arXiv:2304.10223v2 [math.RA] 7 Jan 2025

Gentle A_∞-代数的变形

Raf Bocklandt 和 Jasper van de Kreeke

Abstract. 本文计算了带标记曲面上弧集的 gentleA_∞-代数的霍赫希尔德上同调。当底层弧集不含环或二环时，我们证明霍赫希尔德复形的微分分次李代数结构是形式的，并明确给出所有变形在规范等价意义下的实现。

Contents

1. 引言 1 2. 弯曲温和代数 2 3. 温和 A_∞-代数的霍赫希尔德上同调 14 参考文献 33

1. 引言

对于闭曲面上一组带有标记点的定向弧，可以关联一个称为 gentle A_∞-代数的 A_∞-代数。这类代数由 [5, 9] 引入，用于研究带 puncture 曲面的缠绕 Fukaya 范畴 [1], ，其中带 puncture 曲面是通过移除标记点得到的。这些代数也是表示理论中研究的一类著名代数的变体 [2,16, 12]。

本文详细研究这些 A_∞-代数的变形理论。镜像对称的直觉告诉我们，将这些代数变形为曲弯曲的A_∞-代数，应对应于用普通点或轨形点填补这些 puncture [18, 6]。

我们将按如下方式展开这一思路。从闭曲面上的一组带有标记点的弧出发，我们引入双边形这一组合概念，并用它定义一族用于计数这些双边形的高阶乘积。我们证明

1991 *Mathematics Subject Classification.* 16E40, 16S80。*Key words and phrases.*变形理论，非交换代数，表示理论。作者的研究部分得到荷兰科学研究组织资助项目“弗罗贝尼乌斯流形理论及其应用中的代数方法与结构”（TOPl.17.012）的支持。

©0000（版权所有者）

这些结构满足弯曲的 A_∞-公理，并且确实形变了由弧集产生的gentleA_∞-代数。

为了证明这些变形解决了变形问题，我们考察霍赫希尔德上同调。我们证明，霍赫希尔德上同调中的每个元素都由其零阶和一阶分量决定；换言之，由其零元和一元乘积决定。当弧集不含环或二环时，我们得到了霍赫希尔德上同调的一个显式基。这使我们能够描述霍赫希尔德上同调上的 Gerstenhaber 代数结构。

这些计算与 Wong [20] 关于二聚体模型矩阵分解的 Borel-Moore 同调的研究相吻合（从镜像对称 [5]的角度看，这是我们所研究情形的 B 侧对应物），也与这样一种观点一致：缠绕 Fukaya 范畴的霍赫希尔德上同调与辛同调 [7, 17]相同。

最后，我们证明 Gerstenhaber 代数结构中的括号是形式的，并由此得出结论：霍赫希尔德上同调的 Maurer-Cartan 方程的每个解都与我们引入的某个弯曲 A_∞-结构规范等价。

2. 弯曲温和代数

本节将介绍弯曲温和代数。这些代数是 [5] 和 [9] 中定义的温和 A_∞-代数的弯曲变形。

2.1. 弧集与温和代数。

DEFINITION 2.1. 带标记曲面（S, M）是由一个无边界的紧致定向曲面 S 和一组有限的标记点 $M \subset S$ 构成的二元组。我们用 g 表示曲面的亏格。此外，我们假设，若 S 是球面，则 $|M| \geq 3$；否则 $|M| \geq 1$。

弧集 $\mathcal{A}$ 是一组定向曲线 $a:\ [0,1] \to S$，它们仅在端点处相交（$a^{-1}(M) = \{0,1\}$），且内部不发生（自）相交。若弧的补集是若干个互不相交的圆盘之并，我们称该弧集将曲面分割开来。这些圆盘称为面，面集记作 F。每个面都可视为由弧围成的多边形。

A将曲面分割的弧集满足 fies

- 无单边环或二边环条件 [NMD]，即不存在由单条弧或一对弧围成一个面的情形。在这种情况下，曲面被分割成 n边形，且 $n \geq 3$。
- 无环或二环条件 [NL2]，即每条弧的两个端点各不相同，且任意两条弧至多共享一个端点。
- 二聚体条件，即每个圆盘周围的弧构成一个有向环。在二聚体的情形下，根据圆盘周围的环是逆时针还是顺时针，将面称为正面或负面。相应地，我们可以将 F划分为：$F = F^+ \cup F^-$。

从现在起，我们假设 [NMD] 成立，但在后续章节中，有时需要假设更强的 [NL2] 条件。

回顾一下，箭图是一个四元组 $Q = (Q_0, Q_1, h, t)$，表示一个有向图，其顶点为 Q_0，箭为 Q_1，并配有映射 $h, t:\ Q_1 \to Q_0$，将每条箭对应到其头和尾。若箭图配有映射 $|\cdot|: Q_1 \to G$，则称其按群 G 分级。

箭图 Q 的路径代数 CQ 是由路径张成的复向量空间，其乘法为：若路径可以连接，则取连接后的路径；否则乘积为零。我们

将箭头记为从右向左，因此 $\alpha\beta$ 是一个真正的路径，当且仅当 $t(\alpha) = h(\beta)$。箭图 $v \in Q_0$ 的每个顶点都对应一条长度为零的路径，称为顶点幂等元 1_v。这些顶点幂等元张成一个半单子代数，我们将其记作 $\mathbb{K} \cong \mathbb{C}^{Q_0}$。若 Q 是 G-分次的，则通过将每个箭头赋予其 G-度、并将每个顶点幂等元赋予 0 度，$\mathbb{C}Q$ 就成为一个分次 $\mathbb{K}$-代数。

人们很容易想到将弧集本身视为箭图，但我们不会这样做。相反，我们将考虑另一种箭图，它是在每条弧的中点放置一个顶点而得到的。

Definition 2.2. 给定一个将 (S, M) 分开的弧集 $\mathcal{A}$，我们定义如下的 $\mathbb{Z}_2$-分次箭图 $Q_{\mathcal{A}}$。

- 箭图的顶点是这些弧：$(Q_{\mathcal{A}})_0 = \mathcal{A}$。
- 对于每个面的角，我们定义一个箭头，对应于在该角相交的相邻弧之间的内部逆时针角。
- 如果两条弧在标记点处方向相同（都朝外或都朝内），则箭头的次数为零；否则次数为一。注意，$\mathcal{A}$ 是二聚体，当且仅当所有箭头的 $\mathbb{Z}_2$-次数均为 1。



我们将用希腊字母表示这些“角箭头”，并用 $h(\alpha)$ 和 $t(\alpha)$ 分别表示与箭头的头和尾相对应的弧（顶点）。每个角箭头还会绕着一个唯一的标记点转动，并且包含在一个唯一的面内。我们将分别用 $m(\alpha)$ 和 $f(\alpha)$ 表示它们。在这个箭图中，任意两个连续的箭头要么是绕着同一个标记点转动的角，要么对应于同一个面内的连续角。

$$t(\alpha) = h(\beta) \implies m(\alpha) = m(\beta) \text{ or } f(\alpha) = f(\beta)$$

Definition 2.3. 弧集 $\mathcal{A}$ 的温和代数 $\mathrm{Gtl}_{\mathcal{A}}$ 是 $Q_{\mathcal{A}}$ 的路径代数模掉由在同一面中连续的角所对应的箭头乘积生成的关系理想。

$$\mathrm{Gtl}_{\mathcal{A}} = \mathbb{C}Q_{\mathcal{A}}/\langle \alpha\beta \mid \alpha \text{ 和 } \beta \text{ 是面}\rangle\text{中的相邻角}$$

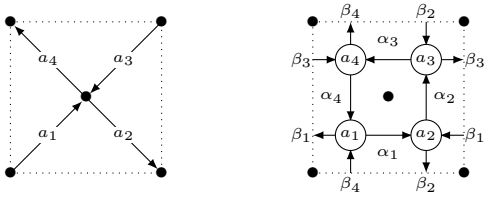
这个代数中的乘积法则可以用图示说明如下。



$\alpha\beta \neq 0$ $\qquad$ $\alpha\beta = 0$

Remark 2.4. 箭的数量为 $2|\mathcal{A}|$，因为每个顶点恰有两支箭进入、两支箭离开。更准确地说，对于每个角箭 α，恰有两支角箭 β_1 和 β_2 满足 $h(\alpha) = t(\beta_i)$。其中一支满足$\beta_1\alpha = 0$，另一支则满足 $\beta_2\alpha \neq 0$。同样，恰有两支 γ_i 满足$h(\gamma_i) = t(\alpha)$，一支满足 $\alpha\gamma_1 = 0$，另一支满足 $\alpha\gamma_2 \neq 0$。温和代数这一概念指的正是这一性质，其名称源自表示理论 [2]。温和代数的通常定义还要求代数是有限维的，但我们的代数并非如此。通过考察边界上带有标记点的曲面，可以得到有限维代数 [12, 16]。

EXAMPLE 2.5. 下方左侧的图展示了环面上的一个弧集，该环面有两个标记点。弧集包含 4 条弧和两个正方形面。箭图 $Q_{\mathcal{A}}$有 4 个顶点和 8 支角箭头。这些角箭头的次数均为 1。关系由所有路径 $\alpha_i\beta_j$ 和 $\beta_i\alpha_j$生成，其中箭彼此可合成。这意味着温和代数中的每条非零路径，要么只由$\alpha's$ 组成，要么只由 $\beta's$组成。前者绕第一个标记点转行，后者则绕第二个标记点转行。



一般而言，温和代数的非零路径对应于具有公共标记点的弧之间的正角。每条非零角路径都由其角箭头序列唯一确定，而围绕不同标记点转动的角路径的乘积为零。

对于每个 $m \in M$，我们定义

$$\ell_m = \alpha_1 \dots \alpha_k + \dots + \alpha_k \dots \alpha_1$$

其中， α_1、.....、 α_k是围绕 m 按逆时针方向排列的角箭头。这些元素表示围绕标记点的单环，并生成该代数的中心。

LEMMA 2.6.

$$Z(\mathrm{Gtl}_{\mathcal{A}}) = \mathbb{C}[\ell_m | m \in M]/(\ell_i\ell_j | i \neq j).$$

PROOF. 容易验证， $\alpha\ell_m = \ell_m\alpha$ 当且仅当 $m(\alpha) = m$ 且 $\alpha\ell_m = \ell_m\alpha = 0$ 当且仅当 $m(\alpha) \neq m$。这也意味着 $\ell_u\ell_v = 0$ 当且仅当 $u \neq v$。

设 $z = c\beta + \dots$是一个包含角路径 β的非零中心元，并令 α 为绕 m的循环中紧随 β 的角箭。那么我们有 $\alpha\beta \neq 0$，因此若 $\alpha z = z\alpha$ ，则 $\alpha\beta$ 必以 α 结尾，从而 β 必是绕 m若干个完整绕行的循环。因此， z 将包含 ℓ_m^r ，而ℓ_m^r 构成中心中路径长度为 > 0的部分的一组基。中心的长度为 0 的部分是 $\mathbb{C}$，因为箭图是连通的。
□

LEMMA 2.7. 作为一个 $Z(\mathrm{Gtl}_{\mathcal{A}})$-模，外部（$\mathbb{Z}_2$-分次）$\mathbb{K}$-导子由欧拉导子生成

$$E_\alpha := \alpha\partial_\alpha.$$

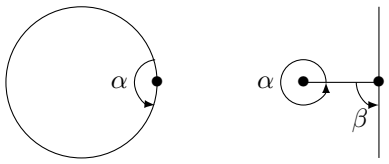
PROOF. 令 α 为一个角箭。若 d 是一个$\mathbb{K}$-导子，则 $h(d\alpha) = h(\alpha)$且$t(d\alpha) = t(\alpha)$。若 $d\alpha$ 包含一项 γ，且它不绕与 α相同的标记点旋转，令 β 为使 $\gamma\beta \neq 0$ 具有循环性的角。于是我们有 $\alpha\beta = 0$，因为它们绕不同的标记点旋转。因此

$$0 = d(\alpha\beta) = \gamma\beta + \dots \pm \alpha d\beta,$$

但这是不可能的，因为这两个分量分别绕着不同的标记点转动，因此无法相互抵消。

那么假设 $d\alpha$ 和 α 绕着同一个标记点 m 转动。在这种情况下，有以下几种可能。

(1) 如果 $a = h(\alpha) = t(\alpha)$，那么 a 要么形成一个单边环（这被条件 [NMD] 排除），要么 $\alpha = \ell_m$ 绕着一个标记点 m 完整绕行一周，并有一条弧 a 抵达。

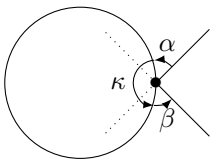


在后一种情况下， $d\alpha = g(\alpha)1_a$ 等于某个多项式 g。这个多项式不能含有常数项: 设 β 是面$f(\alpha)$中紧跟在 α 之后的箭。于是 α 和 β 分别绕着不同的标记点转动, 因此

$$0 = d(\beta\alpha) = (d\beta)\alpha \pm \beta g(\alpha) = \pm g_0\beta.$$

因此，对于 $z = g(\ell_m)\ell_m^{-1}$，有 $d\alpha = (g(\alpha)\alpha^{-1})\alpha = zE_\alpha(\alpha)$。

（2）若 $a = h(\alpha) \neq t(\alpha)$，且 a 是一个环，则存在一条角路径 κ： $a \to a$沿着 α 前进，但不会绕着 m形成完整绕行。



在这种情况下， $d\alpha$ 可以包含形如 $\kappa\alpha$的项。设 β 是紧跟在 κ之后的角箭头。注意， $\beta \neq \alpha$ ，否则弧 a 会形成一个单边环。由于 β 和 α 位于弧 a 的不同端点，我们有

$$d(\beta\alpha) = \beta(c\kappa\alpha + \dots) \pm (d\beta)\alpha = 0.$$

因此， $d(\beta)$包含 $c\beta\kappa$。交换子 $[c\kappa, -]$ 仅在角箭头 α 和 β的情况下非零。从 d 中减去它，即可消去这些项。

(3) 若 $a = t(\alpha) \neq h(\alpha)$ 且 a 是一个环，我们可以进行与上面类似的推理。(4) 若 $a = t(\alpha) \neq h(\alpha) = b$ 且 a, b 都是环，则 $d\alpha$ 可以包含形如 $\kappa_1\alpha\kappa_2$的项。若 κ_1 不是完整绕行，则令 β 为满足 $\beta\kappa_1\alpha\kappa_2 \neq 0$的角箭。由于 $\beta\alpha \neq 0$ ，我们得到

$$d(\beta\alpha) = \beta(c\kappa_1\alpha\kappa_2 + \dots) \pm (d\beta)\alpha = 0.$$

因此 κ_2 必须以 α 结尾，但这样一来 κ_2 就是完整绕行，所以 $\kappa_1\alpha\kappa_2 = \ell_m^r\kappa_1\alpha$, 我们可以用 $[\ell_m^r\kappa_1, -]$消去这一项。若 κ_1 是完整绕行，也可以采用同样的方法。

(5) 若 $h(\alpha)$ 和 $t(\alpha)$ 都不是环，则 $d(\alpha)$中的每条路径都形如 $\ell_m^r\alpha$。

从上述讨论中我们可以看到，通过减去交换子，我们可以去除所有不具有 $\ell_m^r\alpha$ 形式的项。□

REMARK 2.8. 引理 2.6 对带边界的带标记曲面也成立，但引理 2.7 在这种一般情形下并不成立（例如，考虑每个边界圆上各有一个标记点的圆柱面；它有一个弧集，其温和代数是克罗内克箭图 $\circ \implies \circ$）。不过，如果我们施加 [NL2] 条件，该引理仍然成立。

我们以对这一情形下的 Koszul 对偶的一种巧妙解释结束本节。若 $\mathcal{A}$ 是 (S, M) 上的一个弧集，取一组点 $F \subset S$，分别位于各个面的中心。对每条弧 a，画一条垂直弧 $a^\perp$，连接与 a 相邻的各面中心，并指向左侧面内部。对偶弧集 $\mathcal{A}^\perp = \{a^\perp \mid a \in \mathcal{A}\}$ 构成 (S, F) 上的一个弧集。

THEOREM 2.9. 温和代数的 Koszul 对偶是对偶弧集的温和代数：

$$(\mathrm{Gtl}_{\mathcal{A}})^! \cong \mathrm{Gtl}_{\mathcal{A}^\perp}.$$

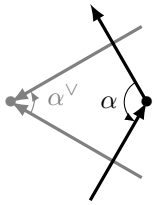
PROOF. 根据 Bardzell [3] 和 [5] 我们知道 $A = \mathrm{Gtl}_{\mathcal{A}}$ 有一个双模分解 $B^\bullet$ 由以下元素张成： $A \otimes_{\Bbbk} b \otimes_{\Bbbk} A$ 其中， $b = \beta_l \beta_{l-1} \cdots \beta_1 \in \mathsf{C}Q_{\mathcal{A}}$ 是一条由角箭头组成的路径，使得所有乘积 $\beta_i \beta_{i-1}$ 均为零。换句话说，这些路径会绕着面转弯。各项之间的映射具有如下形式

$$1 \otimes b_k \ldots b_1 \otimes 1 \mapsto b_k \otimes b_{k-1} \ldots b_1 \otimes 1 - (-1)^k 1 \otimes b_k \ldots b_2 \otimes b_1$$

因此，Koszul 对偶 $\mathrm{Ext}^\bullet_A(\Bbbk, \Bbbk) = \mathrm{H}\,\mathrm{Hom}(B^\bullet, {}_L\Bbbk \otimes \Bbbk_R)$ 由对偶基 $b^\vee$ 张成。元素 $b^\vee$ 对应于如下（右）模扩张

$$0 \leftarrow \mathbb{C}1_{t(\beta_l)} \xleftarrow{\beta_l} \mathbb{C}1_{h(\beta_l)} \leftarrow \cdots \leftarrow \mathbb{C}1_{t(\beta_1)} \xleftarrow{\beta_1} \mathbb{C}1_{h(\beta_1)} \leftarrow 0.$$

注意，我们使用右模，因为这样一来， α 和 $\alpha^\vee$ 的方向相反。将两个这样的模扩张拼接起来可以看出，如果这些路径绕着同一个面转弯，那么 Ext 乘积就对应于路径的（反向）连接。其他所有乘积均为零。特别地，Ext 代数由对偶角箭头和 $\alpha^\vee \beta^\vee = 0$ 张成，当且仅当 $m(\alpha) = m(\beta)$。最后，如果 α 是一个角箭头，那么 Koszul 对偶中的对偶$\alpha^\vee$ 的次数为 $1 - |\alpha|$。所有这些都可以通过将对偶角视为垂直弧之间的角，在几何上实现。



□

REMARK 2.10. 在上述定理中，我们指的是经典的 Koszul 对偶 [4]，其中温和代数被视为按路径长度分级的分次代数。若我们讨论 A_∞-代数的 Koszul 对偶，也有类似的结论，但此时需要使用按路径长度完备化的温和代数。

2.2. 轨道二边形。现在设 R 是一个包含于 C 上的完备局部交换环，其极大理想为 R^+，剩余域为 $R/R^+ = \mathsf{C}$。对于每个元素 $r \in Z(\mathrm{Gtl}_{\mathcal{A}})\text{“}\otimes R^+$，我们将在 $\mathrm{Gtl}_{\mathcal{A}}\text{“}\otimes R$ 上定义一个弯曲的 R-线性 A_∞-结构。与R/R^+ 张量后，所得结果就是 [5, 9], 中定义的温和 A_∞-代数，因此我们的构造给出了后者的一族变形。

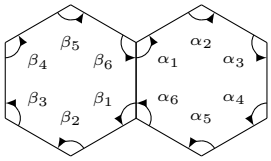
为了描述这些变形，我们需要引入双边形的概念。从直观上说，它是一个从圆盘到曲面的分支覆盖，使得边界映射到弧，而分支点映射到标记点。我们可以通过将面连接在一起来构造这样的分支覆盖。我们将分两步，以组合方式归纳地定义这一概念。

Definition 2.11. 树多边形是指在循环置换意义下的一些角序列。基本的树多边形来自面：如果 $(\alpha_k, \ldots, \alpha_1)$ 构成某个面的连续角，且 $h(\alpha_i) = t(\alpha_{i+1})$，那么它就是一个树多边形。

若 $(\alpha_k, \ldots, \alpha_1)$ 和 $(\beta_l, \ldots, \beta_1)$ 是树多边形，且 $\alpha_1\beta_l \neq 0$ 和 $\alpha_k\beta_1 \neq 0$在 $\mathsf{Gtl}_{\mathcal{A}}$ 中，则定义一个新的树多边形

$$(\beta_1\alpha_k, \alpha_{k-1}, \ldots, \alpha_2, \alpha_1\beta_l, \ldots, \beta_2)$$

从几何上看，这一操作沿着公共弧 $h(\beta_l) = t(\alpha_1)$ 将两个树多边形拼接在一起。



Remark 2.12. 根据这个定义可以推知，树多边形是由面的内部角序列以树状方式拼接而成的。这个树的节点是各个面，边是拼接处的弧，仅凭角序列即可重构这棵树。

设 $(\gamma_u, \ldots, \gamma_1)$ 是树多边形中所有不可分解角箭的序列。定义 σ 在 $\{1, \ldots, u\}$ 上的一个置换如下：对每个 i，存在唯一的最短非平凡路径 $\gamma_j \ldots \gamma_{i+1}$，满足 $i + u \leq j < i$，且其在 $S \setminus M$的万有覆盖中提升为可缩环。令 $\sigma(i) = j$ 模 u。容易证明，对于树多边形，我们有 $\sigma^2 = \mathrm{Id}$；并且 $\sigma(i) = i$ 当且仅当$h(\gamma_i)$ 是树多边形边界上的一条弧。这意味着内部弧与 σ中的 2-循环一一对应。另一方面，树的节点对应于置换 $\sigma \circ (u \ldots 1)$ 的轨道。事实上，这个置换沿着角前进，并在弧为内部弧时跨越该弧，因此会绕着各个面循环。若边和节点的轨道相交，则二者关联。

现在我们允许将树多边形边界上两条相邻且相同的弧折叠在一起。所得结果是一个带有内部标记点的圆盘状图形，因此有些角位于圆盘内部。我们用方括号表示内部内容。一般来说，我们会得到由方括号和逗号分隔的角序列，例如 $(\alpha, \beta[\gamma[\delta]\epsilon]\zeta[\eta])$。约化序列会删去方括号之间的所有内容：例如 $(\alpha, \beta\zeta)$。同样，我们归纳地进行。

Definition 2.13. 轨形二边形是由括号括起的角的循环序列。基本轨形二边形是不带任何括号的树多边形；如果 $(\ldots, U, \ldots)$ 是一个轨形二边形，且其中 U 的约化序列是一个绕标记点 m 完整绕行 r 圈的角，那么 $(\ldots [U] \ldots)$ 也是一个轨形二边形。轨形二边形的类型是一个多重集，其中包含引入这些括号所需的所有数对 $p = (m, r)$。这样的数对也称为轨形点。

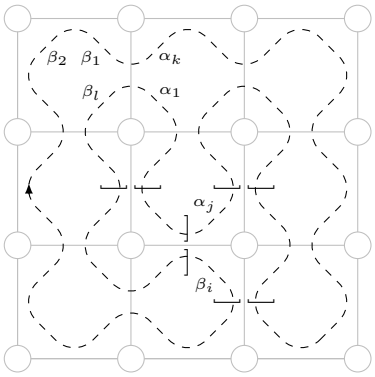
不同的树多边形可以折叠在一起形成同一个圆盘，因此我们还需要在轨道二边形上施加一个等价关系。假设 $(\alpha_k, \ldots, \alpha_1)$ 和 $(\beta_l, \ldots, \beta_1)$ 是树多边形，并且

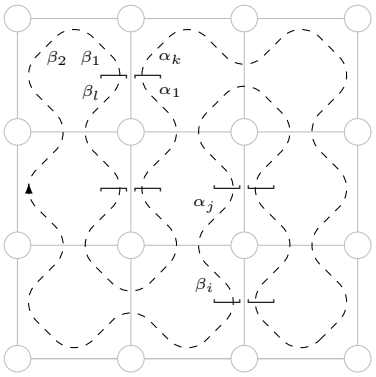
$$(\beta_1\alpha_k| \ldots |\alpha_j[\underbrace{\alpha_{j-1}| \ldots |\alpha_1}_{U_1}\underbrace{\beta_l| \ldots |\beta_{i+1}}_{U_2}]\beta_i| \ldots |\beta_2)$$

是一个双边形，其中 $|$分隔符可以是逗号或括号。然后，移位规则会将一个片段在括号之间移动，并颠倒分别属于两个树多边形的两部分 U_1, U_2 的顺序，如下所示

$$(\beta_1[\underbrace{\beta_l|\ldots|\beta_{i+1}}_{U_2}\underbrace{\alpha_{j-1}|\ldots|\alpha_1}_{U_1}]\alpha_k|\ldots|\alpha_j\beta_i|\ldots|\beta_2)$$

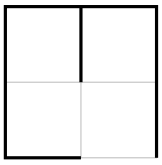
其中与 U_1 另一括号 U_2 配对的括号，反之亦然，都会翻转，以使公式成立。

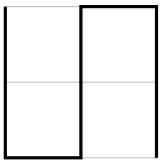




移位规则在轨道二边形上生成一个等价关系，该关系保持类型和约化序列不变。

REMARK 2.14. 每个树多边形都对应一棵树，其节点标记为面，边标记为弧。每次折叠操作都会向与弧 $a = h(U)$ 对应的图中添加另一条边。如此一来，我们得到一幅图，而这棵树是该图的一棵生成树。这幅图有时称为面图，它是平面的。它将平面划分为若干区域，每个区域都可以用类型多重集中的一对 (m, r) 标记。显然，等价关系会改变底层生成树，同时保持面图不变。对于上面的例子，面图是一个网格，其中有 3×3 个节点，生成树以粗体标出。





面图的生成树完全决定了双边形的未约化序列，因为该序列就是沿着树绕行的角序列。它也决定了括号：每当你穿过面图中不属于生成树的一条边时，就根据这是第一次还是第二次穿过该边来打开或关闭一个括号。

LEMMA 2.15. 两个双边形等价，当且仅当它们的面图作为带标记的平面图等价。

PROOF. 根据构造，移位规则不会改变底层面图。现在假设这两个轨道二边形具有同构面图，那么我们需要证明可以通过移位规则，从一棵生成树 T_1 转到另一棵生成树 T_2 。如果 a 是 T_1 中未包含的边（或对偶地说，弧）

在 T_2 中，那么移除 a后， T_1 将分裂成两部分（或对偶地说，分裂成树多边形）。将第一个树多边形中的角记为 $\alpha_k, \ldots, \alpha_1$，将第二个树多边形中的角记为$\beta_l, \ldots, \beta_1$，使得 $a = t(\beta_1) = h(\alpha_k)$。

由于 T_2 是连通的，它必定包含一条弧 b，连接 $T_1 \setminus \{a\}$的两个部分。现在找出指标 i、 j，使得 $b = h(\beta_i) = t(\alpha_j)$，并执行相应的移位规则。结果将是一个双边形，其生成树等于 $T_1 \setminus \{a\} \cup \{b\}$，这比 T_2更接近一步。重复此过程，直到生成树为 T_2。□

REMARK 2.16. 注意，我们也可以沿着约化序列中的公共弧将双边形拼接在一起：拼接底层的树多边形，并将括号转移到拼接后的树多边形上。新双边形的面图由两个较小双边形的图通过一条标记为公共弧的边连接而成。此外，由于公共弧必须包含在所有生成树中，这意味着较小的双边形由较大的双边形唯一确定。

LEMMA 2.17. 如果 $(\alpha_k, \ldots, \xi\eta, \ldots \alpha_1)$ 是一个轨道二边形的约化序列，且ξ, η 是非平凡角路径，那么有两种可能：

A 该轨道二边形由两个较小的轨道二边形拼接而成，其约化序列分别为 $(\beta_r, \ldots, \xi)$ 和 $(\gamma_r, \ldots, \eta)$，且 $\gamma_r\beta_r = \alpha_r$ 对某个 r 成立。 B 该轨道二边形由一个约化序列为 $(\alpha_k, \ldots, \xi, \ell_m^r h(\eta), \eta, \ldots, \alpha_1)$ 的轨道二边形折叠而成

在这两种情况下，这些轨道二边形都是唯一的。

PROOF. 考察该轨道二边形的面图。弧 $t(\xi) = h(\eta)$ 对应于该图中的一条边。若移除这条边后图仍然连通，则这个新图将是一个轨道二边形的图，该轨道二边形可以折叠为原来的轨道二边形，此时属于情况 B。否则，原来的轨道二边形由两个较小的轨道二边形拼接而成，此时属于情况 A。□

LEMMA 2.18. 对于给定的类型和约化序列，至多存在有限多个轨道二边形（在等价意义下）。

PROOF. 每一种括号方式都会改变括号中的两个逗号，并在类型的多重集中引入额外的一对。因此，未约化序列的长度（逗号和括号的数量）比多重集的大小多 2 倍，后者即未约化序列中的逗号数量。□

LEMMA 2.19. 如果弧集满足

- 无单边环或二边环条件 [NMD]，则所有树多边形的长度至少为 3。
- 无环或二环条件 [NL2]，那么所有轨道二边形的约化序列长度至少为 3。

PROOF. 若满足 [NMD]，则所有面至少都是三边形。将一个 n 边形与一个 m 边形粘合，得到一个 $n+m-2$ 边形；并且 $n+m-2 > 2$若 n， $m > 2$。此外，具有长度为一或二的约化序列的双边形会产生一个环或由两条弧构成的二环。□

2.3. 温和代数上的 A_∞-结构。固定一个交换环 R。回顾一下，若 A 是一个 Z-分次或 Z/2Z-分次的投射 R-模，则曲率 A_∞-结构是由一组 R-线性映射构成的

$$\mu^k : A^{\otimes_R i} \to A$$

次数为 $2-k$，满足曲弯的 A_∞ 公理：

$$\sum_{k\geq l\geq m\geq 0} (-1)^{\|x_m\|+\ldots+\|x_1\|}\mu(x_k,\ldots,\mu(x_l,\ldots,x_{m-1}),x_m,\ldots,x_1)=0.$$

这里，$\|x\|$ 是移位次数的简写：$\|x\| = |x| - 1$。如果 $l = m$，那么我们将中间的 $\mu()$ 解释为元素 $\mu^0 := \mu^0(1) \in A$。这称为曲率；若曲率为零，则称该结构为无曲率的。

若 A 是一个代数，我们称 μ 是一个乘积的扩张，如果 $a \cdot b = (-1)^{\deg b}\mu^2(a, b)$。如果 $A = \mathbb{C}Q/I \otimes R$ 来自某个箭图的路径代数，我们将对 $\mathbb{K} \otimes R$ 而非 R 取张量积，并要求顶点幂等元 1_v 是严格的：凡其中一个输入为此类幂等元的乘积 $\mu^{\neq 2}$ 均为零。

现在设 R 是一个局部幂零环或局部完备环，且其为 overC 上的环，极大理想为 R^+。固定一个元素 $r \in Z(\mathrm{Gtl}_{\mathcal{A}})\text{“}\otimes R^+$，其中“$\otimes$ 表示 R^+-进完备张量积。我们将此元素记作

$$r_0 + \sum_m r_m(\ell_m)$$

其中，$r_0 \in R^+$、$r_m(t) \in R^+[\![t]\!]$ 是 R^+值幂级数，且常数项为零；对于每个 $k \geq 1$，约化式 $r_m \in (R^+/(R^+)^k)[\![t]\!]$ 实际上都是多项式。我们将 $r_m(t)$的 j^{th} 系数记为 r_p，其中 $p = (m, j)$视为一个轨形点。我们还将 ℓ_p 作为 ℓ_m^j的简写。现在我们可以定义温和代数的一族扩张。

Definition 2.20. 对于任意 $r \in Z(\mathrm{Gtl}_{\mathcal{A}})\text{“}\otimes R^+$，我们定义 $\mathrm{Gtl}_{\mathcal{A}}\text{“}\otimes R$ 上的 ${}^r\mu_\bullet$ 如下：

- 对于每个轨形点 $p = (m, j)$，我们定义一个零元乘积

$${}^r\mathbb{\mu}_p^0 : \mathbb{K} \to \mathrm{Gtl}_{\mathcal{A}}\,\widehat{\otimes} R^+ : 1 \mapsto r_p\ell_m^j$$

- 对于每个具有长度为 k的约化序列$(\alpha_k, \ldots, \alpha_1)$的双边形 ψ，我们定义一个 k元乘积 ${}^r\mu_\psi$。若 β 和 γ 是满足 $\beta\alpha_{k+i} \neq 0$且 $\alpha_i\gamma \neq 0$ 的角，则令

$${}^r\mathbb{\mu}_\psi(\beta\alpha_{k+i},\ldots,\alpha_i) = r_\psi\beta \text{ and } {}^r\mathbb{\mu}_\psi(\alpha_{k+i},\ldots,\alpha_i\gamma) = (-1)^{|\gamma|}r_\psi\gamma.$$

其中 r_ψ 是所有 r_p 的乘积，p 遍历 ψ类型中的轨形点。如果类型为空（即 ψ 是一个树多边形），则令$r_\psi = 1$。所有其他 ${}^r\mu_\psi(\beta_1, \ldots, \beta_n)$（其中 β_i 为角）均为零。

总乘积是所有这些乘积与来自 r_0的总曲率之和：

$$
\begin{aligned}
{}^r\mathbb{\mu}^0 &= r_0\mu_1^0 + \sum_p {}^r\mathbb{\mu}_p \\
{}^r\mathbb{\mu}^1 &= \sum_{|\psi|=1} {}^r\mathbb{\mu}_\psi \\
{}^r\mathbb{\mu}^2 &= {}^r\mathbb{\mu}^2_{\mathrm{ord}} + \sum_{|\psi|=2} {}^r\mathbb{\mu}_\psi \\
{}^r\mathbb{\mu}^k &= \sum_{|\psi|=k} {}^r\mathbb{\mu}_\psi .
\end{aligned}
$$

其中， μ_1^0 是带有 $\mu_1^0(1) = 1$ 的零元乘积，而 ${}^r\mu^2_{\mathrm{ord}}$ 是$\mathsf{Gtl}_{\mathcal{A}}$中普通乘积的 R-线性扩张。根据引理 2.18，对于每种类型， k-轨道二边形的数量有限；并且 R 是幂零的或完备的，因此这一定义是良定义的。

Remark 2.21. 条件 [NMD] 意味着不存在长度为1或2的树多边形。这意味着 ${}^r\mu^1 = 0$ 模 R^+ 且 ${}^r\mu^2 = \mu^2_{\mathrm{Gtl}_{\mathcal{A}}}$ 模 R^+。条件 [NL2] 意味着不存在长度为1或2的轨道二边形。这意味着 ${}^r\mu^1 = 0$ 且 ${}^r\mu^2 = {}^r\mu^2_{\mathrm{ord}}$。

Remark 2.22. 如果 $r = 0$，那么有贡献的唯一 ${}^r\mu_\psi$ 来自树多边形，且每项都带有因子 $r_\psi = 1$。这些恰好对应于内部不覆盖标记点的浸入圆盘。因此，该定义等价于 [9]中的定义。在 [5] 中，高阶乘积的定义是通过归纳法给出的，其归纳步骤与我们用于定义树多边形的归纳步骤类似。因此，该定义也等价于 [5]中的定义。综合这两篇论文可知，当 $r = 0$时， ${}^r\mu$是一个无曲率的 A_∞-结构。如果 $r \neq 0$ ，那么 ${}^r\mu$将是这一无曲率 A_∞-结构的有曲率变形。

Remark 2.23. 每个高阶乘积都会消去一串构成双边形的角。若剩下的角来自第一个条目，我们称它为该乘积的前端；若来自最后一个条目，则称它为后端。

Proposition 2.24。 若 [NL2] 成立，则 ${}^r\mu$ 在 Gtl 上定义了良好的曲弯 A_∞-结构$_{\mathcal{A}}\widehat{\otimes}R$，且它在 $\mathbb{K} = \mathsf{C}^{\mathcal{A}}$ 上是严格的。

Proof. 我们需要检验曲弯 A_∞-公理。前两个公理

$$
{}^r\mathbb{\mu}^1({}^r\mathbb{\mu}^0(1)) = 0,\ {}^r\mathbb{\mu}^1({}^r\mathbb{\mu}^1(\alpha) + {}^r\mathbb{\mu}^2({}^r\mathbb{\mu}^0(1), \alpha) - {}^r\mathbb{\mu}^2(\alpha, {}^r\mathbb{\mu}^0(1)) = 0
$$

由以下事实很容易得出： ${}^r\mu^0(1)$ 是一个中心元，且 ${}^r\mu^1 = 0$。第三个公理成立，因为 ${}^r\mu_{\mathrm{ord}}$ 满足结合律，并且不存在 ${}^r\mu_3(\dots, {}^r\mu_0(1), \dots)$ 项，否则就会得到一个约化序列为 $(\dots[\ell^k_m]\dots)$、长度为 1 的双边形。这与引理 2.19 矛盾。

为证明高阶公理，首先注意到，根据构造，所有 ${}^r\mu$ 在 $\mathbb{K}$ 上都是严格的，因此我们只需在所有输入均为非平凡路径时检验这些公理。固定一个长度为 ≥ 4 的角序列（$\gamma_r, \dots, \gamma_1$），并假设存在一个非零双重乘积

$$
{}^r\mathbb{\mu}_u(\gamma_{s+t-1}, \dots, \gamma_{i+t}, {}^r\mathbb{\mu}_v(\gamma_{i+t-1}, \dots, \gamma_i), \gamma_{i-1}, \dots, \gamma_1)
$$

其中，$^r\mu_u$ 可以是 $^r\mu_{\mathrm{ord}}$（若 $s=2$），也可以是 $^r\mu_\psi$（若 $s>2$）；而 $^r\mu_v$ 可以是 $^r\mu_p$（若 $t=0$）、$^r\mu_{\mathrm{ord}}$（若 $t=2$）或 $^r\mu_\psi$（若 $t>2$）。这样的乘积由三元组 (u,v,i) 唯一确定。

每个非零双重乘积都是一条路径乘以因子 $\pm r_u r_v$（其中我们采用约定，即 $r_{\mathrm{ord}}=1$）。我们将证明，恰有另一个三元组的双重乘积非零，并且与之抵消。

为此，我们将系统地遍历所有可能的三元组 $(u,\ v,\ i)$，并区分 i 是 1、s 或位于中间的情况。对于每种情况，我们绘制可能情形的示意图，并且每种情形都会恰好出现两次（见图 2.1）。请注意，大多数示意图都有两个版本，具体取决于（唯一的／外侧的）高阶乘积是前端还是后端。我们只考虑后者。示意图以引理 2.17 中类型为 A、B 的操作命名，这些操作可以作用于轨道二边形，将它们拼接或折叠在一起。

(1) $(\psi,\ p,\ i)$

- 如果 $i=1$，那么 ℓ_p 包含 $^r\mu_\psi$ 的后端，我们处于情形$O1$。我们可以用一个类型相似、但 ℓ_p 包含前端的项来抵消这一项：$^r\mu_\psi(\gamma_s,\dots,\gamma_1,\ ^r\mu_p)$ 与 $^r\mu_\psi(^r\mu_p,\gamma_s,\dots,\gamma_1)$ 相消

- 如果 $1<i<s$，那么 ψ 有 ℓ_p 作为其一个角，我们处于情形$B1$。我们可以将这个双边形折叠在一起，形成一个新的双边形 ψ'，其具有 $r_{\psi'}=r_\psi r_p$。与之相消的另一项具有如下形式：$(\psi',\mathrm{ord},\ i-1)$。

- 如果 $i=s$ 且 ℓ_p 位于 γ_s 之前，那么 γ_s 要么短于 $^r\mu_\psi$ 的后端，要么长于它。如果较短，我们处于情形 $B2$。如果它比后端长，则弧 $t(\gamma_1)$位于 ψ 内部。在这种情况下，如果 $t(\gamma_1)$将 ψ 切成两部分，则归为类型 BA；如果它在一个标记点 q处打开第二次折叠，则归为 BB。前一种情况由一个形式为(ψ_1,ψ_2,i)的项抵消，后一种情况则由一个形式为(ψ_1,q,i)的项抵消。在这两种情况下，ψ_1 都包含轨形点 p 并具有前端) (2) $(\psi,\mathrm{ord},\ i)$

- 若 $1<i\le s$，则内积 $^r\mu^2(\gamma_{i+1},\gamma_i)$ 是来自双边形 ψ 的一个角；此时 $h(\gamma_i)$ 要么打开 ψ $(B1)$ 的一个折叠，要么将双边形一分为二（$A1L,A1R,A1M$）。前者由类型为（$\psi',p,i+1$）的项补偿，后者则由类型为（ψ_1,ψ_2,j）的项补偿。

- 若 $i=1$，且 γ_1 是 $^r\mu_\psi$ 的后端的一部分，则 $h(\gamma_1)$ 会将后端一分为二。这是情形 $O2$，由形式为（$\mathrm{ord},\psi,2$）的项补偿。若 $^r\mu_\psi$ 的后端是 γ_1 的一部分，则 $h(\gamma_1)$ 要么打开 ψ 的一个折叠，要么将双边形一分为二。与上文 $i\neq 1$ 的情形相同，我们处于（$B1,A1L,A1R,A1M$）这些情形，但此时 γ_1 等于六边形的顶边，而非底边。它们也分别由类型为（$\psi',p,i+1$）和（ψ_1,ψ_2,j）的项补偿。（3）（$\mathrm{ord},\ \psi,i$）

- 如果 $i=1$和 $^r\mu^2(\gamma_{t+1},{}^r\mu_\psi(\dots,\gamma_1))$ 在 $^r\mu_\psi$ 的后端前面放入某个元素，就可能出现三种情况。如果 γ_{t+1} 比第一个

角度短，那么 $h(\gamma_{t+1})$ 要么将 ψ 一分为二（$A2$），要么打开 $\psi(B2)$ 的一个折叠。这些情况由形式为（ψ_1, ψ_2, j）和（ψ', p, t）的项来补偿。

如果 γ_{t+1} 比第一个角更长，那么我们处于情形 $O3$，可以用一个类型相同但具有头的项来补偿它

$$ {}^r\mathbb{\mu}^2({}^r\mathbb{\mu}_\psi(\gamma_{t+1}, \ldots, \gamma_2), \gamma_1). $$

- 如果 $i = 2$，那么 ${}^r\mu^2({}^r\mu_\psi(\ldots, \gamma_2), \gamma_1)$ 会在 ${}^r\mu_\psi$的后端添加一些内容，因此我们处于情形 $O2$。

(4) (ψ_1, ψ_2, i)

- 如果 $i = 1$ 且 ${}^r\mu_{\psi_2}$ 有后端，那么我们处于 $A1M$。如果 ${}^r\mu_{\psi_2}$ 有前端，那么我们处于情形 $O4$。接着我们可以交换 ψ_1 和ψ_2的顺序，这会得到两个相互抵消的项：

${}^r\mu_{\psi_1}(\gamma_{s+t-1}, \ldots, {}^r\mu_{\psi_2}(\ldots, \gamma_1))$ 和 ${}^r\mu_{\psi_2}({}^r\mu_{\psi_1}(\gamma_{s+t-1}, \ldots), \ldots, \gamma_1)$。

- 如果 $1 < i < s$ 和 ${}^r\mu_{\psi_2}$ 的后端等于 ψ_1 的一个角，那么我们处于情形 $A1L$；如果它的前端等于一个角，那么我们处于情形 $A1R$。

- 如果 $i = s$ 和 ${}^r\mu_{\psi_2}$ 有一个前端，那么我们处于 $A1R$。如果它有一个后端，则取决于 ${}^r\mu_{\psi_1}$的后端。如果它至少与 ψ_2 的最后一个角一样长，那么我们处于情形 $A2$。否则，$t(\gamma_1)$会将ψ_2 切成两部分（情形 AA），或者打开一个折叠（AB）。前者由类型为 (ψ_1', ψ_2', j) 的项补偿，后者则由项 (ψ_1', p, j) 补偿。在这两种情况下，外积现在都有一个前端。注意，类型 AB 和 BA 似乎在列表中只出现一次，但这是因为它们被带有前端的项抵消了，而这些项不在列表中。

□

REMARK 2.25. 证明与 [9], 中的证明类似，但由于存在内部轨形点，还需要考虑额外的情形。这些情形的标签中都包含 B。证明也可以扩展到 [NL2]不成立的情况，但这将涉及更多额外情形。

REMARK 2.26. 也可以使用 R^+中的元素为双边形中的面赋权。为每个面 f 和 $i \in \mathbb{N}$选择一个元素 $s_{(f,i)} \in R^+$。随后通过归纳地定义树多边形的权重：如果角序列绕 f 转 i 圈，则令$(\alpha_{ik}, \ldots, \alpha_1)$的权重为$s_{(f,i)}$（注意，此定义也允许存在轨形面）。将两个树多边形拼接在一起时，其权重定义为二者权重的乘积。折叠操作会像之前一样额外乘上因子$r_{(m,j)}$。

这给出了 $\mathrm{Gtl}_{\mathcal{A}}$“$\otimes R$ 上的一族乘积 ${}^{r,s}\mu^\bullet$，它依赖于两组参数 $r\colon M \times \mathbb{N} \to R^+$ 和 $s\colon M \times \mathbb{N} \to R^+$。注意，曲率仅依赖于 r，而不依赖于 s。

同一组参数也可用于 Koszul 对偶 $\mathrm{Gtl}_{\mathcal{A}^!}$，但现在 r 和 s 的作用互换了，因为对于 Koszul 对偶，标记点和面的位置互换了。在这种情况下，s 会产生曲率，而 r 只对高阶乘积有贡献。不过请注意，如果 $s_{(f,j)}$ 对于无穷多个 (f, j) 的 $\widehat{\ }$ 都非零，我们就应改用完备版本 $\mathrm{Gtl}_{\mathcal{A}^!}$，这样曲率才有意义。

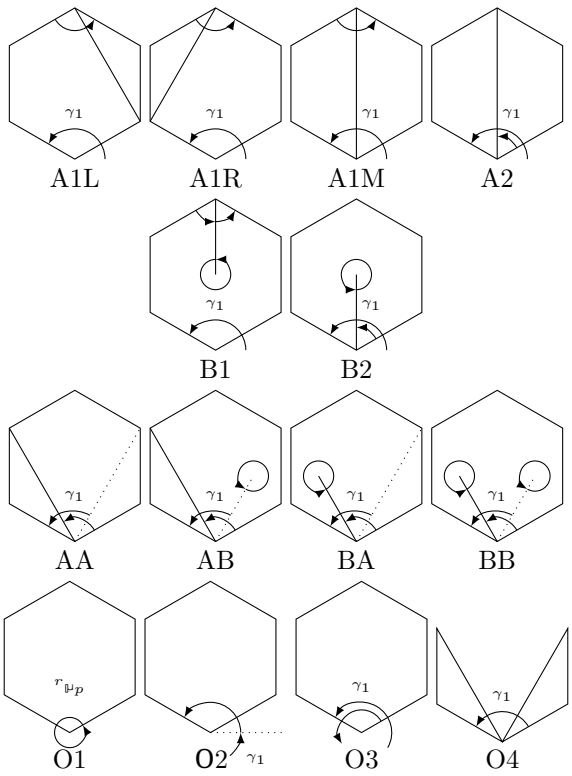


FIGURE 2.1. 双重乘积中可能出现的图示

3. Gentle A_∞-代数的霍赫希尔德上同调

3.1. 定义。

DEFINITION 3.1. 如果 (A,μ) 是定义在半单代数$\mathbb{K}$上的 Z- 或 $\mathbb{Z}_2$-分次 A_∞-代数，我们将 A_∞-霍赫希尔德复形定义为

$$\mathrm{CC}^\bullet(A) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\bigoplus_{i\geq 0} A[1]^{\otimes_{\mathbb{K}} i}, A[1])$$

每个元素 $\nu \in \mathsf{CC}^j(A)$ 都可以看作一组 n元乘积 ν^n ，其次数为 $1+j-n$，每个 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 对应一个乘积。我们将 ν^n 称为 ν 的第 n 个分量。

REMARK 3.2. 注意，这个空间上的分次并非霍赫希尔德上同调中由乘积中输入项的数量所决定的经典分次，而是由映射 $A[1]^{\otimes_{\mathbb{K}} i} \to A[1]$ 的次数所决定的分次。对于这种分次，乘积 μ 可视为 $\mathsf{CC}^1(A)$ 的一个元素。为避免混淆，我们将这个次数称为 ∞-次数 $\|\bullet\|$。如果我们采用 $\mathbb{Z}_2$-分次，也会将这种分次称为奇偶性，并将齐次部分记为 $\mathsf{CC}^{\mathrm{even}}(A)$ 和 $\mathsf{CC}^{\mathrm{odd}}(A)$。

- 在 $\mathrm{CC}^\bullet(A)$ 上有一个次数为 0 的括号：

$$[\kappa,\nu](a_r,\dots,a_1) := \sum_{0\le i\le j\le r} (-1)^{(\|a_1\|+\dots+\|a_i\|)\|\nu\|}\kappa(a_r,\dots,a_{j+1},\nu(a_j,\dots,a_{i+1}),a_i,\dots,a_1)$$
$$- (-1)^{\|\nu\|\|\kappa\|+(\|a_1\|+\dots+\|a_i\|)\|\kappa\|}\sum_{0\le i\le j\le r}\nu(a_r,\dots,a_{j+1},\kappa(a_j,\dots,a_{i+1}),a_i,\dots,a_1).$$

乘积 μ 的 A_∞-公理可改写为 $[\mu,\mu]=0$，
这也意味着 $d=[\mu,-]$ 是一个次数为 1 的微分，并且三元组

$$(\mathrm{CC}^\bullet(A),d,[,])$$

是一个微分分次李代数（DGLA）。Maurer-Cartan 方程的解

$$d\nu+\frac{1}{2}[\nu,\nu]=0$$

描述了 μ 作为弯曲 A_∞-结构的变形。

- $\mathrm{CC}^\bullet(A)$ 上还有第二种乘积：杯积。

$$(\kappa\smile\nu)(a_r,\dots a_1) := \sum_{0\le i\le j\le u\le v\le r}(-1)^{✠}\mu(a_r,\dots,\kappa(a_v,\dots,a_{u+1}),\dots,\nu(a_j,\dots,a_{i+1}),\dots,a_1)$$
$$\text{with } ✠ = (\|a^1\|+\cdots+\|a^u\|)\|\kappa\|+(\|a^1\|+\cdots+\|a^i\|)\|\nu\|+\|\nu\|+1$$

该乘积的次数为 1，并且与 d 一起满足分次莱布尼茨法则。因此

$$(\mathrm{CC}^\bullet(A)[-1],d,\smile)$$

它是一个微分分次代数（DGA）；若转向同调，则三元组

$$(\mathrm{HH}^\bullet(A)[-1],\smile,[,])$$

是一个 Gerstenhaber 代数。

REMARK 3。3. 普通非分次代数的霍赫希尔德上同调上的这两种经典结构最早由 Gerstenhaber [8] 进行了分析。这两种定义都已推广到 A_∞-代数，并且在文献中广为人知，参见例如 [15]。

Mescher [15] 对 A_∞-范畴采用了不同的符号约定。这意味着他对杯积的定义也采用了不同的符号。我们调整了符号，使其与我们对 A_∞-范畴的定义中的符号一致。特别是，按此定义的杯积关于霍赫希尔德上同调上 1 次的次数平移是分次对称的：

$$\nu\smile\eta=(-1)^{(\|\nu\|-1)(\|\eta\|-1)}\eta\smile\nu. \tag{3.1}$$

这一符号规则中意外出现的 1 位移是我们所期望的。事实上，这种“移位分次对称性”使得杯积相对于霍赫希尔德复形的“传统”分次真正成为分次对称的，而这种传统分次与 A_∞-分次恰好相差 1。换言之，如果将一个普通的非分次代数视为研究对象，并从零开始对霍赫希尔德上同调进行分次（而不是从负一开始），那么杯积就会成为分次对称的。

我们尝试安排符号，使杯积与 Gerstenhaber 括号共同作用，将 $\mathrm{HH}(\mathrm{Gtl}_A)$ 构成一个符号正确的 Gerstenhaber 代数。要成为 Gerstenhaber 代数，杯积的符号约定和

括号的符号约定需要相互协调。相关的相容条件是带符号莱布尼茨规则，其形式如下：

$$[\nu, \eta \smile \omega] = [\nu, \eta] \smile \omega + (-1)^{\|\nu\|(\|\eta\|-1)} \eta \smile [\nu, \omega].$$

我们尝试按照莱布尼茨法则来安排符号，但没有进行繁琐的检验。不过，我们参照[15]选择了符号。特别是，这些符号使得杯积能够下降到霍赫希尔德上同调，并且是分次对称的；后一点我们确实进行了手工验证。

REMARK 3.4. 若 (A,μ 0 $n \neq 2$ $x_i \in$ $\mu\ x_1\ \ldots\ x_n\ =$) 是在 A_∞ 上的严格幺 $\mathbb{K}$-代数，即 (, ,) 且至少一个 $\mathbb{K}$，则可以构造标准化霍赫希尔德上链复形 $\mathsf{CC}^\bullet(A)$。这是所有满足至少一个输入属于 $\mathbb{K}$ 时取值为零的上链所构成的子空间。该子空间在上述所有运算下封闭，而嵌入是一个拟同构 [10]。$\mathsf{CC}^\bullet(A)$ 的 Maurer- Cartan 方程对满足 $\mathbb{K}$ 仍保持严格的 μ 变形进行分类。

现在我们将具体讨论 $A = \mathsf{Gtl}_{\mathcal{A}}$ 是由弧集 $\mathcal{A}$ 配备 $\mu = {}^r\mu$（针对 $r = 0$）所得到的温和代数这一情形。我们已经看到，$\mathsf{Gtl}_{\mathcal{A}}$ 有自然的 Z_2-分次，因此 ∞-度是一个 Z_2-度，我们称之为奇偶性。这个 Z_2-分次可以提升为 Z-分次。为此，我们给每个角 α 赋予一个度 $\deg \alpha \in \mathsf{Z}$，使其与 $|\alpha|$ 具有相同的奇偶性。为了使这个度与 μ 相容，我们必须确保 μ 的 ∞-度为 1。只有当一个 k 边形中各角的总度为 $k-2$ 时，这一点才成立。由于每个角只出现在一个 k 边形中，这总是可以做到，但并非正则。

温和 A_∞-代数还具有一个来自相对一阶同调的额外分次

$$G = H_1(S \setminus M, \mathcal{A}, \mathbb{Z}).$$

这个群可以用角和面的术语来描述

$$G = \frac{\bigoplus_{\alpha \in (Q_{\mathcal{A}})_1} \mathbb{Z}\alpha}{\langle \alpha_1 + \cdots + \alpha_k \mid (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \text{ is a face} \rangle}.$$

群 G 自带两个自然映射

- $\pi : G \to \mathbb{Z}^{\mathcal{A}} : \alpha \mapsto h(\alpha) - t(\alpha)$
- $\iota : \mathbb{Z}^M \to G : m \mapsto \sum_{\alpha \in \ell_m} \alpha$

我们有 $\pi \circ \iota = 0$。π 的像的余秩为 1，而 ι 的核为 $(1, \ldots, 1)$。因此，如果 $\#M \geq 2$，映射 ι 非零。

若通过赋予每个角其在 G 中对应的次数来对 $\mathsf{Gtl}_{\mathcal{A}}$ 分次，则显然所有乘积 μ 的次数均为 $0 \in G$。我们可以将 G- 分次传递到霍赫希尔德复形，并且很容易看出，其中只有次数属于核 π的非零元素。此外，自然运算 $[,]$、$\smile$ 和 d 的G-次数均为 0。

REMARK 3.5. 从这一构造也显然可知，若 deg 和 deg′ 是 Z_2-分次的两个不同的 Z-提升，则它们之差经由 G 分解，因为 deg 和 deg′ 对一个面的赋次数相同。更准确地说，可能的 Z-分次构成一个 Hom(G,2Z)-挠子。

LEMMA 3.6. 如果 deg 是 $\mathsf{Gtl}_{\mathcal{A}}$ 上 Z_2-分次的一个 Z-提升，那么

$$\sum_{m \in M} \deg \ell_m = 4 - 4g - 2\#M = 2\chi(S, M) < 0.$$

这里， g 是带标记曲面（S, M）的亏格，而 χ（S, M）是其欧拉示性数（按假设为负）。

PROOF.

$$\begin{aligned}\sum_{m\in M}\deg \ell_m &= \sum_{\alpha\in(Q_{\mathcal{A}})_1}\deg\alpha = \sum_{f\in F}\deg f\\ &= \sum_{f\in F}(2-\#\{\alpha\in f\}) = 2\#F - 2\#\mathcal{A} = 2(2-2g)-2\#M.\end{aligned}$$

□

3.2. 约化到第零和第一分量。本节将证明，余循环的霍赫希尔德上同调类可以从第零和第一分量中读出。换言之，如果 ν^0 和 ν^1 均为零，那么 ν 就是一个余边界。注 3.4 使我们可以将讨论限制在归一化霍赫希尔德上同调中的上链。对于此类上同调类，我们将构造一个 $\epsilon \in \mathsf{CC}^\bullet(A)$，使得 $\nu - d\epsilon$ 在所有序列 $(\beta_k, \dots, \beta_1)$ 上的取值均为零，其中 β_i 是非平凡的角路径，且 $t(\beta_i) = h(\beta_{i+1})$。我们通常将添加余边界的过程称为规范变换。

DEFINITION 3.7. 设 $\beta = (\beta_k, \dots, \beta_1)$ 是一列非平凡的角，满足 $h(\beta_i) = t(\beta_{i+1})$ 对于 $i < k$ （我们不要求它构成循环，因此 $h(\beta_i)$、 $t(\beta_1$ 可以不同）。

- 如果所有 β_i 都是不可分解角（角箭头），则称 β 为初等的。
- 若 i ，则称其为可缩指标 $\beta_{i+1}\beta_i \neq 0$。
- 将可缩指标的集合记为 $\mathsf{Contr}(\beta)$，如果 $S \subset \mathsf{Contr}(\beta)$，那么收缩序列 β^S 将是这样一个序列：其中由可缩指标分隔的相邻角相乘在一起。
- 每个角序列都具有如下形式： β^S 其中， β 是初等的，且 S 是一个可缩指标集合。此外， β 和 S 是唯一确定的。如果两个序列是同一个初等序列的收缩，则称它们具有相同的类型。
- 序列的总长度将是其底层不可合成序列的长度。
- 对于一个初等序列， $\mathsf{Contr}(\beta) = \{\}$ 当且仅当它由一个多边形面的连续角组成。因此，我们将此类序列称为多边形序列。

LEMMA 3.8. 令 $\nu \in \text{核}(d) \subset \mathsf{CC}^\bullet(\mathsf{Gtl}_{\mathcal{A}})$ 满足 (A) $\nu^0 = \nu^1 = 0$。则 ν 可以通过规范变换进一步满足条件 (B) $\nu^2(\alpha, \beta) = 0$ ，对所有满足 $\alpha\beta \neq 0$ 的角路径对均成立。在规范变换过程中， ν 在多边形序列上的值保持不变。

PROOF. 我们将构造一个 $\varepsilon = \varepsilon^1$ ，使得当 $\alpha\beta \neq 0$时， $\nu^2(\alpha, \beta) = (d\varepsilon)^2(\alpha, \beta)$。对于每个不可分解角 α，令 $\varepsilon^1(\alpha) = 0$ 。现在按照以下规则，归纳地定义 ε^1 ，适用于可分解角（角路径）。

$$\varepsilon^1(\alpha\beta) = \varepsilon^1(\alpha)\beta + \alpha\varepsilon^1(\beta) - (-1)^{|\beta|}\nu^2(\alpha, \beta). \tag{3.2}$$

让我们检查，按照此规则扩展 ε^1 是良定义的，即 $\varepsilon^1((\alpha\beta)\gamma) = \varepsilon^1(\alpha(\beta\gamma))$。事实上，

$$\begin{aligned}
&\big(\varepsilon^1(\alpha\beta)\gamma + \alpha\beta\varepsilon^1(\gamma) - (-1)^{|\gamma|}\nu^2(\alpha\beta,\gamma)\big) - \big(\varepsilon^1(\alpha)\beta\gamma + \alpha\varepsilon^1(\beta\gamma) - (-1)^{|\beta\gamma|}\nu^2(\alpha,\beta\gamma)\big)\\
&= \varepsilon^1(\alpha)\beta\gamma + \alpha\varepsilon^1(\beta)\gamma - (-1)^{|\beta|}\nu^2(\alpha,\beta)\gamma + \alpha\beta\varepsilon^1(\gamma) - (-1)^{|\gamma|}\nu^2(\alpha\beta,\gamma)\\
&\ - \varepsilon^1(\alpha)\beta\gamma - \alpha\varepsilon^1(\beta)\gamma - \alpha\beta\varepsilon^1(\gamma) + (-1)^{|\gamma|}\alpha\nu^2(\beta,\gamma) + (-1)^{|\beta\gamma|}\nu^2(\alpha,\beta\gamma)\\
&= -(-1)^{|\beta|}\nu^2(\alpha,\beta)\gamma - (-1)^{|\gamma|}\nu^2(\alpha\beta,\gamma) + (-1)^{|\gamma|}\alpha\nu^2(\beta,\gamma) + (-1)^{|\beta\gamma|}\nu^2(\alpha,\beta\gamma)\\
&= (-1)^{|\beta|}(d\nu)(\alpha,\beta,\gamma) = 0.
\end{aligned}$$

在最后一行，我们用到了 $\nu^0 = \nu^1 = 0$。由此可得，对于满足 $\alpha\beta \neq 0$ 的角 α, β，有

$$(d\varepsilon)(\alpha,\beta) = (-1)^{|\beta|}\varepsilon^1(\alpha)\beta + (-1)^{|\beta|}\alpha\varepsilon^1(\beta) - (-1)^{|\beta|}\varepsilon^1(\alpha\beta) = \nu^2(\alpha,\beta)$$

正如所需。此外，$(d\varepsilon)^0 = (d\varepsilon)^1 = 0$，并且如果 $(\alpha_k, \ldots, \alpha_1)$ 是一个多边形序列，那么

$$(d\varepsilon)(\alpha_k,\ldots,\alpha_1) = \varepsilon(\mu(\alpha_k,\ldots,\alpha_1)) + \mu(\ldots,\varepsilon(\alpha_i),\ldots) = 0.$$

因为所有 α_i 都是不可分解的，所以 $\varepsilon(\alpha_i) = 0$。 □

LEMMA 3.9. 设 $\nu \in \mathrm{Ker}(d) \subset \mathrm{CC}^\bullet(\underline{\mathrm{Gtl}}_A)$，满足 (A) $\nu^0 = \nu^1 = 0$，且满足 (B)$\nu^2(\alpha, \beta) = 0$，若 $\alpha\beta \neq 0$。那么 ν 可以通过规范变换使其在多边形序列上取值为零，同时不影响条件 (A)、(B)。

PROOF. 我们先作一个小小的说明，这对理解论证很重要。注意，沿着多边形 $(\alpha_N, \ldots, \alpha_1)$ 绕行时，边界弧可以按顺时针或逆时针方向定向。如果两个相邻的弧 $a_i = t(\alpha_i)$ 和$a_{i+1} = h(\alpha_i)$ 的方向相同，那么 $|\alpha_i| = 1$ 和 $\|\alpha_i\| = 0$。



因此，如果我们有一个多边形序列 $(\alpha_{i+k}, \ldots, \alpha_{i+1})$，那么当总移位次数 $\|\alpha_{i+k}\| + \ldots + \|\alpha_{i+1}\|$ 为零（一）时， $h(\alpha_{i+k})$ 和 $t(\alpha_{i+1})$ 的方向相同（不同）。

使用移位次数很有用，因为 $\|\nu(\alpha_{i+k}, \ldots, \alpha_{i+1})\|$ 的移位次数等于总移位次数 $\|\alpha_{i+k}\| + \ldots + \|\alpha_{i+1}\|$ 加上 ν 的奇偶性。基于这一点，我们将根据 ν 的奇偶性区分两种情况。

- 的奇偶性为奇数。我们采用归纳法。将一个长度为 N的基本多边形（$\alpha_N, \ldots, \alpha_1$）视为研究对象，并假设 ν在其长度为 $\leq k-1$的多边形序列上已经消失。我们将同时通过规范变换消去该多边形长度为 k 的多边形序列上的ν 。

  首先注意到，一条弧在一个面的边界上最多出现两次；如果出现两次，由于曲面是可定向的，因此它必须分别沿该面的顺时针方向和逆时针方向定向。这意味着，如果 $\nu(\alpha_{i+k}, \ldots, \alpha_{i+1})$ 中包含一个恒等元，那么 k 必须是 N 的一个倍数。事实上，如果 $k < N$，并且结果中存在一个恒等元 1_a，那么 $t(\alpha_{i+1}) = h(\alpha_{i+k}) = a$。由于 a 绕该面的两种定向不同，因此 $(\alpha_{i+k}, \ldots, \alpha_{i+1})$ 的移位次数为奇数。由于 ν 是

奇数， $\nu(\alpha_{i+k},\dots,\alpha_{i+1})$ 将是偶数，因此它不能包含 1_a（其移位次数为奇数）。

现在假设 k 不是 N的倍数。那么我们可以写成$\nu(\alpha_{i+k},\dots,\alpha_{i+1})$ $=\alpha_{i+k}\delta^{(i+k)}+\gamma^{(i+1)}\alpha_{i+1}$。注意

$$\begin{aligned}0=&(d\nu)(\alpha_{i+k+1},\dots,\alpha_{i+1})\\ =&(-1)^{\|\alpha_{i+k}\|+\dots+\|\alpha_{i+1}\|}\alpha_{i+k+1}(\alpha_{i+k}\delta^{(i+k)}+\gamma^{(i+1)}\alpha_{i+1})\\ &+(-1)^{\|\alpha_{i+1}\|+|\alpha_{i+1}|}(\alpha_{i+k+1}\delta^{(i+k+1)}-\gamma^{(i+2)}\alpha_{i+2})\alpha_{i+1}\\ =&\alpha_{i+k+1}((-1)^{\|\alpha_{i+k}\|+\dots+\|\alpha_{i+1}\|}\gamma^{(i+1)}-\delta^{(i+k+1)})\alpha_{i+1}.\end{aligned}$$

在计算第一行时，我们使用了归纳假设。无论弧的方向如何，角 α_{i+k+1}和 $\gamma^{(i+1)}$ 可合成，且$\delta^{(i+k+1)}$和 α_{i+1}可合成。由此可得，对所有 i， $\delta^{(i+k+1)}=(-1)^{\|\alpha_{i+k}\|+\dots+\|\alpha_{i+1}\|}\gamma^{(i+1)}$。令对所有$i$， $\varepsilon(\alpha_{i+k-1},\dots,\alpha_{i+1})=(-1)^{\|\alpha_{i+k-1}\|+\dots+\|\alpha_{i+1}\|+1}\delta^{(i+k)}$。那么

$$\begin{aligned}(d\varepsilon)(\alpha_{i+k},\dots,\alpha_{i+1})&=\alpha_{i+k}\delta^{(i+k)}+(-1)^{\|\alpha_{i+k}\|+\dots+\|\alpha_{i+2}\|+1+|\alpha_{i+1}|}\delta^{(i+k+1)}\alpha_{i+1}\\ &=\alpha_{i+k}\delta^{(i+k)}+\gamma^{(i+1)}\alpha_{i+1}=\nu(\alpha_{i+k},\dots,\alpha_{i+1}).\end{aligned}$$

我们有 $(d\varepsilon)^0=(d\varepsilon)^1=0$。现在来检查， $d\varepsilon$ 不会影响任何其他基本多边形序列，也不会影响同一多边形中长度为 $l\le k-1$ 的序列。对于同一多边形中的较短序列，我们有

$$(d\varepsilon)(\alpha_{i+l},\dots,\alpha_{i+1})=\mu(\dots,\varepsilon,\dots)+\varepsilon(\dots,\mu(\alpha_{i+s+tN},\dots,\alpha_{i+s+1}),\dots)$$

其中 N 是多边形的长度。第一项为零，因为$l\le k-1$。在第二项中，内层的 μ 只能产生一个恒等元，而 ε 为零。对于其他多边形中的序列，类似的论证同样适用。我们已确保，在通过 ε 进行规范变换时， $\nu^{0,\,1}=0$ 保持不变。对于$k>2$，$(d\varepsilon)^2$ 也为零。若 $k=2$，则在少数情况下 $(d\epsilon)^2(\alpha,\beta)$ 可能非零，但我们可以应用引理 3.8 来解决这一问题，而不改变多边形序列上的 ν。

最后，我们来处理 k 是多边形长度 N 的倍数的情形。除恒等元外，我们可以像上文一样，通过规范变换消去 $\nu(\alpha_{i+k},\dots,\alpha_{i+1})$ 中的所有内容。剩下的就是检查这些恒等元。记 $\nu(\alpha_{i+k},\dots,\alpha_{i+1})=c_i1_{a_i}$。注意，我们有

$$\begin{aligned}0&=(d\nu)(\alpha_{i+k+1},\dots,\alpha_{i+1})\\ &=\alpha_{i+k+1}\nu(\alpha_{i+k},\dots,\alpha_{i+1})-\nu(\alpha_{i+k+1},\dots,\alpha_{i+2})\alpha_{i+1}\\ &=c_i\alpha_{i+k+1}-c_{i+1}\alpha_{i+1}=(c_i-c_{i+1})\alpha_{i+1}.\end{aligned}$$

这里我们利用了 ν 在长度为 $\le k-1$ 的同一多边形序列上已经为零。由此可得，多边形周围的所有 c_i 都相等。将该值记为 c。选取多边形中的一个角 α_1，并定义 $\varepsilon(\alpha_{k-N+1},\dots,\alpha_1):=c\alpha_1$。正如所期望的那样，

$$\begin{aligned}(d\varepsilon)(\alpha_{i+k},\dots,\alpha_{i+1})&=\mu(\dots,\varepsilon(\alpha_{k+1},\dots,\alpha_1),\dots)\\ &=c\mu(\alpha_{i+N},\dots,\alpha_{i+1})=c1_{a_i}.\end{aligned}$$

在第一行中，我们利用了长度为$k-N+1$的序列 $\alpha_1,\dots,\alpha_{k-N+1}$在序列 $\alpha_{i+k},\dots,\alpha_{i+1}$ 中恰好出现一次这一事实，因此

一个内层 ε 恰好可以应用一次。我们看到 $(d\varepsilon)^0 = (d\varepsilon)^1 = 0$。让我们检查 $d\varepsilon$ 是否在同一多边形中长度为$l \leq k-1$ 的任意多边形序列 $\beta_1, \ldots, \beta_l$ 上消失。确实，

$$(d\varepsilon)(\beta_l, \ldots, \beta_1) = \varepsilon(\ldots, \mu(\ldots), \ldots) + \mu^2(\ldots, \varepsilon(\ldots), \ldots) + \mu^{\geq 3}(\ldots, \varepsilon(\ldots), \ldots).$$

第一项为零，因为内部的 μ 只给出恒等态射。第二项为零，因为内部 ε 的结果是其输入序列中第一个（等价地说，最后一个）输入的倍数，因此无法与外部 μ^2 的输入角合成。第三项为零，因为 ε 消耗 $k-N+1$ 个输入，而外部 $\mu^{\geq 3}$ 还需要 $N-1$ 个输入；但序列 $\beta_1, \ldots, \beta_l$ 的长度只有 $l \leq k-1$。同样，可以验证 $d\varepsilon$ 在其他多边形中的多边形序列上恒为零。对于 $k > N$，我们有 $(d\varepsilon)^2 = 0$。对于 $k = N$，可能会出现 $(d\varepsilon)^2 \neq 0$，但我们通过应用引理 3.8 来解决这一点。

总之，在这次证明中，我们进行了 ν 无穷多次规范变换。然而， ε 这些规范变换的输入长度越来越大。此外，我们只有限次调用引理 3.8，这意味着所有规范变换之和在 $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(\bigoplus_{i>0} A[1]^{\otimes_{\Bbbk} i}, A[1])$ 中有定义，因此我们得出结论：它是一个 Hochschild 上链。

- ν 的奇偶性为偶。与奇数情形一样，我们再次按多边形序列 k 的长度进行归纳。

我们先检查 $\nu(\alpha_{i+k}, \ldots, \alpha_{i+1})$中是否可能存在恒等态射。如果 k是 N 的倍数，则 α_{i+1} 的源弧等于 α_{i+k}的目标弧；特别地， $||\nu(\alpha_{i+k}, \ldots, \alpha_{i+1})||$ 是偶数，且不包含恒等态射。如果 k 不是 N的倍数，我们观察到

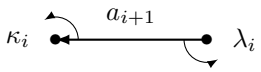
$$(d\nu)(\alpha_{i+k+1}, \alpha_{i+k}, \ldots, \alpha_{i+1}) = \alpha_{i+k+1}\nu(\alpha_{i+k}, \ldots, \alpha_{i+1}) + \nu(\alpha_{i+k+1}, \ldots, \alpha_{i+2})\alpha_{i+1}.$$

由于 k 不是 N的倍数，我们有 $\alpha_{i+k+1} \neq \alpha_{i+1}$ ，由此得出$\nu(\alpha_{i+k}, \ldots, \alpha_{i+1})$不包含恒等态射。

现在我们通过规范变换将 $\nu(\alpha_{i+k}, \ldots, \alpha_{i+1})$化为零。姑且将多边形弧 a 的顺时针端点和逆时针端点分别称为“头”和“尾”，以此指代该弧 a两端的顶点。对每个 i ，我们记

$$\nu(\alpha_{i+k}, \ldots, \alpha_{i+1}) = \kappa_i + \lambda_i,$$

其中 κ_i 包含从 a_{i+1} 的“头”出发并且从 $a_{i+1} = t$的“尾”出发的角路径（α_{i+1}）。



我们证明 λ_i 必然消失。考虑 α_{i+1}的源弧 a_{i+1} 和 α_{i+k}的目标弧 a_{i+k+1}。我们有

$$0 = (d\nu)(\alpha_{i+k+1}, \ldots, \alpha_{i+1}) = \alpha_{i+k+1}(\kappa_i + \lambda_i) + (\kappa_{i+1} + \lambda_{i+1})\alpha_{i+1}.$$

我们知道，根据 a_{i+1} 和 a_{i+k+1} 相对于多边形的朝向是否一致， κ_i 是奇数或偶数。由于 κ_i 总是从 a_{i+1} 的“头”开始，我们由其次数推知，它总是终止于 a_{i+k+1} 的“尾”。特别地， $\alpha_{i+k+1}\kappa_i = 0$。类似地， λ_i 从 a_{i+1} 的“尾”开始，因此终止于 a_{i+k+1} 的“头”，无论 a_{i+1} 和 a_{i+k+1} 的朝向是否一致。特别地， α_{i+k+1} 和 λ_i 是

可合成的。但 α_{i+1} 从 a_{i+1} 的“头”开始，而 λ_i 从 a_{i+1} 的“尾”开始，因此各项 $\alpha_{i+k+1}\lambda_i$ 和 $(\kappa_{i+1}+\lambda_{i+1})\alpha_{i+1}$ 由互不相交的角集合构成。由于整个和应当为零，我们得出 $\lambda_i = 0$。

由于 κ_i 从 α_{i+1} 的一侧开始，而 $\nu(\alpha_{i+k},\dots,\alpha_{i+1})$ 不含恒等元，因此我们可以写作 $\kappa_i = \gamma_i\alpha_{i+1}$。我们的目标是通过规范变换将 $\nu(\alpha_{i+k},\dots,\alpha_{i+1})$ 变为零。首先，我们通过规范变换消去所有项，仅保留可能是 α_{i+1} 的标量倍数的项；它来自 γ_i 中可能出现的恒等元。令 $\varepsilon(\alpha_{i+k},\dots,\alpha_{i+2}) \coloneqq \gamma_i$。于是

$$(d\varepsilon)(\alpha_{i+k},\dots,\alpha_{i+1}) = \gamma_i\alpha_{i+1} + \alpha_{i+k}\gamma_{i-1}.$$

除了 γ_{i-1}中的恒等元外，角 α_{i+k} 和 γ_{i-1} 不能复合。为说明这一点，考虑两种情况。如果 a_i 和 a_{i+k} 的方向相反，那么 $\nu(\alpha_{i+k-1},\dots,\alpha_i) = \kappa_{i-1}$ 为偶数。因此，γ_{i-1} 从与 α_{i+k} 离开处相对的一侧进入 a_{i+k}。如果 a_i 和 a_{i+k} 的方向相同，那么κ_{i-1} 为奇数，且 γ_{i-1} 仍从与 α_{i+k}离开处相对的一侧进入 a_{i+k}。无论哪种情况，我们都有 $\alpha_{i+k}\gamma_{i-1} = 0$，而 $\gamma_i\alpha_{i+1} = \kappa_i$ 仍如所需。

让我们检查一下，$d\varepsilon$ 在其他多边形中的多边形序列上，以及在同一多边形中长度短于 k 的多边形序列上均为零。事实上，

$$(d\varepsilon)(\beta_l,\dots,\beta_1) = \varepsilon(\dots,\mu(\dots),\dots) + \mu(\dots,\varepsilon(\dots),\dots).$$

在第一项中，内层 μ 只能产生恒等映射，而 ε在恒等映射上为零。在第二项中，内层 ε 的输入序列必须来自与 $\alpha_1,\dots,\alpha_N$相同的多边形，且长度恰为 $k-1$。由于外层 μ是 $\mu^{\geq 2}$，这意味着 $\beta_1,\dots,\beta_l$ 的长度至少为 k，而这并非原先的假设。

最后，让我们通过规范变换消去$\nu(\alpha_{i+k},\dots,\alpha_{i+1})$中 α_{i+1} 的剩余标量倍数。对于 $i\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$，记 $\nu(\alpha_{i+k},\dots,\alpha_{i+1}) = c_i\alpha_{i+1}$。若$c_i\neq 0$，则可推出 α_{i+k} 的目标弧等于α_{i+1}的目标弧，也就是说，$a_{i+k+1} = a_{i+2}$。此外，ν 是偶的，因此 a_{i+k+1} 和a_{i+2} 的定向相同。换言之，a_{i+k+1} 和 a_{i+2} 作为弧相等，且在多边形中的定向相同。正如我们在奇数情形中所指出的，这只有在 $i+k+1 = i+2$ 属于$\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$时才可能。由此得出，若某个 c_i 不为零，则对于某个 $l\geq 1$，有 $k = lN+1$。

假设 $k = lN+1$，我们来证明多边形上的不同 c_i 彼此相关。确实，

$$0 = (d\nu)(\alpha_{(l+1)N},\dots,\alpha_1) = \sum_{i=1}^{N} c_i 1_{a_1} + \mu^2(\alpha_{(l+1)N},\nu(\dots)) + \mu^2(\nu(\dots),\alpha_1).$$

我们利用了这样一点：一个内侧 ν 可以恰好放置在 N 种位置，从而复制相应的角 α_i，并与其余角共同构成一个圆盘。此外，内侧 μ 不可能存在，因为它只会产生恒等式。外侧 μ^2 是可能的，但只会产生非空角，而这些角可以与恒等式区分开来。由此我们推得，所有c_i之和为零。令

$$\varepsilon(\alpha_{i+lN},\dots,\alpha_{i+1}) \coloneqq -\left(\sum_{j=1}^{i-1} c_j\right) 1_{a_{i+1}}.$$

Then

$$(d\varepsilon)(\alpha_{i+lN+1},\ldots,\alpha_{i+1}) = -\sum_{j=1}^{i-1} c_j\alpha_{i+lN+1} + \sum_{j=1}^{i} c_j\alpha_{i+1}.$$

由于关于 c_i 的求和为零，因此这个定义对 $i \in \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$是有意义的。各项求和相互抵消，因为 $\alpha_{i+lN+1} = \alpha_{i+1}$，而 $c_i\alpha_{i+1}$ 则如期保留下来。通常可以验证， $d\varepsilon$ 在较短的多边形序列或其他多边形上没有取值。

□

LEMMA 3.10. 设 $\nu \in \mathrm{Ker}(d) \subset \mathrm{CC}^\bullet(\underline{\mathrm{Gtl}}_{\mathcal{A}}$ 满足 (A) $\nu^0 = \nu^1 = 0$、(B) $\nu(\alpha,\beta) = 0$（若 $\alpha\beta \neq 0$ ），并假设 (C) ν 在多边形序列上为零。那么 ν 可以通过规范变换，使其在所有角序列上都为零。

PROOF. 我们通过规范变换使 ν 归零来证明该命题，并按角序列的总长度进行归纳。每次规范变换后，我们都会证明所有附加假设 (A-C) 仍然成立。

我们已经知道 $\nu^1 = 0$ ，并且当 (α,β) 是长度为二的序列时，(α,β) 中至少有一个是多边形序列，因此由 (B) 和 (C)，总长度不超过 2 时结论成立。

现在令 $(\alpha_k,\ldots,\alpha_1)$ 为任意一个由 $k \geq 3$ 个角组成的序列 $\alpha_i\colon\ a_i \to a_{i+1}$。根据归纳假设， ν 在所有较短序列上已经为零。由于 ν 在多边形序列上已经为零，我们可以假设 $(\alpha_k,\ldots,\alpha_1)$ 不是多边形序列。

我们将对同一类型的所有其他序列同时对 $(\alpha_k,\ldots,\alpha_1)$ 上的 ν 进行规范变换，因此我们假设 $(\alpha_k,\ldots,\alpha_1)$ 是初等的。现在，$(\alpha_k,\ldots,\alpha_1)$ 由不可分解角组成，其中至少有一对是可合成的（否则它将是一个多边形序列）。在这个证明中，弧的定向不会起任何作用，除了决定角的次数之外。为简单起见，我们假设所有 α_i 都具有奇数次数。（二聚体的情形便是如此。）类似地，ν 具有奇偶性，要么为奇，要么为偶，而我们所写的符号对应于奇数情形。

令 $\mathrm{Contr}(\beta)$ 为所有可缩指标的集合，且 $s = \max(\mathrm{Contr}(\beta))$。我们现在将同时对所有 β^S 进行规范变换，对于 $S \subseteq \mathrm{Contr}(\beta)$。置

$$\varepsilon(\beta^{\{s\}\cup T}) = (-1)^{|T|}\nu(\beta^T), \quad T \subseteq \mathrm{Contr}(\beta)\setminus\{s\}.$$

我们证明，对于所有 $S \subseteq \mathrm{Contr}(\beta)$，均有 $(d\varepsilon)(\beta^S) = \nu(\beta^S)$。

- 在 $s \notin S$ 的情况下，我们有

$$(d\varepsilon)(\beta^S) = \varepsilon(\beta^{\{s\}\cup S}) = (-1)^{|S|}\nu(\beta^S).$$

  根据定义。注意，任意 ε（……，$\mu^{\geq 3}$，……）和 μ（……，ε，……）都为零，因为它们的 ε 输入序列比（α_k，……，α_1）更短。
- 在 $s \in S$ 的情况下，首先注意到，对于 $K \subseteq \mathrm{Contr}(\beta)$，我们有

$$\sum_{t\notin K}(-1)^{1+|K_{<t}|}\nu(\beta^{K\cup\{t\}}) = (d\nu)(\beta^K) \mp \nu(\ldots,\mu^{\geq 3},\ldots) \mp \mu(\ldots,\nu,\ldots) = 0.$$

  这里，$|K_{<t}|$ 表示 K 中小于 t的指标个数。事实上，第二项和第三项都为零，因为 ν的输入序列

短于 β。现在将这一观察用于 $K = S \setminus \{s\}$，我们得到

$$\begin{aligned}(d\varepsilon)(\beta^S) &= -\sum_{t\notin S}(-1)^{1+|S_{<t}|}\varepsilon(\beta^{S\cup\{t\}})\\ &= \sum_{t\notin S}(-1)^{|S\setminus\{s\}\cup\{t\}|+|S_{<t}|}\nu(\beta^{S\setminus\{s\}\cup\{t\}})\\ &= \sum_{t\notin S\setminus\{s\}}(-1)^{|S|+1}(-1)^{|(S\setminus\{s\})_{<t}|+1}\nu(\beta^{S\setminus\{s\}\cup\{t\}}) - (-1)^{|S|+1}(-1)^{|S_{<s}|+1}\nu(\beta^{S\setminus\{s\}\cup\{s\}})\\ &= 0+\nu(\beta^S)\end{aligned}$$

如所需。在第一行中，我们利用了所有 $\varepsilon(\ldots,\mu^{\geq 3},\ldots)$ 和 $\mu(\ldots,\varepsilon,\ldots)$ 消失h 因为它们h的输入序列 o f ε 是 s h orter t han $(\alpha_k, \ldots\ldots, \alpha_1)$。最后，$(d\varepsilon)^0 = (d\varepsilon)^1 = 0$ 在多边形序列 $\gamma_l,\ldots,\gamma_1$上消失，而 $d\varepsilon$。事实上，

$$(d\varepsilon)(\gamma_l,\ldots,\gamma_1) = \varepsilon(\ldots,\mu,\ldots)+\mu(\ldots,\varepsilon,\ldots). \tag{3.3}$$

第一项之所以消失，是因为内层 μ 只产生顶点幂等元。第二项之所以消失，是因为 ε 的输入序列仅由不可分解的角组成，而 ε 有定义的序列 $\beta^{\{s\}\cup T}$ 至少包含一个可分解的角。

接下来，注意到当输入是顶点幂等元时，$d\varepsilon$ 会消失。现在假设 $\gamma_l,\ldots,\gamma_1$ 是任意一列非空角，其总长度小于或等于 $\alpha_k,\ldots,\alpha_1$的总长度。再次考虑和式 (3.3)。当 $\mu^{\geq 3}$ 时，第一项消失，因为此时 ε 的输入序列总长度小于 $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$。如果对于某个 μ^2，第一项不消失，我们便得出结论：该序列的不可分解组成部分等于 $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$。换言之，这正是我们刚刚已经正确地作过规范变换的那些序列之一。第二项之所以消失，是因为 ε的输入序列短于 $\alpha_k,\ldots,\alpha_1$。□

THEOREM 3.11. Let $\nu \in \mathrm{Ker}(d)$ with $\nu^{0,1} = 0$ then ν is zero in $\mathrm{HH}^\bullet(\mathrm{Gtl}_{\mathcal{A}})$.

PROOF. 这是前面引理的直接推论。 □

该定理意味着，可以从余循环的零阶和一阶分量中读出其上同调类。

LEMMA 3.12. 如果 ν 是余循环，则

- ν^0 是一个中心元，
- 若 $\nu^0 = 0$ 则 ν^1 是一个导子。

PROOF. 我们有，$\nu^0(1)$ 是一个中心元，因为

$$0 = (d\nu)^1(\alpha) = \mu^2(\alpha,\nu^0(1)) + (-1)^{\|\alpha\|}\mu^2(\nu^0(1),\alpha).$$

如果 $\nu^0 = 0$，那么 ν^1 是一个导子，因为

$$\begin{aligned}0 &= (-1)^{|\beta|}(d\nu)(\alpha,\beta) = \nu^1(\alpha)\beta + \alpha\nu^1(\beta) - \nu(\alpha\beta),\\ 0 &= \nu^1(1_a)1_a + 1_a\nu^1(1_a) - \nu(1_a).\end{aligned}$$

□

根据余循环的奇偶性，我们还可以给出更精确的描述：奇余循环由 ν^0 确定，它是一个中心元；而偶余循环由 ν^1 确定，并视为 $\mathrm{Gtl}_{\mathcal{A}}$ 的一个外导子。

THEOREM 3.13. 设 $\mathcal{A}$ 为一个弧集。

(1) 映射

$$\mathrm{HH}^{\mathrm{even}}(\mathrm{Gtl}_{\mathcal{A}}) \to \mathrm{OutDer}(\mathrm{Gtl}_{\mathcal{A}}) : \nu \mapsto \nu^1$$

是一个定义良好的嵌入。

(2) 映射

$$\mathrm{HH}^{\mathrm{odd}}(\mathrm{Gtl}_{\mathcal{A}}) \to Z(\mathrm{Gtl}_{\mathcal{A}}) : \nu \mapsto \nu^0(1)$$

是一个定义良好的嵌入。

PROOF. 对于第一条陈述，注意到中心中只有偶数次数的循环，它们表示奇映射 $A[1]^{\otimes 0} \to A[1]$。因此 $\nu^0 = 0$ 如果ν 的奇偶性是偶数，那么根据前面的引理 ν^1 确实是一个导子。该映射也是良定义的，因为

$$(d\kappa)^1(\alpha) = \mu^1(\kappa^1(\alpha)) + \mu^2(\kappa^0, \alpha) - \mu^2(\alpha, \kappa^0) = [\kappa^0, \alpha].$$

此外，如果 ν^1 是内的且 $\nu^0 = 0$，那么我们可以找到一个 κ，使得 $(\nu - d\kappa)^1 = 0$为零。由于 $(\nu - d\kappa)^0$ 因次数原因为零，根据定理 3.11，我们有$\nu = 0$ 属于 $\mathrm{HH}^{\mathrm{even}}(\mathrm{Gtl}_{\mathcal{A}})$。因此，该映射是一个嵌入。

对于第二个陈述，首先注意到该映射是良定义的，因为 $(d\kappa)^0 = \mu^1 \circ \kappa^0 = 0$。现在假设 $\nu^0(1) = 0$，那么我们将构造另一个 ε，使得对于所有不可分解角，$(d\varepsilon)^1(\alpha) = \nu^1(\alpha)$。由于$\nu^0(1) = (d\varepsilon)^0 = 0$，$(d\varepsilon)^1$ 和 ν^1 都是导子，因此 $(d\varepsilon)^1 = \nu^1$。这意味着 $(\nu - d\epsilon)^{\leq 1} = 0$，从而 $\nu = 0$ 属于 $\mathrm{HH}^{\mathrm{odd}}(\mathrm{Gtl}_{\mathcal{A}})$。因此，该映射是一个嵌入。

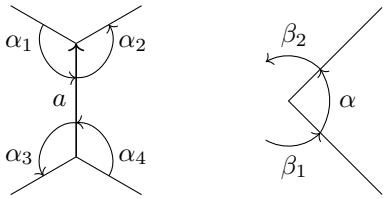
为了构造 ϵ，我们先确认 $\nu^1(\alpha)$ 不包含恒等元。事实上，设 $\alpha : a \to a$ 是一个不可分解角。根据假设，a 不可缩，因此 α 不是多边形中唯一的角。特别是，α 不会从 a 的头指向尾，也不会从 a 的尾指向头。由此可知，α 是偶数，而 $\nu^1(\alpha)$ 是奇数，因此不包含恒等元。

观察 α 所在的多边形。姑且把多边形弧 a 的顺时针端点和逆时针端点分别称为它的“头”和“尾”。不论箭头方向如何，$\nu^1(\alpha)$ 都可以分解为两部分：一部分从 a 的尾延伸至 b 的尾，另一部分从 a 的头延伸至 b 的头。将此分解记作 $\nu^1(\alpha) = \alpha\delta^{(\alpha)} + \gamma^{(\alpha)}\alpha$。无论 α 是偶数还是奇数，$\delta^{(\alpha)}$ 和 $\gamma^{(\alpha)}$ 总是奇数，因为 ν^1 是奇数。

现在设 a 为一条弧。将如图 3.1a 所示，与 a 相邻的角记为 α_1、α_2、α_3、α_4。我们有

$$\begin{aligned} 0 = (d\nu)(\alpha_2, \alpha_4) &= (-1)^{\|\alpha_4\|}\mu^2(\nu^1(\alpha_2), \alpha_4) + \mu^2(\alpha_2, \nu^1(\alpha_4)) + \nu^1(\mu^2(\alpha_2, \alpha_4)) \\ &= -\gamma^{(\alpha_2)}\alpha_2\alpha_4 - \alpha_2\delta^{(\alpha_2)}\alpha_4 + (-1)^{\|\alpha_4\|}\alpha_2\gamma^{(\alpha_4)}\alpha_4 + (-1)^{\|\alpha_4\|}\alpha_2\alpha_4\delta^{(\alpha_4)} + 0 \\ &= \alpha_2((-1)^{\|\alpha_4\|}\gamma^{(\alpha_4)} - \delta^{(\alpha_2)})\alpha_4. \end{aligned}$$

我们得出 $\delta^{(\alpha_2)} = (-1)^{\|\alpha_4\|}\gamma^{(\alpha_4)}$。请注意，我们用到了 $\alpha_2\alpha_4 = 0$，并且 $\gamma^{(\alpha_4)}$ 和 $\delta^{(\alpha_2)}$ 都从 a 的尾指向 a 的头，且 α_4 终止了



(A) 围绕 angles (B) 围绕 angles

FIGURE 3.1

位于 a 的尾部， α_2 从 a 的头部开始。同样，

$$\begin{aligned}0 = (d\nu)(\alpha_3,\alpha_1) &= (-1)^{\|\alpha_1\|}\mu^2(\nu^1(\alpha_3),\alpha_1) + \mu^2(\alpha_3,\nu^1(\alpha_1)) + \nu^1(\mu^2(\alpha_3,\alpha_1))\\ &= -\alpha_3\delta^{(\alpha_3)}\alpha_1 - \gamma^{(\alpha_3)}\alpha_3\alpha_1 + (-1)^{\|\alpha_1\|}\alpha_3\alpha_1\delta^{(\alpha_1)} + (-1)^{\|\alpha_1\|}\alpha_3\gamma^{(\alpha_1)}\alpha_1 + 0\\ &= \alpha_3(-\delta^{(\alpha_3)} + (-1)^{\|\alpha_1\|}\gamma^{(\alpha_1)})\alpha_1.\end{aligned}$$

我们得出 $\delta^{(\alpha_3)} = (-1)^{\|\alpha_1\|}\gamma^{(\alpha_1)}$。现在我们来设定

$$\varepsilon_a^0 := (-1)^{\|\alpha_4\|+1}\gamma^{(\alpha_4)} - \delta^{(\alpha_3)} = (-1)^{\|\alpha_1\|+1}\gamma^{(\alpha_1)} - \delta^{(\alpha_2)}.$$

该表达式的读法不依赖于 a 的箭头方向：将标签 α_1、 α_2、 α_3 和 α_4 旋转 180 度后，它保持不变。换言之， ε_a^0 可以看作其头部或尾部处相邻两角 γ 和 δ 的（带符号）差。由此很容易验证，对于任意不可分解角 α ，有 $(d\varepsilon)(\alpha) = \nu^1(\alpha)$: $a \to b$。如图 3.1b 所示，记 β_1 和 β_2 为同一标点周围紧邻它的前一个和后一个不可分解角。于是

$$\begin{aligned}(d\varepsilon)(\alpha) &= (-1)^{|\alpha|}\varepsilon_b^0\alpha - \alpha\varepsilon_a^0\\ &= (-1)^{|\alpha|}((-1)^{\|\alpha\|+1}\gamma^{(\alpha)} - \delta^{(\beta_2)})\alpha - \alpha((-1)^{\|\beta_1\|+1}\gamma^{(\beta_1)} - \delta^{(\alpha)})\\ &= \gamma^{(\alpha)}\alpha + (-1)^{\|\alpha\|}\delta^{(\beta_2)}\alpha + (-1)^{\|\beta_1\|}\alpha\gamma^{(\beta_1)} + \alpha\delta^{(\alpha)}\\ &= \gamma^{(\alpha)}\alpha + \alpha\delta^{(\alpha)} = \nu^1(\alpha).\end{aligned}$$

在倒数第二个等式中，我们用到了 $\delta^{(\beta_2)}$ 的终点与 α 的起点重合，且它是奇数，因此不能与 α 合成。类似地， $\alpha\gamma^{(\beta_1)} = 0$。由此得出，$(d\varepsilon)^1 = \nu^1$ 在不可分解角上成立。□

REMARK 3.14. 如果 ν 是偶余循环，那么 ν^0 为零；但如果 ν 具有奇宇称，那么 ν^1 不一定为零，甚至不一定是导子。当 m 是被环形弧围绕的标记点时，就会出现这样的例子。这个环产生一个长度为 1 的双边形，因此，如果 $r_{(m,1)} \neq 0$ ，相应的乘积 A_∞-变形具有非平凡的$r\mu^1$ ，于是 $\nu_{(m,1),\ o}$（如定义 3.15 所述）将是具有非平凡 ν^1的奇余循环。

3.3. 生成元集合。本节将介绍一组特殊的霍赫希尔德类，它们张成霍赫希尔德上同调。

我们需要的第一个类是单位类 ν_1，它对应一个零元乘积： $\nu_1^0 \colon \mathbb{K} \to A[1] : 1_a \mapsto 1_a$。显然，这是一个 Hochschild 循环，因为 1_a 是严格幂等元。它的奇偶性为奇。

DEFINITION 3.15. 对于每个轨形点 $p = (m, r) \in M \times \mathbb{N}$，我们将其轨形点同调类定义为

$$\nu_{p,o} = \frac{1}{\hbar}({}^r\mu - \mu) \text{ with } r = \ell_m^r \hbar \in Z(A) \otimes \mathbb{C}[\hbar]/(\hbar^2).$$

LEMMA 3.16. $\nu_{p,\ o}$ 是奇宇称余循环。

PROOF.显然，这些都是余循环，因为 ${}^r\mu$ 满足 Maurer-Cartan 方程，而该方程在一阶时化为 $d({}^r\mu) = 0$。□

第二组余循环的特征如下。固定一个映射 $\lambda : (Q_{\mathcal{A}})_1 \to \mathbb{C}$。定义 ν_λ 的第一个分量为满足 $\nu_\lambda(\alpha) = \lambda_\alpha \alpha$ 的导子，并令 $\nu_\lambda^{\neq 1} = 0$。导子条件意味着，对于一条路径 $\beta = \beta_k \dots \beta_1$，我们有$\nu_\lambda(\beta) = \sum_i \lambda_{\beta_i} \beta$，因此可以定义 $\lambda_\beta := \sum_i \lambda_{\beta_i}$。

LEMMA 3.17. ν_λ 是余循环，当且仅当对于每个多边形 $(\alpha_N, \dots, \alpha_1)$，都有 $\sum_i \lambda_{\alpha_i} = 0$。

PROOF. 对于每个多边形，条件意味着 $\sum_{\alpha_i} \lambda_{\alpha_i} = 0$ 对每个树多边形 $(\alpha_k, \dots, \alpha_1)$ 都成立。因此

$$(d\nu_\lambda)(\alpha_1, \dots, \alpha_k \beta) = (\sum \lambda_{\alpha_i} + \lambda_\beta)\mu(\alpha_k, \dots, \alpha_1 \beta) - \nu_\lambda(\beta) = 0.$$

另一方面，若 $\nu^{\neq 1} = 0$，则由引理 3.12 可知 ν 必定是一个导子；而对于每个多边形，$d(\nu_\lambda)(\alpha_N, \dots, \alpha_1) = 0$ 意味着 $\sum_i \lambda_{\alpha_i} = 0$。□

所有具有这些性质的 ν_λ 元素构成一个向量空间 S。如果 S 中的两个元素相差一个与 $[_{\mathbb{K}}, -]$ 中某个元素的交换子，那么它们表示同一个同调类。

LEMMA 3.18. $\dim S/[_{\mathbb{K}}, -] = \dim \mathrm{H}^1(S, M, \mathbb{C}) = 2g - 1 + |M|$.

PROOF. S 的维数为 $2\#\mathcal{A} - \#\{\text{个面}\}$，因为每条弧上有 2 个到达的角，并且每个面给出一个线性条件。所有这些条件线性无关，因为每个角只出现在一个面中。映射 $[_{\mathbb{K}} \to [_{\mathbb{K}}, -]$ 的核是 $\mathbb{C}$，因此 $[_{\mathbb{K}}, -]$ 在 S 中的像的维数为 $\#\mathcal{A} - 1$，所以

$$\dim S/[_{\mathbb{K}}, -] = 2\#\mathcal{A} - \#\{\text{faces}\} - \#\mathcal{A} + 1 = 2g - 2 + |M| + 1.$$

□

很容易找到 $S/[_{\mathbb{K}}, -]$的一个基。再看图 3.1a。对于每条弧 a，都有 4 个角：两个 α_2、α_3 从 a 出发，另外两个 α_1、α_2 到达 a。角 α_2 和 α_4 位于 a 和 α_1 右侧的面中，而 α_3 位于左侧的面中。

我们将 $\nu_{a,L}$ 定义为具有

$$\lambda(\alpha_1) = 1, \lambda(\alpha_3) = -1$$

而 λ 的所有其他元素均为零。类似地，我们定义 $\nu_{a,R}$，其中

$$\lambda(\alpha_2) = 1, \lambda(\alpha_4) = -1.$$

注意，由于 $[1_a, -] = \nu_{a,L} - \nu_{a,R}$，我们有在同调意义下 $\nu_{a,L} = \nu_{a,R}$，因此我们将省略下标 R, L，并令 $\nu_a := \nu_{a,L}$。

LEMMA 3.19. 如果 $\mathcal{T}$ 是面图中的一组生成树弧，则

$$\{\nu_a \mid a \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{T}\}$$

是 $S/[_{\mathbb{K}}, -]$ 的一组基。

PROOF. 绕给定面的一周的 ν_a 之和为零，其中 a 遍历绕该面延伸的弧。由于 $\mathcal{T}$是一棵生成树，$\{\nu_a \mid a \in \mathcal{A} \setminus T\}$ 线性无关。此外，由于一棵生成树有 #{ 个面和 } -1 条弧，这个集合的基数等于 $S/[_{\mathbb{K}}, -]$ 的维数。□

REMARK 3.20. 我们将 ν_a 称为弧类，更一般地，将 ν_λ称为弧类的线性组合，其中 ν_a。

设 $p = (m, j)$ 是一个轨形点，且 a 是一条到达（或离开）该标记点的任意弧。现在定义

$$\nu_{p,e} := \nu_{p,o} \smile \nu_a \text{ or } -\nu_a \text{ if } a \text{ leaves } m.$$

注意，若 a 不是环，则对于除 α_1 （或在 a 离开 m的情形下的 α_3 ）之外的每个角箭，$\nu_{p,e}$ 均为零。

LEMMA 3.21. 若弧集 $\mathcal{A}$ 满足 [NL2] ，则$\nu_{p,e}$ 的同调类不依赖于 a的选择。

PROOF. 设 a 和 b 是同一标点处相邻的弧，且 b 在顺时针方向上位于 a 之后。设 $\varepsilon = \varepsilon^0$ 为由$\varepsilon^0 = \ell_m^j 1_a$给出的奇余链。对于任何绕标点 $\mathrm{m}(\alpha)$缠绕的角 α ，我们有

$$d(\varepsilon)(\alpha) = \begin{cases} +\ell_m^j \alpha & t(\alpha) = a \text{ and } \mathrm{m}(\alpha) = m \\ -\ell_m^j \alpha & h(\alpha) = a \text{ and } \mathrm{m}(\alpha) = m \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

由于 a 不是环，两个非零情形各自只会在一个 α_1 和一个 α_3角处发生。由此可得

$$[d(\varepsilon)]^1 = [\nu_{p,e} \smile \nu_a - \nu_{p,e} \smile \nu_b]^1.$$

换言之，$\nu_{p,e} \smile \nu_a$ 与 $\nu_{p,e} \smile \nu_b$ 之差与一个余循环 κ 同伦，其中 $\kappa^0, \kappa^1 = 0$。结合定理 3.11，这意味着绕 m 的两条连续弧定义相同的 $\nu_{p,e}$-类，因此绕 m的所有弧也都如此。□

THEOREM 3.22. 设 $\mathcal{A}$ 为一个弧集， $\mathcal{T}$为面图中的一棵生成树。

(1) 余循环 $\nu_1, \nu_{p,\,o}$ （其中 p 遍历所有轨形点）构成 $\mathrm{HH}^{\mathrm{odd}}(\mathrm{Gtl}_{\mathcal{A}})$ 的一组基。
(2) 若 $\mathcal{A}$ 满足 [NL2] ，则余循环 $\nu_{p,\,e}, \nu_a$ （其中 p 遍历所有轨形点，且 $a \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{T}$）构成 $\mathrm{HH}^{\mathrm{even}}(\mathrm{Gtl}_{\mathcal{A}})$ 的一组基。

PROOF. $\nu_1, \nu_{p,\,o}$ 的零次分量构成 $Z(\mathrm{Gtl}_{\mathcal{A}})$ 的一组基，因此引理 3.13 中的嵌入 $\mathrm{HH}^{\mathrm{odd}}(\mathrm{Gtl}_{\mathcal{A}}) \to Z(\mathrm{Gtl}_{\mathcal{A}})$ 是双射。

为证明第二部分，注意到不存在环或二环这一事实意味着，所有头和尾与 α 相同的非零角路径，都绕着与 α 相同的标记点转动，且形式为 $\ell_m^r \alpha$。

如果 ν 是 G-齐次的，这意味着有两种可能性

- 如果次数为 0，那么 ν 必须是 ν_a的线性组合。
- $\nu(\alpha) = \lambda_\alpha \ell_m^j \alpha$ 与 $j > 0$ 相接时，唯一另一个必须转向的 β 是 $\nu(\beta) \neq 0$ m。除一个内导子外，这个 ν 由总和$\sum \lambda_\alpha$ 确定，其中 α 遍历所有转向 m的不可分解对象。

□

3.4. 霍赫希尔德上同调上的 Gerstenhaber 结构与乘积。本节计算 HH(Gtl$_\mathcal{A}$) 上的 Gerstenhaber 代数结构。换言之，我们确定霍赫希尔德上同调上的括号和杯积。该括号与 Wong 对二聚体模型的矩阵分解的 Borel-Moore 上同调所作的计算一致 [20], ，而后者猜想上等价于 HH(Gtl$_\mathcal{A}$)。

为了描述括号和杯积，我们使用前文构造的奇、偶霍赫希尔德上同调基：奇类 $\nu_{(m,j),o}$ （对应一个穿孔）$m \in M$ 和 $j \geq 0$，偶类 $\nu_{(m,j),e}$，以及弧类 ν_λ，其中 $\lambda : (Q_\mathcal{A})_1 \to \mathbb{C}$。

我们从杯积开始

PROPOSITION 3.23. 设 m、$n \in M$ 为两个标记点，i、$j \geq 1$ 为两个指标，ν_λ、ν_κ 为两个弧类。那么，上同调中的杯积如下所示：

$$\begin{aligned}
\nu_{(m,i),o} \smile \nu_{(n,j),o} &= \delta_{mn} \nu_{(m,i+j),o}, \\
\nu_{(m,i),o} \smile \nu_{(n,j),e} &= \delta_{mn} \nu_{(m,i+j),e}, \\
\nu_{(m,i),o} \smile \nu_\lambda &= \lambda_{\ell_m} \nu_{(m,i),e}, \\
\nu_\kappa \smile \nu_\lambda &= 0, \\
\nu_{(p,i),e} \smile \nu_\lambda &= 0.
\end{aligned}$$

PROOF. 我们首先在链级上计算给定 Hochschild 余循环的杯积，然后计算它们到上同调的投影。事实上，对于奇数阶乘积，只需计算曲率分量（$\nu \smile \eta$）^{0}；对于偶数阶乘积，只需计算第一分量（$\nu \smile \eta$）^{1}。还请注意，$\smile$ 本身的奇偶性为奇，因此奇偶性相同（不同）的两个类的乘积为奇（偶）。现在我们可以开始计算了。对于第一个恒等式，考虑

$$(\nu_{(m,i),o} \smile \nu_{(n,j),o})^0 = \mu^2(\nu^0_{(m,i),o}(1), \nu^0_{(n,j),o}(1)) = \delta_{mn} \mu^2(\ell_m^i, \ell_n^j) = \ell_m^{i+j}.$$

这恰好是 Hochschild 上同调类 $\nu_{(m,i+j),\ o}$ 的曲率，因此投影到该类。对于第二个和第三个恒等式，可以进行类似的计算，但此时需要考察第一分量。或者，我们可以结合 Hochschild 上同调中 $\smile$ 的结合性，使用 $\nu_{(p,i),\ e}$ 的定义。

对于最后两个恒等式，我们同样需要考察零阶分量；由于两个因子都具有平凡曲率，它们显然为零。□

PROPOSITION 3.24. 设 m、$n \in M$ 为两个标记点，i、$j \geq 1$ 为两个指标，ν_λ、ν_κ 为两个弧类。那么上同调中的 Gerstenhaber 括号

内容如下:

$$\begin{aligned}
\left[\nu_{(m,i),o}, \nu_{(n,j),o}\right] &= 0,\\
\left[\nu_{(m,i),e}, \nu_{(n,j),o}\right] &= \delta_{mn}\cdot j\cdot \nu_{(m,i+j),o},\\
\left[\nu_{(m,i),e}, \nu_{(n,j),e}\right] &= \delta_{mn}\cdot (j-i)\cdot \nu_{(m,i+j),e},\\
\left[\nu_{\lambda}, \nu_{(m,i),o}\right] &= i\lambda_{\ell_m}\cdot \nu_{(m,i),o},\\
\left[\nu_{\lambda}, \nu_{(m,i),e}\right] &= i\lambda_{\ell_m}\cdot \nu_{(m,i),e},\\
\left[\nu_{\kappa}, \nu_{\lambda}\right] &= 0.
\end{aligned}$$

Proof. 这一计算的策略与杯积相同。我们计算括号的零阶或一阶分量。

$$\begin{aligned}
[\nu,\eta]^0 &= \nu^1(\eta^0) - (-1)^{\|\nu\|\|\eta\|}\eta^1(\nu^0),\\
[\nu,\eta]^1(\alpha) &= \nu^1(\eta^1(\alpha)) + (-1)^{\|\eta\|\|\alpha\|}\nu^2(\eta^0,\alpha) + \nu^2(\alpha,\eta^0)\\
&\quad - (-1)^{\|\nu\|\|\eta\|}\big(\eta^1(\nu^1(\alpha)) + (-1)^{\|\nu\|\|\alpha\|}\eta^2(\nu^0,\alpha) + \eta^2(\alpha,\nu^0)\big).
\end{aligned}$$

主要区别在于，现在括号具有偶奇性，因此当两个输入的奇偶性不同时，我们需要检查零阶分量。在这种情况下，结果是偶类的外导子作用于奇类的中心元。这就处理了第二和第四个恒等式。

两个偶类的括号的一阶分量是它们的外导子的交换子，因为它们没有 ν^0。这就处理了第三个以及最后两个恒等式。

最后，两个奇类的括号为零，因为如果[NL2] 成立，它们就没有 ν^1, ν^2 。如果 [NL2] 不成立，且 α 是一个不可分解角，那么只有当 $a = h(\alpha)$是绕穿孔的环时，$\nu^1(\alpha)$才可能非零，但此时弧集并不将曲面分开。其次，对于我们的变形乘积，形如${}^r\mu^2(\ell_p,\alpha)$的项总会被 ${}^r\mu^2(\alpha,\ell_p)$抵消，因此奇类也同样如此。这意味着对于所有不可分解的 α ， $[\nu,\eta]^1(\alpha)$都为零；又因为$[\nu,\eta]^1$ 是一个导子，它恒等于零。□

$\mathrm{HH}^\bullet(\mathrm{Gtl}_{\mathcal{A}})$ 上的李括号是 L_∞ 结构的一部分。它是一个分次向量空间 L，并带有括号 $[,\dots,]^k$： $L^{\otimes k}\to L$，其次数为 $2-k$，且满足 L_∞ 公理 [19]。

如果 $(K^\bullet, d, [])$ 是一个微分分次李代数，那么我们可以在同调上构造一个 L_∞ 结构 $[,]^\bullet$，使得 $(HK^\bullet, 0, [,]^\bullet)$ 与 $(K^\bullet, d, [])$ L_∞ 准同构。

这些乘积可以使用同伦传递引理构造（例如参见 [14]）。构造过程可概述如下:

- 将 $K^\bullet$ 分解为分次向量空间的直和
$$K^\bullet = H\oplus I\oplus R$$
使得 $\mathrm{Im} d = I$ 和 $\mathrm{Ker}\, d = H\oplus I$。这样一来， $H\cong HK^\bullet$ 和 d 限制为一个同构 d_{IR}： $R\to I$。
- 令 h为该映射
$$h: H\oplus I\oplus R\to H\oplus I\oplus R: (u,v,w)\mapsto (0,0,d_{R\to I}^{-1}(v)).$$
通过这种方式，投影到 H 变为 $\pi = 1 - dh - hd$。

• 对于 x_1，……，$x_k \in H$ 我们定义

$$[x_1, \ldots, x_k]^k = \sum_t c_t \pi[\ldots, h[x_i, x_j], \ldots,]$$

表示为所有可能的完全括号化表达式的线性组合，其中每个内部括号都与一个 h 复合。（精确的系数 c_t 在我们的讨论中并不重要。）

在我们的情形中，我们将取 $K = \mathrm{CC}(\mathrm{Gtl}_{\mathcal{A}})$、$H \cong \mathrm{HH}(\mathrm{Gtl}_{\mathcal{A}})$ 为我们构造的类所张成的空间，并取 I 和 R 与 G-分次相容。

THEOREM 3.25. 若 $\mathcal{A}$ 满足 [NL2]，则我们可以选择一种分解，使得所有高阶括号都为零。

PROOF. 首先注意到 $[\nu_1, -] = 0$ 属于 $\mathrm{CC}(\mathrm{Gtl}_{\mathcal{A}})$，因此 $[\nu_1, -, \ldots, -]^k$ 也将为零。

为了证明其他括号为零，任取温和代数的一个 Z-分次。于是我们可以假设，对于这个分次，括号 $[,]^k$ 的次数为 $2-k$，而对于 $G = \mathrm{H}(S \setminus M, \mathcal{A}, \mathrm{Z})$-分次，其次数为 0。由于我们假设 $\mathcal{A}$ 没有环，因此至少有两个 puncture，所以对每个标记点，ℓ_m 的 G-次数都是非平凡的。

如果括号中的所有项的 G-次数都是 0（这意味着它们都是弧类，而弧类的 Z-次数为 0），那么同伦传递引理告诉我们，乘积必为零，因为所有的 $[\nu_\lambda, \nu_\kappa]$ 对在 $\mathrm{CC}(\mathrm{Gtl}_{\mathcal{A}})$ 中都已经为零。

假设某一项中至少有一个 $\nu_{p,e}$。我们作如下区分：

• 所有项的 G-次数都是 $\deg_G \ell_m$ 的倍数。在这种情况下，结果的 G-次数将是 $r \deg_G \ell_m$，其中 $r \in$ 为某个 N，因此 Z-次数必为 $r\deg_{\mathbb{Z}} \ell_m$（若结果为偶数）或 $r\deg_{\mathbb{Z}} \ell_m - 1$（若结果为奇数）。各项 Z-次数的总和至多为 $r\deg_{\mathbb{Z}} \ell_m$，且只有在所有项均为偶数时才会达到这一上限。由于乘积的次数为 $2-k$，根据次数原因，只有当 $2-k \geq -1$ 时乘积才可能非零；换言之，若 $k = 2$，则为 3。

• 一些条目的次数围绕不同的标记点变化。如果结果具有 G-次数 $\deg_G \ell_m^j$，那么这些条目的 G-次数也必须为 $\deg_G \ell_m^j$。但是，如果存在多个标记点对应的次数，则所有标记点都必须出现，因为 ℓ_m 的次数之间唯一的关系是 $\sum_{m \in M} \deg_G \ell_m = 0$。另一方面，根据引理 3.6，我们有 $\sum_m \deg_{\mathbb{Z}} \ell_m \leq -1$，因此结果的 Z-次数必须为 $\leq \deg_{\mathbb{Z}} \ell_m^j + 2 - k - 1$。如果 $k \geq 3$，这是不可能的。

由上述讨论可知，由于次数原因，唯一的非平凡高阶括号具有以下形式

$$[\nu_{(m,i_1),e}, \nu_{(m,i_2),e}, \nu_{(m,i_3),e}] = \lambda \nu_{(m,i_1+i_2+i_3),o}$$

或者在一个或多个 $\nu_{(m,i_j),e}$ 为 ν_λs 的情况下。为了证明这些乘积均为零，我们必须详细考察同伦传递构造。三重乘积可以用以下形式的表达式来表示。

$$\pi[h[\nu_{(m,i_1),e}, \nu_{(m,i_2),e}], \nu_{(m,i_3),e}]$$

其中，π 是到同调上的投影。现在我们来说明为什么这类项为零。

根据我们在 3.24 中的计算，我们知道

$$[\nu_{(m,i_1),e},\nu_{(m,i_2),e}]^0 = 0$$
$$[\nu_{(m,i_1),e},\nu_{(m,i_2),e}]^1 = ((i_2-i_1)\nu_{(m,i_1+i_1),e})^1$$

因此$[\nu_{(m,i_1),e},\nu_{(m,i_2),e}] = (i_2 - i_1)\nu_{(m,i_1+i_2),e} + d\kappa$ 满足 $(d\kappa)^{\leq 1} = 0$。根据第 3.2 节中的构造，我们可以选取 κ 使得 $\kappa^0 = 0$。接下来，选取 $R^{\mathrm{odd}} = R_1 \oplus R_2$（按 G-分次方式）使得 $R_1^{\neq 0} = R_2^0 = 0$ 和$R_1 \cap Z(\mathsf{Gtl}_{\mathcal{A}}) = 0$。关于直和 $\mathsf{CC}^{\mathrm{odd}} = H^{\mathrm{odd}} \oplus I^{\mathrm{odd}} \oplus R_1 \oplus R_2$，记作 $\kappa = h + i + r_1 + r_2$。那么 $0 = \kappa^0 = h^0 + r_1^0$，因此 $r_1 = r_1^0 = -h^0 \in R_1 \cap Z(\mathsf{Gtl}_{\mathcal{A}}) = 0$，由此得出 $\kappa = i + r_2$。只需从 κ 中减去 i，即可保持$\kappa^0 = 0$ 并使 κ 进入 $R_2 \subseteq R$。最后

$$[h[\nu_{(m,i_1),e},\nu_{(m,i_2),e}],\nu_{(m,i_3),e}]^0 = [\kappa,\nu_{(m,i_3),e}]^0 = \nu_{(m,i_3),e}(\kappa^0) \pm \kappa^1(\nu^0_{(m,i_3),e}) = 0$$

因此，所有贡献都为零。 □

Corollary 3.26. 如果 $\mathcal{A}$ 没有环或二环，那么 $\mathsf{CC}(\mathsf{Gtl}_{\mathcal{A}})$, $d, [,]$ 是形式的。换言之，$\mathsf{CC}(\mathsf{Gtl}_{\mathcal{A}})$, $d, [,]$与 $\mathsf{HH}(\mathsf{Gtl}_{\mathcal{A}})$, $0, [,]$之间存在一个 L_∞-拟同构。

3.5. 有曲率变形的分类。作为我们计算的一个应用，我们将证明，Gtl 的每个有曲率变形$_{\mathcal{A}}$ 都等价于以下某个 $^r\mu$。请记住，如果（A, μ）是一个 A_∞-代数，它定义在$_{\mathbb{K}}$ 上，并且 R 是一个完备局部诺特单位交换 C-代数，其极大理想为 R^+，剩余域为$R/R^+ = \mathsf{C}$，那么有曲率变形是一个奇元素 $\nu \in \mathrm{Hom}(\bigoplus_i A^{\otimes^i}{}_{\mathbb{K}}, A)\text{“}\otimes R^+$，使得 $\mu+\nu$ 满足有曲率的 A_∞-公理。正如我们之前所指出的，这个方程等价于 Hochschild 上链复形上的 Maurer-Cartan 方程，以及 Gerstenhaber 括号 [11]。

Theorem 3.27. 如果 [NL2] 成立，那么 $\mathsf{Gtl}_{\mathcal{A}}$ 在 R 上的每个曲弯 A_∞-变形都等价于某个 $^r\mu$。

Proof. 我们用[13]语言，通过变形函子给出证明。简言之，我们将显式的变形类 $^r\mu$ 解释为 Artin 环上的一个函子。偶元素的规范变换作用于该函子的取值，并得到 Maurer–Cartan 元素。证明的第一部分讨论 R 为 Artin 情形。第二部分则转向非 Artin 情形。

令 Art 表示由具有剩余域 C 的 Artin 局部诺特含幺交换 C-代数构成的范畴，其中态射为局部态射（$\varphi(R^+) \subseteq S^+$）和含幺态射（$\varphi(1_R) = 1_S$）。我们构造三个函子 G、F、$\mathrm{MC} : \mathrm{Art} \to \mathsf{Set}$。函子$G$ 是规范群函子， F 是我们的变形参数 r的函子，而 MC 是标准的 Maurer-Cartan 函子。更准确地说，定义

$$G(R) \coloneqq \exp(\mathrm{CC}^{\mathrm{even}}(\mathrm{Gtl}_{\mathcal{A}})\widehat{\otimes} R^+),$$
$$F(R) \coloneqq Z(\mathrm{Gtl}_{\mathcal{A}})\widehat{\otimes} R^+,$$
$$\mathrm{MC}(R) \coloneqq \mathrm{MC}(\mathrm{CC}(\mathrm{Gtl}_{\mathcal{A}}), R).$$

这三个赋值对每个态射 $\varphi : R \to S$ in Art 都带有自然限制映射 $G(R) \to G(S)$、$F(R) \to F(S)$ 和 $\mathrm{MC}(R) \to \mathrm{MC}(S)$。不难验证，按照 [13, 定义 2.5] 的含义，这三者都是变形函子。

事实上， G 和 F 以及它们的乘积函子 $G\times F$，按照 [13, 定义 2.8] 的含义，都是光滑的（无阻碍的）。现在考虑由下式给出的函子态射

$$\Phi(R): G(R)\times F(R)\to \mathrm{MC}(R), (g,r)\mapsto g.{}^{r}\mathbb{\mu}.$$

我们通过将 $O_{G\times F}:=0$ 和 $O_{\mathrm{MC}}:=0$ 都定义为平凡的，来为 $G\times F$ 和 MC 定义阻碍理论 $O_{G\times F}$ 和 O_{MC}。现在，我们将应用 [13, 命题 2.17] 来证明 Φ 是光滑的。按照该论文的术语，我们需要检查三项：(1) $\Phi(\mathsf{C}[\varepsilon])$ 是满射的，其中 $\mathsf{C}[\varepsilon]=\mathsf{C}[X]/(X^2)$ 是对偶数环；(2) 阻碍理论 $O_{G\times F}=0$ 是完备的；(3) 阻碍理论之间的态射 $O_{G\times F}\to O_{\mathrm{MC}}$ 是单射的，并且与 Φ 相容。

我们来检查这三个条件。(1) 设 $\varepsilon c\in \mathrm{MC}(\mathsf{C}[\varepsilon])$。那么 c 是 Hochschild 上循环，可以通过某个 $g\in G(\mathsf{C}[\varepsilon])$ 进行规范变换，使其等于某个 $r\in \varepsilon Z(\mathrm{Gtl}_{\mathcal{A}})$ 的 ${}^{r}\mu$。换言之，我们有 $\Phi(\mathsf{C}[\varepsilon])(g,r)=\varepsilon c$。这证明了 $\Phi(\mathsf{C}[\varepsilon])$ 是满射的。第 (2) 项和第 (3) 项显然成立，因为 $G\times F$ 是光滑的。

标准的光滑性判据 [13, 命题 2.17] 表明 Φ 是光滑的。在光滑性的定义中取 $S=\mathsf{C}$，可知对于每个 $R\in \mathsf{Art}$，映射 $\Phi(R): G(R)\times F(R)\to \mathrm{MC}(R)$ 都是满射的。换言之，$\mathrm{Gtl}_{\mathcal{A}}$ 在 $R\in \mathsf{Art}$ 上的每个变形，都规范等价于某个 ${}^{r}\mu$。

在证明的第二部分，我们将结果推广到非 Artin 情形。设 R 是一个剩余域为 C 的完备局部诺特单位交换 C-代数。设 $\mu\in \mathrm{MC}(\mathrm{CC}(\mathrm{Gtl}_{\mathcal{A}}), R)$ 是一个在 R 上的变形，也就是说，它是完备张量积 $\mu\in \mathrm{CC}(\mathrm{Gtl}_{\mathcal{A}})\text{“}\otimes R^{+}$中的一个 Maurer-Cartan 元。我们的目标是证明，μ 规范等价于某个满足 $r\in Z(\mathrm{Gtl}_{\mathcal{A}})\text{“}\otimes R^{+}$的 ${}^{r}\mu$。

我们的策略是对每个 i，将 μ 截断到 $R/(R^{+})^{i}$，并利用证明的第一部分构造一个元素 r_i 和一个规范变换 g_i。我们利用 Φ 的光滑性，迫使两个序列 (r_i) 和 (g_i) 都收敛。

取 $\mu_i:=\pi_i(\mu)\in \mathrm{MC}(R/(R^{+})^{i})$。我们将构造序列 $r_i\in F(R/(R^{+})^{i})$ 和 $g_i\in G(R/(R^{+})^{i})$，使得 (1) $\Phi(R/(R^{+})^{i})(g_i,r_i)=\mu_i$，(2) $\pi_i(r_{i+1})=r_i$，并且 (3) $\pi_i(g_{i+1})=g_i$ 对所有 $i\in \mathbb{N}$ 都成立。对于归纳基 $i=1$，令 $g_1:=1\in G(\mathsf{C})$ 且 $r_1:=0\in F(\mathsf{C})$。由于 $\Phi(\mathsf{C})(g_1,r_1)=0=\mu_1\in \mathrm{MC}(\mathsf{C})$，这三个条件在 $i=1$ 处均成立。

对于归纳假设，假设这些序列已经构造到指标 i。由于 Φ 光滑，我们有一个满射

$$G(R/(R^{+})^{i+1})\times F(R/(R^{+})^{i+1})\twoheadrightarrow (G(R/(R^{+})^{i})\times F(R/(R^{+})^{i}))\times_{\mathrm{MC}(R/(R^{+})^{i})}\mathrm{MC}(R/(R^{+})^{i+1}).$$

在右侧选取 (g_i,r_i,μ_{i+1})。事实上，根据假设和构造，$\Phi(R/(R^{+})^{i})(g_i,r_i)=\mu_i=\pi_i(\mu_{i+1})$。由满射性，存在一个提升 (g_{i+1},r_{i+1})，使得 (1) $\Phi(R/(R^{+})^{i+1})(g_{i+1},r_{i+1})=\mu^{i+1}$，(2) $\pi_i(r_{i+1})=r_i$，并且 (3)$\pi_i(g_{i+1})=g_i$。归纳步骤至此完成。

最后，我们构造出了所需的序列 (r_i) 和 (g_i)。由于 $\pi_i(r_{i+1})=r_i$，序列 r_i 收敛到某个 $r\in Z(\mathrm{Gtl}_{\mathcal{A}})\text{“}\otimes R^{+}$，而 g_i 收敛到某个$g\in \exp(\mathrm{CC}^{\mathrm{even}}(\mathrm{Gtl}_{\mathcal{A}})\text{“}\otimes R^{+})$。在 $\mathrm{MC}(R/(R^{+})^{i})$ 中，我们有

$$\pi_i(g.{}^{r}\mathbb{\mu})=\Phi(R/(R^{+})^{i})(g_i,r_i)=\mu_i=\pi_i(\mu),\quad \forall i\in\mathbb{N}.$$

取极限可得 $g.{}^{r}\mu=\mu$ 属于 $\mathrm{MC}(R)$。换言之，μ 与 ${}^{r}\mu$ 规范等价。□

Remark 3.28. 在注释 2.26 中，我们扩展了轨道二边形的概念，允许在面和标记点上赋予权重。这使我们能够构造温和代数的曲弯变形 $^{r,\ s}\mu$（该代数是完备的），而无需借助缠绕 Fukaya 范畴所带来的 A_∞-结构。我们还可以证明，完备温和代数的每个变形都等价于上述形式之一。这与 Koszul 对偶的框架十分契合，因为 Koszul 对偶的 A_∞-代数具有相同的变形理论。

参考文献

[1] Mohammed Abouzaid 等人。《带 puncture 球面的同调镜像对称》。载于：Journal of the American Mathematical Society 26.4（2013年），第 1051–1083 页。[2] Ibrahim Assem 等人。《由曲面三角剖分导出的温和代数》。载于：Algebra Number Theory 4.2（2010年），第 201–229 页。[3] Michael J Bardzell。《单项式代数的交替 syzygy 行为》。载于：Journal of Algebra 188.1（1997年），第 69–89 页。[4] Alexander Beilinson、Victor Ginzburg 和 Wolfgang Soergel。《表示理论中的 Koszul 对偶模式》。载于：J. Amer. Math. Soc. 9.2（1996年），第 473–527 页。 ISSN：0894-0347。[5] Raf Bocklandt。《带 puncture 曲面的非交换镜像对称》。载于：Trans. Amer. Math. Soc. 368.1（2016年）。附录由 Mohammed Abouzaid 撰写，第 429–469 页。[6] Alexander I Efimov。《高亏格曲线的同调镜像对称》。载于：arXiv 预印本 arXiv:0907.3903（2009年）。[7] Sheel Ganatra。《缠绕 Fukaya 范畴的辛上同调与对偶》。博士论文——麻省理工学院。ProQuest LLC, 密歇根州安娜堡，2012年，（无页码）。[8] Murray Gerstenhaber。《满足结合律的环的上同调结构》。载于：Annals of Mathematics（1963年），第 267–288 页。[9] F. Haiden、L. Katzarkov 和 M. Kontsevich。《平坦曲面与稳定性结构》。载于：Publ. Math. Inst. Hautes ´Etudes Sci. 126（2017年），第 247–318 页。[10] Bernhard Keller。《A∞代数、模与函子范畴》。载于：《当代数学》406（2006年），第 67–94 页。[11] Maxim Kontsevich 和 Yan Soibel man。《变形理论》。载于：Livre en pr´eparation（2002年）。[12] Yankı Lekili 和 Alexander Polishchuk。《通过 Fukaya 范畴实现温和代数的导出等价》。载于：Mathematische Annalen 376.1（2020年），第 187–225 页。[13] Marco Manetti。《通过微分分次李代数研究变形理论》。载于：arXiv 预印本 math/0507284（2005年）。[14] Martin Markl。《传递（强同伦满足结合律）结构》。载于：arXiv 预印本 math/0401007（2004年）。[15] Stephan Mescher。《A-infinity 代数及其 Hochschild 同调入门》。载于：arXiv 预印本 arXiv:1601.03963（2016年）。[16] Sebastian Opper、Pierre-Guy Plamondon 和 Sibylle Schroll。《温和代数导出范畴的几何模型》。载于：arXiv 预印本 arXiv:1801.09659（2018年）。

[17] Alexander F. Ritter 和 Ivan Smith。《单调缠绕 Fukaya 范畴与开闭弦映射》。载于：（2012年）。DOI：10.1007/s00029-016-0255-9。电子版：arXiv:1201.5880。[18] Paul Seidel。《亏格为二的曲线的同调镜像对称》。载于：arXiv 预印本 arXiv:0812.1171（2008年）。[19] Jim Stasheff。《L-infinity 与 A-infinity 结构：过去与现在》。载于：Higher Structures 3.1（2019年）。[20] Michael Wong。《二聚体模型与霍赫希尔德上同调》。载于：Journal of Algebra 585（2021年），第 207–279 页。

KdV Institute, University of Amsterdam, Amsterdam, The Netherlands
E-mail address: r.r.j.bocklandt@uva.nl

KdV Institute, University of Amsterdam, Amsterdam, The Netherlands
E-mail address: j.d.c.vandekreeke3@uva.nl