots, T_{C_K}\}, \tag{2.4}$$

构成中心的一组基。

第二组基以 G的不可约表示为标记。表示论中的一个标准结果是

$$|\mathrm{Cl}(G)| = |\mathrm{Irr}(G)|, \tag{2.5}$$

其中

$$\mathrm{Irr}(G) = \{R_1, \ldots, R_K\}, \tag{2.6}$$

是 G 的一组完备的两两非同构不可约表示。这意味着

$$|\mathrm{Irr}(G)| = \dim \mathcal{Z}(\mathbb{C}(G)), \tag{2.7}$$

并且，特别地，存在一个由G的不可约表示标记的 $\mathcal{Z}(\mathbb{C}(G))$的基。表示基是利用 G的不可约特征标 χ^R 构造的。

$$P_R = \frac{d_R}{|G|} \sum_{g \in G} \chi^R(g^{-1}) g = \frac{d_R}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{(\chi^R(g))} g, \tag{2.8}$$

其中，$\overline{\chi^R(g)}$ 是 $\chi^R(g)$ 的复共轭，而 $d_R = \chi^R(1)$ 是 R 的维数。这两组基之间的关系为

$$P_R = \frac{d_R}{|G|} \sum_{C \in \mathrm{Cl}(G)} \overline{(\chi^R_C)} T_C \tag{2.9}$$

and

$$T_C = \sum_{R \in \mathrm{Irr}(G)} \frac{\chi^R(T_C)}{d_R} P_R, \tag{2.10}$$

其中

$$\chi^R_C \equiv \chi^R(g) \quad \text{for any } g \in C. \tag{2.11}$$

注意，在共轭类基中定义的结构常数 $f_{C_1C_2}^{C_3}$；

$$T_{C_1}T_{C_2}=\sum_{C_3\in \mathrm{Cl}(G)} f_{C_1C_2}^{C_3}T_{C_3}, \tag{2.12}$$

是整数。它们可以用特征标来表示。

$$f_{C_1C_2}^{C_3}=\frac{|C_1||C_2|}{|G|}\sum_{R\in \mathrm{Irr}(G)}\frac{1}{d_R}\chi_{C_1}^{R}\chi_{C_2}^{R}\overline{\chi_{C_3}^{R}}. \tag{2.13}$$

表示基中的结构常数是对角的,

$$P_{R_1}P_{R_2}=\delta_{R_1R_2}P_{R_1}. \tag{2.14}$$

使得投射娱乐主管 张量构成一个正交集，并且进一步满足完备性。

$$\sum_{R\in \mathrm{Irr}(G)} P_R=1. \tag{2.15}$$

为了定义 Dijkgraaf-Witten理论中的配分函数，我们引入 G上的δ函数。

$$\delta(g)=\begin{cases}1 & \text{if } g \text{ is the identity,}\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases} \tag{2.16}$$

在表示基中，我们有

$$\frac{1}{|G|}\delta(P_R)=\frac{d_R}{|G|^2}\sum_{g\in G}\overline{(\chi^R(g))}\delta(g)=\frac{d_R^2}{|G|^2}. \tag{2.17}$$

我们采用以下捷径来得到亏格 h 配分函数。定义手柄生成算子

$$\Pi=\sum_{R\in \mathrm{Irr}(G)}\frac{|G|^2}{d_R^2}P_R. \tag{2.18}$$

因为

$$T_CP_R=|C|\frac{\chi_C^R}{d_R}P_R, \tag{2.19}$$

整数矩阵 f_C 的特征值由归一化特征标给出。特别地，利用（2.9）可得

$$\Pi=\sum_{R\in \mathrm{Irr}(G)}\frac{|G|}{d_R}\sum_{C\in \mathrm{Cl}(G)}\overline{(\chi_C^R)}T_C=\sum_{C\in \mathrm{Cl}(G)}\frac{|G|}{|C|}\overline{\mathrm{tr}(f_C)}T_C=\sum_{C\in \mathrm{Cl}(G)}\mathrm{Sym}C\,\mathrm{tr}(f_C)T_C, \tag{2.20}$$

其中

$$\mathrm{Sym}C=\frac{|G|}{|C|}, \tag{2.21}$$

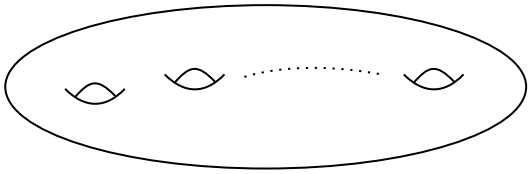
是 $g \in C$ 的中心化子的大小。因此，可以将 Π 表示为共轭类基元素的整数线性组合。

将手柄生成算子的幂插入δ函数，得到

$$\frac{1}{|G|}\delta(\Pi^h) = \sum_{R\in \mathrm{Irr}(G)} \left(\frac{|G|}{d_R}\right)^{2h-2}. \tag{2.22}$$

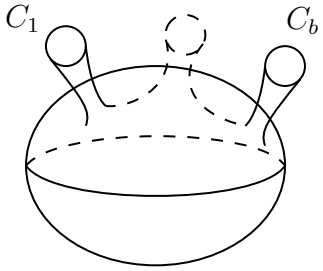
这是亏格为 h 且没有边界的流形的配分函数，

$$Z_h^G = \frac{1}{|G|}\delta(\Pi^h) \; = \tag{2.23}$$



一般来说，我们关注边界由共轭类标记的流形的配分函数。例如，边界由共轭类 C_1、.....、C_b 标记的亏格为零的配分函数，且边界数为 b ，等于

$$Z^G_{h=0,C_1;\ldots;C_b} = \frac{1}{|G|}\delta(T_{C_1}\ldots T_{C_b}) = \tag{2.24}$$



这可以　利用式（2.10）、（2.14）和（2.17）重新表示为 G 的特征标

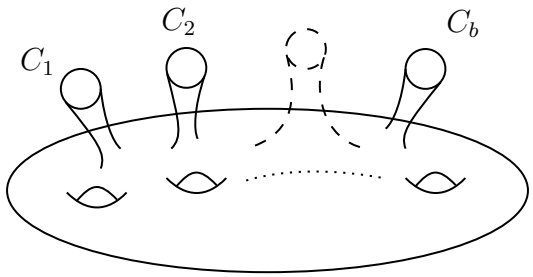
$$Z^G_{h=0,C_1;\ldots;C_b} = \sum_{R\in \mathrm{Irr}(G)} \frac{d_R^2}{|G|^2}\frac{\chi^R(T_{C_1})}{d_R}\ldots\frac{\chi^R(T_{C_b})}{d_R} \tag{2.25}$$

$$= \sum_{R\in \mathrm{Irr}(G)} \frac{d_R^2}{|G|^2}|C_1|\frac{\chi^R_{C_1}}{d_R}\ldots|C_b|\frac{\chi^R_{C_b}}{d_R}. \tag{2.26}$$

为了计算亏格 h、具有 b 个边界的配分函数，我们插入手柄生成算子。

$$Z^G_{h;C_1;\ldots;C_b} = \frac{1}{|G|}\delta(\Pi^h T_{C_1}\ldots T_{C_b}) = \sum_{R\in \mathrm{Irr}(G)} \left(\frac{|G|}{d_R}\right)^{2h-2}\frac{\chi^R(T_{C_1})}{d_R}\ldots\frac{\chi^R(T_{C_b})}{d_R} \tag{2.27}$$

$$= \tag{2.28}$$



2.2 来自 G-CTST 的整数部分列和

现在，我们基于上述 G-CTST的构造，回顾 [15], 第3.4节中的相关整性结果。

设 $D \in \mathrm{Cl}(G)$ 为一个共轭类，使得对于所有 $R \in \mathrm{Irr}(G)$， χ_D^R 均为整数。也就是说， D 在 G 的特征标表中定义了一个整数列。注意，这意味着

$$\frac{\chi^R(T_D)}{d_R} = |D|\frac{\chi_D^R}{d_R} \tag{2.29}$$

对于所有 $R \in \mathrm{Irr}(G)$，它都是有理数，这一点将在后续内容中发挥重要作用。固定一个不可约表示 $S \in \mathrm{Irr}(G)$，并定义集合

$$\begin{aligned}[(S,D)] &= \left\{ R \in \mathrm{Irr}(G) \quad \text{s.t.} \quad \frac{\chi^R(T_D)}{d_R} = \frac{\chi^S(T_D)}{d_S} \right\} \\ &= \left\{ R \in \mathrm{Irr}(G) \quad \text{s.t.} \quad |D|\frac{\chi_D^R}{d_R} = |D|\frac{\chi_D^S}{d_S} \right\} \\ &= \left\{ R \in \mathrm{Irr}(G) \quad \text{s.t.} \quad \frac{\chi_D^R}{d_R} = \frac{\chi_D^S}{d_S} \right\}.\end{aligned} \tag{2.30}$$

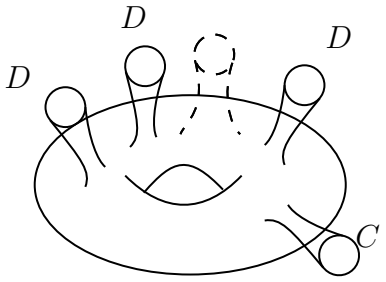
已在 [15] (命题 3.4.1-II) 中证明,

$$\sum_{R \in [(S,D)]} |C|\frac{\chi_C^R}{d_R} \in \mathbb{Z}, \tag{2.31}$$

对于每个 $C \in \mathrm{Cl}(G)$。

证明使用了配分函数族

$$Z^G_{h=1;D^b,C} = \sum_{R \in \mathrm{Irr}(G)} \left(\frac{\chi^R(T_D)}{d_R}\right)^b \frac{\chi^R(T_C)}{d_R} = \tag{2.32}$$



对于 b 为非负整数。对不可约表示的求和按照归一化特征标 $\frac{\chi_D^R}{d_R}$ 的水平集进行组织

$$Z^G_{h=1;D^b,C} = \sum_{R'} \left(\frac{\chi^{R'}(T_D)}{d_{R'}}\right)^b \sum_{R \in [(R',D)]} \frac{\chi^R(T_C)}{d_R}, \tag{2.33}$$

其中，第一个求和是对一组不可约表示 $\{R'_1, \ldots, R'_k\}$ 进行的，这些不可约表示满足

$$\frac{\chi_D^{R'_1}}{d_{R'_1}}, \ldots, \frac{\chi_D^{R'_k}}{d_{R'_k}}, \tag{2.34}$$

均各不相同。现在我们将范围限制为包含 $b = 1$、.....、k 的配分函数。我们将 (2.30)定义为具有固定归一化特征标 $|D|\frac{\chi_D^R}{d_R}$ 的不可约表示集合，这意味着共轭类 D 确定了不可约表示集合 Irr(G) 的一个集合划分:

$$[(R'_1, D)] \cup [(R'_2, D)] \cup \ldots \cup [(R'_k, D)] = \mathrm{Irr}(G). \tag{2.35}$$

方程 (2.33) 可以理解为一个矩阵方程

$$y = Vx \quad ; \quad \text{with indices explicit } y_b = \sum_{R'} V_{bR'} x_{R'} \tag{2.36}$$

其中

$$y_b = Z^G_{h=1;D^b,C}, \tag{2.37}$$

$$x_{R'} = \sum_{R\in[(R',D)]} \frac{\chi^R(T_C)}{d_R} = \sum_{R\in[(R',D)]} |C|\frac{\chi_C^R}{d_R} \tag{2.38}$$

$$V_{bR'} = \left(\frac{\chi^{R'}(T_D)}{d_{R'}}\right)^b = \left(|D|\frac{\chi_D^{R'}}{d_{R'}}\right)^b. \tag{2.39}$$

由于我们假设对于所有 R，χ_D^R 都是一个整数，因此矩阵 V 是一个具有有理数元素的范德蒙德矩阵。因此，逆矩阵 V^{-1} 也是一个有理数矩阵，并且我们有

$$x = V^{-1}y. \tag{2.40}$$

该方程右侧是有理向量，而左侧是由归一化特征标构成的向量，这些特征标已知是代数整数。代数整数是有理数，当且仅当它是整数，因此

$$x_S = \sum_{R\in[(S,D)]} \frac{\chi^R(T_C)}{d_R} = \sum_{R\in[(S,D)]} |C|\frac{\chi_C^R}{d_R} \in \mathbb{Z}. \tag{2.41}$$

这就是结果 (2.31)。

对于固定维数的不可约表示求和，也可以证明其整性。定义集合

$$[d_{R'}] = \{R \in \mathrm{Irr}(G) \quad \text{s.t.} \quad \frac{|G|^2}{d_R^2} = \frac{|G|^2}{d_{R'}^2}\} \tag{2.42}$$

$$= \{R \in \mathrm{Irr}(G) \quad \text{s.t.} \quad d_R = d_{R'}\}. \tag{2.43}$$

上述构造的一个微小变体通过插入手柄生成算子得到了应用，用以证明（见 [15] 命题 3.4.1-II）。

$$\sum_{R\in[d_{R'}]} \chi_C^R \in \mathbb{Z}. \tag{2.44}$$

由于任意一列中特征标的求和等价于对固定维数的不可约表示的部分和进行求和，因此可得以下命题。

命题 2.1 特征标表的列和是整数

$$\sum_{R\in \mathrm{Irr}(G)} \chi_C^R \in \mathbb{Z}, \quad \forall C \in \mathrm{Cl}(G). \tag{2.45}$$

有趣的是，上述求和不一定为正，但通过一个简单的 G-CTST 证明，可以得到以下命题。

命题 2.2 设 $\mathbb{Z}^+$ 为正整数集合，则

$$\sum_{R\in \mathrm{Irr}(G)} \frac{\chi^R(T_C)}{d_R} \in \mathbb{Z}^+, \quad \forall C \in \mathrm{Cl}(G). \tag{2.46}$$

命题 2.2 的证明 考虑振幅

$$Z^G_{h=1;C} = \frac{1}{|G|}\delta(\Pi\ T_C) = \sum_{R\in \mathrm{Irr}(G)} \frac{\chi^R(T_C)}{d_R}. \tag{2.47}$$

对于所有 $C \in$ Cl(G)，左端（l.h.s.）均为正有理数，而右端（r.h.s.）是代数整数的求和。因此，它是一个正整数，这就证明了该命题。

方程（2.31）涉及对不可约表示（irrep）集合求和，这些集合是由共轭类 S 定义的不可约表示函数的水平集。一个自然的问题是，是否存在针对共轭类水平集求和的类似整性结果。换言之，通过交换特征标表中行与列的角色，能否得到与上述结果类似的整性结果？行与列之间的类比促使人们对特征标的数论性质 [20] 展开了大量研究。在下一节中，我们将介绍一种基于融合代数的新型拓扑量子场论（TQFT）。[21], 中定义了一个类似的代数，但其 Frobenius 结构有所不同。我们将发现，下一节所采用的代数是在 CTST 背景下推导整性结果的自然框架；这些整性结果通过交换行与列，与上述整性结果形成对偶。这引出了 CTST 背景下物理行列对偶性的概念，为理解基于特征标表行与列互换的数学类比提供了一个物理框架。

2.3 $R(G)$-CTST

在本节中，我们用 G 的不可约表示的融合系数（张量积分解重数）给出 $R(G)$-拓扑量子场论的配分函数公式。这类似于上一小节中关于 G-拓扑量子场论的公式，其中在中心代数 $\mathcal{Z}(\mathbb{C}(G))$ 中用融合系数替代类代数结构常数。为了定义拓扑量子场论，借助弗罗贝尼乌斯代数的语言是很有用的。在附录 A 中，我们展示了可以利用融合系数，将 G 的不同不可约表示（同构类）的集合赋予交换的弗罗贝尼乌斯代数结构，从而定义 $R(G)$-拓扑量子场论。该附录包含利用 Frobenius 结构推导出的具有 n 个边界的亏格 h 配分函数表达式。在本节中，我们展示等价的表达式

可利用手柄生成算子 Θ、余单位 ε以及不可约表示的融合来计算。

$R(G)$-拓扑量子场论的底层代数是一个维数为

$$\dim R(G) = |\mathrm{Irr}(G)|, \tag{2.48}$$

其中，$\mathrm{Irr}(G)$ 是 G 的一组完备的两两非同构不可约表示。它具有一个基

$$\{a_{R_1}, \ldots, a_{R_K}\}, \tag{2.49}$$

其中结构常数

$$N_{R_1R_2}^{R_3} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi^{R_1}(g)\chi^{R_2}(g)\overline{\chi^{R_3}(g)}. \tag{2.50}$$

是融合系数，且

$$a_{R_1}a_{R_2} = \sum_{R_3\in \mathrm{Irr}(G)} N_{R_1R_2}^{R_3} a_{R_3}. \tag{2.51}$$

平凡表示，记为 R_0，对应于该代数中的单位元： $a_{R_0}a_R = a_R$。

融合代数有一组正交幂等元（投影算子）作为基。

$$A_C = \frac{1}{\mathrm{Sym}C}\sum_R \chi_C^{\overline{R}} a_R, \tag{2.52}$$

其中 $\mathrm{Sym}\,C = |G|/|C|$ 如式（2.21）所示。正交幂等元性质表示为

$$A_{C_1}A_{C_2} = \delta_{C_1C_2}A_{C_1} \tag{2.53}$$

证明如下

$$\begin{aligned}
A_{C_1}A_{C_2} &= \frac{1}{\mathrm{Sym}C_1}\cdot\frac{1}{\mathrm{Sym}C_2}\sum_R \chi_{C_1}^{\bar{R}} a_R \sum_S \chi_{C_2}^{\bar{S}} a_S \\
&= \frac{1}{\mathrm{Sym}C_1}\cdot\frac{1}{\mathrm{Sym}C_2}\sum_{R,S} \chi_{C_1}^{\bar{R}}\chi_{C_2}^{\bar{S}} a_R . a_S \\
&= \frac{1}{\mathrm{Sym}C_1}\frac{1}{\mathrm{Sym}C_2}\sum_{R,S,T} \chi_{C_1}^{\bar{R}}\chi_{C_2}^{\bar{S}} N_{RS}^T a_T \\
&= \frac{1}{\mathrm{Sym}C_1\ \mathrm{Sym}C_2}\sum_{R,S,T} \chi_{C_1}^{\bar{R}}\chi_{C_2}^{\bar{S}} \sum_C \chi_C^R\chi_C^S\chi_C^{\bar{T}}\cdot\frac{|C|}{|G|}. a_T \\
&= \frac{1}{\mathrm{Sym}C_1\ \mathrm{Sym}C_2}\sum_{T,C} \delta_{C_1,C}\delta_{C_2,C}\mathrm{Sym}C_1\ \mathrm{Sym}C_2\cdot\frac{|C|}{|G|}\cdot\chi_C^{\bar{T}} a_T \\
&= \frac{1}{\mathrm{Sym}C_1}\sum_T \chi_{C_1}^{\bar{T}} a_T . \delta_{C_1,C_2} \\
&= A_{C_1}\delta_{C_1,C_2}.
\end{aligned} \tag{2.54}$$

这里我们使用了将融合系数表示为对特征标求和的表达式，以及特征标正交关系。方程（2.53）还表明，乘法的结构常数在幂等元基中是对角的。

正交投影算子满足完备关系

$$\sum_C A_C = a_{R_0}, \tag{2.55}$$

其中 R_0 是平凡表示，因为

$$\begin{aligned}
\sum_C A_C &= \sum_C \frac{1}{\mathrm{Sym}C} \sum_R \chi_C^{\bar{R}} a_R \\
&= \sum_R \sum_C \frac{|C|\chi_C^{\bar{R}}}{|G|} a_R \\
&= \sum_R \sum_g \frac{\chi^R(g^{-1})}{|G|}\ a_R \\
&= \sum_R \sum_g \frac{\chi^R(g^{-1})}{|G|} \chi^{R_0}(g)\ a_R \\
&= \sum_R \delta^{R,R_0} a_{R_0} = a_{R_0}.
\end{aligned} \tag{2.56}$$

这些幂等元也是乘以 a_R 这一运算的特征向量：

$$a_R A_C = \chi_C^R A_C, \ . \tag{2.57}$$

这是推导过程。

$$\begin{aligned}
a_R A_C \quad &= \frac{1}{\mathrm{Sym}C} \sum_S \chi_C^{\bar{S}} a_R a_S \\
&= \frac{1}{\mathrm{Sym}C} \sum_{S,T} \chi_C^{\bar{S}} N_{RS}^T a_T \\
&= \frac{1}{\mathrm{Sym}C} \sum_{S,T} \chi_C^{\bar{S}} \sum_{C'} \chi_{C'}^R \chi_{C'}^S \chi_{C'}^{\bar{T}} \frac{|C'|}{|G|} a_T \\
&= \frac{1}{\mathrm{Sym}C} \sum_{C',T} \left(\sum_S \chi_C^{\bar{S}} \chi_{C'}^S \right) \chi_{C'}^R \chi_{C'}^{\bar{T}} . \frac{|C'|}{|G|} . a_T \\
&= \frac{1}{\mathrm{Sym}C} \sum_{C',T} \left(\delta_{C,C'} \mathrm{Sym}C' \right) \chi_{C'}^R \chi_{C'}^{\bar{T}} . \frac{|C'|}{|G|} . a_T \\
&= \sum_T \frac{1}{\mathrm{Sym}C} \chi_C^R \chi_C^{\bar{T}} a_T \\
&= \chi_C^R \frac{1}{\mathrm{Sym}C} \sum_T \chi_C^{\bar{T}} a_T \\
&= \chi_C^R A_C.
\end{aligned} \tag{2.58}$$

比较（2.57）和（2.51），我们看到，与 a_R 的左乘相对应的矩阵 N_R，其特征值对应于 $C \in$Cl(G) 的特征标 χ_C^R。因此，融合代数提供了一种类似于 Burnside 算法 [25–27]，的算法，可从群代数中心的结构常数矩阵 f_C 构造 G 的特征标。正如 [14] 的第 3.1 节所讨论的，亏格为一的曲面上带边界的 G-CTST 振幅，提供了来自 $\mathcal{Z}(\mathbb{C}(G))$ 中共轭类乘法的组合数据，这些数据参与了归一化特征标 $\chi^R{}_{(T_C)}{}_{d_R}$ 的 Burnside 构造。类似地， $R(G)$-CTST 中相应的振幅给出了正整数融合数据，可用于构造特征标 $\chi^R(T_C)$。

为了定义融合拓扑量子场论的配分函数，我们在 $R(G)$ 上引入一个余单位（见 (A.11)）

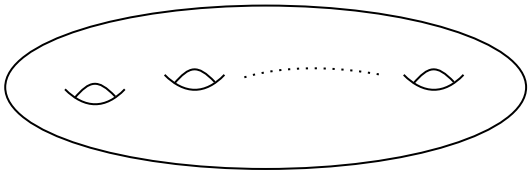
$$\varepsilon(a_R) = \begin{cases} 1 & \text{if } R = R_0, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{2.59}$$

在幂等元基中，我们有

$$\varepsilon(A_C) = \frac{1}{\mathrm{Sym}C} \sum_R \chi_C^{\bar{R}} \varepsilon(a_R) = \frac{1}{\mathrm{Sym}C} \chi_C^{R_0} = \frac{1}{\mathrm{Sym}C} \tag{2.60}$$

与 G-拓扑量子场论中一样，可以在融合代数中构造一个手柄生成算子 Θ，使得

$$Z_h^{R(G)} = \varepsilon(\Theta^h) \; = \tag{2.61}$$



我们可以定义手柄生成算子

$$\Theta = \sum_{S \in \mathrm{Irr}(G)} N_{S\bar{S}}^R a_R \tag{2.62}$$

这反映了这样一个事实：带有一个孔（标记为态 R）的环面，是通过粘合一个具有三个边界的球面上的两个边界得到的。粘合运算对应于对 S 求和。由此可以得到一个将 Θ 表示为对投影算子 A_C 求和的表达式。值得注意的是

$$\begin{aligned} \sum_S N_{S\bar{S}}^R &= \frac{1}{|G|} \sum_S \sum_{g \in G} \chi^S(g) \chi^{\bar{S}}(g) \chi^{\bar{R}}(g) \\ &= \sum_{C \in \mathrm{Cl}(G)} \chi_C^{\bar{R}}(g) \end{aligned} \tag{2.63}$$

其中，第二行是利用特征标正交性简化对 S 的求和得到的。接着，利用投影算符 A_C 的公式 (2.52)，可得

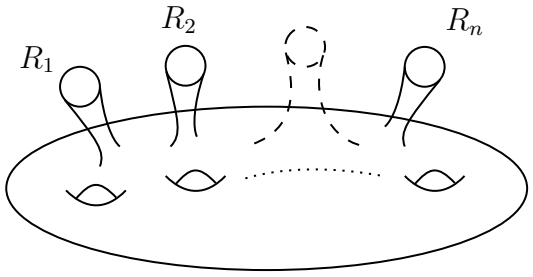
$$\Theta = \sum_C (\mathrm{Sym}C) A_C. \tag{2.64}$$

由 (2.60) 可得

$$Z_h^{R(G)} = \epsilon(\Theta^h) = \sum_C \epsilon((\mathrm{Sym}C)^h A_K) = \sum_C (\mathrm{Sym}C)^{h-1}, \tag{2.65}$$

这与由 Frobenius 结构推导出的 (A.28) 一致。具有 n 个边界的亏格为 h 的配分函数为

$$Z^{R(G)}_{h\ R_1\ ,,\ldots,R_n} = \varepsilon(\Theta^h a_{R_1} \ldots a_{R_n}) \ = \tag{2.66}$$



由 (2.57) 可得

$$\begin{aligned} \varepsilon(\Theta^h a_{R_1} \ldots a_{R_n}) &= \sum_{C\in \mathrm{Cl}(G)} (\mathrm{Sym}C)^h \varepsilon(A_C a_{R_1} \ldots a_{R_n}) \\ &= \sum_{C\in \mathrm{Cl}(G)} (\mathrm{Sym}C)^h \chi_C^{R_1} \ldots \chi_C^{R_n} \varepsilon(A_C) \\ &= \sum_{C\in \mathrm{Cl}(G)} (\mathrm{Sym}C)^{h-1} \chi_C^{R_1} \ldots \chi_C^{R_n}, \end{aligned} \tag{2.67}$$

这与由 Frobenius 结构推导出的 (A.41) 一致。

2.4 来自 $R(G)$-CTST 的整性部分行和

$R(G)$-CTST 将使我们能够推导出沿行的特征标之和的整性结果。证明与第 2.2 节类似。第 2.2 节中利用的、 $\mathcal{Z}(\mathbb{C}(G))$ 在共轭类中心元 T_C (2.12) 基下乘法的整性性质，现在将由融合系数的整性性质取代；融合系数是 $R(G)$-拓扑量子场论中振幅的构造基块。

定理 1 设 $S \in \mathrm{Irr}(G)$ 是一个不可约表示，使得对于所有 $C \in \mathrm{Cl}(G)$， χ_C^S 都是整数。这定义了 G 的特征标表中的一个整数行。现在，固定一个共轭类 D 并定义集合

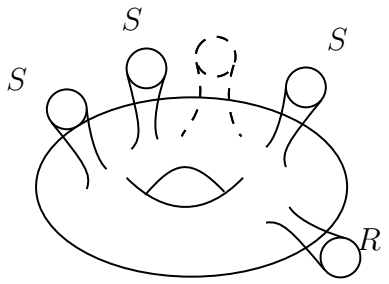
$$\langle (S, D) \rangle = \left\{ C \in \mathrm{Cl}(G) \quad s.t. \quad \chi_C^S = \chi_D^S \right\}. \tag{2.68}$$

现在考虑任意满足 $R \neq S$ 的 $R \in \mathrm{Irr}(G)$。我们将证明

$$\sum_{C\in\langle (S,D)\rangle} \chi_C^R \in \mathbb{Z}. \tag{2.69}$$

定理 1 的证明 考虑配分函数向量

$$Z^{R(G)}_{h=1;S^b,R} = \sum_{C\in \mathrm{Cl}(G)} \left(\chi^S_C\right)^b \chi^R_C = \tag{2.70}$$



对于 b 一个非负整数。我们将求和组织为水平集

$$Z^{R(G)}_{h=1;S^b,R} = \sum_{C'} \left(\chi^S_{C'}\right)^b \sum_{C\in\langle (S,C')\rangle} \chi^R_C, \tag{2.71}$$

其中第一个求和遍历满足以下条件的共轭类集合 $\{C'_1,\ldots,C'_k\}$

$$\chi^S_{C'_1},\ldots,\chi^S_{C'_k} \tag{2.72}$$

均互不相同，且

$$\langle (S,C'_1)\rangle \cup \langle (S,C'_2)\rangle \cup \cdots \cup \langle (S,C'_k)\rangle = \mathrm{Cl}(G). \tag{2.73}$$

现在我们将范围限制在满足 $b = 1$、.....、 k 的配分函数上。方程 (2.71) 是一个矩阵方程

$$y = Vx, \tag{2.74}$$

其中

$$y_b = Z^{R(G)}_{h=1;S^b,R} \tag{2.75}$$

$$x_{C'} = \sum_{C\in\langle (S,C')\rangle} \chi^R_C \tag{2.76}$$

$$V_{bC'} = \left(\chi^S_{C'}\right)^b. \tag{2.77}$$

矩阵 V 是一个整数 $k\times k$ 范德蒙德矩阵，其逆元 V^{-1} 是一个有理数矩阵。我们有

$$x = V^{-1}y. \tag{2.78}$$

左边是一个由代数整数构成的向量，右边是一个由有理数组成的向量。因此

$$x_D = \sum_{C\in\langle (S,D)\rangle} \chi^R_C \in \mathbb{Z}, \tag{2.79}$$

对所有 $R\in$Irr(G)，至此定理 1 的证明完成。

命题 2.3 一个值得考虑的特殊情形是 $S = R_0$，即平凡表示，以及任意 $D \in$Cl(G)。那么

$$\langle (R_0, D) \rangle = \mathrm{Cl}(G), \tag{2.80}$$

由此可得，

$$\sum_{C \in \mathrm{Cl}(G)} \chi_C^R \in \mathbb{Z}, \tag{2.81}$$

对于任意 $R \in$不可约表示(G)。

事实上， R(G)-CTST 直接给出以下正性性质。

命题 2.4 求和

$$\sum_{C \in \mathrm{Cl}(G)} \chi_C^R \in \mathbb{Z}^+, \tag{2.82}$$

对于任意 $R \in$Irr(G)。

命题 2.4 的证明　考虑将 (2.67) 特化后得到的 $Z_{h=1}^{R(G)}{}_{,R}$ ob- 的配分函数各表达式 to

$$Z_{h=1,R}^{R(G)} \qquad = \epsilon(\Theta a_{\bar{R}}) = \sum_{C \in \mathrm{Cl}(G)} \chi_C^R. \tag{2.83}$$

我们还有

$$Z_{h=1,R}^{R(G)} = \sum_{S \in \mathrm{Irr}(G)} N_{S\bar{S}}^R \tag{2.84}$$

利用单位元 (2.63)。由于融合系数 $N_{S\bar{S}}^R$ 为正，命题得证。

3 行列对偶：行/列的精细整性性质与广义分拆

在本节中，我们将扩展前一节所使用的技术，以证明 [15, 第 3 节4]中特征标整性结果的推广形式。特别地，我们放宽了整行或整列均为整数的假设。正如我们在第 4 节中回顾的那样，这些结果也可以利用伽罗瓦理论加以证明。在这里，我们将给出这些结果的组合拓扑弦理论推导及其诠释。最后，我们将重点介绍在我们的研究中所显现出的整数行列和中的一种新的分拆结构。

3.1 来自 G-CTST 的精细整数列和

在这个 s 在本小节中，我们将使用以下引理，该引理的证明见附录 B。 .

引理 1 设 Z 是一个特征值为 $\lambda_1 \ldots$、λ_K 的非负整数对角化矩阵。设不同特征值的集合为 $\{z_1, \ldots, z_k\}$。注意，$k \leq K$ 通常成立。定义 $k \times k$ 范德蒙德矩阵

$$V_{b,i} = z_i^b. \tag{3.1}$$

一般而言，特征值 z_1，...，z_k 都是代数整数。但假设 z_j 是有理数，那么范德蒙德矩阵的逆矩阵 V^{-1} 的第 j 行具有有理数项：

$$(V^{-1})_{j,b} \in \mathbb{Q} \quad \forall\, b \in \{1, \ldots, k\}. \tag{3.2}$$

我们关注 z_j 为整数的特殊情形。

我们现在将要证明的第一个特征标整性结果如下。

定理 2 设 D 是一个共轭类，S 是 G 的一个不可约表示，使得

$$\frac{\chi^S(T_D)}{d_S} = |D|\frac{\chi_D^S}{d_S} \in \mathbb{Z}. \tag{3.3}$$

定义 Irr(G) 的子集

$$[(S,D)] = \left\{ R \in \mathrm{Irr}(G) \quad s.t. \quad \frac{\chi^R(T_D)}{d_R} = \frac{\chi^S(T_D)}{d_S} \right\}. \tag{3.4}$$

$$= \left\{ R \in \mathrm{Irr}(G) \quad s.t. \quad |D|\frac{\chi_D^R}{d_R} = |D|\frac{\chi_D^S}{d_S} \right\}. \tag{3.5}$$

然后求和

$$\sum_{R \in [(S,D)]} \frac{\chi^R(T_C)}{d_R} = \sum_{R \in [(S,D)]} |C|\frac{\chi_C^R}{d_R} \in \mathbb{Z}, \quad \forall C \in \mathrm{Cl}(G). \tag{3.6}$$

对于所有共轭类，它都是一个整数。请注意，与 (2.31) 相比，我们去掉了 χ_D^R 对所有 $R \in$ Irr(G) 都是整数这一假设。

定理 2 的证明（构造性） 为了证明上述结果，考虑振幅的 l 维整数向量 $y = (y_1, \ldots, y_l)$

$$y_b(D,C) = Z^G_{h=1,D^b,C} = \sum_R \left(\frac{\chi^R(T_D)}{d_R} \right)^b \frac{\chi^R(T_C)}{d_R}, \quad b = 1, \ldots, l. \tag{3.7}$$

其中 l 是一个非负整数。我们将求和重新写为对水平集的求和

$$y_b(D,C) = \sum_{R'} \left(\frac{\chi^{R'}(T_D)}{d_{R'}} \right)^b \sum_{R \in [(R',D)]} \frac{\chi^R(T_C)}{d_R}, \tag{3.8}$$

其中第一个求和是对一组不可约表示 $R'_1, \ldots, R'_k$ 进行的，满足

$$\frac{\chi^{R'_1}(T_D)}{d_{R'_1}}, \ldots, \frac{\chi^{R'_k}(T_D)}{d_{R'_k}}, \tag{3.9}$$

均互不相同，且

$$[(R'_1, D)] \cup [(R'_2, D)] \cup \cdots \cup [(R'_k, D)] = \mathrm{Irr}(G). \tag{3.10}$$

Now 我们将范围限制为具有 $b = 1$、.....、 k 的配分函数。定义向量 r

$$x_{R'}(D, C) = \sum_{R \in [(R', D)]} \frac{\chi^R_C(T_C)}{d_R}, \tag{3.11}$$

以及 $k \times k$ 范德蒙德矩阵

$$V_{b,R'}(D) = \left(|D| \frac{\chi^{R'}_D}{d_{R'}} \right)^b = \left(\frac{\chi^{R'}(T_D)}{d_{R'}} \right)^b. \tag{3.12}$$

注意

$$T_C P_R = \frac{\chi^R(T_C)}{d_R} P_R = |C| \frac{\chi^R_C}{d_R} P_R, \tag{3.13}$$

因此，归一化特征标是整数结构常数矩阵 f_C 的特征值，满足使用逆 Vandermonde 引理的要求。现在，方程 (3.8) 可写为

$$y(D, C) = V(D) x(D, C). \tag{3.14}$$

由于 $V(D)$ 是 由互不相同的归一化特征标构成的范德蒙德矩阵是可逆的 a nd

$$x(D, C) = V^{-1}(D) y(D, C). \tag{3.15}$$

用范德蒙德矩阵的逆矩阵表示，方程（3.6）写作，

$$x_S(D, C) = \sum_{b=1}^{K} (V^{-1})_{Sb}(D) y_b(D, C). \tag{3.16}$$

根据引理 (3.2)，对所有 $b = 1, \ldots, k$，$(V^{-1})_{Sb}(D)$ 都是有理数。由于 y_b 是整数向量，右端是有理数。左端是代数整数的求和。既是有理数又是代数整数的求和必然是整数。至此，定理 2 的构造性证明完成。在第 4 节中，我们将给出同一命题的伽罗瓦理论证明。

(3.6) 中的求和由单个有序对 (S, D) 指定。现在我们将证明上述命题的一个精细化版本。

定理 3 考虑两对 (S_1, D_1)、(S_2, D_2)，它们具有如下性质

$$\frac{\chi^{S_1}(T_{D_1})}{d_{S_1}}, \quad \frac{\chi^{S_2}(T_{D_2})}{d_{S_2}} \in \mathbb{Z}. \tag{3.17}$$

正如我们将要证明的,

$$\sum_{R\in[(S_1,D_1)]\cap[(S_2,D_2)]} \frac{\chi^R(T_C)}{d_R} \in \mathbb{Z}, \quad \forall C \in \mathrm{Cl}(G), \tag{3.18}$$

其中求和遍历该集合

$$[(S_1,D_1)]\cap[(S_2,D_2)] = \left\{ R \in \mathrm{Irr}(G) \quad s.t. \quad \frac{\chi^R(T_{D_1})}{d_R} = \frac{\chi^{S_1}(T_{D_1})}{d_{S_1}} \quad and \quad \frac{\chi^R(T_{D_2})}{d_R} = \frac{\chi^{S_2}(T_{D_2})}{d_{S_2}} \right\}. \tag{3.19}$$

定理 3 的证明（构造性）：为证明这一点，考虑由配分函数构成的矩阵 $y(D_1, D_2, C)$。

$$y_{b,b'}(D_1,D_2,C) = Z^G_{h=1,D_1^b,D_2^{b'},C} = \sum_{R\in\mathrm{Irr}(G)} \left(\frac{\chi^R(T_{D_1})}{d_R}\right)^b \left(\frac{\chi^R(T_{D_2})}{d_R}\right)^{b'} \frac{\chi^R(T_C)}{d_R}, \quad b,b' = 1,\ldots,l. \tag{3.20}$$

对于某个非负整数 l。我们将求和划分为对水平集的求和。

$$y_{b,b'}(D_1,D_2,C) = \sum_{R_1'} \left(\frac{\chi^{R_1'}(T_{D_1})}{d_{R_1'}}\right)^b \sum_{R\in[(R_1',D_1)]} \left(\frac{\chi^R(T_{D_2})}{d_R}\right)^{b'} \frac{\chi^R(T_C)}{d_R}. \tag{3.21}$$

现在我们将范围限制在具有 $b = 1, \ldots, k$ 的配分函数上，其中 k 是具有不同 $\chi^R(T_{D_1})\, d_R$ 的不可约表示 R 的数量。$k \times k$ 矩阵

$$\left(\frac{\chi^{R_1'}(T_{D_1})}{d_{R_1'}}\right)^b, \tag{3.22}$$

根据定理中的假设，对于 $R_1' = S_1$，这是一个具有整数行的范德蒙德矩阵。定理 2 的证明中所采用的逆 Vandermonde 引理论证表明,

$$\sum_{R\in[(S_1,D_1)]} \left(\frac{\chi^R(T_{D_2})}{d_R}\right)^{b'} \frac{\chi^R(T_C)}{d_R} \in \mathbb{Z}. \tag{3.23}$$

我们进一步将这一求和划分为若干水平集:

$$\sum_{R\in[(S_1,D_1)]} \left(\frac{\chi^R(T_{D_2})}{d_R}\right)^{b'} \frac{\chi^R(T_C)}{d_R} = \sum_{R_2'} \left(\frac{\chi^{R_2'}(T_{D_2})}{d_{R_2'}}\right)^{b'} \sum_{R\in[(S_1,D_1)]\cap[(R_2',D_2)]} \frac{\chi^R(T_C)}{d_R}, \tag{3.24}$$

其中，对 R_2' 的求和是一个不可约表示集合，使得

$$\frac{\chi^{R_2'}(T_{D_2})}{d_{R_2'}} \tag{3.25}$$

均互不相同，且 $[(R_2', D_2)]$ 的并集为整个 $[(S_1, D_1)]$。现在我们将范围限制在满足 $b' = 1, \ldots, k'$ 的配分函数上，其中 k' 是具有互不相同 $\chi^R(T_{D_2})\ d_R$ 的不可约表示 R 的数量。再次利用范德蒙德论证可得

$$\sum_{R\in[(S_1,D_1)]\cap[(S_2,D_2)]} \frac{\chi^R(T_C)}{d_R} \in \mathbb{Z}, \quad \forall C \in \mathrm{Cl}(G). \tag{3.26}$$

将论证推广到任意数量的数对 (S, D)，使其归一化特征标为整数，是很直接的。这可利用伽罗瓦理论在 (4.38) 中证明。

另一种推广是在求和中插入手柄生成算子，以固定 d_R。这可用于构造对集合上的整数求和

$$\{R \in \mathrm{Irr}(G) \quad \text{s.t.} \quad \frac{\chi^R(T_D)}{d_R} = \frac{\chi^S(T_D)}{d_S} \quad \text{and} \quad d_R = d_S\} = \tag{3.27}$$

$$\{R \in \mathrm{Irr}(G) \quad \text{s.t.} \quad |D|\frac{\chi^R_D}{d_R} = |D|\frac{\chi^S_D}{d_S} \quad \text{and} \quad d_R = d_S\} = \tag{3.28}$$

$$\{R \in \mathrm{Irr}(G) \quad \text{s.t.} \quad \chi^R_D = \chi^S_D, \quad \text{and} \quad d_R = d_S\}. \tag{3.29}$$

从而得到以下命题。

命题 3.1 对上述定义的不可约表示子集求和

$$\sum_R \chi^R_C \tag{3.30}$$

对于所有 $C \in$Cl(G)，该值都是整数。

正如我们将在第 4 节中看到的，这是伽罗瓦结果 (4.37) 的一个特殊情形，其中群元素的有序列表 $H = (h_1, e)$ 满足 $h_1 \in D$，且整数的有序列表为 $N = (\chi^S_D, d_S)$。

3.2 来自 $R(G)$-CTST 的精细积分行求和

在本节中，我们将使用 $R(G)$-CTST 推导出与上述结果对偶的结论。我们将证明以下行和的整性。

定理 4 设 $(S, D) \in$ 不可约表示$(G) \times$ 类(G)，使得

$$\chi^S_D \in \mathbb{Z}. \tag{3.31}$$

定义 Cl(G) 的以下子集

$$\langle (S, D) \rangle = \left\{ C \in \mathrm{Cl}(G) \quad s.t. \quad \chi^S_C = \chi^S_D \right\}. \tag{3.32}$$

然后是求和

$$\sum_{C\in\langle (S,D)\rangle} \chi^R_C \in \mathbb{Z}, \quad \forall R \in \mathrm{Irr}(G). \tag{3.33}$$

是整数。

定理 4 的证明（构造性）为证明这一点，我们遵循与第 3.1 节类似的步骤。考虑 K维整数向量

$$y_b(S,R) = Z^{R(G)}_{h=1,S^b,R} = \sum_C (\chi^S_C)^b \chi^R_C, \quad b = 1,\dots,l. \tag{3.34}$$

其中 l 是非负整数。我们将求和划分为水平集

$$y_b(S,R) = \sum_{C'} (\chi^S_{C'})^b \sum_{C\in\langle(S,C')\rangle} \chi^R_C, \tag{3.35}$$

其中，第一个求和是对一组共轭类 $C'_1,\dots,C'_k$ 进行的，使得

$$\chi^S_{C'_1},\dots,\chi^S_{C'_k}, \tag{3.36}$$

均各不相同，且

$$\langle(S,C'_1)\rangle \cup \langle(S,C'_2)\rangle \cup \cdots \cup \langle(S,C'_k)\rangle = \mathrm{Cl}(G). \tag{3.37}$$

现在我们将范围限制为具有 $b = 1,\dots,k$ 的配分函数。定义向量

$$x_{C'}(S,R) = \sum_{C\in\langle(S,C')\rangle} \chi^R_C, \tag{3.38}$$

和范德蒙德矩阵

$$V_{b,C'}(S) = (\chi^S_{C'})^b. \tag{3.39}$$

Then

$$y(S,R) = V(S)x(S,R), \tag{3.40}$$

由于 $V(S)$ 是一个范德蒙德矩阵，因此它是可逆的，并且

$$x(S,R) = V^{-1}(S)y(S,R). \tag{3.41}$$

根据范德蒙引理，$(V^{-1}(S))_{Db}$ 对于所有 $b = 1,\dots,K$ 都是有理数。方程 (3.33) 的左端读作

$$x_D(S,R) = \sum_{b=1}^{K} (V^{-1}(S))_{Db} y_b(S,R). \tag{3.42}$$

左端是代数整数的求和，而右端是有理数的求和，因此它们都是整数。

通过固定若干对（S_1， D_1）、（S_2， D_2）.....，可以进一步细化求和。我们省略这一结论的构造性证明，因为它与上一小节中给出的类似证明如出一辙。这一推广以及上述特殊情形的伽罗瓦理论证明见第 4 节（参见定理 4^* 的证明，约在公式（4.53）处）。

3.3 整数行和的广义划分

Co考虑有限群 G 的特征标表 χ_C^R，并固定其中一行 S。其 su m

$$\sum_C \chi_C^S = n_S, \tag{3.43}$$

是一个整数，正如等式 (2.81) 所证明的那样。现在我们将看到，这个整数具有更深层的组合结构。我们将满足以下条件的三元组 $[p,q,r]$ 称为： p 和 q 是整数分拆，而 r 是一个由零组成的列表。

$$\sum_i p_i - \sum_j q_j + \sum_k r_k = n_S. \tag{3.44}$$

n_S 的广义分拆，并记作

$$[p,q,r] \vDash n_S. \tag{3.45}$$

关于特征标和整性的先前结果可用于给出 n_S 的广义整数分拆。

为说明这一点，构造表 $\chi_C^{R\neq S}$，它与原始特征标表相同，但删除了行 S。从该表出发，构造 $\chi^{R\neq S}{}_{\cdot C}{}^{\mathbb{Z}}$，仅保留完全由整数构成的行。表 $\chi^{R\neq S}{}_{\cdot C}{}^{\mathbb{Z}}$ 通过以下方式在共轭类上定义一个等价关系，即

$$C \sim_S C' \quad \text{if } \chi_C^{R\neq S,\mathbb{Z}} = \chi_{C'}^{R\neq S,\mathbb{Z}} \text{ for all rows.} \tag{3.46}$$

等价关系将共轭类集合划分为等价类$\kappa_1, \ldots, \kappa_l$。等价类 κ_i 是向量值函数的水平集

$$f^R(C) = \chi_C^{R\neq S,\mathbb{Z}}, \tag{3.47}$$

在共轭类上，由特征标表中删除第 S 行后得到的整数行定义。它们对共轭类集合进行集合划分，使得

$$n_S = \sum_{C\in \mathrm{Cl}(G)} \chi_C^S = \sum_{i=1}^{l} \sum_{C\in\kappa_i} \chi_C^S. \tag{3.48}$$

设 $C_1 \in \kappa_1, \ldots, C_l \in \kappa_l$ 为一个代表元集合。等价类 κ_i 等于这些集合。

$$\kappa_i = \bigcap_{\substack{R\neq S \\ \text{R integer row}}} \langle (R, C_i) \rangle. \tag{3.49}$$

因此，求和值

$$\sum_{C\in\kappa_i} \chi_C^S, \tag{3.50}$$

对于所有 $S \in$Irr(G)，均为整数。

我们以 $\mathbb{Z}_6$ 的特征标表为例说明这一过程,

$$\begin{array}{c|cccccc} & C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 & C_6 \\ \hline R_1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ R_2 & 1 & \zeta_3 & -\zeta_3-1 & \zeta_3+1 & -1 & -\zeta_3 \\ R_3 & 1 & -\zeta_3-1 & \zeta_3 & \zeta_3 & 1 & -\zeta_3-1 \\ R_4 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ R_5 & 1 & \zeta_3 & -\zeta_3-1 & -\zeta_3-1 & 1 & \zeta_3 \\ R_6 & 1 & -\zeta_3-1 & \zeta_3 & -\zeta_3 & -1 & \zeta_3+1. \end{array} \tag{3.51}$$

有了 $S = R_1$, 我们得到

$$\chi_C^{R\neq R_1} = \begin{array}{c|cccccc} & C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 & C_6 \\ \hline R_2 & 1 & \zeta_3 & -\zeta_3-1 & \zeta_3+1 & -1 & -\zeta_3 \\ R_3 & 1 & -\zeta_3-1 & \zeta_3 & \zeta_3 & 1 & -\zeta_3-1 \\ R_4 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ R_5 & 1 & \zeta_3 & -\zeta_3-1 & -\zeta_3-1 & 1 & \zeta_3 \\ R_6 & 1 & -\zeta_3-1 & \zeta_3 & -\zeta_3 & -1 & \zeta_3+1 \end{array} \tag{3.52}$$

and

$$\chi_C^{R\neq R_1,\mathbb{Z}} = \begin{array}{c|cccccc} & C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 & C_6 \\ \hline R_4 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1. \end{array} \tag{3.53}$$

这就得到如下的共轭类划分

$$\{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6\} = \{C_1, C_2, C_3\} \cup \{C_4, C_5, C_6\} = \kappa_1 \cup \kappa_2. \tag{3.54}$$

特别地, 我们有

$$\sum_C \chi_C^{R_1} = 6 = \sum_{C=C_1,C_2,C_3} \chi_C^{R_1} + \sum_{C=C_4,C_5,C_6} \chi_C^{R_1} = 3 + 3. \tag{3.55}$$

对于 $S = R_2$, 我们有

$$\chi_C^{R\neq R_2} = \begin{array}{c|cccccc} & C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 & C_6 \\ \hline R_1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ R_3 & 1 & -\zeta_3-1 & \zeta_3 & \zeta_3 & 1 & -\zeta_3-1 \\ R_4 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ R_5 & 1 & \zeta_3 & -\zeta_3-1 & -\zeta_3-1 & 1 & \zeta_3 \\ R_6 & 1 & -\zeta_3-1 & \zeta_3 & -\zeta_3 & -1 & \zeta_3+1 \end{array} \tag{3.56}$$

and

$$\chi_C^{R\neq R_2,\mathbb{Z}} = \begin{array}{c|cccccc} & C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 & C_6 \\ \hline R_1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ R_4 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1\ . \end{array} \tag{3.57}$$

这给出了共轭类的相同划分

$$\{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6\} = \{C_1, C_2, C_3\} \cup \{C_4, C_5, C_6\} = \kappa_1 \cup \kappa_2 \tag{3.58}$$

因此

$$\sum_C \chi_C^{R_2} = 0 = \sum_{C=C_1,C_2,C_3} \chi_C^{R_2} + \sum_{C=C_4,C_5,C_6} \chi_C^{R_2} = 0 + 0. \tag{3.59}$$

值得注意的是，该分割取决于 S 的选择。例如，令 $S = R_4$，则

$$\chi_C^{R\neq R_4} = \begin{array}{c|cccccc} & C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 & C_6 \\ \hline R_1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ R_2 & 1 & \zeta_3 & -\zeta_3-1 & \zeta_3+1 & -1 & -\zeta_3 \\ R_3 & 1 & -\zeta_3-1 & \zeta_3 & \zeta_3 & 1 & -\zeta_3-1 \\ R_5 & 1 & \zeta_3 & -\zeta_3-1 & -\zeta_3-1 & 1 & \zeta_3 \\ R_6 & 1 & -\zeta_3-1 & \zeta_3 & -\zeta_3 & -1 & \zeta_3+1 \end{array} \tag{3.60}$$

and

$$\chi_C^{R\neq R_4,\mathbb{Z}} = \begin{array}{c|cccccc} & C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 & C_6 \\ \hline R_1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \tag{3.61}$$

使得诱导分拆是平凡的

$$\{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6\} = \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6\} = \kappa_1. \tag{3.62}$$

因此

$$\sum_C \chi_C^{R_4} = 0 = \sum_{C=C_1,C_2,C_3,C_4,C_5,C_6} \chi_C^{R_4} = 0. \tag{3.63}$$

用广义划分的语言来说，我们发现了晟

$$[[3,3],[],[]] \vDash n_{R_1}, \quad [[],[],[0,0]] \vDash n_{R_2}, \quad [[],[],[0]] \vDash n_{R_4}. \tag{3.64}$$

现在，我们给出若干群的特征标表划分示例。对于每一行，我们给出：特征标在每个子集 κ_i 上的取值，这些子集将列划分为若干部分；相应的广义划分 $[p,q,r]$；最后是整数行求和 n_S。在熟悉的 $\mathbb{Z}_6$ 示例中，我们发现

S	κ_1	κ_2	p	q	r	n_S
R_1	$[1,1,1]$	$[1,1,1]$	$[3,3]$	$[]$	$[]$	6
R_2	$[1,\zeta_3,-\zeta_3-1]$	$[\zeta_3+1,-1,-\zeta_3]$	$[]$	$[]$	$[0,0]$	0
R_3	$[1,-\zeta_3-1,\zeta_3]$	$[\zeta_3,1,-\zeta_3-1]$	$[]$	$[]$	$[0,0]$	0
R_4	$[1,-1,1,-1,1,-1]$	$[]$	$[]$	$[]$	$[0]$	0
R_5	$[1,\zeta_3,-\zeta_3-1]$	$[-\zeta_3-1,1,\zeta_3]$	$[]$	$[]$	$[0,0]$	0
R_6	$[1,-\zeta_3-1,\zeta_3]$	$[-\zeta_3,-1,\zeta_3+1]$	$[]$	$[]$	$[0,0]$	0

(3.65)

对于马蒂厄群 M11，我们发现

S	κ_1	κ_2	κ_3	κ_4	κ_5	κ_6	κ_7	κ_8	p	q	r	n_S
R_1	[1]	[1]	[1]	[1]	[1]	[1]	[1,1]	[1,1]	[1,1,1,1,1,1,2,2]	[]	[]	10
R_2	[10]	[2]	[1]	[2]	[0]	[−1]	[0,0]	[−1,−1]	[10,2,1,2]	[−1,−2]	[0,0]	12
R_3	[10]	[−2]	[1]	[0]	[0]	[1]	$[\zeta_8^3+\zeta_8, -\zeta_8^3-\zeta_8]$	[−1,−1]	[10,1,1]	[−2,−2]	[0,0,0]	8
R_4	[10]	[−2]	[1]	[0]	[0]	[1]	$[-\zeta_8^3-\zeta_8, \zeta_8^3+\zeta_8]$	[−1,−1]	[10,1,1]	[−2,−2]	[0,0,0]	8
R_5	[11]	[3]	[2]	[−1]	[1]	[0]	[−1,−1]	[0,0]	[11,3,2,1]	[−1,−2]	[0,0]	14
R_6	[16]	[0]	[−2]	[0]	[1]	[0]	[0,0]	$[\zeta_{11}^9+\zeta_{11}^5+\zeta_{11}^4+\zeta_{11}^3+\zeta_{11}, -\zeta_{11}^9-\zeta_{11}^5-\zeta_{11}^4-\zeta_{11}^3-\zeta_{11}-1]$	[16,1]	[−2,−1]	[0,0,0,0]	14
R_7	[16]	[0]	[−2]	[0]	[1]	[0]	[0,0]	$[-\zeta_{11}^9-\zeta_{11}^5-\zeta_{11}^4-\zeta_{11}^3-\zeta_{11}-1, \zeta_{11}^9+\zeta_{11}^5+\zeta_{11}^4+\zeta_{11}^3+\zeta_{11}]$	[16,1]	[−2,−1]	[0,0,0,0]	14
R_8	[44]	[4]	[−1]	[0]	[−1]	[1]	[0,0]	[0,0]	[44,4,1]	[−1,−1]	[0,0,0]	47
R_9	[45]	[−3]	[0]	[1]	[0]	[0]	[−1,−1]	[1,1]	[45,1,2]	[−3,−2]	[0,0,0]	43
R_{10}	[55]	[−1]	[1]	[−1]	[0]	[−1]	[1,1]	[0,0]	[55,1,2]	[−1,−1,−1]	[0,0]	55

(3.66)

以及对于 $\mathbb{Z}_7 \rtimes \mathbb{Z}_3$

S	κ_1	κ_2	κ_3	κ_4	κ_5	κ_6	κ_7	κ_8	p	q	r	n_S
R_1	[1, 1]	[1]	[1, 1]	[1]	[1, 1]	[1]	[1, 1, 1, 1]	[1, 1]	[2, 1, 2, 1, 2, 1, 4, 2]	[]	[]	15
R_2	[1, 1]	[−1]	[−1, −1]	[1]	[1, 1]	[1]	[−1, −1, −1, −1]	[1, 1]	[2, 1, 2, 1, 2]	[−1, −2, −4]	[]	1
R_3	[1, 1]	[−1]	[1, 1]	[1]	[1, 1]	[−1]	[1, 1, 1, 1]	[1, 1]	[2, 2, 1, 2, 4, 2]	[−1, −1]	[]	11
R_4	[1, 1]	[1]	[−1, −1]	[1]	[1, 1]	[−1]	[−1, −1, −1, −1]	[1, 1]	[2, 1, 1, 2, 2]	[−2, −1, −4]	[]	1
R_5	[2, −2, 2]	[0]	[0, 0]	[2, −2, 2, −2]	[0]	[0, 0, 0, 0]	[]	[]	[2]	[]	[0, 0, 0, 0, 0]	2
R_6	[2, 2]	[0]	[−2, −2]	[2]	[−1, −1]	[0]	[1, 1, 1, 1]	[−1, −1]	[4, 2, 4]	[−4, −2, −2]	[0, 0]	2
R_7	[2, 2]	[0]	[2, 2]	[2]	[−1, −1]	[0]	[−1, −1, −1, −1]	[−1, −1]	[4, 4, 2]	[−2, −4, −2]	[0, 0]	2
R_8	[2, −2]	[0]	$[-\zeta_8^3-\zeta_8,\zeta_8^3+\zeta_8]$	[0]	[2, −2]	[0]	$[-\zeta_8^3-\zeta_8,-\zeta_8^3-\zeta_8,\zeta_8^3+\zeta_8\ \ \zeta_8^3+\zeta_8]$	[0, 0]	[]	[]	[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]	0
R_9	[2, −2]	[0]	$[\zeta_8^3+\zeta_8,-\zeta_8^3-\zeta_8]$	[0]	[2, −2]	[0]	$[\zeta_8^3+\zeta_8,\zeta_8^3+\zeta_8,-\zeta_8^3-\zeta_8,-\zeta_8^3-\zeta_8]$	[0, 0]	[]	[]	[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]	0
R_{10}	[2, 2]	[0]	[0, 0]	[−2]	[−1, −1]	[0]	$[-\zeta_{12}^3+2\zeta_{12},\zeta_{12}^3-2\zeta_{12},-\zeta_{12}^3+2\zeta_{12},\zeta_{12}^3-2\zeta_{12}]$	[1, 1]	[4, 2]	[−2, −2]	[0, 0, 0, 0]	2
R_{11}	[2, 2]	[0]	[0, 0]	[−2]	[−1, −1]	[0]	$[\zeta_{12}^3-2\zeta_{12},-\zeta_{12}^3+2\zeta_{12a}\zeta_{12}^3-2\zeta_{12a}-\zeta_{12}^3+2\zeta_{12}]$	[1, 1]	[4, 2]	[−2, −2]	[0, 0, 0, 0]	2
R_{12}	[2, −2]	[0]	$[-\zeta_8^3-\zeta_8,\zeta_8^3+\zeta_8]$	[0]	[−1, 1]	[0]	$[-\zeta_{24}^7+\zeta_{24}^3-\zeta_{24a}\zeta_{24}^7+\zeta_{24a}^3\zeta_{24}^7-\zeta_{24}^3\zeta_{24}+\zeta_{24a}-\zeta_{24}^7-\zeta_{24}^5]$	[]	[]	[]	[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]	0
R_{13}	[2, −2]	[0]	$[-\zeta_8^3-\zeta_8,\zeta_8^3+\zeta_8]$	[0]	[−1, 1]	[0]	$[\zeta_{24}^7+\zeta_{24}^5-\zeta_{24}^7+\zeta_{24}^3-\zeta_{24}^7-\zeta_{24}+\zeta_{24}^5-\zeta_{24}^3\zeta_{24}-\zeta_{24}+\zeta_{24}]$	[]	[]	[]	[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]	0
R_{14}	[2, −2]	[0]	$[\zeta_8^3+\zeta_8,-\zeta_8^3-\zeta_8]$	[0]	[−1, 1]	[0]	$[-\zeta_{24}^7-\zeta_{24}^5\zeta_{24}^7-\zeta_{24}^3+\zeta_{24a}\zeta_{24}^7+\zeta_{24a}^3-\zeta_{24}^7+\zeta_{24}^3-\zeta_{24}]$	$[-\zeta_{12}^3+2\zeta_{12a}\zeta_{12}^3-2\zeta_{12}]$	[]	[]	[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]	0
R_{15}	[2, −2]	[0]	$[\zeta_8^3+\zeta_8,-\zeta_8^3-\zeta_8]$	[0]	[−1, 1]	[0]	$[\zeta_{24}^7-\zeta_{24}^3+\zeta_{24},-\zeta_{24}^7-\zeta_{24}^3,-\zeta_{24}^7+\zeta_{24}^3-\zeta_{24},\zeta_{24}^7+\zeta_{24}^3]$	$[\zeta_{12}^3-2\zeta_{12},-\zeta_{12}^3+2\zeta_{12}]$	[]	[]	[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]	0

(3.67)

3.4 整数列和的广义划分

类似的考虑也适用于列求和。对于固定的共轭类 D，求和

$$\sum_{R\in\mathrm{Irr}(G)} \chi_D^R = n_D \tag{3.68}$$

是一个整数，正如我们在命题 2.1 中证明的那样。我们使用一组完全类似的规则来划分列。首先构造表 $\chi^R_{C\neq D}$，它对应于去掉列 D 后的特征标表。此外，只保留整数列，得到表 $\chi^R_{C\neq D,\ \mathbb{Z}}$。该表在行上定义了一个等价关系。

$$R \sim_D R' \quad \text{if } \chi^R_{C\neq D,\mathbb{Z}} = \chi^{R'}_{C\neq D,\mathbb{Z}} \text{ for all columns,} \tag{3.69}$$

将列 D 划分为子集 ρ_1、.....、ρ_l，使得

$$n_D = \sum_{R\in\mathrm{Irr}(G)} \chi_D^R = \sum_{i=1}^{l}\sum_{R\in\rho_i} \chi_D^R. \tag{3.70}$$

当 D 等于单位元的共轭类时，求和

$$\sum_{R\in\rho_i} \chi_D^R = \sum_{R\in\rho_i} d_R, \tag{3.71}$$

显然都是整数。对于 D 不等于单位元的情况，我们可以如下证明它们是整数。设 $R_1 \in \rho_1$, $\ldots, R_l \in \rho_l$ 为一个代表元集合。等价类是一些集合

$$\rho_i = \{R \in \mathrm{Irr}(G) \quad \text{s.t. } \chi_C^R = \chi_C^{R_i} \text{ for all integer integer columns } C \neq D \quad \}. \tag{3.72}$$

特别地，单位元共轭类对应的列始终是整数，因此包含在上述集合中。这迫使 $d_R = d_{R_i}$。因此，等价类可以理解为子集的交集。

$$\rho_i = \left[\bigcap_{\substack{C\neq D\\ C \text{ integer column}}} [(R_i, C)]\right] \cap [d_{R_i}]. \tag{3.73}$$

与 $[d_{R_i}]$ 的交集是强制得到 $d_R = d_{R_i}$ 所必需的。由此可得 th at

$$\sum_{R\in\rho_i} \chi_D^R \in \mathbb{Z}. \tag{3.74}$$

我们给出与上文相同的群的列的广义划分示例。请注意，现在行标记的是特征标表中的列。对于 $\mathbb{Z}_6$，我们有

D	ρ_1	ρ_2	p	q	r	n_D
C_1	$[1,1,1]$	$[1,1,1]$	$[3,3]$	$[]$	$[]$	6
C_2	$[1,\zeta_3,-\zeta_3-1]$	$[\zeta_3+1,-1,-\zeta_3]$	$[]$	$[]$	$[0,0]$	0
C_3	$[1,-\zeta_3-1,\zeta_3]$	$[\zeta_3,1,-\zeta_3-1]$	$[]$	$[]$	$[0,0]$	0
C_4	$[1,-1,1,-1,\mathbf{1},-1]$	$[]$	$[]$	$[]$	$[0]$	0
C_5	$[1,\zeta_3,-\zeta_3-1]$	$[-\zeta_3-1,1,\zeta_3]$	$[]$	$[]$	$[0,0]$	0
C_6	$[1,-\zeta_3-1,\zeta_3]$	$[-\zeta_3,-1,\zeta_3+1]$	$[]$	$[]$	$[0,0]$	0

(3.75)

对于马蒂厄群 M11，我们有

D	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_4	ρ_5	ρ_6	ρ_7	ρ_8	p	q	r	n_D
C_1	[1]	[10]	[10, 10]	[11]	[16, 16]	[44]	[45]	[55]	[1, 10, 20, 11, 32, 44, 45, 55]	[]	[]	218
C_2	[1]	[2]	$[-2,-2]$	[3]	[0, 0]	[4]	$[-3]$	$[-1]$	[1, 2, 3, 4]	$[-4,-3,-1]$	[0]	2
C_3	[1]	[1]	[1, 1]	[2]	$[-2,-2]$	$[-1]$	[0]	[1]	[1, 1, 2, 2, 1]	$[-4,-1]$	[0]	2
C_4	[1]	[2]	[0, 0]	$[-1]$	[0, 0]	[0]	[1]	$[-1]$	[1, 2, 1]	$[-1,-1]$	[0, 0, 0]	2
C_5	[1]	[0]	[0, 0]	[1]	[1, 1]	$[-1]$	[0]	[0]	[1, 1, 2]	$[-1]$	[0, 0, 0, 0]	3
C_6	[1]	$[-1]$	[1, 1]	[0]	[0, 0]	[1]	[0]	$[-1]$	[1, 2, 1]	$[-1,-1]$	[0, 0, 0]	2
C_7	[1]	[0]	$[\zeta_8^3+\zeta_8,-\zeta_8^3-\zeta_8]$	$[-1]$	[0, 0]	[0]	$[-1]$	[1]	[1, 1]	$[-1,-1]$	[0, 0, 0, 0]	0
C_8	[1]	[0]	$[-\zeta_8^3-\zeta_8,\zeta_8^3+\zeta_8]$	$[-1]$	[0, 0]	[0]	$[-1]$	[1]	[1, 1]	$[-1,-1]$	[0, 0, 0, 0]	0
C_9	[1]	$[-1]$	$[-1,-1]$	[0]	$[\zeta_{11}^9+\zeta_{11}^5+\zeta_{11}^4+\zeta_{11}^3+\zeta_{11}, -\zeta_{11}^9-\zeta_{11}^5-\zeta_{11}^4-\zeta_{11}^3-\zeta_{11}-1]$	[0]	[1]	[0]	[1, 1]	$[-1,-2,-1]$	[0, 0, 0]	-2
C_{10}	[1]	$[-1]$	$[-1,-1]$	[0]	$[-\zeta_{11}^9-\zeta_{11}^5-\zeta_{11}^4-\zeta_{11}^3-\zeta_{11}-1, \zeta_{11}^9+\zeta_{11}^5+\zeta_{11}^4+\zeta_{11}^3+\zeta_{11}]$	[0]	[1]	[0]	[1, 1]	$[-1,-2,-1]$	[0, 0, 0]	-2

(3.76)

而对于 $\mathbb{Z}_7 \rtimes \mathbb{Z}_3$

D	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_4	ρ_5	ρ_6	ρ_7	ρ_8	ρ_9	p	q	r	n_D
C_1	[1]	[1]	[1]	[1]	[2]	[2, 2]	[2, 2]	[2, 2]	[2, 2, 2, 2]	[1, 1, 1, 1, 2, 4, 4, 4, 8]	[]	[]	26
C_2	$[1,-1]$	$[-1,1]$	[0]	[0, 0]	[0, 0]	[0, 0]	[]	[]	[0, 0, 0, 0]	[]	[]	[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]	0
C_3	[1]	$[-1]$	[1]	$[-1]$	[0]	$[-2,2]$	$[-\zeta_8^3-\zeta_8,\zeta_8^3+\zeta_8]$	[0, 0]	$[-\zeta_8^3-\zeta_8,-\zeta_8^3-\zeta_8,\zeta_8^3+\zeta_8,\zeta_8^3+\zeta_8]$	[1, 1]	$[-1,-1]$	[0, 0, 0, 0, 0]	0
C_4	[1]	[1]	[1]	[1]	$[-2]$	$[2,2,-2,-2]$	[0, 0]	[0, 0, 0, 0]	[]	[1, 1, 1, 1]	$[-2]$	[0, 0, 0]	2
C_5	[1]	[1]	[1]	[1]	[2]	[2, 2]	$[-2,-2]$	[2, 2]	$[-2,-2,-2,-2]$	[1, 1, 1, 1, 2, 4, 4]	$[-4,-8]$	[]	2
C_6	[1]	[1]	[1]	[1]	[2]	$[-1,-1]$	[2, 2]	$[-1,-1]$	$[-1,-1,-1,-1]$	[1, 1, 1, 1, 2, 4]	$[-2,-2,-4]$	[]	2
C_7	$[1,-1]$	$[1,-1]$	[0]	[0, 0]	[0, 0]	[0, 0]	[0, 0, 0, 0]	[]	[]	[]	[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]	0	
C_8	[1]	$[-1]$	[1]	$[-1]$	[0]	$[-2,2]$	$[\zeta_8^3+\zeta_8,-\zeta_8^3-\zeta_8]$	[0, 0]	$[\zeta_8^3+\zeta_{8a}\zeta_8^3+\zeta_8\ -\zeta_8^3-\zeta_8\ -\zeta_8^3-\zeta_8]$	[1, 1]	$[-1,-1]$	[0, 0, 0, 0, 0]	0
C_9	[1]	$[-1]$	[1]	$[-1]$	[0]	$[1,-1]$	$[-\zeta_8^3-\zeta_8,\zeta_8^3+\zeta_8]$	$[-\zeta_{12}^3+2\zeta_{12},\ \zeta_{12}^3-2\zeta_{12}]$	$[-\zeta_{24}^7+\zeta_{24}^3-\zeta_{24},\zeta_{24}^7+\zeta_{24}^3,-\zeta_{24}^7-\zeta_{24}^3,\zeta_{24}^7-\zeta^3{}_{24}+\zeta_{24}]$	[1, 1]	$[-1,-1]$	[0, 0, 0, 0, 0]	0
C_{10}	[1]	[1]	[1]	[1]	$[-2]$	$[-1,-1]$	[0, 0]	[1, 1]	$[\zeta_{12}^3-2\zeta_{12},-\zeta_{12}^3+2\zeta_{12},\ -\zeta_{12}^3+2\zeta_{12},\ \zeta_{12}^3-2\zeta_{12}]$	[1, 1, 1, 1, 2]	$[-2,-2]$	[0, 0]	2
C_{11}	[1]	[1]	[1]	[1]	[2]	$[-1,-1]$	$[-2,-2]$	$[-1,-1]$	[1, 1, 1, 1]	[1, 1, 1, 1, 2, 4]	$[-2,-4,-2]$	[]	2
C_{12}	[1]	$[-1]$	[1]	$[-1]$	[0]	$[1,-1]$	$[-\zeta_8^3-\zeta_8,\zeta_8^3+\zeta_8]$	$[\zeta_{12}^3-2\zeta_{12},-\zeta_{12}^3+2\zeta_{12}]$	$[\zeta_{24}^7+\zeta_{24}^3,-\zeta_{24}^7+\zeta_{24}^3-\zeta_{24},\zeta_{24}^7-\zeta_{24}^3+\zeta_{24},\ -\zeta_{24}^7-\zeta_{24}^3]$	[1, 1]	$[-1,-1]$	[0, 0, 0, 0, 0]	0
C_{13}	[1]	$[-1]$	[1]	$[-1]$	[0]	$[1,-1]$	$[\zeta_8^3+\zeta_8,-\zeta_8^3-\zeta_8]$	$[-\zeta_{12}^3+2\zeta_{12},\zeta_{12}^3-2\zeta_{12}]$	$[\zeta_{24}^7-\zeta_{24}^3+\zeta_{24},-\zeta_{24}^7+\zeta_{24}^3-\zeta_{24},\zeta_{24}^7+\zeta_{24}^3,-\zeta_{24}^7+\zeta_{24}^3-\zeta_{24}]$	[1, 1]	$[-1,-1]$	[0, 0, 0, 0, 0]	0
C_{14}	[1]	[1]	[1]	[1]	$[-2]$	$[-1,-1]$	[0, 0]	[1, 1]	$[-\zeta_{12}^3+2\zeta_{12},\ \zeta_{12}^3-2\zeta_{12},\ \zeta_{12}^3-2\zeta_{12},\ -\zeta_{1}^3{}_2+2\zeta_{12}]$	[1, 1, 1, 1, 2]	$[-2,-2]$	[0, 0]	2
C_{15}	[1]	$[-1]$	[1]	$[-1]$	[0]	$[1,-1]$	$[\zeta_8^3+\zeta_8,-\zeta_8^3-\zeta_8]$	$[\zeta_{12}^3-2\zeta_{12},-\zeta_{12}^3+2\zeta_{12}]$	$[-\zeta_{24}^7-\zeta_{24}^3,\zeta_{24}^7-\zeta_{24}^3+\zeta_{24},-\zeta_{24}^7+\zeta_{24}^3-\zeta_{24},\ \zeta_{24}^7+\zeta_{24}^3]$	[1, 1]	$[-1,-1]$	[0, 0, 0, 0, 0]	0

(3.77)

4 特征标表的伽罗瓦理论

本节将回顾域扩张的伽罗瓦理论及其在特征标理论中的具体应用。通过聚焦于分圆域——与特征标理论相关的域扩张——我们能够具体阐述其伽罗瓦理论。具体而言，这包括对其伽罗瓦群、作为域自同构的相关作用，以及分圆域的伽罗瓦理论基本定理的明确描述。分圆域上的伽罗瓦作用会导出作用于 G的特征标上的伽罗瓦作用，我们将利用这一点研究特征标的整性性质。

考虑有限群 G 及其表示 R。根据 [28], 中的引理 2.15，我们知道，对于某个元素 $g \in G$，矩阵 $R(g)$ 与一个特征值为 ϵ_i 的对角矩阵相似。若 g 的阶为 N_g，使得 $g^{N_g} = 1$，则可得

$$R(g^{N_g}) = R(g)^{N_g} = 1, \tag{4.1}$$

且这些特征值满足 $\epsilon_i^{N_g} = 1$。因此，ϵ_i 是 N_g^{th} 个单位根。由于 $R(g)$ 的特征标为

$$\chi^R(g) = \sum_i \epsilon_i, \tag{4.2}$$

$e^{\frac{2\pi i}{N_g}}$它位于分圆域 $\mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{N_g}})$ 中。这是一个包含形如以下形式的元素的数域。

$$a + b\, e^{\frac{2\pi i}{N_g}} \tag{4.3}$$

其中 a、$b \in \mathbb{Q}$，以及利用域运算 $+$、$\times$得到的组合。由于单位根是代数整数，因此一个表示的特征标在 $g \in G$ 处的取值是 $\mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{N_g}})$ 中的一个代数整数。

一般而言，设 E 是群 G 的指数，即满足以下条件的最小整数 E：对所有 $g \in G$ 都有 $g^E = 1$。那么，上述论证表明，G 的所有表示的特征标都属于分圆域 $\mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{E}})$。事实上，根据 Brauer 定理（[28] 中的定理 10.3），已知群 G 的任意表示 R 都可以在域 $\mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{E}})$ 中实现。换言之，总是可以选择一个基，使得对于任意 $g \in G$，$R(g)$ 的矩阵元都是具有有理系数的 E^{th} 个单位根的线性组合。

在下一小节中，我们将介绍分圆域及其相关伽罗瓦作用的性质。接着，我们将证明伽罗瓦群下的不变元素必然是有理数。然后，我们将研究伽罗瓦作用于群表示和特征标的情形。这将引出特征标有趣的整性性质。

4.1 分圆域与伽罗瓦作用

我们发现，在研究群表示及其特征标时，分圆域 $\mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{E}})$ 起着至关重要的作用[1]。正如我们现在将要说明的，$\mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{E}})$ 可以视为一个向量空间。若元素 $\xi \in \mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{E}})$ 是单位根中的本原 E^{th} 根，则称其为本原单位根

$$\xi^E = 1 \quad \text{and} \quad \xi^k \neq 1 \quad \text{for} \quad k = 1, \ldots, E-1. \tag{4.4}$$

$\mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{E}})$ 可以看作是维数为 $\phi(E)$ 的有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的向量空间，其中 $\phi(E)$ 是欧拉函数（参见 [29] 第 13.6 节推论 42）。一般而言，元素集合 $\{1, e^{\frac{2\pi i}{E}}, e^{\frac{2\pi i 2}{E}}, \ldots, e^{2\pi i(\phi(E)-1)\,E}\}$ 构成 $\mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{E}})$ 的一组基（例如，参见 [30]）。因此，该域的一般元素具有如下形式

$$a = \sum_{k=0}^{\phi(E)-1} a_k \xi_k \tag{4.5}$$

其中 a_k 为有理数，且 $\xi_k = e^{\frac{2\pi i k}{E}}$。

现在我们定义伽罗瓦群及其在域 $\mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{E}})$ 上的作用。群 $\mathbb{Z}_E^\times$ 是小于 E 且与 E 互质的整数集的子集。乘法定义为

[1]关于一般域扩张和伽罗瓦作用的讨论，参见 [29] 的第 13、14 章。

模 E 整数的乘法。数域 $\mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{E}})$ 的伽罗瓦群是该域中保持有理数不变的自同构所构成的群。换言之，它是一个双射映射 $\sigma: \mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{E}}) \to \mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{E}})$，使得对于 $a, b \in \mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{E}}$

$$\sigma(a+b) = \sigma(a) + \sigma(b)\ ,\ \sigma(a \times b) = \sigma(a) \times \sigma(b) \text{ and } \sigma(a) = a\ \forall\ a \in \mathbb{Q}\ . \tag{4.6}$$

$\mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{E}})$ 的伽罗瓦群与 $(\mathbb{Z}_E^{\times})$ 整数集同构（参见 [29] 中第 14.5 节定理 26）。令 $\sigma \in$ 为 $(\mathbb{Z}_E^{\times})$ 的整数集，且 $a \in$ 属于 $\mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{E}})$，则 σ 在 a 上的作用由下式给出。

$$\sigma(a) = \sigma\left(\sum_{k=0}^{\phi(E)-1} a_k \xi_k\right) = \sum_{k=0}^{\phi(E)-1} a_k \xi_k^{\sigma} \tag{4.7}$$

4.2 伽罗瓦群下的不变元素

在分圆域 $\mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{E}})$ 中，被整个伽罗瓦群 $\mathbb{Z}_E^{\times}$ 固定的元素恰好是有理数。为了证明这一点，我们将使用伽罗瓦理论基本定理。陈述该定理需要先定义伽罗瓦型域扩张（伽罗瓦扩张），下面我们给出这一概念。

域 F 称为 $\mathbb{Q}$ 的扩域，如果 $\mathbb{Q} \subset F$，且 F 中的运算（乘法、加法）限制在子集 $\mathbb{Q}$ 上时，与 $\mathbb{Q}$ 中的运算相对应。换句话说，如果 $\mathbb{Q}$ 是 F的子域。例如，实数是 $\mathbb{Q}$ 的一个扩域。

$\mathbb{Q}$ 的域扩张 F 称为代数扩张，如果对于每个 $\alpha \in F$,

$$\text{there exists a } P_\alpha(x) \in \mathbb{Q}[x] \text{ such that } P_\alpha(\alpha) = 0.$$

事实上，对于一个代数域扩张 F 和 $\alpha \in F$，存在唯一一个次数最低的多项式，使得 α 是其根 [29]。这个多项式称为与 α 相关联的最小多项式。

如果对于每个 $\alpha \in F$ 以及次数为 d 的最小多项式 $P_\alpha(x)$，扩张 F 都称为可分的。

$$|\{\beta \,|\, P_\alpha(\beta) = 0\}| = d.$$

也就是说，所有根都是互不相同的。 F 称为正规扩张，如果对于每个 $\alpha \in F$ 和最小多项式 $P_\alpha(x)$

$$P_\alpha(\beta) = 0 \text{ implies that } \beta \in F.$$

也就是说，所有根都属于 F。可分且正规扩张称为伽罗瓦扩张。对域扩张作出这一假设，便可以证明伽罗瓦理论基本定理（ [29] 中的定理 14）。

为了将伽罗瓦理论的基本理论应用于分圆域，我们首先证明它是一个伽罗瓦扩张。域 $\mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{E}})$ 是包含该多项式所有根的最小域。

$$p(x) = x^E - 1. \tag{4.8}$$

因此，$\mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{E}})$ 是 $\mathbb{Q}$ 的伽罗瓦扩张（参见 [29] 中的定理 13）。因此，我们可以使用伽罗瓦理论基本定理，该定理指出

分圆域的伽罗瓦理论基本定理：整数集 $\mathbb{Z}_E^\times$ 的子群与 $\mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{E}})$ 的子域之间存在一一对应关系，其对应关系由以下方式给出

$$K \subset \mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{E}}) \to H \subset \mathbb{Z}_E^\times \text{ which fixes all elements in } K. \tag{4.9}$$

$$H \subset \mathbb{Z}_E^\times \to \text{Subfield } K \subset \mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{E}}) \text{ of fixed points under } H\text{-action.} \tag{4.10}$$

特别是，该定理还意味着，$\mathbb{Z}_E^\times$ 的平凡子群固定整个域 $\mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{E}})$，而由整个伽罗瓦群固定的子域就是有理数域。

4.3 表示与特征标上的伽罗瓦作用

在本节中，我们将研究伽罗瓦群如何作用于不可约表示和共轭类 [31][32]。给定一个群 G 和一个表示 R，回顾一下，$R(g)$ 可以表示为一个各分量取值于域 $\mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{E}})$ 中的矩阵。该域的伽罗瓦群中的一个元素 σ 逐分量作用于矩阵 $R(g)$，从而得到一个新的矩阵 $\sigma(R(g))$。我们知道，$R(g)$ 满足

$$R(g)R(h) = R(gh)\ \forall g, h \in G \tag{4.11}$$

这是一个代数关系。

$$\sum_j R_{ij}(g)R_{jk}(h) - R_{ik}(gh) = 0 \tag{4.12}$$

矩阵元之间。由于对于所有 σ，$\sigma(0) = 0$，并利用 (4.6)，我们有

$$\sigma\left(\sum_j R_{ij}(g)R_{jk}(h) - R_{ik}(gh)\right) = \sum_j \sigma(R_{ij}(g))\sigma(R_{jk}(h)) - \sigma(R_{ik}(gh)) = 0, \tag{4.13}$$

或等价地

$$\sigma(R(g))\sigma(R(h)) = \sigma(R(gh))\ \forall g, h \in G \tag{4.14}$$

因此，$\sigma(R)$ 也是群 G 的一个表示。

如果 R 是一个不可约表示，那么 $\sigma(R)$ 也是如此。这可以理解如下。表示 R 的特征标是矩阵 R 中元素的一个代数组合。因此，在表示 R 上施加伽罗瓦作用，并利用 (4.6)，我们得到

$$\chi^{\sigma(R)}(g) = \sum_i \sigma(R_{ii}(g)) = \sigma\Big(\sum_i R_{ii}(g)\Big) = \sigma(\chi^R(g)). \tag{4.15}$$

根据特征标正交性，不可约表示 R 当且仅当

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \chi^R(g)\chi^R(g^{-1}) = 1. \tag{4.16}$$

现在假设 R 不可约表示。$\sigma(R(g))$ 的特征标就是 $\sigma(\chi^R(g))$，并且

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \sigma(\chi^R(g))\sigma(\chi^R(g^{-1})) = \sigma\left(\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \chi^R(g)\chi^R(g^{-1})\right) = \sigma(1) = 1. \tag{4.17}$$

其中，在第一个等式中，我们使用了（4.6）。通过非常类似的运算，可以证明伽罗瓦作用保持不可约特征标的正交性。这意味着，两个不同构的不可约表示在伽罗瓦群作用之后仍然不同构。这一讨论表明，伽罗瓦群在不可约表示集合上的作用是对不可约表示的一种置换（双射）。

回顾一下，在元素 $g \in G$ 上取值的表示的特征标可以写作

$$\chi^R(g) = \sum_i \epsilon_i \tag{4.18}$$

其中 ϵ_i 是 E^{th} 个单位根。然后，利用 (4.6)，$\sigma \in \mathbb{Z}_E^\times$ 的作用为

$$\sigma(\chi^R(g)) = \sum_i \epsilon_i^{m_\sigma} = \chi^R(g^{m_\sigma}). \tag{4.19}$$

其中 m_σ 是一个与 g 的阶互素的整数，对应于伽罗瓦作用 σ。为简化记号，从现在起我们将 g^{m_σ} 写作 g^σ。伽罗瓦群 $g \to g^\sigma$ 将共轭类映射到共轭类，因为

$$(hgh^{-1})^\sigma = hg^\sigma h^{-1} \tag{4.20}$$

因此，伽罗瓦群也以置换的形式作用于共轭类。如果 g 属于共轭类 $C \in \mathrm{Cl}(G)$，且 $g^\sigma \in C'$，我们将 $\sigma(C) = C'$ 记作对共轭类的作用。

总之，方程 (4.15) 和 (4.19) 是描述伽罗瓦群对特征标作用的两种等价方式。前一种作用通过置换作用于不可约表示，而后一种作用则置换共轭类。对共轭类的这种置换未必是群的自同构。

4.4 特征标的整性

现在我们来研究以下问题：已知分圆域的伽罗瓦理论基本定理，以及伽罗瓦群在表示上的作用，我们能否推导出特征标何时取整数值？正如我们接下来将要证明的，如果对于所有与 E 互素的 σ，g^σ 与 g 属于同一个共轭类，那么 $\chi^R(g)$ 就是一个整数。

证明过程如下。根据上一节的讨论（见公式 (4.19)），我们知道伽罗瓦作用于 $\chi^R(g)$ 给出 $\chi^R(g^\sigma)$。假设对于所有 σ，g^σ 都与 g 属于同一个共轭类，那么

$$\chi^R(g^\sigma) = \chi^R(g). \tag{4.21}$$

换句话说，$\chi^R(g)$ 在整个伽罗瓦群 $\mathsf{Z}_E^\times$ 作用下保持不变。因此，根据我们在第 4.2 节中的讨论，我们知道 $\chi^R(g)$ 是一个有理数。由于 $\chi^R(g)$ 是一个代数整数，$\chi^R(g)$ 为有理数意味着 $\chi^R(g)$ 是一个整数。事实上，只需考虑由与 N_g 互质的整数构成的子群 $\mathsf{Z}_{N_g}^\times \subset \mathsf{Z}_E^\times$，其中 g 是其阶。我们将在此不予证明。

一个著名的例子是对称群 S_N。在 S_N 中，对于任意与 g 的阶互素的 σ，g 和 g^σ 都属于同一个共轭类。因此，所有特征标的取值都是整数（参见 [33] 第 103 页，推论 2 及其后续例子）。

4.5 沿列的特征标之和的整性

正如我们刚刚了解到的，特定特征标的整性需要检验群元素幂的一些非平凡性质。这在很大程度上取决于群 G。本节将发现，对于一般的 G，存在一些由特征标构成的整性组合。

命题 4.1 对任意 $n \in \mathbb{N}$，定义如下不可约特征标之和

$$L_n(g) = \sum_R \chi^R(g), \tag{4.22}$$

其中求和遍历集合

$$\{R \in \mathrm{Irr}(G) \,|\, d_R = n\} \tag{4.23}$$

中维数等于 n 的不可约表示。

现在我们将利用伽罗瓦理论证明，对于任意 n、g，该和是一个整数。
命题 4.1 的证明 为了证明这一点，考虑元素 $\sigma \in \mathbf{Z}_E^\times$ 对 $L_n(g)$ 的伽罗瓦作用，

$$\sigma(L_n(g)) = \sum_R \sigma(\chi^R(g)). \tag{4.24}$$

利用（4.15），我们得到

$$\sigma(L_n(g)) = \sum_R \chi^{\sigma(R)}(g), \tag{4.25}$$

其中，$\sigma(R)$ 是不可约表示的置换作用。由于 d_R 是一个整数，我们有

$$d_{\sigma(R)} = \sigma(\chi^R(1)) = \chi^R(1) = d_R, \tag{4.26}$$

对于每个 $\sigma \in \mathbf{Z}_E^\times$。因此，$\sigma(R)$ 和 R 具有相同的维数。特别地，方程（4.23）中的集合在 $\mathbf{Z}_E^\times$ 的作用下保持不变。等价地说，它只是求和（4.22）中各项的一种置换。因此，$L_n(g)$ 在伽罗瓦群 $\mathbf{Z}_E^\times$ 的作用下保持不变。根据我们在第 4.2 节中的讨论，我们知道 $L_n(g)$ 必须是有理数。由于 $L_n(g)$ 是代数整数的求和，因此它实际上是一个整数。我们已经证明，对于任意 n 和 $g \in G$，$L_n(g)$ 都是一个整数。对于某个 $R' \in \mathrm{Irr}(G)$ 的 $n = d_{R'}$，这就是方程（2.44）的伽罗瓦理论证明。

更一般地，我们可以考虑以下特征标求和。

命题 4.2 固定一个元素 $h \in G$ 和一个整数 n。定义特征标求和

$$L_{n,h}(g) = \sum_R \chi^R(g), \tag{4.27}$$

其中求和遍历集合

$$\{R \in \mathrm{Irr}(G) \,|\, \chi^R(h) = n\}. \tag{4.28}$$

如果上面的求和中没有满足约束的表示，我们就定义该求和为零。我们将证明，对于任意的 n、g、h，$L_{n,h}(g)$ 是一个整数。

事实上，证明与上面的相同。
命题 4.2 的证明 考虑由一个元素 $\sigma \in \mathbf{Z}_E^\times$ 作用在 $L_{n,h}(g)$ 上的伽罗瓦作用。我们有

$$\sigma(L_{n,h}(g)) = \sum_R \sigma(\chi^R(g)), \tag{4.29}$$

并利用 (4.15)，我们得到

$$\sigma(L_{n,h}(g)) = \sum_R \chi^{\sigma(R)}(g). \tag{4.30}$$

由于 n 是一个整数，我们有

$$\sigma(\chi^R(h)) = \chi^R(h) = n, \tag{4.31}$$

或者等价地， $\sigma(R)$ 满足 $\chi^{\sigma(R)}(h) = n$。伽罗瓦作用保持 (4.28) 中的集合不变。也就是说，它只会置换方程 (4.27) 中的各项，对于$L_{n,\ h}(g)$。因此，$L_{n,\ h}(g)$ 在伽罗瓦群 $\mathbf{Z}_E^\times$ 的作用下保持不变。根据我们在第 4.2 节中的讨论，我们知道 $L_{n,\ h}(g)$ 必须是有理数。由于 $L_{n,\ h}(g)$ 是代数整数的求和，因此它实际上是一个整数。我们已经证明，对于任意 n 和 g、$h \in G$，$L_{n,\ h}(g)$ 都是一个整数。

定理 2（伽罗瓦）的证明 这只需稍作变动：考虑对集合求和。

$$\{R \in \mathrm{Irr}(G) \,|\, \frac{\chi^R(h)}{d_R} = q\}, \tag{4.32}$$

wh这里 R 是一个不可约表示， d_R 是其维数，且 $q \in \mathbb{Q}$。由于

$$\sigma\left(\frac{\chi^R(h)}{d_R}\right) = \sigma\left(\frac{\chi^R(h)}{\chi^R(1)}\right) = \frac{\sigma(\chi^R(h))}{\sigma(\chi^R(1))} = \frac{\chi^{\sigma(R)}(h)}{\chi^{\sigma(R)}(1)} = \sigma(q) = q, \tag{4.33}$$

求和

$$\sum_R \frac{\chi^R(g)}{d_R}, \tag{4.34}$$

在伽罗瓦作用下保持不变，因此是一个整数。选取 $h \in D, S \in \mathbf{Irr}(G)$，使得

$$q = \frac{\chi_D^S}{d_S} \in \mathbb{Z} \tag{4.35}$$

便得到定理 2。

命题 4.3 更一般地，对于给定的一组群元素 $H = \{h_1, h_2, \ldots, h_r\}$和整数 $N = \{n_1, n_2, \ldots, n_r\}$，我们可以定义特征标的求和

$$L_{N,H}(g) = \sum_R \chi^R(g) \tag{4.36}$$

其中求和遍历集合

$$\{R \in \mathrm{Irr}(G) \,|\, \chi^R(h_1) = n_1, \ldots, \chi^R(h_r) = n_r\}. \tag{4.37}$$

如果没有满足上述求和中约束的表示，我们就将该求和定义为零。

很容易将上述论证推广，从而证明对于任意选择的 H、N 和 $g \in G$，$L_{N,\,H}(g)$ 都是一个整数。

定理 3* (Galois) 的证明 与之前一样，我们可以通过考察集合来与第 3 节建立联系。

$$\{R \in \mathrm{Irr}(G) \,|\, \frac{\chi^R(h_1)}{d_R} = q_1, \ldots, \frac{\chi^R(h_r)}{d_R} = q_r\}. \tag{4.38}$$

求和

$$\sum_R \frac{\chi^R(g)}{d_R}, \tag{4.39}$$

对于 $q_1, \ldots, q_r \in \mathbb{Q}$，是一个整数。选取 $h_i \in D_i$ 和 $S_i \in$，使其属于 Irr(G)，满足

$$q_i = \frac{\chi^{S_i}_{D_i}}{d_{S_i}} \in \mathbb{Z}, \tag{4.40}$$

给出 定理 3 的推广。 $r = 2$ 的特殊情形就是定理 3。

4.6 行上的特征标之和的整性

我们还可以证明沿行的特征标之和具有整性。

命题 4.4 考虑以下特征标之和。设 R_1 是群的一个固定表示，并设 n 是固定整数。我们定义特征标之和

$$K_{n,R_1}(R) := \sum_{g, \chi^{R_1}(g)=n} \chi^R(g) \tag{4.41}$$

如果上述求和中没有满足约束的共轭类，我们就将该求和定义为零。我们将证明，对于任意 n、R_1、R，$K_{n,\,R_1}(R)$ 都是整数。

命题 4.4 的证明 考虑元素 $\sigma \in \mathrm{Z}_E^\times$ 对 $K_{n,\,R_1}(R)$ 的伽罗瓦作用。我们有

$$\sigma(K_{n,R_1}(R)) := \sum_g \sigma(\chi^R(g)) \tag{4.42}$$

其中求和遍历集合

$$\{g \in G \,|\, \chi^{R_1}(g) = n\} \tag{4.43}$$

利用 (4.19)，我们得到

$$\sigma(K_{n,R_1}(R)) := \sum_g \chi^R(g^\sigma) \tag{4.44}$$

由于 n 是一个整数，我们有

$$\sigma(\chi^{R_1}(g)) = \chi^R(g^\sigma) = n \tag{4.45}$$

因此，g^σ 满足 $\chi^{R_1}(g^\sigma) = n$。对 $K_{n,R_1}(R)$ 的伽罗瓦作用是求和（4.41）中各项的一个置换。因此，$K_{n,R_1}(R)$ 在伽罗瓦群 $\mathrm{Z}_E^\times$ 的作用下保持不变。根据我们在第 4.2 节中的讨论，我们知道 $K_{n,\,R_1}(R)$ 必须是有理数。由于 $K_{n,R_1}(R)$ 是代数整数的求和，因此它实际上是一个整数。

我们已经证明，对于任意的 n 以及 G 的表示 R、R_1，$K_{n,R_1}(R)$ 都是一个整数。

命题 4.5 更一般地，对于给定的一组群表示 $\Pi = \{R_1, R_2, ..., R_r\}$ 和整数 $N = \{n_1, n_2, ...n_r\}$，我们可以定义特征标的求和。

$$K_{N,\Pi}(R) := \sum_g \chi^R(g) \tag{4.46}$$

其中求和遍历集合

$$\{g \in G \,|\, \chi^{R_i}(g) = n_i\} \tag{4.47}$$

如果上面的求和中不存在满足约束的群元素，我们就将该求和定义为零。对于任意选择的 Π、N 和表示 R，该求和都是一个整数。

将上述论证推广后，可以直接证明 $K_{N,\Pi}(R)$ 是一个整数。

命题 4.6 对于固定的整数 n，我们考虑过的另一种特征标组合为

$$M_n(R) := \sum_C \chi^R_C \tag{4.48}$$

其中求和遍历集合

$$\{C \in \mathrm{Cl}(G) \,|\, |C| = n\} \tag{4.49}$$

如果不存在这样的共轭类，我们就将该求和定义为零。我们将证明，对于任意 n 和表示 R，$M_n(R)$ 都是一个整数。

命题 4.6 的证明 为此，我们再次使用伽罗瓦理论。考虑元素 $\sigma \in \mathbb{Z}_E^\times$ 对 $M_n(R))$ 的伽罗瓦作用。我们有

$$\sigma(M_n(R)) := \sum_C \sigma(\chi^R_C) \tag{4.50}$$

利用（4.19），我们得到

$$\sigma(M_n(R)) := \sum_C \chi^R_{\sigma(C)} \tag{4.51}$$

我们将证明 $|C| = |\sigma(C)|$。事实上，

$$hgh^{-1} = l \implies hg^\sigma h = l^\sigma \text{ and } hg^\sigma h = l^\sigma \implies hg^{\sigma\tau} h = l^{\sigma\tau} \implies hgh^{-1} = l \tag{4.52}$$

其中，τ 是 σ 在 $\mathbb{Z}_E^\times$ 中的逆元，因此 $g^{\sigma'\tau} = g$。这表明，包含 $|C|$ 和 $\sigma(C)$ 的共轭类包含相同数量的元素。因此，σ 对（4.48）的伽罗瓦作用只不过是对求和（4.48）中各项的一个置换。因此，$M_n(R)$ 在伽罗瓦群 $\mathbb{Z}_E^\times$ 的作用下保持不变。根据我们在第 4.2 节中的讨论，我们知道 $M_n(R)$ 必须是有理数。由于 $M_n(R)$ 是代数整数的求和，因此它实际上是一个整数。

现在我们证明定理 4 及其推广。

定理 4^*（伽罗瓦）的证明 利用上述结果，我们可以证明定理 4 的推广。考虑集合

$$\{C \in \mathrm{Cl}(G) \,|\, \chi^{S_1}_C = \chi^{S_1}_{D_1}, \ldots, \chi^{S_r}_C = \chi^{S_r}_{D_r}\}, \tag{4.53}$$

其中 $S_i, \in \mathrm{Irr}(G)$ $D_i \in \mathrm{Cl}(G)$ 是一组不可约表示，满足 $\chi_{D_i}^{S_i} \in \mathbb{Z}$。由此可得

$$\sum_{C \in \mathrm{Cl}(G)} \chi_C^R \tag{4.54}$$

对于所有 $R \in \mathrm{Irr}(G)$，其值都是整数，其中求和遍历 (4.53) 中的共轭类集合。定理 4 是 $r = 1$ 的特殊情形。

5 数域中的行与列计数

本节将寻找充分条件，使得属于数域 F 的特征标表的行数等于属于 F 的特征标表的列数。我们将首先回顾特征标表上的一般群作用，并陈述和证明布劳尔特征表引理。随后，我们将利用该引理证明：如果包含特征标表的数域的伽罗瓦群是循环的，那么特征标表的整数行数与列数相等 [31]。我们将引入包含 G 的特征标表的最小数域 F_G，并推导其伽罗瓦群为循环群的必要条件。我们还将进一步完善这些结果，证明 F_G 的伽罗瓦群为循环群意味着 F_G 的一个子域中的行数等于同一子域中的列数。我们将引入两个装饰图，分别刻画特征标表的行和列的数论性质。最后，本节将以若干详细演算的示例作结，展示我们的结果。

5.1 计算整数行和列

对于伽罗瓦群为循环群的群，其特征标表中的整数行数与列数相等。证明这一结论所涉及的主要结果是布劳尔特征表引理和伽罗瓦理论基本定理。让我们回顾一下布劳尔特征表引理及其证明 [34][31]（另见 [35]的第 18 章）。在陈述并证明该引理之前，我们先固定一些记号。对于一个群 G，令 $\mathrm{Cl}(G)$ 表示 G 的共轭类集合。令 $g_i \in \mathrm{Cl}(G)$ 为 G 的共轭类的一组选定代表元，其中 $i \in I$ 属于某个指标集。类似地，令 $\mathrm{Irr}(G)$ 表示 G 的不可约表示的等价类集合，并令 $R_i \in \mathrm{Irr}(G)$ 为其中的一组选定代表元，其中 i 再次属于同一个指标集 I。给定这组选定的代表元，令 X 为其分量为以下各项的特征矩阵。

$$X_{ij} = \chi^{R_i}(g_j) \tag{5.1}$$

布劳尔特征表引理：设 A 和 G 为群，并假设 A 作用于 $\mathrm{Irr}(G)$ 和 $\mathrm{Cl}(G)$ 的集合上。假设此作用满足

$$\chi^{R_i}(a(g_j)) = \chi^{a(R_i)}(g_j) \ \forall i, j \in I \tag{5.2}$$

其中 $a \in A$。于是 a 固定的不可约表示数量与共轭类数量相同。

请注意，此引理的表述与 [31] 中略有不同。事实上，通常在假设条件.....的情况下证明布劳尔关于特征标表的引理。

$$\chi^{a(R_i)}(a(g_j)) = \chi^{R_i}(g_j)\ \forall i,j \in I \tag{5.3}$$

这与我们在 (5.2) 中得到的不同。自同构群在特征标表上的作用满足 (5.3)，而不是 (5.2)。对于作用于群上的自同构 $\alpha \in$Aut(G)，其在不可约表示上的作用定义为

$$\chi^{\alpha(R)}(g) := \chi^R(\alpha^{-1}(g))) \tag{5.4}$$

α 在 g 上的逆元作用对于获得该等式至关重要。

$$\chi^{(\alpha\beta)(R)}(g) = \chi^R((\alpha\beta)^{-1}(g)) = \chi^R(\beta^{-1}(\alpha^{-1}(g))) = \chi^{\beta(R)}(\alpha^{-1}(g)) = \chi^{\alpha(\beta(R))}(g) \tag{5.5}$$

对于 $\alpha, \beta \in$ Aut(G)。另一方面，利用 (4.15) 和 (4.19)，伽罗瓦群的作用满足

$$\chi^{\sigma(R)}(g) = \chi^R(g^\sigma) \tag{5.6}$$

因此，当 A 是特征标上的伽罗瓦群作用时，它满足 (5.2)。为了证明布劳尔特征表引理，我们引入矩阵 P(a) 和 Q(a)，其中$a \in A$。矩阵 P(a) 定义如下。

$$(P(a))_{ij} = 1 \text{ if } \chi^{a(R_i)} = \chi^{R_j} \tag{5.7}$$

$$(P(a))_{ij} = 0 \text{ otherwise} \tag{5.8}$$

矩阵 Q(a) 定义如下。

$$(Q(a))_{ij} = 1 \text{ if } K_{g_i} = K_{a(g_j)} \tag{5.9}$$

$$(Q(a))_{ij} = 0 \text{ otherwise} \tag{5.10}$$

我们有

$$(P(a)X)_{ij} = \sum_k (P(a))_{ik} X_{kj} = \chi^{a(R_i)}(g_j) \tag{5.11}$$

同样地，我们发现

$$(XQ(a))_{ij} = \sum_k X_{ik}(Q(a))_{kj} = \chi^{R_i}(a(g_j)) \tag{5.12}$$

因此，利用 (5.2)，我们得到 P(a)$X = XQ$(a)。因此， P(a) $= XQ$(a)X^{-1}。由此可得 Tr(P(a)) =Tr(Q(a))。Tr(P(a)/Q(a)) 恰好给出了在 $a \in A$ 作用下保持不变的不可约表示/共轭类的数量。如果 A 是循环的，那么我们可以将这一引理应用于该循环群的一个生成元，从而证明 A 在相同数量的不可约表示和共轭类上平凡作用。

如果 A 是分圆域 Q($e^{\frac{2\pi i}{E}}$) 的伽罗瓦群，那么该伽罗瓦群在不可约表示和共轭类上的作用满足 (5.2)（参见第 4 节 4.3）。我们关注的是 Q($e^{\frac{2\pi i}{E}}$) 的伽罗瓦群 $\mathbb{Z}_E^\times$ 为循环群的情形。情况是这样的

当且仅当群 E 的指数属于以下形式之一时：1、2、4、p^k、$2p^k$，其中 p 是一个奇素数，且 k 是一个正整数 [36]。特别地，这些阶数的群都具有循环的伽罗瓦群。

虽然特征标表可以保证包含在分圆域 $\mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{E}})$ 中，但这个域通常远大于包含该特征标表的最小域。例如，对于群 S_n，其特征标表仅包含整数，而域 $\mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{E}})$ 作为向量空间的维数则随着 n 的增加而增大。因此，定义群 G 的域 F_G 是很方便的，该域是包含群 G 的特征标表的最小域。F_G 是 $\mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{E}})$ 的子域。此外，F_G 是有理数域上的伽罗瓦扩张。这可以由伽罗瓦理论基本定理得出。

考虑域扩张塔 $F/I/\mathbb{Q}$，其中 F 是伽罗瓦扩张，并令 N 为 $\mathrm{Gal}(F)$ 中固定域 I 的子群。

$$N = \{\sigma \in \mathrm{Gal}(F) | \sigma(\alpha) = \alpha \ \forall \alpha \in I\} \tag{5.13}$$

伽罗瓦理论基本定理的一个推论（参见 [29] 中第 14.2 章定理 14 (4)）是，中间域 I 是伽罗瓦扩张，当且仅当子群 N 在 $\mathrm{Gal}(F)$ 中是正规子群。那么 I 的伽罗瓦群是

$$\mathrm{Gal}(I) = \mathrm{Gal}(F)/N \tag{5.14}$$

在我们的情形中，$F = \mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{E}})$ 是一个分圆域，其中伽罗瓦群的所有子群都是正规子群。因此，所有中间域都是伽罗瓦扩张。特别地，F_G 是一个伽罗瓦扩张，其伽罗瓦群为

$$\mathrm{Gal}(F_G) = \mathbb{Z}_E^\times / N \tag{5.15}$$

对于某个正规子群 N。如果 $\mathbb{Z}_E^\times$ 是循环的，那么它被正规子群商去后仍然是循环的。因此，如果群 G 的指数为 1、2、4、p^k、$2p^k$ 这样的形式，其中 p 是奇素数，k 是正整数，那么 $\mathrm{Gal}(F_G)$ 是循环的。本节剩余部分中，我们将假设 $\mathrm{Gal}(F_G)$ 是循环的。

根据布劳尔特征表引理，将其应用于伽罗瓦群 $\mathrm{Gal}(F_G)$ 分别作用于不可约表示和共轭类的情形，可以清楚地看出，在整个伽罗瓦群作用下保持不变的共轭类数量，与保持不变的不可约表示数量相同。根据伽罗瓦理论基本定理（相关讨论见第 (4.2) 节），如果域扩张 F_G 中的一个元素在整个伽罗瓦群作用下保持不变，那么该元素必为有理数。由于特征标是代数整数，如果 $\chi_{R_i}(g_j)$ 在伽罗瓦群作用下保持不变，那么它必为整数。因此，我们得到以下定理。

整数行和整数列数量相等：对于有限群 G，设 F_G 为包含 G的特征标表的最小域。如果 F_G 的伽罗瓦群是循环的，那么 G 的特征标表中整数行和整数列的数量相等。

这一结果的一个版本在 [31, 定理 3.3]中陈述并得到了证明。

5.2 数域中行和列的计数

根据上一节的结果，自然会想知道，属于给定子域 F_G 的特征标表的行数和列数是否相同。事实确实如此。要理解这一点，请注意，布劳尔特征表引理所讨论的不仅是对完整循环群 A的不变性，还包括对任意元素 $a \in A$作用的不变性。事实上，如果 $\chi_{R_i}(g_j)$在 $a \in A$的作用下保持不变，那么它在由 a生成的完整循环子群下也保持不变。因此，考虑 A 的子群下的不变量是很自然的。于是，布劳尔特征表引理告诉我们，对于循环群 A 的给定子群（例如 B），在其作用下保持不变的特征标表的行数和列数是相同的。

当 A =Gal(F_G) 是 F_G 的伽罗瓦群时，伽罗瓦理论基本定理指出，Gal(F_G) 的子群与 F_G 的子域之间存在一一对应关系。对于 $H \subset$ Gal(F_G) 的每个子群，相应的子域是 F_G 中在 H 的作用下保持不变的元素所构成的集合。反过来，给定一个子域，伽罗瓦群中与之对应的子群就是固定该子域的子群。因此，通过识别伽罗瓦群的某个子群作用下保持不变的特征标表的列和行，我们实际上是在考察属于 F_G 的子域的特征标表的行和列。在这种情况下，利用 Brauer 引理，我们得到以下定理。

子域中行与列的数量相等：对于有限群 G，设 F_G 为包含 G 的特征标表的最小域。如果 F_G 的伽罗瓦群是循环的，那么特征标表中元素属于子域 $I \subset F_G$ 的行数与元素属于 I 的列数相同。

这个等式可以用带装饰的图来表示。给定一个群的特征标表，我们定义一个图，其顶点标记为域 F_G 及其子域。若 F 是 K 的子域，则标记为域 F、K 的两个顶点之间有一条从 K 指向 F 的有向边。得到这个图后，我们还可以用以下两种方式进一步装饰顶点。

1. $G1$：将对应于字段 F 的顶点标记为该字段所含特征标表的行数。 2. $G2$：将对应于字段 F 的顶点标记为该字段所含特征标表的列数。

那么，上述结果表明装饰图 G1 和 G2 相同。让我们研究几个例子来直观地看看这一点。

5.2.1 整数集$_6$

考虑循环群 Z_6 ，其特征标表如表 1 所示。我们发现，特征标表中的所有元素都属于域 Q($e^{\frac{2\pi i}{6}}$)。由于本原 6th 单位根是本原 3rd 单位根的负数，Q($e^{\frac{2\pi i}{6}}$) ≅Q($e^{\frac{2\pi i}{3}}$)。因此，唯一的非平凡子域是 Q。Q($e^{\frac{2\pi i}{6}}$) 的伽罗瓦群是 Z_2。特征标表中有一些行和列属于子域 Q。针对这一特例，按上述定义构造的图 $G1$ 如图 1 所示。图中顶点上的数字表示

	1	g	g^2	g^3	g^4	g^5
R_1	1	1	1	1	1	1
R_2	1	$e^{\frac{2\pi i}{6}}$	$e^{\frac{2\pi i2}{6}}$	-1	$e^{\frac{2\pi i4}{6}}$	$e^{\frac{2\pi i5}{6}}$
R_3	1	$e^{\frac{2\pi i}{3}}$	$e^{\frac{2\pi i2}{3}}$	1	$e^{\frac{2\pi i}{3}}$	$e^{\frac{2\pi i2}{3}}$
R_4	1	-1	1	-1	1	-1
R_5	1	$e^{\frac{2\pi i2}{3}}$	$e^{\frac{2\pi i}{3}}$	1	$e^{\frac{2\pi i2}{3}}$	$e^{\frac{2\pi i}{3}}$
R_6	1	$e^{\frac{2\pi i5}{6}}$	$e^{\frac{2\pi i4}{6}}$	-1	$e^{\frac{2\pi i2}{6}}$	$e^{\frac{2\pi i}{6}}$

表1：Z_6的特征标表

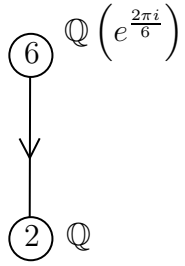


图 1：Z_6 的图 $G1$ 。

特征标表中属于与该顶点关联的域的行数。容易验证，按上述定义构造的图 $G2$ 与该图相同。

5.2.2 整数集$_7$ ⋊整数集$_3$

群 $\mathsf{Z}_7 \rtimes \mathsf{Z}_3$ 可以由以下生成元和关系表示。

$$\mathbb{Z}_7 \rtimes \mathbb{Z}_3 = \langle a, b | a^7 = b^3 = 1, bab^{-1} = a^4 \rangle \tag{5.16}$$

其特征标表如表 2 所示。我们发现，特征标表中的所有条目均为

	1	a	b	b^2	a^3
R_1	1	1	1	1	1
R_2	1	$e^{\frac{2\pi i2}{3}}$	1	$e^{\frac{2\pi i}{3}}$	1
R_3	1	$e^{\frac{2\pi i}{3}}$	1	$e^{\frac{2\pi i2}{3}}$	1
R_4	3	0	$\frac{-1+i\sqrt{7}}{2}$	0	$\frac{-1-i\sqrt{7}}{2}$
R_5	3	0	$\frac{-1-i\sqrt{7}}{2}$	0	$\frac{-1+i\sqrt{7}}{2}$

表 2：$\mathsf{Z}_7 \rtimes \mathsf{Z}_3$ 的特征标表。

包含于域 $\mathsf{Q}(e^{\frac{2\pi i}{3}}, i\sqrt{7})$ 中。 $i\sqrt{7}$包含于分圆域 $\mathsf{Q}(e^{\frac{2\pi i}{7}})$ 中。这可由二次高斯和 [37] 得出

$$\sum_{n=0}^{p-1} e^{\frac{2\pi i n^2}{p}} = \begin{cases} \sqrt{p} & \text{if } p = 1 \bmod 4 \\ i\sqrt{p} & \text{if } p = 3 \bmod 4 \end{cases} \tag{5.17}$$

其中 p 是素数。因此，包含特征标表各项的最小分圆域是 $\mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{21}})$。这个数域的伽罗瓦群是 $\mathbb{Z}_{21}^{\times} \simeq \mathbb{Z}_7^{\times} \times \mathbb{Z}_3^{\times} \simeq \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2$。设 σ_1 和 σ_2 分别为伽罗瓦群中 $\mathbb{Z}_6$ 和 $\mathbb{Z}_2$ 因子的生成元，其在数域上的作用为

$$\sigma_1(e^{\frac{2\pi i}{21}}) = e^{\frac{2\pi i 10}{21}},\ \sigma_2(e^{\frac{2\pi i}{21}}) = e^{\frac{2\pi i 8}{21}} \tag{5.18}$$

σ_2 在 $i\sqrt{7}$ 上作用平凡，而 σ_1 作为 $\sigma_1(i\sqrt{7}) = -i\sqrt{7}$ 作用，且 σ_1 在 $e^{\frac{2\pi i}{3}}$ 上作用平凡，而 σ_2作为 $\sigma_2(e^{\frac{2\pi i}{3}}) = e^{\frac{2\pi i 2}{3}}$ 作用。因此， σ_1 和 σ_2 在特征标表上的作用阶均为二。我们来找出被 σ_1 和 σ_2固定的行。

$$\sigma_1 \text{ fixes the rows } R_1, R_2, R_3 \tag{5.19}$$

$$\sigma_2 \text{ fixes the rows } R_1, R_4, R_5 \tag{5.20}$$

类似地，让我们找出由 σ_1 和 σ_2 固定的列。

$$\sigma_1 \text{ fixes the columns } 1, a, b^2 \tag{5.21}$$

$$\sigma_2 \text{ fixes the columns } 1, b, a^3 \tag{5.22}$$

注意， σ_1 固定的行数和列数相等。 σ_2也是如此。这是由布劳尔特征表引理得出的，因为 σ_1 和 σ_2 生成了伽罗瓦群的循环子群。被整个伽罗瓦群固定的行和列是

$$\{\text{rows fixed by } \sigma_1\} \cap \{\text{rows fixed by } \sigma_2\} = R_1 \tag{5.23}$$

$$\{\text{columns fixed by } \sigma_1\} \cap \{\text{columns fixed by } \sigma_2\} = 1 \tag{5.24}$$

针对这一特定情形构造的上述图 $G1$ 如图 2 所示。很容易验证，按上述定义构造的图 $G2$ 与此图相同。

这个例子表明，即使伽罗瓦群不是循环群，特征标表中的整数行数和列数也可能相等。

5.2.3 $\mathbb{Z}_{24} \rtimes \mathbb{Z}_2$

我们来考虑阶为 48 的群 $\mathbb{Z}_{24} \rtimes \mathbb{Z}_2$，它在 GAP 中表示为一个由 5 个生成元 $f1$、$f2$、$f3$、$f4$、5 生成的多循环群（SmallGroup(48,6)）。其特征标表见表3，其中 $A = -2i$、$B = \sqrt{3}$、$C = -e^{\frac{2\pi i}{24}} - e^{\frac{2\pi i 11}{24}}$、$D = -e^{\frac{2\pi i 17}{24}} - e^{\frac{2\pi i 19}{24}}$。

A 属于域 $\mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{4}})$， B 属于域 $\mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{12}})$，而 C、D 属于域 $\mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{24}})$。因此，特征标表中的所有元素都包含在域 $\mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{24}})$ 中。特征标表有些行和列属于子域 $\mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{12}})$、$\mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{4}})$ 和 $\mathbb{Q}$。

针对这个特定情形构造的上文定义的图 $G1$ 如图 3 所示。它是

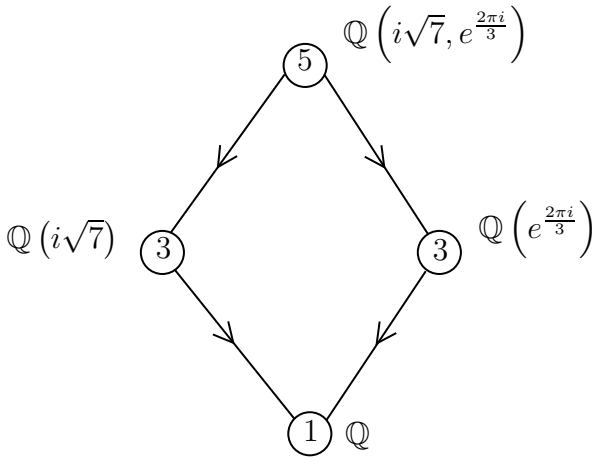


图 2：$\mathsf{Z}_7 \rtimes \mathsf{Z}_3$ 的图 $G1$ 。

	1	f1	f2	f3	f4	f5	f1f2	f2f4	f2f5	f3f5	f4f5	f2f3f5	f2f4f5	f3f4f5	f2f3f4f5
R_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
R_2	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1
R_3	1	-1	1	1	1	1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1
R_4	1	1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1
R_5	2	0	0	-2	2	2	0	0	0	-2	2	0	0	-2	0
R_6	2	0	-2	2	2	-1	0	-2	1	-1	-1	1	1	-1	1
R_7	2	0	2	2	2	-1	0	2	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
R_8	2	0	A	0	-2	2	0	-A	A	0	-2	A	-A	0	-A
R_9	2	0	-A	0	-2	2	0	A	-A	0	-2	-A	A	0	A
R_{10}	2	0	0	-2	2	-1	0	0	B	1	-1	-B	B	1	-B
R_{11}	2	0	0	-2	2	-1	0	0	-B	1	-1	B	-B	1	B
R_{12}	2	0	A	0	-2	-1	0	-A	C	-B	1	D	-C	B	-D
R_{13}	2	0	A	0	-2	-1	0	-A	D	B	1	C	-D	-B	-C
R_{14}	2	0	-A	0	-2	-1	0	A	-D	B	1	-C	D	-B	C
R_{15}	2	0	-A	0	-2	-1	0	A	-C	-B	1	-D	C	B	D

表3：$\mathsf{Z}_{24} \rtimes \mathsf{Z}_2$ 的特征标表

很容易验证，按上述定义构造的图 $G2$ 与该图相同。注意，在这种情况下，分圆域 $\mathsf{Q}(e^{\frac{2\pi i}{24}})$ 的伽罗瓦群是 $\mathsf{Z}_{24}^{\times} \simeq \mathsf{Z}_8^{\times} \times \mathsf{Z}_3^{\times} \simeq \mathsf{Z}_2 \times \mathsf{Z}_2 \times \mathsf{Z}_2$，它不是循环的。设 σ_1、σ_2、σ_3 是循环因子的三个生成元，它们的作用为

$$\sigma_1(e^{\frac{2\pi i}{24}}) = e^{\frac{2\pi i 13}{24}},\ \sigma_2(e^{\frac{2\pi i}{24}}) = e^{\frac{2\pi i 11}{24}},\ \sigma_3(e^{\frac{2\pi i 5}{24}}) = e^{\frac{2\pi i 13}{24}} \tag{5.25}$$

与前一个例子类似，我们可以验证，尽管伽罗瓦群不是循环的，行数和列数相等这一性质仍在整个伽罗瓦群作用下保持不变。然而，正如下一个例子所示，有些群的特征标表中整数行的数量与整数列的数量不同。

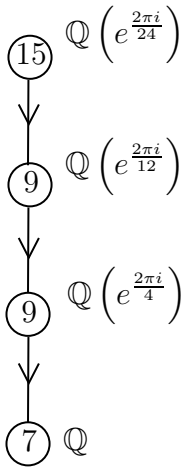


图 3：图 $G1$，对应整数集$_{24}$ ×整数集$_{2}$。

5.2.4 Q_8 ×整数集$_4$

由 Q_8 和 Z_4 构成的半直积的特征标表如下表4所示；该群在 GAP 库中记为 SmallGroup(32,10)，其中 $A = i$、$B = e^{\frac{2\pi i}{8}} + e^{\frac{2\pi i 3}{8}} = i\sqrt{2}$ 和 $C = \sqrt{2}$。

	1	f1	f2	f3	f4	f5	f1f2	f1f4	f2f4	f3f4	f4f5	f1f2f4	f1f2f5	f1f2f4f5
R_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
R_2	1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1
R_3	1	1	-1	1	1	1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	-1
R_4	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	1
R_5	1	A	1	1	-1	1	A	-A	-1	-1	-1	-A	A	-A
R_6	1	-A	1	1	-1	1	-A	A	-1	-1	-1	A	-A	A
R_7	1	A	-1	1	-1	1	-A	-A	1	-1	-1	A	-A	A
R_8	1	-A	-1	1	-1	1	A	A	1	-1	-1	-A	A	-A
R_9	2	0	0	-2	2	2	0	0	0	-2	2	0	0	0
R_{10}	2	0	0	-2	-2	2	0	0	0	2	-2	0	0	0
R_{11}	2	0	0	0	2	-2	B	0	0	0	-2	B	-B	-B
R_{12}	2	0	0	0	2	-2	-B	0	0	0	-2	-B	B	B
R_{13}	2	0	0	0	-2	-2	C	0	0	0	2	-C	-C	C
R_{14}	2	0	0	0	-2	-2	-C	0	0	0	2	C	C	-C

表4：Q_8 ×整数集$_4$ 的特征标表

我们看到，包含该特征标表的最小域为 $F_G = \mathsf{Q}(e^{\frac{2\pi i}{8}}) = \mathsf{Q}(i, \sqrt{2})$。该域对应的伽罗瓦群为 $\mathsf{Z}_2 \times \mathsf{Z}_2$。我们将该群的元素记为$\sigma_1, \sigma_3, \sigma_5, \sigma_7$。这些元素的作用如下。

$$\sigma_a(e^{\frac{2\pi i}{8}}) = e^{\frac{2\pi i a}{8}},\ a = 1, 3, 5, 7 \tag{5.26}$$

σ_3、 σ_5 和 σ_7 生成了整个伽罗瓦群的三个整数集$_2$ 子群。这些子群分别固定了 $F_G = \mathbb{Q}(i,\sqrt{2})$的以下子域。 σ_3 固定域$\mathbb{Q}(i\sqrt{2})$， σ_5 固定域$\mathbb{Q}(i)$，而σ_7 固定域$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$。根据这些信息，我们可以考察在整数集$_2$ $\times \mathbb{Z}_2$, 的生成元（即 σ_5 和 σ_7）作用下保持不变的特征标表的行和列。

$$\sigma_5 \text{ fixes the rows } R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, R_7, R_8, R_9, R_{10} \tag{5.27}$$

$$\sigma_7 \text{ fixes the rows } R_1, R_2, R_3, R_4, R_9, R_{10}, R_{13}, R_{14} \tag{5.28}$$

同样，让我们找出被 σ_5 和 σ_7 固定的列。

$$\sigma_5 \text{ fixes the columns 1, f1, f2, f3, f4, f5, f1f4, f2f4, f3f4, f4f5} \tag{5.29}$$

$$\sigma_7 \text{ fixes the columns 1, f2, f3, f4, f5, f2f4, f3f4, f4f5} \tag{5.30}$$

我们发现， σ_5 固定的行数和列数相同，这意味着包含在域 $\mathbb{Q}(i)$ 中的行数和列数相等。同样，我们发现， σ_7 固定的行数和列数相同，这意味着包含在域 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 中的行数和列数相等。这与布劳尔特征表引理一致。事实上，由 σ_5 生成的整个伽罗瓦群的子群同构于循环群 $\mathbb{Z}_2$。因此，将布劳尔引理应用于该群可知，被 σ_5 固定的行数和列数相等。这意味着包含在 $\mathbb{Q}(i)$ 中的行数和列数相等。对 σ_7 和 σ_3 也有类似的论证。

由于 σ_5 和 σ_7 生成整个伽罗瓦群，在整个伽罗瓦群作用下保持不变的行由下式给出

$$\{\text{rows fixed by } \sigma_5\} \cap \{\text{rows fixed by } \sigma_7\} = R_1, R_2, R_3, R_4, R_9, R_{10} \tag{5.31}$$

它们恰好是特征标表中的 6 个整数行。类似地，在整个伽罗瓦群作用下保持不变的列为

$$\{\text{columns fixed by } \sigma_5\} \cap \{\text{columns fixed by } \sigma_7\} = 1,\text{f2},\text{f3},\text{f4},\text{f5},\text{f2f4},\text{f3f4},\text{f4f5} \tag{5.32}$$

它们恰好是特征标表中的 8 个整数列。因此，这个例子明确表明，对于非循环伽罗瓦群，在伽罗瓦群作用下保持不变的行数和列数可能并不相等。下方的图 $G1$ 和 $G2$ 展示了上述结果。

6 构造行列对偶

在本节中，我们将给出一种算法，用于实现从 G-CTST 到 $R(G)$-CTST 的转换，反之亦然。

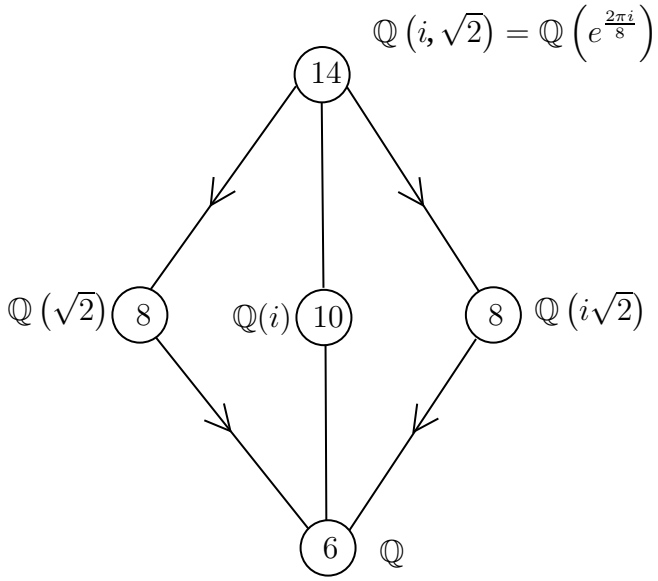


图4：图 $G1$ 适用于 Q_8 ×整数集$_4$

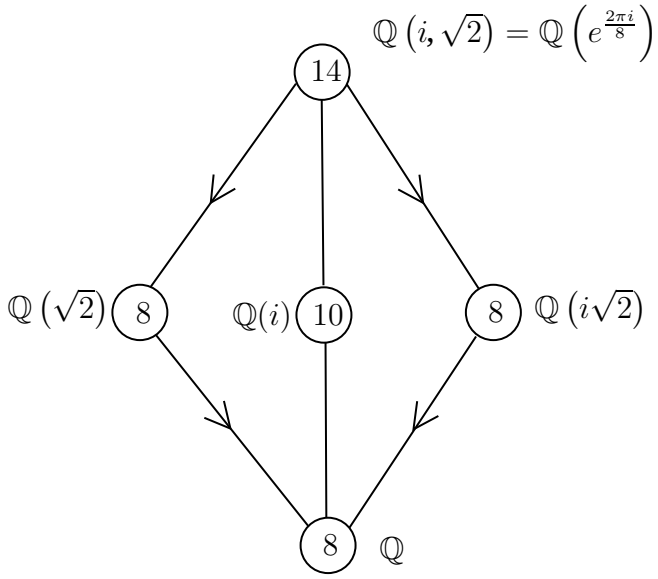


图5：图 $G2$ 适用于 Q_8 ×整数集$_4$

在 G-CTST 中，我们有一组元素 T_C 构成的基，其中 $C \in \mathrm{Cl}(G)$ 是G的一个共轭类。该共轭类的大小为 $|C|$。

$$T_C = \sum_{g \in C} g \tag{6.1}$$

Frobenius 形式

$$g(T_{C_1} T_{C_2}) = \frac{|C_1|}{|G|} \delta_{C_1, S(C_2)}, \tag{6.2}$$

其中， $S(C_2)$ 是包含 C_1 中各元素逆元的共轭类。对于 S_n 这样的实群， $S(C) = C$。

三个圆周趋于真空的振幅为

$$Z^G_{h=0;C_1,C_2C_3} = \frac{1}{|G|}\delta(T_{C_1}T_{C_2}T_{C_3}) = \frac{1}{|G|^2}\sum_R \frac{|C_1||C_2||C_3|}{d_R}\chi^R_{C_1}\chi^R_{C_2}\chi^R_{C_3}, \tag{6.3}$$

其中，χ^R_C 是固定元素 $g \in C$ 的特征标。

定义 $\widehat{T_C} = T_C\sqrt{\frac{|G|}{|C|}}$ 是方便的。对于这一点，双线性形式为

$$g(\widehat{T_{C_1}}, \widehat{T_{C_2}}) = \delta_{C_1,S(C_2)}, \tag{6.4}$$

且三到零振幅为

$$\widehat{Z}^G_{h=0;C_1,C_2C_3} = \frac{1}{|G|}\delta(\widehat{T_{C_1}}\widehat{T_{C_2}}\widehat{T_{C_3}}) = \frac{1}{\sqrt{|G|}}\sum_R \frac{\sqrt{|C_1||C_2||C_3|}}{d_R}\chi^R_{C_1}\chi^R_{C_2}\chi^R_{C_3}. \tag{6.5}$$

我们还知道，将 T_C 视为群代数中心中通过乘法作用定义的算子时，其特征向量由标签 R 标记，而其特征值由以下公式给出。

$$E_R(T_C) = \frac{|C|}{d_R}\chi^R_C \tag{6.6}$$

注意，我们可以这样理解：我们有一组彼此对易且具有非退化配对的矩阵。 R 只是公共特征向量的一个标记。由此，对于经过重新缩放的版本，

$$E_R(\widehat{T_C}) = \frac{\sqrt{|G||C|}}{d_R}\chi^R_C \tag{6.7}$$

正如我们现在将要证明的，

$$\mathrm{Max}_R\left|E_R(\widehat{T_C})\right| = \sqrt{|G||C|} \tag{6.8}$$

特别是，我们将证明

$$\left|\chi^R_C\right| \le d_R, \tag{6.9}$$

由此即可得出结论。考虑元素 $g \in G$ 的一个不可约表示 $D^R(g)$，其阶为 $k\,(g^k = 1)$。该表示与对角矩阵 $\mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{d_R})$ 相似。由于 $g^k = 1$，我们有 $(D^\lambda(g))^k = 1$，因此 λ_i 是 k 次单位根。由此可得 $|\lambda_i| = 1$。现在考虑

$$\left|\chi^R(g)\right| = |\lambda_1 + \ldots \lambda_{d_R}| \le |\lambda_1| + \cdots + |\lambda_{d_R}| = d_R, \tag{6.10}$$

其中我们使用 在倒数第二步使用了三角不等式。方程（6.8）由此得 ws.

幂等元基中的手柄生成算子为

$$\Pi = \sum_R \frac{|G|^2}{d_R^2}P_R \tag{6.11}$$

我们称

$$\Pi_R = \frac{|G|^2}{d_R^2} \tag{6.12}$$

现在让我们利用手柄算子的分量以及特征值的最大值来定义特征值的对偶化

$$\begin{aligned}\widetilde{E}_R(\widehat{T}_C) &= \frac{1}{\sqrt{\Pi_R}} E_R(\widehat{T}_C) \frac{1}{Max_R \left| E_R(\widehat{T}_C) \right|} \\ &= \frac{d_R}{|G|} \frac{\sqrt{|G||C|}\chi_C^R}{d_R} \frac{1}{\sqrt{|G||C|}} \\ &= \frac{\chi_C^R}{|G|}\end{aligned} \tag{6.13}$$

利用对偶化后的特征值定义构造性对偶振幅，固定一组三个特征向量 R_1, R_2, R_3，并对标签 $C \in \mathsf{Cl}(G)$ 求和：

$$\widetilde{Z}^G_{h=0;R_1,R_2,R_3} = \sum_C |G|.\widetilde{E}_{R_1}(\widehat{T}_C)\widetilde{E}_{R_2}(\widehat{T}_C)\widetilde{E}_{R_3}(\widehat{T}_C).(Max_R(|E_R(\widehat{T}_C)|)^2 \tag{6.14}$$

现在代入对偶性公式中的所有要素

$$\begin{aligned}\widetilde{Z}^G_{h=0;R_1,R_2,R_3} &= \sum_R |G|.\frac{\chi_C^{R_1}}{|G|}\frac{\chi_C^{R_2}}{|G|}\frac{\chi_C^{R_3}}{|G|}.|C||G| \\ &= \sum_R \frac{|C|}{|G|}\chi_C^{R_1}\chi_C^{R_2}\chi_C^{R_3}\end{aligned} \tag{6.15}$$

注意，经过对偶化的振幅恰好就是 $R(G)$-CTST 的振幅。

$$\widetilde{Z}^G_{h=0;R_1,R_2,R_3} = Z^{R(G)}_{h=0;R_1,R_2,R_3} \tag{6.16}$$

对偶（$R(G)$）理论的结构常数已通过一个公式构造，该公式涉及类代数理论中特征值的一种适当形式。我们希望，从对偶理论出发，采用同样基于特征值的构造方法，应当能够反推出类代数理论。

那么，现在让我们从 $R(G)$ 理论开始。这里我们有

$$\delta(a_{R_1}a_{R_2}) = \delta_{R_1,S(R_2)} \tag{6.17}$$

其中，$S(R_2)$ 是 R_2 的复共轭。对于诸如 S_n 这样的实群，$S(R_2) = R_2$。三到零振幅为

$$Z^{R(G)}_{h=0;R_1,R_2,R_3} = \sum_C \frac{|C|}{|G|}\chi_C^{R_1}\chi_C^{R_2}\chi_C^{R_3} \tag{6.18}$$

观察特征值

$$E_C(a_R) = \chi_C^R \tag{6.19}$$

绝对值的最大值为

$$Max_C|E_C(a_R)| = d_R, \tag{6.20}$$

使用与前一种情况相同的论证。手柄生成特征值为

$$\Pi_C = \frac{|G|}{|C|} \tag{6.21}$$

使用上面的相同公式对特征值进行重新缩放

$$\begin{aligned} \widetilde{E}_C(a_R) \quad &= \frac{1}{\sqrt{\Pi_C}}.E_C(a_R).\frac{1}{Max_C(|E_K(a_R)|)} \\ &= \frac{\sqrt{|C|}}{\sqrt{|G|}}\frac{\chi_C^R}{d_R} \end{aligned} \tag{6.22}$$

对偶化后的振幅定义为

$$\widetilde{Z}^{R(G)}_{h=0;C_1,C_2,C_3} = \sum_R |G|.\widetilde{E}_{C_1}(a_R)\widetilde{E}_{C_2}(a_R)\widetilde{E}_{C_3}(a_R).(Max_C|E_C(a_R)|)^2 \tag{6.23}$$

注意，以 $R(G)$ 为起点（而不是以共轭类代数为起点），得到的正是相同的对偶化公式 (6.14)。化简

$$\begin{aligned} \widetilde{Z}^{R(G)}_{h=0;C_1,C_2,C_3} &= \sum_R |G|.\frac{\sqrt{|C|}}{\sqrt{|G|}}\frac{\chi^R_{C_1}}{d_R}\frac{\sqrt{|C|}}{\sqrt{|G|}}\frac{\chi^R_{C_2}}{d_R}\frac{\sqrt{|C_3|}}{\sqrt{|G|}}\frac{\chi^R_{C_3}}{d_R}.d_R^2 \\ &= \sum_R \frac{1}{\sqrt{|G|}}\sqrt{|C_1|}\sqrt{|C_2|}\sqrt{|C_3|}\frac{\chi^R_{C_1}\chi^R_{C_2}\chi^R_{C_3}}{d_R} \end{aligned} \tag{6.24}$$

注意，通过对 $R(G)$ 理论进行对偶化所定义的振幅，恰好就是 G-CTST 的振幅

$$\widetilde{Z}^{R(G)}_{h=0;C_1,C_2,C_3} = \widehat{Z}^G_{h=0;C_1,C_2,C_3}. \tag{6.25}$$

因此，对于具有非退化双线性形式的任意一组 k 可交换 $k\times k$ 矩阵，我们应用了由 (6.23) 定义的对偶变换。

我们指出，上述对偶化过程得到的是共轭类代数在归一化基下的振幅。要得到原始未归一化基下的振幅，我们使用以下组合

$$\sum_R |G|.\frac{\widetilde{E}_{C_1}(a_R)\widetilde{E}_{C_2}(a_R)\widetilde{E}_{C_3}(a_R)}{\sqrt{\Pi_{C_1}\Pi_{C_2}\Pi_{C_3}}}.(Max_C|E_C(a_R)|)^2 = \sum_R \frac{1}{|G|}|C_1||C_2||C_3|\frac{\chi^R_{C_1}\chi^R_{C_2}\chi^R_{C_3}}{d_R}. \tag{6.26}$$

这等于未归一化振幅 $Z_{h=0;C_1,\ C_2,\ C_3}$。

这些对偶化过程具有一些引人入胜的性质。我们将对偶化过程（6.14）称为

$$S_1(Z^G) = Z^{R(G)}, \tag{6.27}$$

以及对偶化（6.23）

$$S_2(Z^{R(G)}) = \widehat{Z}^G. \tag{6.28}$$

从我们拥有一组彼此对易且具有非退化双线性配对的矩阵这一角度来看，我们观察到 S_1, S_2 实际上是同一个过程。然而，由于

$$S_2(S_1(Z^G)) = \widehat{Z}^G \neq Z^G, \tag{6.29}$$

它们并非严格的逆元。另一方面，令对偶化（6.2 6)

$$S_3(Z^{R(G)}) = Z^G. \tag{6.30}$$

它具有如下性质：

$$S_3(S_1(Z^G)) = Z^G, \tag{6.31}$$

但 S_3 与 S_1并非同一个过程。未来若能探究是否存在同时满足这两种性质的对偶化过程，将会很有意思。

7 结论

本文介绍了一类新的组合拓扑弦理论（$R(G)$-CTSTs），它们基于有限群 G 的融合代数 $R(G)$。它们与基于 Dijkgraaf-Witten 理论（G-拓扑量子场论）的 G-CTSTs 互为对偶。G-CTSTs 被用于给出特征标整性性质的构造性证明，而这些性质通常只能通过伽罗瓦理论技术获得。由 G-CTSTs 推导出的整性性质涉及列求和，或对固定共轭类的不可约归一化特征标求和。由 $R(G)$-CTSTs 推导出的整性性质涉及行求和，或对共轭类求和的固定不可约特征标。从这个意义上说，G-CTSTs 与 $R(G)$-CTSTs 互为对偶。我们已经开始对这种对偶性映射进行显式构造，但在利用这一构造获得从行到列的整性结果映射时，仍有一些问题需要解决。

我们回顾了伽罗瓦理论在特征标表中的应用，并展示了如何利用它推导特征标和的精细整性性质。自然地，我们提出了一个问题：能否运用 CTST 技术构造此类精细化结果？对于大类精细求和，我们肯定地回答了这个问题。在 CTST 的背景下推导这些精细化结果，对于 G-CTST 和 $R(G)$-CTST 而言都是新的。该结果依赖于一个关于范德蒙德矩阵的逆矩阵有理性的引理，我们已在附录 B 中证明了这一引理。

在观察到精细整数求和之后，我们定义了特征标表整数行列和的广义划分。特征标之和的行和为正整数，而列和为整数，不一定为正数。行和是 [16] 中强调的组合构造问题的主题。我们证明了行和与列和自然地带有广义的

分拆由特征标表的整性性质决定。对这一组合问题进行进一步细化，就是为这些广义分拆寻找组合构造方法。还值得注意的是，归一化特征标的列求和均为正整数。沿着类似的思路，这些求和结果也可以对应广义分拆。

我们工作的两个非常自然的拓展方向涉及扩展所考虑的拓扑量子场论类型。G-CTST 已通过扭曲的 Dijkgraaf-Witten 理论（扭曲的 G-拓扑量子场论）扩展为扭曲的 G-CTST，相关定义见 [15]。这类理论由一个群 G 和一个 3-余循环 $H^3(G,U(1))$ 定义。将我们提出的 CTST 的行列对偶性概念扩展到扭曲的 G-拓扑量子场论，将是一个值得研究的方向。这样的扩展将为分析群的射影表示的特征标的数论性质提供一个物理学框架。

本文所考虑的拓扑量子场论均为闭型。它们计算具有闭边界的流形的拓扑不变量。能够计算具有角点/开放边界的流形的拓扑不变量的拓扑量子场论称为开闭拓扑量子场论。对于由半单 Frobenius 代数确定的闭拓扑量子场论（其中包括 G-TQFT），存在对可能的一致扩展至开闭拓扑量子场论的分类 [38]。闭 G-TQFT 的一种扩展由完全非交换群代数$\mathbb{C}(G)$ 描述。研究 $R(G)$-TQFT 的开闭扩展及其对行列对偶的影响将会很有意义。一个密切相关的研究方向是考察二维拓扑量子场论中的扩展算符。研究 G-TQFT 和$R(G)$-TQFT 中线算符关联函数所包含的群 G 的数论性质，将会很有意义。高维量子场论的拓扑线算符和面算符所能构造出的规范群的性质已在 [39] 中得到研究。

伽罗瓦群自然地作用于特征标表的行和列。该作用下的不变量分别对应整数行和列。伽罗瓦群对不可约表示和共轭类的作用可分别用于定义 G-拓扑量子场论和 $R(G)$-拓扑量子场论的对称性（其含义如 [40] [41] 中所用）[42]。研究 G-拓扑量子场论和 $R(G)$-拓扑量子场论的希尔伯特空间中在此对称性下不变的态，并将其与本文研究的各种特征标之和联系起来，将会很有意思。

我们解释了伽罗瓦理论如何描述使群G的特征标表中整数行的行数与整数列的列数相同的充分条件。更一般地，我们考察了属于特定有理数域扩张的行数和列数。为这类整性问题构建一种 CTST 方法，是一个有趣的问题。

第 3.1 小节中的 G-CTST 构造证明，对不可约表示集合上的归一化特征标求和

$$\{R \in \mathrm{Irr}(G) \,|\, \frac{\chi^R_{D_i}}{d_R} = \frac{\chi^{S_i}_{D_i}}{d_{S_i}}\} \tag{7.1}$$

是整数。同时，伽罗瓦理论使我们得以证明，对不可约表示求和所得的结果具有整性

$$\{R \in \mathrm{Irr}(G) \,|\, \chi^R_{D_i} = n_i\}, \tag{7.2}$$

对于整数 n_i。一个值得研究的后续问题，是在 CTST 框架内重构这类水平集。

有限群表示论中的另一个与 CTST 构造直接相关的问题是 Harada 猜想，下面我们来介绍它。 G-拓扑量子场论与 $R(G)$-拓扑量子场论中结构常数矩阵的行列式之比，等于共轭类大小的乘积除以不可约表示维数的乘积

$$\frac{\prod_C |C|}{\prod_R d_R} \tag{7.3}$$

这在附录 E 中有所解释。该比值的整性是 Harada 猜想的主题。更好地理解行列对偶的构造（详见第 6 节）或许能为这一猜想提供物理视角。一个更广泛的问题是刻画 G-CTST 与 $R(G)$-CTST 之间行列对偶的不变量。

本文采用弦论构造来处理组合表示论问题，这一思路与 [44] 中类似。与弦论相关的二分图被用于实现 Kronecker 系数——即对称群的张量积分解重数——并将其表示为对通过组合方法构造的整数矩阵的零向量进行计数。此类零向量的构造适用于已知的整数矩阵组合算法。零向量方程与特征值问题相关，可使用基于量子相位估计的高效量子算法求解 [45]（另见密切相关的工作 [46]）。这与使用量子算法高效求解线性代数问题的思路一致 [47]。本文基于矩阵方程的 CTST 算法同样适用于量子算法。有限群作为隐藏对称性，出现在具有连续群规范对称性的矩阵模型和张量模型的关联函数计算中（例如，参见近期工作 [48, 49]）。这为将与有限群表示论相关的算法更广泛地应用于全息理论和规范场论—弦论对偶性提供了途径。

致谢

我们感谢 Anindya Banerjee、George Barnes、Joseph Ben Geloun、Matthew Buican、Robert de Mello Koch、Gerard Duchamp 和 Eric Sharpe 就本文主题所进行的富有见地的讨论。SR 得到了 STFC 综合资助项目 ST/P000754/1“弦理论、规范理论与对偶性”的支持。S.R. 感谢 Henri Poincaré 研究所（UAR 839 CNRS-Sorbonne Université）以及 LabEx CARMIN（ANR-10-LABX-59-01）的支持。SR 还感谢理论物理周界研究所在本文完成最后阶段的一次访问期间给予的支持。周界研究所的研究工作得到加拿大政府通过加拿大工业部以及安大略省政府通过经济发展与创新部的资助。R.R. 感谢 ICTP 提供的支持。R.R. 的部分研究工作得到了英国皇家学会项目“跨维度共形场论与拓扑场论的新进展”的资助。R.R. 感谢爱丁堡国际数学与计算科学中心（ICMS）在“算术、拓扑与物理学中的规范场”会议期间提供的良好学术交流环境，本文中的部分研究成果曾在该会议上公布。

不可约表示（ R）-G 拓扑量子场论的 Frobenius 结构

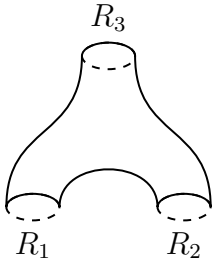
我们利用有限群G的表示代数定义一个二维拓扑量子场论，记为 $R(G)$。作为一个向量空间， $R(G)$ 具有一组基 a_R ，其由 G 的不可约表示的同构类集合 Irr(G) 标记。乘法 μ： $R(G) \otimes R(G) \to R(G)$ 定义为

$$\mu(a_{R_1}, a_{R_2}) = \sum_{R_3} N_{R_1R_2}^{R_3} a_{R_3}, \tag{A.1}$$

其中

$$N_{R_1R_2}^{R_3} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi^{R_1}(g)\chi^{R_2}(g)\overline{\chi^{R_3}(g)}. \tag{A.2}$$

我们引入图示记法。

$N_{R_1R_2}^{R_3} =$ 

(A.3)

该代数是交换的，因为 $R_1 \otimes R_2 \cong R_2 \otimes R_1$。它也是含幺的，平凡表示（记作 R_0）起到单位元的作用。等价地，我们有一个单位元 η： $\mathbb{C} \to R(G)$，由.....确定。

$\eta(1) = a_{R_0} =$ 

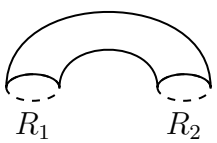
(A.4)

以及 $\eta(c) = c\eta(1)$ 对于 $c \in \mathbb{C}$。代数的这一种定义见 [21, 定义 2.1.18]。

通过添加一个非退化双线性形式 g： $R(G) \otimes R(G) \to \mathbb{C}$，代数 $R(G)$ 被赋予弗罗贝尼乌斯代数结构（参见 [21, 定义 2.2.5]）。我们采用该定义

$$g_{R_1R_2} = g(a_{R_1}, a_{R_2}) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi^{R_1}(g)\chi^{R_2}(g) = \delta_{R_1\overline{R_2}}, \tag{A.5}$$

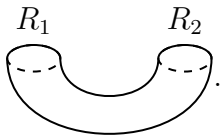
其中，$\overline{R}$ 是 R的复共轭表示。在图示中，这对应于

$g_{R_1R_2} =$ 

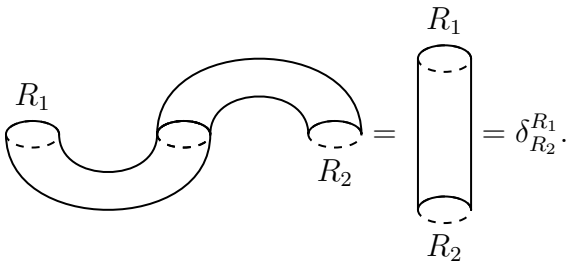
(A.6)

它有一个逆元。

$$g^{R_1R_2} = g^{-1}(a_{R_1}, a_{R_2}) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\overline{\chi^{R_1}(g)\chi^{R_2}(g)} = \delta^{\overline{R_1}R_2} = \tag{A.7}$$



图示如下，

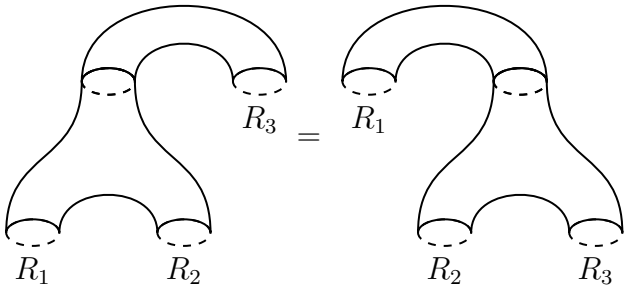


(A.8)

注意，定义（A.5）给出了一个满足以下条件的双线性形式

$$g(a_{R_1}a_{R_2}, a_{R_3}) = g(a_{R_1}, a_{R_2}a_{R_3}), \tag{A.9}$$

or



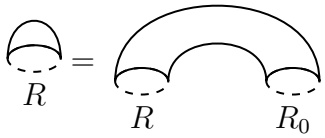
(A.10)

该双线性形式定义了余单位 ε： $R(G) \to \mathbb{C}$ 如下

$$\varepsilon(a_R) = g(a_R, a_{R_0}) = \delta_{R\overline{R_0}} = \delta_{RR_0} = \tag{A.11}$$



其中， $R_0 = \overline{R_0}$ 是平凡表示（见 [21, 2.2.3]）。图示如下，



(A.12)

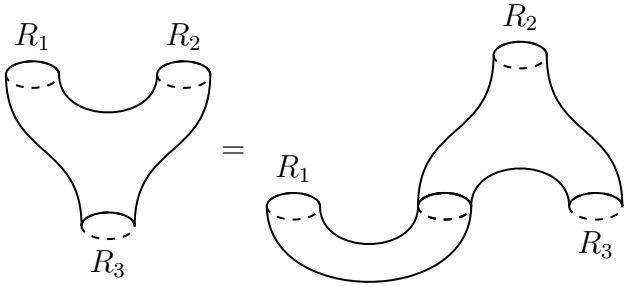
弗罗贝尼乌斯代数有一个典范的 [21, 定义 2.3.16]余乘法 Δ： $R(G) \to R(G)\otimes R(G)$，定义如下:

$$\Delta(a_{R_3}) = \sum_{R_1,R_2} N_{R_3}^{R_1R_2} a_{R_1} \otimes a_{R_2}, \tag{A.13}$$

其中

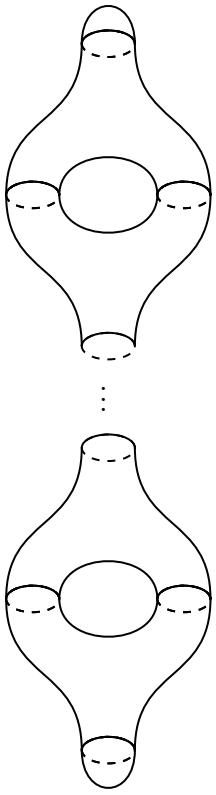
$$N_{R_3}^{R_1R_2} = g^{R_1R_4} N_{R_4R_3}^{R_2} = N_{\overline{R_1}R_3}^{R_2}. \tag{A.14}$$

用余边界来表示，我们有

$N_{R_3}^{R_1R_2} =$ 

(A.15)

一般亏格的 h 配分函数由反复使用余乘法 Δ 再接着使用乘法 μ得到。要得到闭流形，我们用单位元 η 和余单位 ε封住两端，

$Z_h^{R(G)} = \varepsilon \circ (\mu \circ \Delta)^h \circ \eta(1) =$  (A.16)

要对此进行评估，请注意，

$$\mu \circ \Delta(a_{R_1}) = \sum_{R_2,R_3} N_{R_1}^{R_2R_3} \mu(a_{R_2} \otimes a_{R_3}) \tag{A.17}$$

$$= \sum_{R_2,R_3,R_4} N_{R_1}^{R_2R_3} N_{R_2R_3}^{R_4} a_{R_4} \tag{A.18}$$

$$= \sum_{R_2,R_3,R_4} N_{\overline{R_2}R_1}^{R_3} N_{R_2R_3}^{R_4} a_{R_4}. \tag{A.19}$$

我们定义

$$N_{R_1}^{R_4} = \sum_{R_2,R_3} N_{R_1}^{R_2R_3} N_{R_2R_3}^{R_4}, \tag{A.20}$$

这等于

$$N_{R_1}^{R_4} = \frac{1}{|G|^2} \sum_{R_2,R_3,g,h} \chi^{R_1}(g)\overline{\chi^{R_2}(g)\chi^{R_3}(g)}\chi^{R_2}(h)\chi^{R_3}(h)\overline{\chi^{R_4}(h)} \tag{A.21}$$

$$= \sum_{R_2,R_3,C_1,C_2} \frac{|C_1||C_2|}{|G|^2} \chi_{C_1}^{R_1}\overline{\chi_{C_1}^{R_2}\chi_{C_1}^{R_3}}\chi_{C_2}^{R_2}\chi_{C_2}^{R_3}\overline{\chi_{C_2}^{R_4}} \tag{A.22}$$

$$= \sum_{C_1,C_2} \chi_{C_1}^{R_1}(\delta_{C_1C_2})^2\overline{\chi_{C_2}^{R_4}} \tag{A.23}$$

$$= \sum_{C} \chi_{C}^{R_1}\overline{\chi_{C}^{R_4}}. \tag{A.24}$$

利用上述结果，我们可以将亏格 h 配分函数写为

$$Z_h^{R(G)} = \sum_{R_1,\ldots,R_{h-1}} N_{R_0}^{R_1} N_{R_1}^{R_2} \ldots N_{R_{h-1}}^{R_0}, \tag{A.25}$$

其等于

$$\sum_{\substack{C_1,\ldots,C_h \\ R_1,\ldots,R_{h-1}}} \chi_{C_1}^{R_0}\overline{\chi_{C_1}^{R_1}}\chi_{C_2}^{R_1}\overline{\chi_{C_2}^{R_2}} \cdots \chi_{C_{h-2}}^{R_{h-2}}\overline{\chi_{C_{h-1}}^{R_{h-1}}}\chi_{C_h}^{R_{h-1}}\overline{\chi_{C_h}^{R_0}}. \tag{A.26}$$

对各个表示求和并使用

$$\sum_{R} \chi_{C_1}^{R}\chi_{C_2}^{R} = \frac{|G|}{|C_1|}\delta_{C_1C_2} \tag{A.27}$$

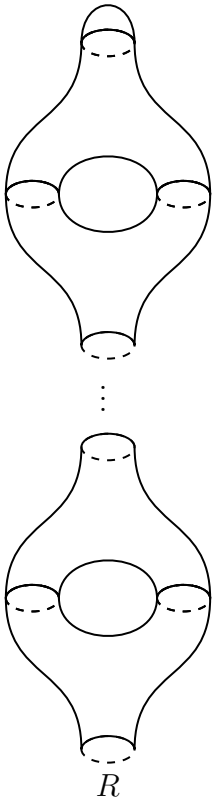
与 $\chi_C^{R_0} = 1$ 一起提供

$$Z_h^{R(G)} = \sum_{C_1,\ldots,C_h} \frac{\delta_{C_1C_2}|G|}{|C_1|} \cdots \frac{\delta_{C_{h-1}C_h}|G|}{|C_h|} = \sum_{C} \left(\frac{|G|}{|C|}\right)^{h-1} = \sum_{C} \mathrm{Sym} C^{h-1}. \tag{A.28}$$

Frobenius 结构也可以用来计算带边界闭流形的配分函数。举个简单例子，亏格为 h 、带有一个

入边界且标记为 R 的配分函数为

$$Z_{h;R}^{R(G)} = \varepsilon \circ (\mu \circ \Delta)^h(a_R) = \sum_{R_1,\ldots,R_{h-1}} N_R^{R_1} N_{R_1}^{R_2} \ldots N_{R_{h-1}}^{R_0} = \sum_C \left(\frac{|G|}{|C|}\right)^{h-1} \chi_C^R \tag{A.29}$$



$$= \quad \vdots \tag{A.30}$$

具有 n 个内边界的配分函数为

$$Z_{h;R_1,\ldots,R_n}^{R(G)} = \varepsilon \circ (\mu \circ \Delta)^h \mu^{n-1}(a_{R_1} \otimes \cdots \otimes a_{R_n}). \tag{A.31}$$

为了简化这一点，我们首先需要计算

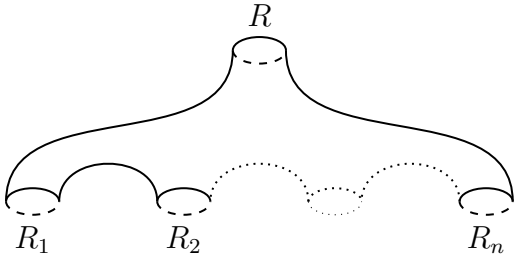
$$\mu^{n-1}(a_{R_1} \otimes \cdots \otimes a_{R_n}) = N_{R_1R_2}^{R'_1} N_{R'_1R_3}^{R'_2} \ldots N_{R'_{n-2}R_n}^{R'_{n-1}} a_{R'_{n-1}}. \tag{A.32}$$

我们定义

$$N_{R_1R_2\ldots R_n}^R = N_{R_1R_2}^{R'_1} N_{R'_1R_3}^{R'_2} \ldots N_{R'_{n-2}R_n}^R. \tag{A.33}$$

并用余边界图示表示它

$$N_{R_1R_2\ldots R_n}^R = \tag{A.34}$$



注意,

$$N_{R_1R_2R_3}^{R_2'} = N_{R_1R_2}^{R_1'} N_{R_1'R_3}^{R_2'} \tag{A.35}$$

$$= \frac{1}{|G|^2} \sum_{g_1,g_2} \chi^{R_1}(g_1)\chi^{R_2}(g_1)\overline{\chi^{R_1'}(g_1)}\chi^{R_1'}(g_2)\chi^{R_3}(g_2)\overline{\chi^{R_2'}(g_2)} \tag{A.36}$$

$$= \sum_{C_1,C_2} \frac{|C_1||C_2|}{|G|^2} \chi_{C_1}^{R_1}\chi_{C_1}^{R_2}\overline{\chi_{C_1}^{R_1'}}\chi_{C_2}^{R_1'}\chi_{C_2}^{R_3}\overline{\chi_{C_2}^{R_2'}} \tag{A.37}$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g} \chi^{R_1}(g)\chi^{R_2}(g)\chi^{R_3}(g)\overline{\chi^{R_2'}(g)}. \tag{A.38}$$

因此,

$$N_{R_1R_2\ldots R_n}^{R} = \frac{1}{|G|} \sum_{g} \chi^{R_1}(g)\chi^{R_2}(g)\ldots\chi^{R_n}(g)\overline{\chi^{R}(g)}. \tag{A.39}$$

回到 (A.31)，我们有

$$Z_{h;R_1\ldots R_n}^{R(G)} = \sum_{R} N_{R_1R_2\ldots R_n}^{R} \varepsilon\circ(\mu\circ\Delta)^h(a_R) = \sum_{R} N_{R_1R_2\ldots R_n}^{R} Z_{h;R} \tag{A.40}$$

$$= \sum_{C} \left(\frac{|G|}{|C|}\right)^{h-1} \chi_C^{R_1}\chi_C^{R_2}\cdots\chi_C^{R_n}. \tag{A.41}$$

B 不可逆范德蒙引理

在公式 (3.2)、(3.16) 和 (3.42) 中，我们使用了以下引理来证明特征标和的整性。

引理 1 设 Z 是一个可对角化的、元素为非负整数的 $K\times K$ 矩阵，其特征值为$\lambda_1\ldots,\lambda_K$。设不同特征值的集合为 $\{z_1,\ldots,z_k\}$。注意， $k\le K$ 通常成立。定义 $k\times k$ 范德蒙德矩阵

$$V_{b,i} = z_i^b. \tag{B.1}$$

一般而言，特征值 $z_1,\ldots,z_k$ 都是代数整数。但假设 z_j 是有理数，那么范德蒙德矩阵的逆矩阵 V^{-1} 的第 j 行具有有理数项:

$$(V^{-1})_{j,b} \in \mathbb{Q} \quad \forall\, b\in\{1,\ldots,k\}. \tag{B.2}$$

在本文中，我们将这个引理用于 z_j 为整数的特殊情形。

在展开证明这个引理所涉及的技术细节之前，我们先概述一下证明思路。我们将利用范德蒙德矩阵的矩阵元素 $(V^{-1})_{i,\ b}$ 可以用初等对称多项式表示这一事实（参见[50]第 1.2.3 节练习 40）

$$(V^{-1})_{j,b} = \frac{(-1)^{k-b}e_{k-b}(z_1,\ldots,z_{j-1},z_{j+1},\ldots z_k)}{z_j\prod_{i\neq j}(z_j-z_i)}, \tag{B.3}$$

其中 e_m 是第 m 个初等对称多项式。由此，剩下的就是证明这些初等对称多项式是有理数。我们的策略是研究多项式

$$q_{Z,j}(x) = \prod_{i \neq j}(x - z_i) = \sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i e_i(z_1, \ldots, z_{j-1}, z_{j+1}, \ldots, z_k)x^{k-1-i}. \tag{B.4}$$

通过证明 $q_{Z,j}(x)$ 具有有理系数，可以推知相应的初等对称多项式均为有理数。多项式 $q_{Z,j}(x)$ 与行列式密切相关。

$$\det(x - Z) = \prod_{i=1}^{K}(x - \lambda_i) = \prod_{i=1}^{k}(x - z_i)^{m_i}, \tag{B.5}$$

其中，m_i 是特征值 λ_i 的重数。将所有 i 均设为 $m_i = 1$ 所对应的多项式称为 Z 的最小多项式。

$$p_Z(x) = \prod_{j=1}^{k}(x - z_j). \tag{B.6}$$

最小多项式与$q_{Z,\ j}(x)$相差一个线性因子

$$p_Z(x) = (x - z_j)q_{Z,j}(x), \tag{B.7}$$

其中有 $z_j \in \mathbb{Q}$。正如我们将在本附录余下部分证明的，$p_Z(x)$ 具有有理系数；比较等式两边的系数可知，$q_{Z_j}(x)$ 也具有有理系数。因此可得

$$e_i(z_1, \ldots, z_{j-1}, z_{j+1}, \ldots, z_k) \in \mathbb{Q}. \tag{B.8}$$

最后，

$$z_j(z_j - z_1)\ldots(z_j - z_{j-1})(z_j - z_{j+1})\ldots(z_j - z_k) = z_j q_{Z,j}(z_j) \in \mathbb{Q}, \tag{B.9}$$

由此完成了方程 (B.2) 中引理的证明。

我们现在将证明，最小多项式 $p_Z(x)$ 具有有理系数。非负整数包含在有理数域 $\mathbb{Q}$ 中，因此 Z 是集合 $M_k(\mathbb{Q})$ 中的一个元素，该集合由具有有理系数的 $k \times k$ 矩阵构成。设 F 是有理数域的一个有限域扩张。矩阵 X 在域 F 上的最小多项式被唯一地定义为次数最低的首一多项式 $p_X^{(F)}(x) \in F[x]$，使得

$$p_X^{(F)}(X) = 0. \tag{B.10}$$

最小多项式整除特征多项式（参见 [51,定理 3.3.1]）。

$$P_X(x) = \det(x - X). \tag{B.11}$$

也就是说，存在一个首一多项式 $h(x) \in F[x]$，使得

$$P_X(x) = h(x)p_X^{(F)}(x). \tag{B.12}$$

特别地，特征多项式 $P_X(x)$ 满足

$$P_X(X) = 0 \tag{B.13}$$

因此，矩阵的最小多项式存在。矩阵的最小多项式是唯一的。为证明这一点，假设 $p^{(F)}_{X\,1},(x)$ 和 $p^{(F}_{X\,),2}(x)$ 是矩阵 X 的最小多项式。我们有

$$p^{(F)}_{X,2}(x) = q(x)p^{(F)}_{X,1}(x) + r(x) \tag{B.14}$$

对于某些多项式 $q(x)$ $r(x) \in F[x]$，多项式 $r(x)$ 的次数低于$p^{(F)}_{X\,1}\,,\,(x)$ 的次数。代入矩阵 X，得到

$$r(X) = 0 \tag{B.15}$$

因此，如果 $r(X)$ 是一个非平凡多项式，那么这就与以下假设矛盾： $p^{(F)}_{X\,1}\,,(x)$ 是在 X 上取值为零的最低次数多项式。因此，$r(x) = 0$。这表明 $p^{(F)}_{X\,1},(x)$ 整除多项式 $p^{(F}_{X\,),2}(x)$。由于 $p^{(F}_{X\,),1}(x)$ 和 $p^{(F)}_{X\,2},(x)$ 是次数相同的多项式，因此 $q(x)$ 必定是一个常数多项式。由于 $p^{(F)}_{X\,1}\,,(x)$ 和$p^{(F)}_{X\,2}\,,(x)$ 也是首一多项式，因此我们必有 $q(x) = 1$，从而，

$$p^{(F)}_{X,2}(x) = p^{(F)}_{X,1}(x) \tag{B.16}$$

在我们的特定情形中， $X = Z$ 是一个具有整数元素的矩阵。下面我们证明，最小多项式 $p^{(F)}_{Z}\,(x)$ 具有有理系数。令

$$p^{(F)}_{Z}(x) = x^k + b_{k-1}x^{k-1} + \cdots + b_0, \tag{B.17}$$

是 $p^{(F)}_{Z}\,(x)$ 在 F 中的系数展开。我们现在将证明，

$$b_i \in \mathbb{Q}\ . \tag{B.18}$$

令 $r^{(i)}_j$ 为 Z^i 的第 j 行，则

$$p^{(F)}_{Z}(Z) = Z^k + b_{k-1}Z^{k-1} + \cdots + b_0 = 0 \tag{B.19}$$

意味着

$$r^{(k)}_j + \sum_{i=0}^{k-1} b_i r^{(i)}_j = 0 \tag{B.20}$$

对于所有 $j = 1$、.....、K，其中 K 是矩阵 Z 的大小。也就是说，向量 $r^{(0)}_j$、.....、$r^{(k)}_j$ 在域 F 上线性相关。令 f_l 为域 F 的一个基，使得

$$b_i = \sum_l \beta_{i,l} f_l \tag{B.21}$$

其中 $f_0 = 1$ 和 $\beta_{i,\ l} \in \mathbb{Q}$。将其代入 (B.20) 可得

$$r_j^{(k)} + \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{l} \beta_{i,l} f_l r_j^{(i)} = 0. \tag{B.22}$$

注意，$r_j^{(i)}$ 是有理数。因此，上述方程包含对基元素 f_l 的求和，其系数为有理数。由于 f_l 在有理数域上线性无关，这意味着对于每个 l，f_l 前面的所有系数都必须为零。特别地，利用 $f_0 = 1$ 这一事实，我们有

$$r_j^{(k)} + \sum_{i=0}^{k-1} \beta_{i,0} f_0 r_j^{(i)} = \left(r_j^{(k)} + \sum_{i=0}^{k-1} \beta_{i,0} r_j^{(i)} \right) f_0 = 0, \tag{B.23}$$

并且 f_0 前面的系数消失意味着

$$r_j^{(k)} + \sum_{i=0}^{k-1} \beta_{i,0} r_j^{(i)} = 0, \tag{B.24}$$

由于（B.24）对所有行 $j = 1, \ldots, K$ 均成立，因此我们有

$$Z^k + \beta_{k-1,0} Z^{k-1} + \cdots + \beta_{0,0} = 0. \tag{B.25}$$

即由以下方式定义的首一多项式 $p(x) \in \mathbb{Q}$

$$p(x) = x^k + \beta_{k-1,0} x^{k-1} + \cdots + \beta_{0,0}, \tag{B.26}$$

满足 $p(Z) = 0$。然而，由于最小多项式是唯一的，我们必然有 $p_X^{(F)}(x) = p(x)$。因此，如果矩阵定义在有理数域上，那么最小多项式具有有理系数。这证明了上述证明概要中的假设是合理的，因此我们已经证明了该引理。

C 从 $R(G)$-CTST 得到的共轭类大小与特征标

在本附录中，我们根据 $R(G)$-CTST 振幅构造多项式 $F(x)$，其根为 $x = \mathrm{Sym}C_1$、……、$\mathrm{Sym}C_k$，其中 $\mathrm{Sym}C = \frac{|G|}{|C|}$。因此，求解该多项式是一种从 CTST 中构造性地求出共轭类大小的方法。多项式 $F(x)$ 包含来自亏格大于一的流形的贡献。$F(x)$ 的根与手柄生成算子的特征值直接相关。这类似于 G-CTST 构造[14, 15] 不可约表示维数的方法，该方法利用了 G-TQFT 手柄生成算子的特征值为 $\frac{|G|^2}{d_R^2}$ 这一事实。

手柄生成算子可用于构造特征标的水平集，其中手柄生成算子的特征值固定，等价地，共轭类大小固定。利用先前构造的共轭类数据，我们给出这些水平集的显式公式。

以 $z_i = \mathrm{Sym}C_i$ 和 $R(G)$-CTST振幅的初等对称多项式表示特征标和，这些振幅具有一个边界但亏格各不相同。这与 G-CTST 在 [15], 中的相关讨论互为对偶，其中手柄生成算子可用于构造具有相同维数的特征标水平集。

通过考察带有一个标记为 R_2 的边界以及 b 个标记为 R_1 的边界的曲面，我们构造出 $\chi_C^{R_2}$ 的水平集求和，其中 $\chi_C^{R_1}$ 的值固定。这是 [15], 中构造的行列对偶：在该构造中，带有一个标记为 C_2 的边界以及 b 个标记为 C_1 的边界的曲面产生了 C_2 的归一化特征标的水平集。

C.1 从 $R(G)$-CTST 得到共轭类大小

为从 $R(G)$-CTST 振幅构造共轭类大小，定义

$$z_C = \frac{|G|}{|C|} = \mathrm{Sym}C \tag{C.1}$$

以及多项式

$$F(x) = \prod_{C\in \mathrm{Cl}(G)} (x - z_C). \tag{C.2}$$

该多项式可以展开为初等对称函数 e_k,

$$F(x) = \sum_k (-1)^k x^{K-k} e_k(z_{C_1}, \ldots, z_{C_K}), \tag{C.3}$$

其中 $K = |\mathrm{Cl}(G)|$。在 z_K 上取值的初等对称函数可以用配分函数 $Z_h^{R(G)}$ 表示，参见 [14, 方程 2.17]

$$e_k(z_{C_1}, \ldots, z_{C_K}) = \sum_{p\vdash k} \frac{(-1)^{k-\sum_i p_i}}{\mathrm{Aut}(p)} \prod_i (Z_{h=i+1}^{R(G)})^{p_i}. \tag{C.4}$$

求和遍历 k 的整数分拆 $p = (p_1, p_2, \ldots, p_k)$

$$\sum_i i p_i = k, \quad \text{and} \quad \mathrm{Aut}(p) = \prod i^{p_i} p_i! \tag{C.5}$$

将 (C.4) 代入 (C.3) 得

$$F(x) = \sum_k (-1)^k x^{K-k} \sum_{p\vdash k} \frac{(-1)^{k-\sum_i p_i}}{\mathrm{Aut}(p)} \prod_i (Z_{h=i+1}^{R(G)})^{p_i}, \tag{C.6}$$

an通过求解 $F(x) = 0$，从 $R(G)$-CTST 数据中得到共轭类大小。

C.2 亏格h融合数据中共轭类大小水平集上的可约特征标

本节将通过带有边界 S 、亏格各异的曲面，探究不可约表示 S 。亏格为一时的配分函数为

$$\begin{aligned} Z_{h=1;S} &= \sum_R N_{R,\bar{R},S} = \frac{1}{|G|}\sum_R N_{R\bar{R}S} \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_g \chi^R(g)\chi^R(g^{-1})\chi^S(g) \\ &= \sum_C \frac{|C|\mathrm{Sym}C}{|G|}\chi_C^S = \sum_C \chi_C^S \end{aligned} \tag{C.7}$$

对于更高亏格，我们有

$$\begin{aligned} Z_{h;S}^{R(G)} &= \sum_{R_1,\cdots,R_{h+1}} N_{R_1\cdots R_{h+1},\bar{R}_1,\cdots,\bar{R}_{h+1};S} \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_g \sum_{R_1\cdots R_{h+1}} \chi^{R_1}(g)\chi^{R_2}(g)\cdots\chi^{R_{h+1}}(g)\chi^{\bar{R}_1}(g)\chi^{\bar{R}_2}(g)\cdots\chi^{\bar{R}_{h+1}}(g)\chi^S(g) \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_C |C|(\mathrm{Sym}C)^h\chi_C^S \\ &= \sum_C (\mathrm{Sym}C)^{h-1}\chi_C^S \end{aligned} \tag{C.8}$$

在 Cl(G) 上定义如下等价关系

$$C_1 \sim C_2 \quad \text{if } \mathrm{Sym}C_1 = \mathrm{Sym}C_2 \quad . \tag{C.9}$$

它将 Cl(G) 划分为子集 $\kappa_1, \ldots, \kappa_l$，使得

$$\mathrm{Cl}(G) = \kappa_1 \cup \cdots \cup \kappa_l. \tag{C.10}$$

我们引入如下记号

$$z_i = \mathrm{Sym}C, \quad \text{for any } C \in \kappa_i \quad . \tag{C.11}$$

现在可以将方程（C.8）改写为

$$Z_{h;S}^{R(G)} = \sum_{i=1}^{l} z_i^{h-1} \sum_{C\in\kappa_i} \chi_C^S. \tag{C.12}$$

定义 l-向量

$$y_h(S) = (Z_{2;S}, \ldots, Z_{l+1;S}), \tag{C.13}$$

$l \times l$ 范德蒙德矩阵

$$V_{h,i} = z_i^h \tag{C.14}$$

和 l-向量

$$x_i(S) = \sum_{C \in \kappa_i} \chi_C^S. \tag{C.15}$$

方程（C.8）写作

$$y(S) = Vx(S) \tag{C.16}$$

范德蒙德矩阵的逆元为

$$(V^{-1})_{i,h} = \frac{(-1)^{l-h} e_{l-h}(z_1 \ldots, z_{i-1}, z_{i+1}, \ldots, z_l)}{z_i \prod_{j \neq i}(z_i - z_j)}, \tag{C.17}$$

这立即给出特征标水平集求和的公式:

$$\sum_{C \in \kappa_i} \chi_C^S = \frac{\sum_{h=1}^{l} (-1)^{l-h} e_{l-h}(z_1 \ldots, z_{i-1}, z_{i+1}, \ldots, z_l) Z_{h+1;S}}{z_i \prod_{j \neq i}(z_i - z_j)}, \tag{C.18}$$

C.3 构造在 R_1 的特征标水平集上对 R_2 的特征标求和

类似的论证使我们能够得到另一个特征标的水平集上的特征标之和。固定一个不可约表示 R_1，并考虑配分函数

$$\begin{aligned}
&Z^{R(G)}_{h=1;R_1^b,R_2} \\
&= \sum_R N_{R,\bar{R},R_1^b,R_2} = \frac{1}{|G|} \sum_g \sum_R \chi^R(g)\chi^{\bar{R}}(g)(\chi^{R_1}(g))^b \chi^{R_2}(g) \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_K |K|.\mathrm{Sym}K.(\chi_K^{R_1})^b \chi_K^{R_2} \\
&= \sum_K (\chi_K^{R_1})^b \chi_K^{R_2}.
\end{aligned} \tag{C.19}$$

定义等价关系

$$C_1 \sim_{R_1} C_2 \quad \text{if } \chi_{C_1}^{R_1} = \chi_{C_2}^{R_1}, \tag{C.20}$$

在 Cl(G) 上，它将共轭类划分为子集 $\kappa_1, \ldots, \kappa_l$。引入

$$z_i^{R_1} = \chi_C^{R_1} \quad \text{for any } C \in \kappa_i. \tag{C.21}$$

我们可以将配分函数重新写为

$$Z^{R(G)}_{h=1;R_1^b;R_2} = \sum_{i=1}^{l} (z_i^{R_1})^b \sum_{C \in \kappa_i} \chi_C^{R_2}. \tag{C.22}$$

和之前一样，定义 l-向量

$$y = (Z_{h=1,R_1^1,R_2}, \ldots, Z_{h=1,R_1^l,R_2}), \tag{C.23}$$

$l \times l$ 范德蒙德矩阵

$$V_{b,i}(R_1) = (z_i^{R_1})^b \tag{C.24}$$

和 l-向量

$$x_i(R_2) = \sum_{C \in \kappa_i} \chi_C^{R_2}. \tag{C.25}$$

那么，方程 (C.22) 可写为

$$y(R_1, R_2) = V(R_1)x(R_2). \tag{C.26}$$

$V(R_1)$ 的逆元是

$$(V^{-1})_{i,b} = \frac{(-1)^{l-b} e_{l-b}(z_1^{R_1}, \ldots, z_{i-1}^{R_1}, z_{i+1}^{R_1}, \ldots, z_l^{R_1})}{z_i^{R_1} \prod_{j \neq i}(z_i^{R_1} - z_j^{R_1})}, \tag{C.27}$$

这给出的是

$$\sum_{C \in \kappa_i} \chi_C^{R_2} = \frac{\sum_{b=1}^{l} (-1)^{l-b} e_{l-b}(z_1^{R_1}, \ldots, z_{i-1}^{R_1}, z_{i+1}^{R_1}, \ldots, z_l^{R_1}) Z_{h=1;R_1^b;R_2}}{z_i^{R_1} \prod_{j \neq i}(z_i^{R_1} - z_j^{R_1})}. \tag{C.28}$$

D 伽罗瓦群、整数行与列

在第 5.1 节中，我们证明了如果包含特征标表的域的伽罗瓦群是循环的，那么整数行和列的数量相等。在本附录中，我们将通过计算阶为 ≤ 100 的有限群和散在群的伽罗瓦群来说明这一结果。我们计算了它们的指数 E、特征标表中整数行和列的数量、伽罗瓦群 $\mathbf{Z}_E^\times$ 的同构类，以及包含特征标表的最小域的伽罗瓦群的同构类。这些计算是使用 GAP [52] 和 SageMath [53] 完成的。群的同构类采用 GAP 中的记号表示。高亮显示的行对应于整数行和列数量不同的有限群。这些群具有非循环的伽罗瓦群，这与我们在第 5.1 节中的结果一致。

群	Exp	整数行	Int. 列	伽罗瓦群	忠实伽罗瓦群
C1	1	1	1	C1	C1
C2	2	2	2	C1	C1
C3	3	1	1	C2	C2
C4	4	2	2	C2	C2
C2 × C2	2	4	4	C1	C1
C5	5	1	1	C4	C4
S3	6	3	3	C2	C1
C6	6	2	2	C2	C2
C7	7	1	1	C6	C6
C8	8	2	2	C2 × C2	C2 × C2
C4 × C2	4	4	4	C2	C2
D8	4	5	5	C2	C1
Q8	4	5	5	C2	C1
C2 × C2 × C2	2	8	8	C1	C1
C9	9	1	1	C6	C6
$C_3 \times C_3$	3	1	1	C2	C2
D10	10	2	2	C4	C2
C10	10	2	2	C4	C4
C11	11	1	1	C10	C10
C_3 : 四阶循环群	12	4	4	C2 × C2	C2
C12	12	2	2	C2 × C2	C2 × C2
A4	6	2	2	C2	C2
D12	6	6	6	C2	C1
C6 x C_2	6	4	4	C2	C2
C13	13	1	1	C12	C12

D14	14	2	2	C6	C3
C14	14	2	2	C6	C6
C15	15	1	1	C4 × C2	C4 × C2
C16	16	2	2	C4 × C2	C4 × C2
C4 × C4	4	4	4	C2	C2
(C4 × C2) : C_2	4	6	6	C2	C2
四阶循环群 : 四阶循环群	4	6	6	C2	C2
C8 × C_2	8	4	4	C2 × C2	C2 × C2
C8 : C_2	8	4	4	C2 × C2	C2
D16	8	5	5	C2 × C2	C2
QD16	8	5	5	C2 × C2	C2
Q16	8	5	5	C2 × C2	C2
C4 × C2 × C2	4	8	8	C2	C2
C2 × D8	4	10	10	C2	C1
C2 × Q8	4	10	10	C2	C1
(C4 × C2) : C_2	4	8	8	C2	C2
C_2 × C_2 × C_2 × C_2	2	16	16	C1	C1
C17	17	1	1	C16	C16
D18	18	3	3	C6	C3
C18	18	2	2	C6	C6
C_3 × S_3	6	3	3	C2	C2
(C_3 × C_3) : C_2	6	6	6	C2	C1
C6 × C_3	6	2	2	C2	C2
C19 C5 : 四阶循环群	19 20	1 2	1 2	C18 C4 × C2	C18 C2 × C2
C20 C5 : 四阶循环群	20 20	2 3	2 3	C4 × C2 C4 × C2	C4 × C2 C2
D20	10	4	4	C4	C2
C10 × C2	10	4	4	C4	C4
C7 : C3	21	1	1	C6 x C2	C2 × C2
C21	21	1	1	C6 x C2	C6 x C2
D22	22	2	2	C10	C5
C22	22	2	2	C10	C10
C23	23	1	1	C22	C22
C_3 : C8	24	4	4	C2 × C2 × C2	C2 × C2
C24	24	2	2	C2 × C2 × C2	C2 × C2 × C2
SL(2,3)	12	3	3	C2 × C2	C2
C_3 : Q_8 四阶循环群 × S_3	12 12	7 6	7 6	C2 × C2 C2 × C2	C2 C2
D24	12	7	7	C2 × C2	C2
C_2 × (C_3 : 四阶循环群)	12	8	8	C2 × C2	C2
(C6 × C2) : C2	12	7	7	C2 × C2	C2
C12 × C2	12	4	4	C2 × C2	C2 × C2
C_3 × D_8	12	5	5	C2 × C2	C2
C_3 × Q_8	12	5	5	C2 × C2	C2
S4	12	5	5	C2 × C2	C1
C_2 × A_4	6	4	4	C2	C2
C2 × C2 × S_3	6	12	12	C2	C1
C6 × C2 × C2	6	8	8	C2	C2
C25	25	1	1	C20	C20
C5 × C5	5	1	1	C4	C4
D26	26	2	2	C12	C6
C26	26	2	2	C12	C12
C27	27	1	1	C18	C18
C9 × C3	9	1	1	C6	C6
(C_3 × C_3) : C_3	3	1	1	C2	C2
C9 : C_3	9	1	1	C6	C2
C_3 x C_3 x C_3	3	1	1	C2	C2
C7 : C4	28	2	2	C6 x C_2	C6
C28	28	2	2	C6 x C_2	C6 x C_2
D28	14	4	4	C6	C3
C14 × C_2	14	4	4	C6	C6
C29	29	1	1	C28	C28
C5 × S_3	30	3	3	C4 × C2	C4
C_3 × D10	30	2	2	C4 × C2	C2 × C2
D30	30	3	3	C4 × C2	C4
C30	30	2	2	C4 × C2	C4 × C2
C31	31	1	1	C30	C30
C32	32	2	2	C8 × C_2	C8 × C2
(C4 × C2) : 四阶循环群	4	8	8	C2	C2
C8 x 四阶循环群	8	4	4	C2 × C2	C2 × C2
C8 : 四阶循环群	8	4	4	C2 × C2	C2
(C8 × C2) : C_2	8	6	6	C2 × C2	C2 × C2
(C2 × C2 × C2) : 四阶循环群	4	7	7	C2	C2
(C8 : C2) : C2	8	7	7	C2 × C2	C2
C_2 . ((C4 × C2) : C_2) =(C2 × C2) . (C4 × C2)	8	7	7	C2 × C2	C2
(C8 × C_2) : C_2	8	6	8	C2 × C2	C2 × C2
Q_8 : 四阶循环群	8	6	8	C2 × C2	C2 × C2
(C4 × C4) : C_2	8	6	6	C2 × C2	C2
四阶循环群 : C8	8	6	6	C2 × C2	C2 × C2
C8 : 四阶循环群	8	6	6	C2 × C2	C2 × C2
C8 : 四阶循环群	8	6	6	C2 × C2	C2 × C2
四阶循环群 . D8 =四阶循环群 . (C4 × C2)	8	6	4	C2 × C2	C2 × C2
C16 × C2	16	4	4	C4 × C2	C4 × C2
C16 : C2	16	4	4	C4 × C2	C2 × C2
D32	16	5	5	C4 × C2	C4
QD32	16	5	5	C4 × C2	C4
Q32	16	5	5	C4 × C2	C4
四阶循环群 × 四阶循环群 × C_2	4	8	8	C2	C2
C_2 × ((C4 × C2) : C_2)	4	12	12	C2	C2

$C_2 \times$ (四阶循环群 : 四阶循环群)	4	12	12	C2	C2
$(C4 \times C4) : C_2$	4	8	8	C2	C2
四阶循环群 × D8	4	10	10	C2	C2
四阶循环群 x Q_8	4	10	10	C2	C2
$(C2 \times C2 \times C2 \times C2) : C_2$	4	14	14	C2	C1
$(C4 \times C2 \times C2) : C_2$	4	12	12	C2	C2
$(C2 \times Q_8) : C_2$	4	12	12	C2	C2
$(C4 \times C2 \times C2) : C_2$	4	10	10	C2	C2
$(C4 \times C4) : C_2$	4	10	10	C2	C2
$(C2 \times C2)$. $(C2 \times C2 \times C2)$	4	10	10	C2	C2
$(C4 \times C4) : C_2$	4	8	8	C2	C2
$(C4 \times C4) : C_2$	4	14	14	C2	C1
C4 : Q8	4	14	14	C2	C1
$C8 \times C_2 \times C_2$	8	8	8	$C2 \times C2$	$C2 \times C2$
$C_2 \times (C_8 : C_2)$	8	8	8	$C2 \times C2$	C2
$(C8 \times C2) : C_2$	8	8	8	$C2 \times C2$	$C2 \times C2$
$C_2 \times$ D16	8	10	10	$C2 \times C2$	C2
$C_2 \times$ QD16	8	10	10	$C2 \times C2$	C2
$C_2 \times$ Q16	8	10	10	$C2 \times C2$	C2
$(C8 \times C2) : C_2$	8	10	8	$C2 \times C2$	$C2 \times C2$
C8 : (C2 × C2)	8	11	11	$C2 \times C2$	C1
$(C2 \times Q_8) : C2$	8	11	11	$C2 \times C2$	C1
$C4 \times C2 \times C2 \times C2$	4	16	16	C2	C2
$C2 \times C2 \times$ D8	4	20	20	C2	C1
$C_2 \times C2 \times Q_8$	4	20	20	C2	C1
$C_2 \times ((C4 \times C_2) : C_2)$	4	16	16	C2	C2
$(C2 \times C2 \times C2) : (C2 \times C2)$	4	17	17	C2	C1
$(C_2 \times Q_8)$: C_2	4	17	17	C2	C1
$C2 \times C2 \times C2 \times C2 \times C2$	2	32	32	C1	C1
C33	33	1	1	$C10 \times C_2$	$C10 \times C_2$
D34	34	2	2	C16	C8
C34	34	2	2	C16	C16
C35	35	1	1	$C12 \times C_2$	$C12 \times C_2$
C_9 : 四阶循环群	36	4	4	$C_6 \times C_2$	C6
C36	36	2	2	$C_6 \times C_2$	$C6 \times C_2$
$(C2 \times C2) : C_9$	18	2	2	C6	C6
D36	18	6	6	C6	C3
$C18 \times C_2$	18	4	4	C6	C6
$C_3 \times (C_3 :$ 四阶循环群)	12	4	4	$C2 \times C2$	$C2 \times C2$
$(C_3 \times C_3)$: 四阶循环群	12	10	10	$C2 \times C2$	C2
$C12 \times C_3$	12	2	2	$C2 \times C2$	$C2 \times C2$
$(C_3 \times C_3)$: 四阶循环群	12	4	4	$C2 \times C2$	C2
$S_3 \times S_3$	6	9	9	C2	C1
$C_3 \times A_4$	6	2	2	C2	C2
$C_6 \times S_3$	6	6	6	C2	C2
C_2 x ((C_3 x C_3) : C_2)	6	12	12	C2	C1
C6 × C6	6	4	4	C2	C2
C37	37	1	1	C36	C36
D38	38	2	2	C18	C9
C38	38	2	2	C18	C18
C13: C_3	39	1	1	$C_{12} \times C_2$	$C4 \times C2$
C39	39	1	1	C12 x C_2	$C12 \times C_2$
C5: C8	40	2	2	$C4 \times C2 \times C2$	$C2 \times C2 \times C2$
C40	40	2	2	$C4 \times C2 \times C2$	$C4 \times C2 \times C2$
C5 : C8	40	4	4	$C4 \times C2 \times C2$	$C2 \times C2$
C5: Q_8	20	5	5	$C4 \times C2$	C4
四阶循环群 x D10	20	4	4	$C4 \times C2$	$C2 \times C2$
D40	20	5	5	$C4 \times C2$	C4
$C_2 \times$ (C5 : 四阶循环群)	20	4	4	$C4 \times C2$	$C2 \times C2$
$(C10 \times C2) : C_2$	20	5	5	$C4 \times C2$	C4
$C20 \times C_2$	20	4	4	$C4 \times C2$	$C4 \times C2$
$C5 \times D8$	20	5	5	$C4 \times C2$	C4
$C5 \times Q_8$	20	5	5	$C4 \times C2$	C4
$C_2 \times (C5 : C4)$	20	6	6	$C4 \times C2$	C2
$C_2 \times C2 \times$ D10	10	8	8	C4	C2
$C10 \times C2 \times C2$	10	8	8	C4	C4
C41	41	1	1	C40	C40
C7 : C6	42	3	3	C6 x C_2	C2
$C_2 \times (C_7 : C_3)$	42	2	2	C6 x C_2	$C2 \times C2$
C7 x S_3	42	3	3	C6 x C_2	C6
$C_3 \times$ D14	42	2	2	C6 x C_2	C6
D42	42	3	3	C6 x C_2	C6
C42	42	2	2	C6 x C_2	C6 x C_2
C43	43	1	1	C42	C42
C11 : 四阶循环群	44	2	2	$C10 \times C_2$	C10
C44	44	2	2	$C10 \times C_2$	$C10 \times C_2$
D44	22	4	4	C10	C5
$C22 \times C_2$	22	4	4	C10	C10
C45	45	1	1	$C12 \times C_2$	$C12 \times C_2$
C15 x C_3	15	1	1	$C4 \times C2$	$C4 \times C2$
D46	46	2	2	C22	C11
C46	46	2	2	C22	C22
C47	47	1	1	C46	C46
C_3: C16	48	4	4	$C4 \times C2 \times C2$	$C4 \times C2$
C48	48	2	2	$C4 \times C2 \times C2$	$C4 \times C2 \times C2$
$(C_4 \times C_4) : C_3$	12	2	2	$C2 \times C2$	$C2 \times C2$
$C8 \times S_3$	24	6	6	$C2 \times C2 \times C2$	$C2 \times C2$
$C24 : C_2$	24	6	6	$C2 \times C2 \times C2$	$C2 \times C2$
$C24 : C_2$	24	7	7	$C2 \times C2 \times C2$	$C2 \times C2$
D48	24	7	7	$C2 \times C2 \times C2$	$C2 \times C2$

$C_3 : Q16$	24	7	7	C2 × C2 × C2	C2 × C2
C2 × (C_3 : C8)	24	8	8	C2 × C2 × C2	C2 × C2
(C_3 : C8) : C_2	24	8	6	C2 × C2 × C2	C2 × C2
四阶循环群 x (C_3 : 四阶循环群)	12	8	8	C2 × C2	C2
(C_3 : 四阶循环群) : 四阶循环群	12	8	10	C2 × C2	C2 × C2
C_{12} : 四阶循环群	12	10	10	C2 × C2	C2 × C2
(C_{12} × C_2) : C_2	12	8	10	C2 × C2	C2 × C2
(C_3 × D_8) : C_2	24	8	8	C2 × C2 × C2	C2 × C2
(C_3 : Q_8) : C_2	24	8	8	C2 × C2 × C2	C2 × C2
(C_3 × Q_8) : C_2	24	8	8	C2 × C2 × C2	C2 × C2
$C_3 : Q16$	24	8	8	C2 × C2 × C2	C2 × C2
(C6 x C_2) : 四阶循环群	12	10	10	C2 × C2	C2 × C2
C12 x 四阶循环群	12	4	4	C2 × C2	C2 × C2
C_3 x ((C4 × C2) : C2)	12	6	6	C2 × C2	C2 × C2
C_3 × (四阶循环群 : 四阶循环群)	12	6	6	C2 × C2	C2 × C2
C24 × C2	24	4	4	C2 × C2 × C2	C2 × C2 × C2
C_3 × (C8 : C2)	24	4	4	C2 × C2 × C2	C2 × C2
C_3 × D16	24	5	5	C2 × C2 × C2	C2 × C2
C_3 x QD16	24	5	5	C2 × C2 × C2	C2 × C2
C_3 x Q16	24	5	5	C2 × C2 × C2	C2 × C2
C_2 . S4 = SL(2,3) . C_2	24	6	6	C2 × C2 × C2	C2
GL(2,3)	24	6	6	C2 × C2 × C2	C2
A_4 : 四阶循环群	12	6	6	C2 × C2	C2
四阶循环群 × A_4	12	4	4	C2 × C2	C2 × C2
C2 × SL(2,3)	12	6	6	C2 × C2	C2
((C4 × C2) : C3) : C3	12	4	4	C2 × C2	C2 × C2
C_2 × (C_3 : Q_8)	12	14	14	C2 × C2	C2
C_2 × 四阶循环群 × S_3	12	12	12	C2 × C2	C2
C_2 × D24	12	14	14	C2 × C2	C2
(C_{12} × C_2) : C_2	12	12	10	C2 × C2	C2 × C2
D_8 × S_3	12	15	15	C2 × C2	C1
(四阶循环群 × S_3) : C_2	12	13	13	C2 × C2	C2
Q_8 x S_3	12	15	15	C2 × C2	C1
(四阶循环群 × S_3) : C_2	12	13	13	C2 × C2	C2
C2 × C2 × (C_3 : 四阶循环群)	12	16	16	C2 × C2	C2
C_2 × ((C_6 × C_2) : C_2)	12	14	14	C2 × C2	C2
C12 x C2 × C2	12	8	8	C2 × C2	C2 × C2
C6 × D8	12	10	10	C2 × C2	C2
C6 × Q_8	12	10	10	C2 × C2	C2
C_3 × ((四阶循环群 × C2) : C2)	12	8	8	C2 × C2	C2 × C2
C_2 × S_4	12	10	10	C2 × C2	C1
C_2 × C_2 × A_4	6	8	8	C2	C2
(C_2 × C_2 × C_2 × C_2) : C_3	6	6	6	C2	C2
C2 × C2 × C2 × S_3	6	24	24	C2	C1
C6 × C2 × C2 × C2	6	16	16	C2	C2
C49	49	1	1	C42	C42
C7 × C7	7	1	1	C6	C6
D50	50	2	2	C20	C10
C50	50	2	2	C20	C20
C5 × D10	10	2	2	C4	C4
(C5 × C5) : C2	10	2	2	C4	C2
C10 × C5	10	2	2	C4	C4
C51	51	1	1	C16 × C2	C16 × C2
C13 : 四阶循环群	52	2	2	C12 × C2	C6 × C2
C52	52	2	2	C12 × C2	C_{12} × C_2
C_{13} : 四阶循环群	52	2	2	C_{12} × C_2	C6
D52	26	4	4	C12	C6
C_{26} × C_2	26	4	4	C12	C12
C53	53	1	1	C52	C52
D54	54	3	3	C18	C9
C54	54	2	2	C18	C18
C_3 × D_{18}	18	3	3	C6	C6
C_9 × S_3	18	3	3	C6	C6
(C_3 x C_3) : C6	6	4	4	C2	C2
C9 : C6	18	4	4	C6	C2
(C_9 × C_3) : C_2	18	6	6	C6	C3
((C_3 × C_3) : C_3) : C_2	6	6	6	C2	C2
C18 × C_3	18	2	2	C6	C6
C_2 × ((C_3 × C_3) : C_3)	6	2	2	C2	C2
C_2 × (C9 : C_3)	18	2	2	C6	C2
C_3 × C_3 × S_3	6	3	3	C2	C2
C_3 × ((C_3 × C_3) : C_2)	6	6	6	C2	C2
(C_3 × C_3 × C_3) : C_2	6	15	15	C2	C1
C6 × C_3 × C_3	6	2	2	C2	C2
C11 : C5	55	1	1	C20 × C_2	C4 × C2
C55	55	1	1	C20 x C_2	C20 x C_2
C7 : C8	56	2	2	C6 x C2 × C2	C6 x C_2
C56	56	2	2	C6 x C2 × C2	C6 x C2 × C2
C7 : Q_8	28	5	5	C6 x C_2	C6
四阶循环群 × D14	28	4	4	C6 x C_2	C6
D56	28	5	5	C6 x C_2	C6
C_2 x (C7 : 四阶循环群)	28	4	4	C6 x C_2	C6
(C14 x C_2) : C_2	28	5	5	C6 x C_2	C6
C28 × C_2	28	4	4	C6 × C_2	C6 × C_2
C7 × D8	28	5	5	C6 × C_2	C6
C7 × Q_8	28	5	5	C6 × C_2	C6
(C2 × C2 × C2) : C7	14	2	2	C6	C6
C_2 × C_2 × D14	14	8	8	C6	C3
C14 × C_2 × C_2	14	8	8	C6	C6
C19 : C_3	57	1	1	C18 × C_2	C6 x C_2

C57	57	1	1	C18 × C_2	C18 × C_2
D58	58	2	2	C28	C14
C58	58	2	2	C28	C28
C59	59	1	1	C58	C58
C5 × (C_3 : 四阶循环群)	60	4	4	C4 × C2 × C2	C4 × C2
C3 × (C5 : 四阶循环群)	60	2	2	C4 × C2 × C2	C2 × C2 × C2
C15 : C4	60	4	4	C4 × C2 × C2	C4 × C2
C60	60	2	2	C4 × C2 × C2	C4 × C2 × C2
A5	30	3	3	C4 × C2	C2
C3 × (C5 : C4)	60	3	3	C4 × C2 × C2	C2 × C2
C15 : C4	60	5	5	C4 × C2 × C2	C2 × C2
S_3 × D10	30	6	6	C4 × C2	C2
C_5 × A_4	30	2	2	C4 × C2	C4 × C2
C6 × D10	30	4	4	C4 × C2	C2 × C2
C10 × S_3	30	6	6	C4 × C2	C4
D60	30	6	6	C4 × C2	C4
C30 × C2	30	4	4	C4 × C2	C4 × C2
C61	61	1	1	C60	C60
D62	62	2	2	C30	C15
C62	62	2	2	C30	C30
C7 : C9	63	1	1	C6 × C6	C6 x C_2
C63	63	1	1	C6 × C6	C6 × C6
C_3 x (C7 : C_3)	21	1	1	C6 x C_2	C2 × C2
C21 × C_3	21	1	1	C_6 × C_2	C_6 × C_2
C64	64	2	2	C_{16} × C_2	C_{16} × C_2
C_8 × C_8	8	4	4	C2 × C2	C2 × C2
C8 : C8	8	4	4	C2 × C2	C2 × C2
((C8 × C_2) : C_2) : C_2	8	8	8	C2 × C2	C2 × C2
(C4 × C2) : C8	8	8	8	C2 × C2	C2 × C2
(C8 × C4) : C2	8	6	8	C2 × C2	C2 × C2
Q_8 : C8	8	6	8	C2 × C2	C2 × C2
((C8 × C2) : C2) : C2	8	7	9	C2 × C2	C2 × C2
(四阶循环群 : 四阶循环群) : 四阶循环群	8	7	9	C2 × C2	C2 × C2
(C8 : 四阶循环群) : C_2	8	7	7	C2 × C2	C2
(C2 × C2) . ((C4 × C2) : C_2) = (C4 × C2) . (C4 × C2)	8	7	7	C2 × C2	C2
(四阶循环群 : C8) : C2	8	7	11	C2 × C2	C2 × C2
(C2 × C2) . ((C4 × C2) : C_2) = (C4 × C2) . (C4 × C2)	8	7	11	C2 × C2	C2 × C2
(C2 × C2) . ((C4 × C2) : C_2) = (C4 × C2) . (C4 × C2)	8	7	11	C2 × C2	C2 × C2
C8 : C8	8	6	6	C2 × C2	C2 × C2
C8 : C8	8	6	6	C2 × C2	C2 × C2
(C8 × C_2) : 四阶循环群	8	8	8	C2 × C2	C2 × C2
（四阶循环群 × 四阶循环群）: 四阶循环群	8	8	8	C2 × C2	C2
四阶循环群 . (四阶循环群 x 四阶循环群)	8	8	8	C2 × C2	C2
(四阶循环群 : 四阶循环群) : 四阶循环群	8	8	8	C2 × C2	C2
(四阶循环群 : 四阶循环群) : 四阶循环群	8	8	12	C2 × C2	C2 × C2
(C4 × C2) . D8 =C4 . (C4 × C4)	8	8	8	C2 × C2	C2 × C2
((四阶循环群 × C_2) : C_2) : 四阶循环群	4	10	10	C2	C2
(C_8 : C_2) : 四阶循环群	8	10	10	C2 × C2	C2
(C8 × C_2) : 四阶循环群	8	8	8	C2 × C2	C2
C16 × 四阶循环群	16	4	4	C4 × C2	C4 × C2
C_{16} : 四阶循环群	16	4	4	C4 × C2	C2 × C2
C16 : C4	16	4	4	C4 × C2	C2
(C16 × C2) : C2	16	6	6	C4 × C2	C4 × C2
(C16 : C_2) : C_2	16	6	6	C4 × C2	C2 × C2
(C_{16} : C_2) : C_2	16	6	6	C4 × C2	C4 × C2
((C8 : C_2) : C_2) : C_2	8	9	9	C2 × C2	C2
(C4 × C2 × C2) : 四阶循环群	8	7	7	C2 × C2	C2
((C2 × C2 × C2) : 四阶循环群) : C2	4	9	9	C2	C2
(C_2 × Q_8) : 四阶循环群	4	7	7	C2	C2
(C_2 . ((四阶循环群 × C2) : C_2) =(C2 × C2) . (四阶循环群 × C2)) : C_2	8	7	7	C2 × C2	C2
C_2 . ((C2 × C2 × C2) : 四阶循环群) = (C4 × C2) . (C4 × C2)	8	9	9	C2 × C2	C2
(C16 × C_2) : C_2	16	6	8	C4 × C2	C4 × C2
Q16 : 四阶循环群	16	6	8	C4 × C2	C4 × C2
(C16 × C_2) : C_2	16	6	6	C4 × C2	C4 × C2
(C16 : C2) : C2	16	6	8	C4 × C2	C2 × C2
(C16 : C2) : C2	16	6	8	C4 × C2	C2 × C2
C_2 . ((C8 × C2) : C_2) =C8 . (四阶循环群 × C_2)	16	6	8	C4 × C2	C2 × C2
C4 : C16	16	6	6	C4 × C2	C4 × C2
C8 . D8 =C4 . (C8 × C2)	16	6	4	C4 × C2	C2 × C2
C16 : C4	16	6	6	C4 × C2	C2 × C2
C_{16} : 四阶循环群	16	6	6	C4 × C2	C4 × C2
C_{16} : 四阶循环群	16	6	6	C4 × C2	C4 × C2
四阶循环群 · D16 =C8 · (C4 × C2)	16	6	4	C4 × C2	C4 × C2
C32 × C_2	32	4	4	C8 × C2	C8 × C2
C32 : C2	32	4	4	C8 × C2	C4 × C2
D64	32	5	5	C8 × C2	C8
QD64	32	5	5	C8 × C2	C8
Q64	32	5	5	C8 × C2	C8
C4 × C4 × C4	4	8	8	C2	C2
C_2 × ((C4 × C2) : C4)	4	16	16	C2	C2
(C4 × C4) : C4	4	8	8	C2	C2
C4 × ((C4 × C2) : C_2)	4	12	12	C2	C2
四阶循环群 × (四阶循环群 : 四阶循环群)	4	12	12	C2	C2
(C_2 × ((C4 × C2) : C_2)) : C_2	4	20	20	C2	C2
((C4 × C2) : C4) : C2	4	16	16	C2	C2
((C4 × C2) : C4) : C2	4	12	12	C2	C2
（四阶循环群 × 四阶循环群）: 四阶循环群	4	12	12	C2	C2
（四阶循环群 × 四阶循环群）: 四阶循环群	4	8	8	C2	C2
(四阶循环群 × 四阶循环群) : 四阶循环群	4	20	20	C2	C2
(C_2 × (四阶循环群 : 四阶循环群)) : C_2	4	16	16	C2	C2

$(C_2 \times ((C4 \times C2) : C_2)) : C_2$	4	16	16	C2	C2
（四阶循环群：四阶循环群）：四阶循环群	4	12	12	C2	C2
$((C4 \times C2) :$ 四阶循环群$) : C_2$	4	12	12	C2	C2
(四阶循环群 : 四阶循环群) : 四阶循环群	4	16	16	C2	C2
$(C_2 \times$ (四阶循环群 : 四阶循环群)$) : C_2$	4	16	16	C2	C2
$(C_2 \times Q_8)$: 四阶循环群	4	16	16	C2	C2
$(C2 \times C2 \times D8) : C2$	4	20	20	C2	C2
$((C4 \times C2) : C4) : C2$	4	16	16	C2	C2
$(C_2 \times ((C4 \times C2) : C_2)) : C_2$	4	16	16	C2	C2
$(C4 \times C2) : Q_8$	4	20	20	C2	C2
$(C_2 \times$ (四阶循环群 : 四阶循环群)$) : C_2$	4	16	16	C2	C2
$(C_2 \times$ (四阶循环群 : 四阶循环群)$) : C_2$	4	12	12	C2	C2
$(C2 \times C2 \times C2) \cdot (C2 \times C2 \times C2)$	4	16	16	C2	C2
$((C4 \times C2) : C4) : C2$	4	16	16	C2	C2
$(C2 \times C2 \times C2)$. $(C2 \times C2 \times C2)$	4	12	12	C2	C2
$(C2 \times C2 \times C2)$. $(C2 \times C2 \times C2)$	4	8	8	C2	C2
$C8 \times C4 \times C_2$	8	8	8	C2 × C2	C2 × C2
$C_2 \times (C_8 : C_4)$	8	8	8	C2 × C2	C2
四阶循环群 × $(C_8 : C_2)$	8	8	8	C2 × C2	C2
$(C_8 \times$ 四阶循环群$) : C_2$	8	8	8	C2 × C2	C2 × C2
$C_2 \times ((C8 \times C2) : C_2)$	8	12	12	C2 × C2	C2 × C2
$(C_2 \times (C8 : C_2)) : C_2$	8	12	12	C2 × C2	C2
$(C8 \times C2 \times C2) : C_2$	8	12	12	C2 × C2	C2 × C2
$C_2 \times ((C_2 \times C_2 \times C_2) :$ 四阶循环群$)$	4	14	14	C2	C2
$((四阶循环群 \times 四阶循环群) : C_2) : C_2$	4	12	12	C2	C2
$C_2 \times ((C_8 : C_2) : C_2)$	8	14	14	C2 × C2	C2
$C_2 \times (C_2$. $((C4 \times C2) : C_2) \ = \ (C_2 \times C_2)$. $(C4 \times C2))$	8	14	14	C2 × C2	C2
$(C_2$ x $(C8 : C_2)) : C_2$	8	12	12	C2 × C2	C2
$C_2 \times ((C8 \times C2) : C_2)$	8	12	16	C2 × C2	C2 × C2
$C_2 \times (Q_8 :$ 四阶循环群$)$	8	12	16	C2 × C2	C2 × C2
$((C4 \times C4) : C_2) : C_2$	8	12	12	C2 × C2	C2 × C2
$(C_2 \times$ (四阶循环群 : 四阶循环群)$) : C_2$	8	14	14	C2 × C2	C2
$((C4 \times C4) : C_2) : C_2$	8	14	14	C2 × C2	C2
$(Q_8 :$ 四阶循环群$) : C_2$	8	14	14	C2 × C2	C2
$C2 \times ((C4 \times C4) : C2)$	8	12	12	C2 × C2	C2
$(C_2 \times (C8 : C_2)) : C_2$	8	12	12	C2 × C2	C2
$C_2 \times$ (四阶循环群 : C8)	8	12	12	C2 × C2	C2 × C2
$(C_4 : C_8) : C_2$	8	12	12	C2 × C2	C2
$(C_4 : C_8) : C_2$	8	12	12	C2 × C2	C2 × C2
$C_2 \times (C_8 :$ 四阶循环群$)$	8	12	12	C2 × C2	C2 × C2
$C_2 \times (C_8 :$ 四阶循环群$)$	8	12	12	C2 × C2	C2 × C2
(C8 : 四阶循环群) : C_2	8	12	8	C2 × C2	C2 × C2
(C8 : 四阶循环群) : C_2	8	14	14	C2 × C2	C2
$C_2 \times$ (四阶循环群 . D8 =四阶循环群 . (C4 × C2))	8	12	8	C2 × C2	C2 × C2
(四阶循环群 . D8 =四阶循环群 . (C4 × C2)) : C_2	8	12	12	C2 × C2	C2
(C8 × 四阶循环群) : C2	8	8	8	C2 × C2	C2 × C2
(C8 : 四阶循环群) : C2	8	8	8	C2 × C2	C2
(C8 × 四阶循环群) : C_2	8	8	8	C2 × C2	C2 × C2
C8 × D8	8	10	10	C2 × C2	C2 × C2
$(C_2 \times (C_8 : C_2)) : C_2$	8	10	10	C2 × C2	C2 × C2
$(C_2 \times (C_8 : C_2)) : C_2$	8	10	10	C2 × C2	C2 × C2
四阶循环群 × D16	8	10	10	C2 × C2	C2 × C2
四阶循环群 × QD16	8	10	10	C2 × C2	C2 × C2
四阶循环群 x Q16	8	10	10	C2 × C2	C2 × C2
(四阶循环群 × Q_8) : C_2	8	12	12	C2 × C2	C2
Q16 : 四阶循环群	8	12	12	C2 × C2	C2
(C4 x D8) : C_2	8	12	12	C2 × C2	C2
$((C8 \times C_2) : C_2) : C_2$	8	10	8	C2 × C2	C2 × C2
$((C8 \times C_2) : C_2) : C_2$	8	10	10	C2 × C2	C2
$C_8 \times Q_8$	8	10	10	C2 × C2	C2 × C2
C8 : Q_8	8	10	10	C2 × C2	C2 × C2
$((C4 \times C2 \times C2) : C_2) : C_2$	8	15	15	C2 × C2	C2
$(C_2$ x QD16$) : C_2$	8	15	15	C2 × C2	C2
$((四阶循环群 \times C2 \times C2) : C_2) : C_2$	8	15	13	C2 × C2	C2 × C2
$((C_2 \times Q_8) : C_2) : C_2$	8	15	15	C2 × C2	C2
$(C_2 \times Q16) : C_2$	8	15	15	C2 × C2	C2
$((C_2 \times Q_8) : C_2) : C_2$	8	15	13	C2 × C2	C2 × C2
$((四阶循环群 \times 四阶循环群) : C_2) : C_2$	8	16	16	C2 × C2	C1
$((C4 \times C4) : C2) : C2$	8	14	14	C2 × C2	C2
$((C4 \times C4) : C2) : C2$	8	14	14	C2 × C2	C2
(C4 : Q8) : C2	8	16	16	C2 × C2	C1
$((C2 \times C2 \times C2 \times C2) : C2) : C2$	4	16	16	C2	C1
$((C4 \times C2 \times C2) : C_2) : C_2$	4	14	14	C2	C2
$(C_2 \times D16) : C_2$	8	13	13	C2 × C2	C2 × C2
$(C_2$ x QD16$) : C_2$	8	13	13	C2 × C2	C2 × C2
$(Q_8 :$ 四阶循环群$) : C_2$	8	13	13	C2 × C2	C2 × C2
四阶循环群 : Q16	8	13	13	C2 × C2	C2 × C2
$((C8 \times C_2) : C_2) : C_2$	8	13	11	C2 × C2	C2 × C2
(四阶循环群 x Q_8) : C_2	8	13	11	C2 × C2	C2 × C2
$((C8 \times C2) : C2) : C2$	8	12	12	C2 × C2	C2 × C2
$((C4 \times C2 \times C2) : C2) : C2$	8	12	12	C2 × C2	C2 × C2
$(Q_8 :$ 四阶循环群$) : C_2$	8	12	12	C2 × C2	C2 × C2
$((C8 \times C_2) : C_2) : C_2$	8	14	14	C2 × C2	C2
$((C4 \times C2 \times C2) : C_2) : C_2$	8	14	14	C2 × C2	C2
$(Q_8 :$ 四阶循环群$) : C_2$	8	14	14	C2 × C2	C2
$((C8 : C_2) : C_2) : C_2$	8	12	12	C2 × C2	C2 × C2
$(C8 : (C2 \times C2)) : C2$	8	12	12	C2 × C2	C2 × C2
$(C2$. $((四阶循环群 \times C2) : C2) \ = (C2 \times C2)$. $(四阶循环群 \times C2)) : C2$	8	12	12	C2 × C2	C2 × C2
$(C_8 :$ 四阶循环群$) : C_2$	8	13	13	C2 × C2	C2 × C2
$Q_8 : Q_8$	8	13	13	C2 × C2	C2 × C2

$(C_8 : \text{四阶循环群}) : C_2$	8	13	13	C2 × C2	C2 × C2
$Q_8 : Q_8$	8	13	13	C2 × C2	C2 × C2
$(C8 : \text{四阶循环群}) : C_2$	8	13	11	$C_2 \times C_2$	$C_2 \times C_2$
$(C_2 \times C_2) . (C_2 \times D8) = (C4 \times C_2) . (C_2 \times C_2 \times C_2)$	8	13	11	$C_2 \times C_2$	$C_2 \times C_2$
$((C8 \times C2) : C_2) : C_2$	8	11	11	C2 × C2	C2 × C2
$((C8 \times C2) : C_2) : C_2$	8	11	11	C2 × C2	C2 × C2
$((C8 \times C_2) : C_2) : C_2$	8	11	9	C2 × C2	C2 × C2
$(Q_8 : \text{四阶循环群}) : C_2$	8	11	11	C2 × C2	C2 × C2
$(Q_8 : \text{四阶循环群}) : C_2$	8	11	11	C2 × C2	C2 × C2
$(Q_8 : \text{四阶循环群}) : C_2$	8	11	9	C2 × C2	C2 × C2
$((C8 \times C2) : C_2) : C_2$	8	10	14	C2 × C2	C2 × C2
$(C2 \times C2) . (C_2 \times D8) = (C4 \times C2) . (C2 \times C2 \times C2)$	8	10	14	C2 × C2	C2 × C2
$(C8 \times \text{四阶循环群}) : C_2$	8	10	10	C2 × C2	C2 × C2
$(C8 : \text{四阶循环群}) : C_2$	8	12	12	C2 × C2	C2
$((C8 \times C2) : C_2) : C_2$	8	12	12	C2 × C2	C2
$(C2 \times C2) . (C2 \times D8) = (C4 \times C2) . (C2 \times C2 \times C2)$	8	12	12	C2 × C2	C2
$(C_2 \text{ x } QD16) : C_2$	8	14	14	C2 × C2	C2
$((\text{四阶循环群} \times \text{四阶循环群}) : C_2) : C_2$	8	14	14	C2 × C2	C2
$C_2 : O16$	8	14	14	C2 × C2	C2
$((C4 \times C4) : C2) : C2$	8	14	10	C2 × C2	C2 × C2
$((\text{四阶循环群} \times \text{四阶循环群}) : C_2) : C_2$	8	16	16	C2 × C2	C1
$(\text{四阶循环群} : Q_8) : C_2$	8	16	16	C2 × C2	C1
$C8 : Q_8$	8	14	14	C2 × C2	C2
$(C2 \times C2) . (C2 \times D8) = (C4 \times C2) . (C2 \times C2 \times C2)$	8	14	10	C2 × C2	C2 × C2
$C8 : Q_8$	8	14	14	C2 × C2	C2
$C8 : Q_8$	8	16	16	C2 × C2	C1
$C16 \times C2 \times C2$	16	8	8	C4 × C2	C4 × C2
$C_2 \text{ x } (C_{16} : C_2)$	16	8	8	C4 × C2	C2 × C2
$(C16 \times C_2) : C_2$	16	8	8	C4 × C2	C4 × C2
$C_2 \text{ x } D32$	16	10	10	C4 × C2	C4
$C_2 \times QD_{32}$	16	10	10	C4 × C2	C4
$C_2 \times Q_{32}$	16	10	10	C4 × C2	C4
$((C8 \times C_2) : C_2) : C_2$	16	10	8	C4 × C2	C4 × C2
$((C8 \times C_2) : C_2) : C_2$	16	10	10	C4 × C2	C2
$QD32 : C_2$	16	10	10	C4 × C2	C2
$C4 \times C4 \times C2 \times C2$	4	16	16	C2	C2
$C2 \times C2 \times ((C4 \times C2) : C2)$	4	24	24	C2	C2
$C2 \times C2 \times (\text{四阶循环群} : \text{四阶循环群})$	4	24	24	C2	C2
$C_2 \times ((\text{四阶循环群} \times \text{四阶循环群}) : C_2)$	4	16	16	C2	C2
$C_2 \times C_4 \times D_8$	4	20	20	C2	C2
$C_2 \times \text{四阶循环群} \times Q_8$	4	20	20	C2	C2
$C_4 \times ((\text{四阶循环群} \times C2) : C_2)$	4	16	16	C2	C2
$(C_2 \times ((C4 \times C2) : C_2)) : C_2$	4	18	18	C2	C2
$(\text{四阶循环群 x } Q_8) : C_2$	4	18	18	C2	C2
$((\text{四阶循环群} \times \text{四阶循环群}) : C_2) : C_2$	4	18	18	C2	C2
$C_2 \times ((C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2) : C_2)$	4	28	28	C2	C1
$C_2 \times ((C4 \times C2 \times C2) : C_2)$	4	24	24	C2	C2
$C_2 \times ((C_2 \times Q_8) : C_2)$	4	24	24	C2	C2
$C_2 \times ((C4 \times C2 \times C2) : C_2)$	4	20	20	C2	C2
$(C_2 \times ((C4 \times C2) : C_2)) : C_2$	4	20	20	C2	C2
$C2 \times ((\text{四阶循环群} \times \text{四阶循环群}) : C_2)$	4	20	20	C2	C2
$C_2 \times ((C2 \times C2) . (C2 \times C2 \times C2))$	4	20	20	C2	C2
$C2 \times ((C4 \times C4) : C2)$	4	16	16	C2	C2
$((\text{四阶循环群} \times \text{四阶循环群}) : C_2) : C_2$	4	16	16	C2	C2
$C2 \times ((C4 \times C4) : C2)$	4	28	28	C2	C1
$C_2 \times (C4 : Q_8)$	4	28	28	C2	C1
$(C_2 \times ((C4 \times C2) : C_2)) : C_2$	4	20	20	C2	C2
$(\text{四阶循环群} \times Q_8) : C_2$	4	20	20	C2	C2
$(C2 \times C2 \times D8) : C2$	4	22	22	C2	C1
$(C_2 \times ((C4 \times C2) : C_2)) : C_2$	4	22	22	C2	C1
$((\text{四阶循环群} \times \text{四阶循环群}) : C_2) : C_2$	4	22	22	C2	C1
$(C_2 \times ((C4 \times C2) : C_2)) : C_2$	4	22	22	C2	C1
$(C4 \text{ x } D8) : C_2$	4	18	18	C2	C2
$(C4 \text{ x } D8) : C_2$	4	18	18	C2	C2
$(C4 \text{ x } D8) : C_2$	4	18	18	C2	C2
$(\text{四阶循环群} \times Q_8) : C_2$	4	18	18	C2	C2
$(C4 \text{ x } D8) : C_2$	4	18	18	C2	C2
$((C_2 \times Q_8) : C_2) : C_2$	4	22	22	C2	C1
$(\text{四阶循环群} : Q_8) : C_2$	4	22	22	C2	C1
$D8 \times D8$	4	25	25	C2	C1
$(C_2 \times ((C4 \times C2) : C_2)) : C_2$	4	21	21	C2	C2
$(C_2 \times ((C4 \times C2) : C_2)) : C_2$	4	21	21	C2	C2
$(C_2 \times ((C4 \times C_2) : C_2)) : C_2$	4	21	21	C2	C2
$Q_8 \times D8$	4	25	25	C2	C1
$(C_2 \times ((C4 \times C_2) : C_2)) : C_2$	4	21	21	C2	C2
$((C4 \times C4) : C_2) : C_2$	4	17	17	C2	C2
$((C4 \times C4) : C_2) : C_2$	4	17	17	C2	C2
$((C4 \times C4) : C_2) : C_2$	4	17	17	C2	C2
$(C_2 \times (\text{四阶循环群} : \text{四阶循环群})) : C_2$	4	21	21	C2	C2
$((\text{四阶循环群} \times \text{四阶循环群}) : C_2) : C_2$	4	17	17	C2	C2
$((\text{四阶循环群} \times \text{四阶循环群}) : C_2) : C_2$	4	17	17	C2	C2
$Q_8 : Q_8$	4	21	21	C2	C2
$Q_8 \text{ x } Q_8$	4	25	25	C2	C1
$(C4 \text{ x } D8) : C_2$	4	17	17	C2	C2
$((C4 \times C2 \times C2) : C_2) : C_2$	4	19	19	C2	C1
$((\text{四阶循环群} \times \text{四阶循环群}) : C_2) : C_2$	4	19	19	C2	C1
$((C4 \times C2 \times C2) : C2) : C2$	4	19	19	C2	C1
$(\text{四阶循环群} : Q_8) : C_2$	4	19	19	C2	C1
$(C2 \times C2) . (C2 \times C2 \times C2 \times C2)$	4	19	19	C2	C1
$C8 \times C_2 \times C_2 \times C_2$	8	16	16	C2 × C2	C2 × C2

C2 × C2 × (C8 : C2)	8	16	16	C2 × C2	C2
C_2 × ((C8 × C2) : C_2)	8	16	16	C2 × C2	C2 × C2
(C_2 x (C8 : C_2)) : C_2	8	16	16	C2 × C2	C2
C2 × C2 × D16	8	20	20	C2 × C2	C2
C2 × C2 × QD16	8	20	20	C2 × C2	C2
C2 × C2 × Q16	8	20	20	C2 × C2	C2
C_2 × ((C8 × C2) : C_2)	8	20	16	C2 × C2	C2 × C2
C_2 × (C8 : (C2 × C2))	8	22	22	C2 × C2	C1
C_2 × ((C_2 × Q_8) : C_2)	8	22	22	C2 × C2	C1
((C8 × C_2) : C_2) : C_2	8	20	20	C2 × C2	C2
(C_2 × D16) : C_2	8	20	20	C2 × C2	C2
(C_2 x QD16) : C_2	8	20	20	C2 × C2	C2
(C_2 x Q16) : C_2	8	20	20	C2 × C2	C2
C4 × C2 × C_2 × C_2 × C_2	4	32	32	C2	C2
C2 × C2 × C2 × D8	4	40	40	C2	C1
C2 × C2 × C2 × Q_8	4	40	40	C2	C1
C2 × C2 × ((C4 × C2) : C2)	4	32	32	C2	C2
C_2 × ((C_2 × C_2 × C_2) : (C_2 × C_2))	4	34	34	C2	C1
C_2 × ((C_2 × Q_8) : C_2)	4	34	34	C2	C1
(C_2 × ((C4 × C2) : C_2)) : C_2	4	32	32	C2	C2
C2 × C2 × C2 × C2 × C2 × C2	2	64	64	C1	C1
C65	65	1	1	C12 × 四阶循环群	C12 × 四阶循环群
C11 × S_3	66	3	3	C10 × C2	C10
C_3 × D22	66	2	2	C10 × C2	C10
D66	66	3	3	C10 × C2	C10
C66	66	2	2	C10 × C2	C10 × C2
C67	67	1	1	C66	C66
C17 : 四阶循环群	68	2	2	C16 × C2	C8 × C2
C68	68	2	2	C16 x C_2	C16 × C_2
C17 : 四阶循环群	68	2	2	C_{16} × C_2	C4 × C2
D68	34	4	4	C16	C8
C_{34} × C_2	34	4	4	C16	C16
C69	69	1	1	C22 × C_2	C22 × C_2
C7 × D10	70	2	2	C12 x C_2	C6 x C_2
C5 × D14	70	2	2	C_{12} × C_2	C12
D70	70	2	2	C_{12} × C_2	C12
C70	70	2	2	C_{12} × C_2	C_{12} × C_2
C71	71	1	1	C70	C70
C_9 : C_8	72	4	4	C_6 × C_2 × C_2	C6 × C2
C72	72	2	2	C6 × C2 × C2	C6 × C2 × C2
Q_8 : C9	36	3	3	C6 × C2	C6
C9 : Q_8	36	7	7	C6 × C_2	C6
四阶循环群 × D18	36	6	6	C6 × C_2	C6
D72	36	7	7	C6 × C_2	C6
C_2 × (C9 : 四阶循环群)	36	8	8	C6 × C_2	C6
(C18 × C_2) : C_2	36	7	7	C6 x C_2	C6
C36 × C2	36	4	4	C6 x C_2	C6 x C_2
C9 × D8	36	5	5	C_6 × C_2	C6
C_9 × Q_8	36	5	5	C_6 × C_2	C6
C_3 × (C_3 : C_8)	24	4	4	C2 × C2 × C2	C2 × C2 × C2
(C_3 × C_3) : C8	24	10	10	C2 × C2 × C2	C2 × C2
C24 × C_3	24	2	2	C2 × C2 × C2	C2 × C2 × C2
((C2 × C2) : C9) : C2	36	6	6	C6 x C_2	C3
C_2 × ((C_2 × C_2) : C_9)	18	4	4	C6	C6
C_2 × C_2 × D18	18	12	12	C6	C3
C18 × C_2 × C_2	18	8	8	C6	C6
(C_3 × C_3) : C_8	24	6	6	C2 × C2 × C2	C2 × C2
(C_3 : 四阶循环群) × S_3	12	12	12	C2 × C2	C2
(C_3 × C_3) : (C4 × C2)	12	10	10	C2 × C2	C2
(C6 x S_3) : C_2	12	11	11	C2 × C2	C2
(C6 x S_3) : C_2	12	11	11	C2 × C2	C2 × C2
(C_3 x C_3) : Q_8	12	11	11	C2 × C2	C2
C_3 × SL(2,3)	12	3	3	C2 × C2	C2
C_3 × (C_3 : Q_8)	12	7	7	C2 × C2	C2 × C2
C12 × S_3	12	6	6	C2 × C2	C2 × C2
C_3 × D24	12	7	7	C2 × C2	C2 × C2
C6 × (C_3 : 四阶循环群)	12	8	8	C2 × C2	C2 × C2
C_3 × ((C6 × C2) : C2)	12	7	7	C2 × C2	C2
(C_3 × C_3) : Q_8	12	13	13	C2 × C2	C2
四阶循环群 × ((C_3 × C_3) : C2)	12	12	12	C2 × C2	C2
(C12 × C_3) : C2	12	13	13	C2 × C2	C2
C2 × ((C_3 × C_3) : 四阶循环群)	12	20	20	C2 × C2	C2
(C6 x C6) : C_2	12	13	13	C2 × C2	C2
C_{12} × C_6	12	4	4	C2 × C2	C2 × C2
C_3 × C_3 × D8	12	5	5	C2 × C2	C2
C_3 × C_3 × Q_8	12	5	5	C2 × C2	C2
(C_3 × C_3) : C8	24	3	3	C2 × C2 × C2	C2 × C2
(S_3 x S_3) : C_2	12	9	9	C2 × C2	C1
(C_3 × C_3) : Q_8	12	6	6	C2 × C2	C1
C_3 × S_4	12	5	5	C2 × C2	C2
(C_3 x A_4) : C_2	12	9	9	C2 × C2	C1
A_4 x S_3	6	6	6	C2	C2
C_2 x ((C_3 x C_3) : 四阶循环群)	12	8	8	C2 × C2	C2
C_2 × S_3 × S_3	6	18	18	C2	C1
C_6 × A_4	6	4	4	C2	C2
C_2 × C_6 × S_3	6	12	12	C2	C2
C_2 × C_2 × ((C_3 × C_3) : C_2)	6	24	24	C2	C1
C_6 × C_6 × C_2	6	8	8	C2	C2
C73	73	1	1	C72	C72
D74	74	2	2	C36	C18

C74	74	2	2	C36	C36
C75	75	1	1	$C20 \times C_2$	$C20 \times C_2$
$(C_5 \times C_5) : C_3$	15	1	1	C4 × C2	C4 × C2
$C_{15} \times C_5$ C19 : 四阶循环群	15 76	1 2	1 2	C4 × C2 C18 × C2	C4 × C2 C18
C76	76	2	2	C18 × C2	C18 × C2
D76	38	4	4	C18	C9
$C_{38} \times C_2$	38	4	4	C18	C18
C77	77	1	1	C30 × C2	C30 × C2
$C_{13} : C_6$	78	2	2	$C_{12} \times C_2$	C2 × C2
$C_2 \times (C_{13} : C_3)$	78	2	2	$C_{12} \times C_2$	C4 × C2
$C_{13} \times S_3$	78	3	3	$C_{12} \times C_2$	C12
$C_3 \times D_{26}$	78	2	2	$C_{12} \times C_2$	$C_6 \times C_2$
D78	78	3	3	$C_{12} \times C_2$	C12
C78	78	2	2	$C_{12} \times C_2$	$C_{12} \times C_2$
C79	79	1	1	C78	C78
$C_5 : C_{16}$	80	2	2	C4 × C4 × C_2	C4 × C2 × C2
C80	80	2	2	C4 × C4 × C_2	C4 × C4 × C_2
C5 : C16	80	4	4	C4 × C4 × C_2	C4 × C2
C8 × D10	40	4	4	C4 × C2 × C2	C2 × C2 × C2
C40 : C2	40	4	4	C4 × C2 × C2	C4 × C2
C40 : C_2	40	5	5	C4 × C2 × C2	C4 × C2
D80	40	5	5	C4 × C2 × C2	C4 × C2
C5： Q16	40	5	5	C4 × C2 × C2	C4 × C2
C2 × (C5 : C8)	40	4	4	C4 × C2 × C2	C2 × C2 × C2
(C5 : C8) : C2	40	4	4	C4 × C2 × C2	C4 × C2
C4 × (C5 : C4) (C5 : 四阶循环群) : 四阶循环群	20 20	4 6	4 6	C4 × C2 C4 × C2	C2 × C2 C4 × C2
C20 : C4	20	6	6	C4 × C2	C4 × C2
(C20 x C_2) : C_2	20	6	6	C4 × C2	C4 × C2
$(C_5 \times D_8) : C_2$	40	5	5	C4 × C2 × C2	C4 × C2
$(C_5 : Q_8) : C_2$	40	5	5	C4 × C2 × C2	C4 × C2
(C5 x Q_8) : C_2	40	5	5	C4 × C2 × C2	C4 × C2
C5： Q16	40	5	5	C4 × C2 × C2	C4 × C2
(C10 × C_2) : 四阶循环群 C20 × 四阶循环群	20	6	6	C4 × C2	C4 × C2
C5 × ((C4 × C_2) : C_2)	20 20	4 6	4 6	C4 × C_2 C4 × C_2	C4 × C_2 C4 × C_2
C5 x (四阶循环群 : 四阶循环群)	20	6	6	C4 × C2	C4 × C2
C40 x C2	40	4	4	C4 × C2 × C2	C4 × C2 × C2
C5 × (C8 : C2)	40	4	4	C4 × C2 × C2	C4 × C2
C5 × D16	40	5	5	C4 × C2 × C2	C4 × C2
C5 × QD16	40	5	5	C4 × C2 × C2	C4 × C2
C5 × Q16	40	5	5	C4 × C2 × C2	C4 × C2
C5 : (C8 × C2)	40	6	6	C4 × C2 × C2	C2 × C2
(C5 : C8) : C2	40	6	6	C4 × C2 × C2	C2 × C2
四阶循环群 × (C5 : 四阶循环群)	20	6	6	C4 × C2	C2
C20 : C4	20	8	8	C4 × C2	C2 × C2
C2 × (C5 : C8)	40	8	8	C4 × C2 × C2	C2 × C2
(C5 : C8) : C_2	40	6	6	C4 × C2 × C2	C2 × C2
(C10 × C_2) : 四阶循环群	20	8	8	C4 × C2	C2 × C2
$C_2 \times (C5 : Q_8)$	20	10	10	C4 × C2	C4
C_2 × 四阶循环群 × D10	20	8	8	C4 × C2	C2 × C2
$C_2 \times D40$	20	10	10	C4 × C2	C4
(C20 × C_2) : C_2	20	8	8	C4 × C2	C4 × C2
D8 × D10	20	10	10	C4 × C2	C2
(四阶循环群 × D10) : C_2	20	8	8	C4 × C2	C2 × C2
$Q_8 \times D10$	20	10	10	C4 × C2	C2
(C_4 x D10) : C_2	20	8	8	C4 × C2	C2 × C2
C2 × C2 x (C5 : 四阶循环群)	20	8	8	C4 × C2	C2 × C2
$C_2 \times ((C10 \times C_2) : C_2)$	20	10	10	C4 × C2	C4
C20 × C2 × C2	20	8	8	C4 × C2	C4 × C2
C10 × D8	20	10	10	C4 × C2	C4
C10 x Q_8	20	10	10	C4 × C2	C4
C5 × ((四阶循环群 × C2) : C2)	20	8	8	C4 × C2	C4 × C2
(C2 × C2 × C2 × C2) : C5	10	4	4	C4	C4
C2 × C2 × (C5 : 四阶循环群)	20	12	12	C4 × C2	C2
C2 × C2 × C2 × D10	10	16	16	C4	C2
C10 × C2 × C2 × C2	10	16	16	C4	C4
C81	81	1	1	C54	C54
C9 × C9	9	1	1	C6	C6
(C9 × C3) : C3	9	1	1	C6	C6
C9 : C9	9	1	1	C6	C6
C27 x C3	27	1	1	C18	C18
C27 : C3	27	1	1	C18	C6
$(C_3 \times C_3 \times C_3) : C_3$	9	1	1	C6	C2
(C9 x C3) : C3	9	1	1	C6	C6
(C9 x C3) : C3	9	1	1	C6	C6
C_3 . ((C_3 x C_3) : C_3) =(C_3 x C_3) . (C_3 x C_3)	9	1	1	C6	C6
C9 x C_3 x C_3	9	1	1	C6	C6
$C_3 \times ((C_3 \times C_3) : C_3)$	3	1	1	C2	C2
$C_3 \times (C_9 : C_3)$	9	1	1	C6	C2
$(C_9 \times C_3) : C_3$	9	1	1	C6	C6
$C_3 \times C_3 \times C_3 \times C_3$	3	1	1	C2	C2
D82	82	2	2	C40	C20
C82	82	2	2	C40	C40
C83	83	1	1	C82	C82
C7 : C12	84	4	4	C6 × C2 × C2	C2 × C2
四阶循环群 × (C7 : C3)	84	2	2	C6 × C2 × C2	C2 × C2 × C2
$C_7 \times (C_3 : 四阶循环群)$	84	4	4	$C_6 \times C_2 \times C_2$	$C_6 \times C_2$
$C_3 \times (C_7 : 四阶循环群)$	84	2	2	$C_6 \times C_2 \times C_2$	$C_6 \times C_2$

C21 : 四阶循环群	84	4	4	C6 x C2 × C2	C6 x C_2
C84	84	2	2	C6 x C2 × C2	C6 x C2 × C2
$C_2 \times (C_7 : C_6)$	42	6	6	$C_6 \times C_2$	C2
$S_3 \times D14$	42	6	6	$C_6 \times C_2$	C3
$C2 \times C2 \times (C_7 : C_3)$	42	4	4	$C_6 \times C_2$	C2 × C2
$C7 \times A_4$	42	2	2	C6 × C_2	C6 × C_2
$(C14 \times C_2) : C_3$	42	2	2	C6 × C_2	C6 × C_2
C6 × D14	42	4	4	C6 x C_2	C6
$C14 \times S_3$	42	6	6	C6 x C_2	C6
D84	42	6	6	C6 x C_2	C6
C42 x C_2	42	4	4	$C_6 \times C_2$	$C_6 \times C_2$
C85	85	1	1	C_{16} × 四阶循环群	C_{16} × 四阶循环群
D86	86	2	2	C42	C21
C86	86	2	2	C42	C42
C87	87	1	1	$C_{28} \times C_2$	$C_{28} \times C_2$
C11 : C8	88	2	2	$C10 \times C_2 \times C_2$	$C10 \times C_2$
C88	88	2	2	$C10 \times C_2 \times C_2$	$C10 \times C_2 \times C_2$
$C11 : Q_8$	44	5	5	$C10 \times C_2$	C10
四阶循环群 × D22	44	4	4	$C10 \times C_2$	C10
D88	44	5	5	$C10 \times C_2$	C10
$C_2 \times (C11 : 四阶循环群)$	44	4	4	$C10 \times C_2$	C10
$(C22 \times C_2) : C_2$	44	5	5	C10 × C2	C10
$C44 \times C_2$	44	4	4	C10 × C2	C10 × C2
C11 × D8	44	5	5	$C10 \times C_2$	C10
$C11 \times Q_8$	44	5	5	$C10 \times C_2$	C10
$C_2 \times C_2 \times D_{22}$	22	8	8	C10	C5
$C22 \times C_2 \times C_2$	22	8	8	C10	C10
C89	89	1	1	C88	C88
C5 × D18	90	3	3	$C12 \times C_2$	C12
C9 × D10	90	2	2	$C12 \times C_2$	C6 x C_2
D90	90	3	3	$C12 \times C_2$	C12
C90	90	2	2	$C12 \times C_2$	C12 × C2
$C_3 \times C_3 \times D10$	30	2	2	C4 × C2	C2 × C2
$C15 \times S_3$	30	3	3	C4 × C2	C4 × C2
$C_3 \times D30$	30	3	3	C4 × C2	C4 × C2
$C5 \times ((C_3 \times C_3) : C_2)$	30	6	6	C4 × C2	C4
(C15 × C3) : C2	30	6	6	C4 × C2	C4
C30 × C3	30	2	2	C4 × C2	C4 × C2
C91	91	1	1	C12 × C6	C12 × C6
C23 : 四阶循环群	92	2	2	C22 × C2	C22
C92	92	2	2	C22 × C2	C22 × C2
D92	46	4	4	C22	C11
C46 × C2	46	4	4	C22	C22
C31: C_3	93	1	1	C30 × C2	$C10 \times C_2$
C93	93	1	1	$C30 \times C_2$	C30 × C2
D94	94	2	2	C46	C23
C94	94	2	2	C46	C46
C95	95	1	1	C36 × C2	C36 × C2
$C_3 : C32$	96	4	4	C8 × C2 × C_2	C8 × C2
C96	96	2	2	C8 × C2 × C_2	C8 × C2 × C_2
$((C4 \times C2) : C4) : C_3$	12	4	4	C2 × C2	C2 × C2
$C16 \times S_3$	48	6	6	C4 × C2 × C2	C4 × C2
$C_3 : (C16 : C2)$	48	6	6	C4 × C2 × C2	C4 × C2
D96	48	7	7	C4 × C2 × C2	C4 × C2
$C_3 : QD32$	48	7	7	C4 × C2 × C2	C4 × C2
$C_3 : Q32$	48	7	7	C4 × C2 × C2	C4 × C2
C4 x (C_3 : C8)	24	8	8	C2 × C2 × C2	C2 × C2
C_3 : (C8 : 四阶循环群)	24	8	8	C2 × C2 × C2	C2 × C2
C_3 : (四阶循环群 : C8)	24	10	10	C2 × C2 × C2	C2 × C2 × C2
$C_3 : ((C4 \times C4) : C_2)$	24	8	8	C2 × C2 × C2	C2 × C2
C_3 : ((C2 × C2 × C2) : 四阶循环群)	12	9	11	C2 × C2	C2 × C2
C_3 : (C8 : 四阶循环群)	24	10	12	C2 × C2 × C2	C2 × C2 × C2
C_3 : (C_8 : 四阶循环群)	24	10	12	C2 × C2 × C2	C2 × C2 × C2
$C_3 : ((C8 \times C2) : C_2)$	24	10	14	C2 × C2 × C2	C2 × C2 × C2
C_3 : (Q_8 : 四阶循环群)	24	10	14	C2 × C2 × C2	C2 × C2 × C2
$C_2 \times (C_3 : C_{16})$	48	8	8	C4 × C2 × C2	C4 × C2
$C_3 : (C_{16} : C_2)$	48	8	6	C4 × C2 × C2	C2 × C2 × C2
C8 × (C_3 : 四阶循环群)	24	8	8	C2 × C2 × C2	C2 × C2
C_3 : (四阶循环群 : C8)	24	8	10	C2 × C2 × C2	C2 × C2 × C2
C_3 : (C8 : 四阶循环群)	24	8	8	C2 × C2 × C2	C2 × C2
C_3 : (Q_8 : 四阶循环群)	24	8	12	C2 × C2 × C2	C2 × C2 × C2
C_3 : (C8 : 四阶循环群)	24	10	10	C2 × C2 × C2	C2 × C2 × C2
C_3 : (C8 : 四阶循环群)	24	10	10	C2 × C2 × C2	C2 × C2 × C2
C_3 : (四阶循环群 . D8 =四阶循环群 . (C4 × C2))	24	10	6	C2 × C2 × C2	C2 × C2 × C2
$C_3 : ((C8 \times C2) : C2)$	24	8	10	C2 × C2 × C2	C2 × C2 × C2
$C_3 : ((C8 \times C2) : C_2)$	24	8	12	C2 × C2 × C2	C2 × C2 × C2
C_3: (四阶循环群 . D8 =四阶循环群 . (C4 × C2))	24	8	8	C2 × C2 × C2	C2 × C2 × C2
$C_3 : ((C8 : C2) : C2)$	24	9	11	C2 × C2 × C2	C2 × C2
$C_3 : (C_2 . ((四阶循环群 \times C_2) : C_2) = (C2 \times C2) . (C4 \times C2))$	24	9	11	C2 × C2 × C2	C2 × C2
C_3 : ((四阶循环群 × 四阶循环群) : C_2)	24	8	10	C2 × C2 × C2	C2 × C2
$C_3 : D32$	48	8	8	C4 × C2 × C2	C4 × C2
C_3: QD32	48	8	8	C4 × C2 × C2	C4 × C2
C_3: QD32	48	8	8	C4 × C2 × C2	C4 × C2
$C_3 : Q32$	48	8	8	C4 × C2 × C2	C4 × C2
$C_3 : ((C8 \times C2) : C2)$	24	10	10	C2 × C2 × C2	C2 × C2 × C2
$C_3 : ((C4 \times C2) : C4)$	12	12	16	C2 × C2	C2 × C2
$C_3 : ((C8 \times C2) : C2)$	24	12	14	C2 × C2 × C2	C2 × C2 × C2
$C_3 : ((C8 : C_2) : C_2)$	24	11	11	C2 × C2 × C2	C2 × C2
$C_3 : ((C2 \times C2 \times C2) : 四阶循环群)$	12	11	11	C2 × C2	C2 × C2
C_3 : (Q_8 : 四阶循环群)	24	12	14	C2 × C2 × C2	C2 × C2 × C2

$C_3 : (C_2 . ((C4 \times C2) : C_2) = (C2 \times C2) . (C4 \times C2))$	24	11	11	C2 × C2 × C2	C2 × C2
$C_3 : ((C4 \times C4) : C_2)$	24	10	10	C2 × C2 × C2	C2 × C2
$C_3 \times ((C4 \times C2) :$ 四阶循环群)	12	8	8	C2 × C2	C2 × C2
C24 × 四阶循环群	24	4	4	C2 × C2 × C2	C2 × C2 × C2
$C_3 \times (C8 :$ 四阶循环群)	24	4	4	C2 × C2 × C2	C2 × C2
$C_3 \times ((C8 \times C2) : C2)$	24	6	6	C2 × C2 × C2	C2 × C2 × C2
$C_3 \times ((C2 \times C2 \times C2) :$ 四阶循环群)	12	7	7	C2 × C2	C2 × C2
$C_3 \times ((C8 : C2) : C2)$	24	7	7	C2 × C2 × C2	C2 × C2
$C_3 \times (C_2 . ((四阶循环群 \times C2) : C_2) = (C_2 \times C_2) . (四阶循环群 \times C2))$	24	7	7	C2 × C2 × C2	C2 × C2
$C_3 \times ((C8 \times C2) : C_2)$	24	6	8	C2 × C2 × C2	C2 × C2 × C2
$C_3 \times (Q_8 :$ 四阶循环群)	24	6	8	C2 × C2 × C2	C2 × C2 × C2
$C_3 \times ((C4 \times C4) : C_2)$	24	6	6	C2 × C2 × C2	C2 × C2
$C_3 \times (四阶循环群 : C8)$	24	6	6	C2 × C2 × C2	C2 × C2 × C2
$C_3 \times (C_8 :$ 四阶循环群)	24	6	6	C2 × C2 × C2	C2 × C2 × C2
$C_3 \times (C8 :$ 四阶循环群)	24	6	6	C2 × C2 × C2	C2 × C2 × C2
$C_3 \times (四阶循环群 . D8 = 四阶循环群 . (四阶循环群 \times C2))$	24	6	4	C2 × C2 × C2	C2 × C2 × C2
C48 × C2	48	4	4	C4 × C2 × C2	C4 × C2 × C2
$C_3 \times (C16 : C2)$	48	4	4	C4 × C2 × C2	C2 × C2 × C2
$C_3 \times D_{32}$	48	5	5	C4 × C2 × C2	C4 × C2
$C_3 \times$ QD32	48	5	5	C4 × C2 × C2	C4 × C2
$C_3 \times$ Q32	48	5	5	C4 × C2 × C2	C4 × C2
$((C4 \times C4) : C_3) : C_2$	24	6	6	C2 × C2 × C2	C2
$A_4 :$ C8	24	6	6	C2 × C2 × C2	C2 × C2
SL(2,3) : 四阶循环群	24	8	10	C2 × C2 × C2	C2 × C2
SL(2,3) : 四阶循环群	24	6	6	C2 × C2 × C2	C2
$C_2 \times ((四阶循环群 \times 四阶循环群) : C_3)$	12	4	4	C2 × C2	C2 × C2
四阶循环群 × SL(2,3)	12	6	6	C2 × C2	C2 × C2
$((C2 \times C2 \times C2 \times C2) : C_2) : C_3$	12	6	6	C2 × C2	C2
$((四阶循环群 \times 四阶循环群) : C_2) : C_3$	12	4	4	C2 × C2	C2 × C2
$((四阶循环群 \times 四阶循环群) : C_2) : C_3$	12	6	6	C2 × C2	C2
C8 × A_4	24	4	4	C2 × C2 × C2	C2 × C2 × C2
$((C8 \times C2) : C_2) : C_3$	24	4	4	C2 × C2 × C2	C2 × C2 × C2
四阶循环群 × $(C_3 : Q_8)$	12	14	14	C2 × C2	C2 × C2
$C_3 : (四阶循环群 : Q_8)$	12	18	18	C2 × C2	C2
$C_3 : ((C2 \times C2) . (C2 \times C2 \times C2))$	12	14	14	C2 × C2	C2 × C2
四阶循环群 × 四阶循环群 × S_3	12	12	12	C2 × C2	C2
$C_3 : ((四阶循环群 \times 四阶循环群) : C_2)$	12	12	12	C2 × C2	C2 × C2
四阶循环群 × D24	12	14	14	C2 × C2	C2 × C2
$C_3 : ((C4 \times C4) : C_2)$	12	18	18	C2 × C2	C2
$C_3 : ((C4 \times C4) : C_2)$	12	14	14	C2 × C2	C2 × C2
$C_3 : ((C4 \times C4) : C_2)$	12	12	12	C2 × C2	C2 × C2
$C_3 : ((四阶循环群 \times 四阶循环群) : C_2)$	12	14	14	C2 × C2	C2
C3 : ((C2 x Q8) : C2)	12	18	18	C2 × C2	C2 × C2
$C_3 : ((C4 \times C4) : C_2)$	12	14	12	C2 × C2	C2 × C2
$((C4 \times C_2) : C_2) \times S_3$	12	18	18	C2 × C2	C2
$C_3 : (四阶循环群 \times D8)$	12	16	16	C2 × C2	C2
$C_3 : ((C2 \times C2 \times C2 \times C2) : C2)$	12	20	20	C2 × C2	C2
$C_3 : ((C4 \times C2 \times C2) : C_2)$	12	16	14	C2 × C2	C2 × C2
$C_3 : ((C4 \times C2 \times C2) : C_2)$	12	18	16	C2 × C2	C2 × C2
$C_3 : ((C4 \times C4) : C_2)$	12	16	14	C2 × C2	C2 × C2
$C_3 : ((C4 \times C2 \times C2) : C_2)$	12	16	16	C2 × C2	C2 × C2
$C_3 : (C4 \times Q_8)$	12	16	16	C2 × C2	C2
$C_3 : (四阶循环群 : Q8)$	12	20	20	C2 × C2	C2
$C_3 : ((C2 \times C2) . (C2 \times C2 \times C2))$	12	16	14	C2 × C2	C2 × C2
$C_3 : ((C2 \times C2) . (C2 \times C2 \times C2))$	12	16	16	C2 × C2	C2 × C2
$(四阶循环群 : 四阶循环群) \times S_3$	12	18	18	C2 × C2	C2
$C_3 : ((C4 \times C4) : C2)$	12	14	14	C2 × C2	C2
$C_3 : (四阶循环群 \times D8)$	12	16	16	C2 × C2	C2
$C_3 : ((C4 \times C2 \times C2) : C_2)$	12	16	14	C2 × C2	C2 × C2
$C_3 : ((C4 \times C2 \times C2) : C_2)$	12	18	18	C2 × C2	C2 × C2
C3 : ((C2 x Q8) : C2)	12	18	16	C2 × C2	C2 × C2
C3 : ((C2 x Q8) : C2)	12	18	18	C2 × C2	C2 × C2
$C_3 : ((四阶循环群 \times 四阶循环群) : C_2)$	12	14	12	C2 × C2	C2 × C2
$C_2 \times C_8 \times S_3$	24	12	12	C2 × C2 × C2	C2 × C2
$C_2 \times (C24 : C_2)$	24	12	12	C2 × C2 × C2	C2 × C2
$C_3 : ((C8 \times C2) : C_2)$	24	12	10	C2 × C2 × C2	C2 × C2 × C2
$C_2 \times (C24 : C_2)$	24	14	14	C2 × C2 × C2	C2 × C2
$C_2 \times D_{48}$	24	14	14	C2 × C2 × C2	C2 × C2
$C_3 : ((C8 \times C2) : C_2)$	24	14	10	C2 × C2 × C2	C2 × C2 × C2
$C_2 \times (C_3 : Q16)$	24	14	14	C2 × C2 × C2	C2 × C2
$(C_8 : C_2) \times S_3$	24	12	12	C2 × C2 × C2	C2
$C_3 : ((C8 \times C2) : C_2)$	24	12	12	C2 × C2 × C2	C2 × C2
C3 : (C8 : (C2 × C2))	24	15	15	C2 × C2 × C2	C2
C3 : ((C2 x Q8) : C2)	24	15	15	C2 × C2 × C2	C2
D16 × S_3	24	15	15	C2 × C2 × C2	C2
$C_3 :$ (C8 : (C2 × C2))	24	16	16	C2 × C2 × C2	C2
$C_3 : ((C8 \times C2) : C_2)$	24	15	13	C2 × C2 × C2	C2 × C2
QD16 × S_3	24	15	15	C2 × C2 × C2	C2
$C_3 :$ (C8 : (C2 × C2))	24	16	16	C2 × C2 × C2	C2
C3 : ((C2 x Q8) : C2)	24	16	16	C2 × C2 × C2	C2
$C_3 : ((C8 \times C2) : C_2)$	24	15	13	C2 × C2 × C2	C2 × C2
Q16 x S_3	24	15	15	C2 × C2 × C2	C2
C3 : ((C2 x Q8) : C2)	24	16	16	C2 × C2 × C2	C2
$C_3 : ((C8 \times C2) : C_2)$	24	15	13	C2 × C2 × C2	C2 × C2
$C_2 \times C_2 \times (C_3 : C8)$	24	16	16	C2 × C2 × C2	C2 × C2
$C_2 \times ((C_3 : C8) : C_2)$	24	16	12	C2 × C2 × C2	C2 × C2
$C_2 \times$ 四阶循环群 × $(C_3 : C_4)$	12	16	16	C2 × C2	C2
$C_2 \times ((C_3 :$ 四阶循环群) : 四阶循环群)	12	16	20	C2 × C2	C2 × C2
C3 : ((C2 x Q8) : C2)	12	16	16	C2 × C2	C2 × C2
$C_2 \times (C_{12} :$ 四阶循环群)	12	20	20	C2 × C2	C2 × C2

$C_3 : ((四阶循环群 \times 四阶循环群) : C_2)$	12	16	12	C2 × C2	C2 × C2
$C_2 \times ((C12 \times C_2) : C_2)$	12	16	20	C2 × C2	C2 × C2
四阶循环群 x ((C6 x C_2) : C2)	12	14	14	C2 × C2	C2 × C2
$C_3 : ((C4 \times C2 \times C2) : C2)$	12	14	14	C2 × C2	C2 × C2
$C_3 : ((C4 \times C2 \times C2) : C_2)$	12	16	16	C2 × C2	C2 × C2
$C2 \times ((C_3 \times D8) : C_2)$	24	16	16	C2 × C2 × C2	C2 × C2
$C_3 : (C8 : (C2 \times C2))$	24	15	15	C2 × C2 × C2	C2
$C_2 \times ((C_3 : Q_8) : C_2)$	24	16	16	C2 × C2 × C2	C2 × C2
D8 x (C_3 : 四阶循环群)	12	20	20	C2 × C2	C2
$C_3 : ((C4 \times C2 \times C2) : C_2)$	12	16	16	C2 × C2	C2 × C2
$C_3 : ((四阶循环群 \times 四阶循环群) : C_2)$	12	16	16	C2 × C2	C2 × C2
$C_3 : ((C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2) : C_2)$	12	20	20	C2 × C2	C2
$C_3 : ((C4 \times C2 \times C2) : C_2)$	12	18	18	C2 × C2	C2 × C2
$C_3 : ((C4 \times C2 \times C2) : C_2)$	12	18	18	C2 × C2	C2 × C2
$C_3 : ((四阶循环群 \times 四阶循环群) : C_2)$	12	20	20	C2 × C2	C2
$C_2 \times ((C_3 \times Q_8) : C_2)$	24	16	16	C2 × C2 × C2	C2 × C2
C3 : ((C2 x Q8) : C2)	24	15	15	C2 × C2 × C2	C2
C2 x (C3 : Q16)	24	16	16	C2 × C2 × C2	C2 × C2
$C_3 : (四阶循环群 : Q_8)$	12	20	20	C2 × C2	C2
$Q_8 \times (C_3 : 四阶循环群)$	12	20	20	C2 × C2	C2
C3 : ((C2 x Q8) : C2)	12	18	18	C2 × C2	C2 × C2
$C_3 : ((四阶循环群 \times 四阶循环群) : C_2)$	12	16	16	C2 × C2	C2 × C2
$C_3 : ((C8 \times C2) : C_2)$	24	16	16	C2 × C2 × C2	C2 × C2
$C_3 : (C8 : (C2 \times C2))$	24	15	15	C2 × C2 × C2	C2 × C2
$C_3 : ((C8 \times C2) : C_2)$	24	14	12	C2 × C2 × C2	C2 × C2 × C2
C3 : ((C2 x Q8) : C2)	24	15	15	C2 × C2 × C2	C2 × C2
$C_2 \times ((C6 \times C_2) : 四阶循环群)$	12	20	20	C2 × C2	C2 × C2
$C_3 : ((C2 \times C2 \times C2 \times C2) : C2)$	12	18	18	C2 × C2	C2
C12 × 四阶循环群 × C2	12	8	8	C2 × C2	C2 × C2
$C6 \times ((C4 \times C2) : C_2)$	12	12	12	C2 × C2	C2 × C2
C6 × (C4 : C4)	12	12	12	C2 × C2	C2 × C2
$C_3 \times ((四阶循环群 \times 四阶循环群) : C_2)$	12	8	8	C2 × C2	C2 × C2
C12 x D8	12	10	10	C2 × C2	C2 × C2
$C12 \times Q_8$	12	10	10	C2 × C2	C2 × C2
$C_3 \times ((C2 \times C2 \times C2 \times C2) : C2)$	12	14	14	C2 × C2	C2
$C_3 \times ((C4 \times C2 \times C2) : C_2)$	12	12	12	C2 × C2	C2 × C2
$C_3 \times ((C2 \times Q_8) : C_2)$	12	12	12	C2 × C2	C2 × C2
$C_3 \times ((C4 \times C2 \times C2) : C_2)$	12	10	10	C2 × C2	C2 × C2
$C_3 \times ((C4 \times C4) : C_2)$	12	10	10	C2 × C2	C2 × C2
$C_3 \times ((C2 \times C2) . (C2 \times C2 \times C2))$	12	10	10	C2 × C2	C2 × C2
$C_3 \times ((四阶循环群 \times 四阶循环群) : C_2)$	12	8	8	C2 × C2	C2 × C2
$C_3 \times ((C4 \times C4) : C_2)$	12	14	14	C2 × C2	C2
$C_3 \times (C4 : Q_8)$	12	14	14	C2 × C2	C2
$C24 \times C_2 \times C_2$	24	8	8	C2 × C2 × C2	C2 × C2 × C2
$C6 \times (C8 : C_2)$	24	8	8	C2 × C2 × C2	C2 × C2
$C_3 \times ((C8 \times C2) : C_2)$	24	8	8	C2 × C2 × C2	C2 × C2 × C2
C6 × D16	24	10	10	C2 × C2 × C2	C2 × C2
C6 × QD16	24	10	10	C2 × C2 × C2	C2 × C2
C6 x Q16	24	10	10	C2 × C2 × C2	C2 × C2
$C_3 \times ((C8 \times C2) : C_2)$	24	10	8	C2 × C2 × C2	C2 × C2 × C2
$C_3 \times (C8 : (C2 \times C2))$	24	11	11	C2 × C2 × C2	C2
$C_3 \times ((C_2 \times Q_8) : C_2)$	24	11	11	C2 × C2 × C2	C2
$A_4 : \ Q_8$	12	12	12	C2 × C2	C2
四阶循环群 × S_4	12	10	10	C2 × C2	C2
(四阶循环群 x A_4) : C_2	12	12	12	C2 × C2	C2
C_2 x (C_2 . S4 =SL(2,3) . C_2)	24	12	12	C2 × C2 × C2	C2
$C_2 \times GL(2,3)$	24	12	12	C2 × C2 × C2	C2
$(C_2 \times SL(2,3)) : C_2$	24	11	11	C2 × C2 × C2	C2
(C_2 . S4 = SL(2,3) . C_2) : C_2	24	11	11	C2 × C2 × C2	C2
$(((C4 \times C2) : C_2) : C_3) : C_2$	24	10	8	C2 × C2 × C2	C2 × C2
$(((C4 \times C2) : C_2) : C_3) : C_2$	24	11	11	C2 × C2 × C2	C2
$C_2 \times (A_4 : 四阶循环群)$	12	12	12	C2 × C2	C2
$(C_2 \times C_2 \times A_4) : C_2$	12	12	12	C2 × C2	C2
C_2 x 四阶循环群 x A_4	12	8	8	C2 × C2	C2 × C2
$D8 \times A_4$	12	10	10	C2 × C2	C2
$C_2 \times C2 \times SL(2,3)$	12	12	12	C2 × C2	C2
Q_8 x A_4	12	10	10	C2 × C2	C2
$C_2 \times ((((C4 \times C2) : C_2) : C_3)$	12	8	8	C2 × C2	C2 × C2
$((C_2 \times C_2 \times C_2) : (C_2 \times C_2)) : C_3$	12	9	9	C2 × C2	C2
$((C2 \times Q_8) : C_2) : C_3$	12	9	9	C2 × C2	C2
$(C2 \times C2 \times Q_8) : C_3$	12	8	8	C2 × C2	C2
$((C2 \times C2 \times C_2) : (C2 \times C2)) : C_3$	12	7	7	C2 × C2	C2
$C_2 \times C_2 \times (C_3 : Q_8)$	12	28	28	C2 × C2	C2
$C_2 \times C_2 \times 四阶循环群 \times S_3$	12	24	24	C2 × C2	C2
$C_2 \times C_2 \times D24$	12	28	28	C2 × C2	C2
$C_2 \times ((C_{12} \times C_2) : C_2)$	12	24	20	C2 × C2	C2 × C2
C_2 x D8 x S_3	12	30	30	C2 × C2	C1
C_2 x ((四阶循环群 x S_3) : C_2)	12	26	26	C2 × C2	C2
C3 : ((C2 x C2 x C2) : (C2 x C2))	12	25	25	C2 × C2	C2
C2 x Q8 x S3	12	30	30	C2 × C2	C1
C_2 x ((四阶循环群 x S_3) : C_2)	12	26	26	C2 × C2	C2
$C_3 : ((C2 \text{ x } Q8) : C2)$	12	25	25	C2 × C2	C2
((C4 x C_2) : C_2) x S_3	12	24	24	C2 × C2	C2
C3 : ((C2 x C2 x C2) : (C2 x C2))	12	25	25	C2 × C2	C2
C3 : ((C2 x Q8) : C2)	12	25	25	C2 × C2	C2
$C2 \times C2 \times C2 \times (C_3 : 四阶循环群)$	12	32	32	C2 × C2	C2
$C2 \times C2 \times ((C6 \times C2) : C2)$	12	28	28	C2 × C2	C2
$C12 \times C2 \times C2 \times C2$	12	16	16	C2 × C2	C2 × C2
$C2 \times C6 \times D8$	12	20	20	C2 × C2	C2
$C_2 \times C_6 \times Q_8$	12	20	20	C2 × C2	C2

C6 × ((C4 × C2) : C_2)	12	16	16	C2 × C2	C2 × C2
C_3 × ((C2 × C2 × C2) : (C2 × C2))	12	17	17	C2 × C2	C2
C_3 × ((C_2 × Q_8) : C_2)	12	17	17	C2 × C2	C2
C_2 × C_2 × S_4	12	20	20	C2 × C2	C1
((C2 × C2 × C2 × C2) : C_3) : C_2	12	10	10	C2 × C2	C1
C_2 × C_2 × A_4	6	16	16	C2	C2
C_2 × ((C_2 × C_2 × C_2 × C_2) : C_3)	6	12	12	C2	C2
C_2 × C2 × C2 × C2 × S_3	6	48	48	C2	C1
C_6 × C_2 × C_2 × C_2 × C_2	6	32	32	C2	C2
C97	97	1	1	C96	C96
D98	98	2	2	C42	C21
C98	98	2	2	C42	C42
C7 × D14	14	2	2	C6	C6
(C7 x C7) : C_2	14	2	2	C6	C3
C14 × C7	14	2	2	C6	C6
C99	99	1	1	C30 × C2	C30 × C2
C33 x C_3	33	1	1	C10 × C_2	C10 × C_2
C25：四阶循环群	100	2	2	C20 × C_2	C10 × C_2
C100	100	2	2	C20 × C_2	C20 × C_2
C25 : 四阶循环群	100	3	3	C20 × C_2	C10
D100	50	4	4	C20	C10
C50 × C_2	50	4	4	C20	C20
C5 × (C5 : 四阶循环群)	20	2	2	C4 × C2	C4 × C2
(C5 x C5) : 四阶循环群	20	2	2	C4 × C2	C2 × C2
C20 × C5	20	2	2	C4 × C2	C4 × C2
C5 × (C5 : 四阶循环群)	20	3	3	C4 × C2	C4 × C2
(C5 × C5) : 四阶循环群	20	3	3	C4 × C2	C4 × C2
(C5 × C5) : 四阶循环群	20	8	8	C4 × C2	C2
(C5 × C5) : 四阶循环群	20	4	4	C4 × C2	C2 × C2
D10 × D10	10	4	4	C4	C2
C10 × D10	10	4	4	C4	C4
C2 × ((C5 × C5) : C2)	10	4	4	C4	C2
C10 x C10	10	4	4	C4	

下表包含了零星群的数据。“NR”表示我们没有该条目的数据。

群	Exp	整数行	Int. 列	伽罗瓦群	忠实伽罗瓦群
M11	1320	6	6	C20 × C_2 × C_2 × C_2 × C_2	C2 × C2
M12	1320	13	13	C20 × C_2 × C_2 × C_2 × C_2	C2
M22	9240	8	8	C60 × C2 × C2 × C2 × C2 × C2	C2 × C2
M23	212520	7	7	C660 × C_2 × C_2 × C_2 × C_2 × C_2 × C_2	C_2 × C_2 × C_2 × C_2
M24	212520	16	16	C660 × C2 × C2 × C2 × C2 × C2 × C2	C2 × C2 × C2
HS	9240	20	20	C60 × C2 × C2 × C2 × C2 × C2	C2 × C2
J2	840	11	11	C12 × C2 × C2 × C2 × C2	C2
Co1	16576560	97	97	C660 × C12 × C12 × C_2 × C_2 × C_2 × C_2 × C_2	C2 × C2
Co2	1275120	52	52	C660 × C12 × C2 × C2 × C2 × C2 × C_2	C2 × C2 × C_2
Co3	637560	34	34	C660 × C6 × C_2 × C_2 × C_2 × C_2 × C_2	C2 × C2 × C2
McL	27720	12	12	C60 × C6 × C2 × C2 × C2 × C2	C_2 × C_2 × C_2 × C_2
Suz	360360	31	31	C60 × C12 × C6 × C2 × C2 × C2 × C2	C_2 × C_2 × C_2 × C_2
J1	43890	6	6	C180 × C_6 × C2 × C2 × C2	C6
ON	10884720	15	15	C180 × C60 × C6 × C_2 × C_2 × C_2 × C_2	C_6 × C_2 × C_2 × C_2 × C_2
J3	116280	8	8	C144 × C12 × C_2 × C_2 × C_2 × C_2	C6 x C2 × C2
Ru	633360	22	22	C84 × C12 × 四阶循环群 × 四阶循环群 × C_2 × C_2 × C_2	NR
Fi22	720720	55	55	C60 × C12 × C12 × C2 × C2 × C2 × C2	C2 × C2 × C2 x C2
2F4(2)’	3120	10	12	C12 × C4 × C4 × C2 × C2	C2 × C2 × C2
J4	607938537360	29	29	NR	NR
Ly	10651271400	29	29	NR	NR
He	14280	17	17	C48 × 四阶循环群 × C_2 × C_2 × C_2 × C_2	C2 × C2 × C2
HN	2633400	32	32	C180 × C30 × C6 × C_2 × C_2 × C_2 × C_2	C_2 × C_2 × C_2 × C_2
Th	57886920	30	30	C180 × C36 × C6 × C6 × C6 × C_2 × C_2 × C_2	C2 × C2 × C2 × C2 × C2 × C2
Fi23	845404560	86	86	NR	NR
F3+.2	24516732240	167	167	NR	NR
B	234033344344800	166	166	NR	NR
M	1165654792878376600800	150	150	NR	NR

E Harada 的猜想与拓扑量子场论的行-列对偶性

从类代数中

$$T_{C_1} T_{C_2} = \sum_{C_3} f_{C_1 C_2}^{C_3} T_{C_3} \tag{E.1}$$

ˆ将矩阵 f_C 定义为

$$(f_C)_{C_1}^{C_2} = f_{C C_1}^{C_3}. \tag{E.2}$$

我们知道

$$T_C P_R = \frac{\chi^R(T_C)}{d_R} P_R \tag{E.3}$$

因此，ˆ f_C 的特征值为 $\chi^R{}_{(T_C)}$ ~~d_R~~ 行列式为

$$\det\left(\hat{f}_C\right) = \prod_R \frac{\chi^R(T_C)}{d_R} = \prod_R \frac{|C|}{d_R} \chi_C^R. \tag{E.4}$$

这为特征标表的每一列都赋予了一个整数。这些整数的乘 t

$$X = \prod_C \det\left(\hat{f}_C\right) = \prod_C \prod_R \frac{|C|}{d_R} \chi_C^R, \tag{E.5}$$

积是与整个特征标表相关联的一个整数。

在融合代数理论中，我们有

$$a_R a_S = N_{RS}^T a_T \tag{E.6}$$

ˆ对每一行定义矩阵 N_R，使其满足方程

$$(\hat{N}_R)_S^{\ T} = N_{RS}^{\ T} \tag{E.7}$$

我们有

$$a_R A_C = \chi_C^R A_C \tag{E.8}$$

ˆ N_R 的特征值为 χ_C^R。取行列式

$$\det\left(\hat{N}_R\right) = \prod_C \chi_C^R. \tag{E.9}$$

对于每一行，这都是一个整数。对所有 R 取乘法，得到

$$\tilde{X} = \prod_R \det\left(\hat{N}_R\right) = \prod_R \prod_C \chi_C^R \tag{E.10}$$

比较二者可得

$$\frac{X}{\tilde{X}} = \prod_C \prod_R \frac{|C|}{d_R}. \tag{E.11}$$

Harada 猜想该比值为一个整数（参见第 4 章末尾的[20] 笔记以及论文 [54]）。

参考文献

[1] Edward Witten。量子场论与琼斯多项式。《数学物理通讯》，121:351–399，1989年。[2] Nicolai Yu Reshetikhin 和 Vladimir G Turaev。由量子群导出的带状图及其不变量。《数学物理通讯》，127(1):1–26，1990年。[3] Nicolai Reshetikhin 和 Vladimir G Turaev。通过纽结多项式和量子群得到的三维流形不变量。《数学发明》，103(1):547–597，1991年。[4] Kentaro Hori、RAVI VAKIL 和 ERIC ZASLOW。镜像对称，第1卷。美国数学学会，2003年。[5] Peter Goddard 和 David Olive。Kac-Moody代数与Virasoro代数在量子物理中的关系。《现代物理学国际期刊A》，1(02):303–414，1986年。[6] Igor Frenkel、James Lepowsky 和 Arne Meurman。顶点算子代数与怪兽群。学术出版社，1989年。[7] Richard E Borcherds。怪兽月光与怪兽李超代数。载于《数学发明》。Citeseer，1992年。[8] Ibrahima Bah、Daniel S Freed、Gregory W Moore、Shlomo S Razamat 和 Sakura Schafer-Nameki。物理数学全景，约2022年。arXiv预印本 arXiv:2211.04467，2022年。[9] Robbert Dijkgraaf 和 Edward Witten。拓扑规范理论与群上同调。《数学物理通讯》，129:393，1990年。[10] Edward Witten。关于二维量子规范理论。《数学物理通讯》，141:153–209，1991年。[11] Daniel S. Freed 和 Frank Quinn。具有有限规范群的陈-西蒙斯理论。《数学物理通讯》，156:435–472，1993年。[12] M. Fukuma、S. Hosono 和 H. Kawai。二维格点拓扑场论。《数学物理通讯》，161:157–176，1994年。[13]H´él`ène Barcelo 和 Arun Ram。组合表示论。1997年7月。arXiv:math/9707221，类型：文章。[14] Robert de Mello Koch、Yang-Hui He、Garreth Kemp 和 Sanjaye Ramgoolam。组合拓扑弦中的整性、对偶性与有限性。JHEP，01:071，2022年。[15] Sanjaye Ramgoolam 和 Eric Sharpe。组合拓扑弦理论与群论算法。2022年4月。

[16] Richard P Stanley。代数中的正性问题与猜想。数学：前沿与展望：前沿与展望，第295页，2000年。[17] Matthew Buican、Linfeng Li 和 Rajath Radhakrishnan。非阿贝尔任意子与 Arad–Herzog猜想的一些相关猜想。J. Phys. A，54(50):505402，2021年。[18] Zvi Arad 和 Marcel Herzog。群中共轭类的乘法，第1112卷。施普林格，2006年。[19] Matthew Buican、Linfeng Li 和 Rajath Radhakrishnan。 $a \times b = c$ 在 $2+1$d 拓扑量子场论中。Quantum，5:468，2021年6月。[20] Gabriel Navarro。特征标理论与 McKay猜想，第175卷。剑桥大学出版社，2018年。[21] Joachim Kock。弗罗贝尼乌斯代数与二维拓扑量子场论。第59号。剑桥大学出版社，2004年。[22] Josiah Couch、Yale Fan 和 Sanjit Shashi。拓扑量子场论中的电路复杂度。Fortsch. Phys.，70(9-10):2200102，2022年。[23] Anindya Banerjee 和 Gregory W. Moore。关于在拓扑量子场论中对配边求和的评论。JHEP，09:171，2022年。[24] Donald Marolf 和 Henry Maxfield。超越系综：婴儿宇宙、时空虫洞以及黑洞信息的有序与无序。JHEP，08:044，2020年。[25] William Burnside。有限阶群论。大学出版社，1911年。[26] John D Dixon。群特征标的高速计算。Numerische Mathematik，10:446–450，1967年。[27] Gerhard JA Schneider。重新审视 Dixon特征标表算法。Journal of Symbolic Computation，9(5-6):601–606，1990年。[28] I Martin Isaacs。有限群的特征标理论，第69卷。Courier Corporation，1994年。[29] David S Dummit 和 Richard M Foote。抽象代数，第1999卷。Prentice Hall，恩格尔伍德悬崖，新泽西州，1991年。[30] Wieb Bosma。分圆域的典范基。Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing，1(2):125–134，1990年。[31] Gabriel Navarro。特征标理论与 McKay猜想，第175卷。剑桥大学出版社，2018年。[32] Terry Gannon。特征标表上的伽罗瓦作用。2007年。

[33] Jean-Pierre Serre 等。《有限群的线性表示》，第42卷。施普林格，1977年。[34] Richard Brauer。《有限阶群的普通特征标与模特征标之间的联系》。数学年刊，第926–935页，1941年。[35] Bertram Huppert。《有限群的特征标理论》。美国数学会通报。[36] Carl Friedrich Gauss。《算术研究》。耶鲁大学出版社，1966年。[37] Bruce C Berndt、Kenneth S Williams 和 Ronald J Evans。《高斯和与雅可比和》。1998年。[38] Gregory W. Moore 和 Graeme Segal。《二维拓扑场论中的 D 膜与 K 理论》，2006年。[39] Rajath Radhakrishnan。《从融合规则重构有限规范群》。2023年2月。[40] Sergei Gukov、Du Pei、Charles Reid 和 Ali Shehper。《二维拓扑量子场论的对称性及一般群的等变 Verlinde 公式》。2021年11月。[41] Lakshya Bhardwaj、Sakura Sch¨afer-Nameki 和 Jingxiang Wu。《普适非可逆对称性》。物理学进展，70(11):2200143，2022年10月。[42] Adrian Padellaro、Rajath Radhakrishnan 和 Sanjaye Ramgoolam。即将发表。[43] Richard Brauer。《有限群的表示》。载于《现代数学讲座》，第I卷，第133–175页。纽约：Wiley，1963年。[44] Joseph Ben Geloun 和 Sanjaye Ramgoolam。《二分带状图的量子力学：整性、格与 Kronecker 系数》。2020年10月。[45] Joseph Ben Geloun 和 Sanjaye Ramgoolam。《有限维代数中投影算子的量子探测与全息》。2023年3月。[46] Sergey Bravyi、Anirban Chowdhury、David Gosset、Vojtech Havlicek 和 Guanyu Zhu。《Kronecker 系数的量子复杂性》。2023年2月。[47] Aram W. Harrow、Avinatan Hassidim 和 Seth Lloyd。《用于线性方程组的量子算法》。物理评论快报，103:150502，2009年10月。[48] A. Mironov 和 A. Morozov。《超可积性综述》。物理快报 B，835:137573，2022年。[49] Sanjaye Ramgoolam 和 Lewis Sword。《隐藏对称代数的矩阵与张量见证》。2023年2月。[50] Donald E. Knuth。《计算机程序设计艺术：第1卷：基本算法》。Addison-Wesley，1997年。

[51] Roger A Horn 和 Charles R Johnson。《矩阵分析》。剑桥大学出版社，2012年。[52] The GAP Group。GAP——群、算法与编程，4.12.2版，2022年。[53] The Sage Developers。SageMath，Sage数学软件系统（9.7版），2022年。 https://www.sagemath.org.[54] K. Harada。重新审视有限群的特征标理论。《中央研究院数学研究所集刊》（新系列），13:383–395，2018年。