arXiv:2304.10225v1 [math.AP] 20 Apr 2023

# 趋势周期的数学建模：一时风潮、时尚与经典

HYEONG-OHK BAE、SEUNG YEON CHO、JANE YOO 和 SEOK-BAE YUN

Abstract. 本文提出了一个微分方程组，通过考察趋势参与者之间的底层动态，对趋势周期的形成与演变进行定量建模。我们的模型涵盖趋势周期的五个阶段，即开始阶段、上升阶段、峰值阶段、衰退阶段和过时阶段。它还提供了一套统一的数学判据/条件，用以刻画一时风潮、时尚和经典。我们证明了该模型的解能够捕捉各种趋势周期。文中还提供了数值模拟，以展示模型的表达能力。

## 1. Introduction

在人类社会中，人们往往倾向于追随或模仿他人，这种现象可以用时尚或趋势来描述。趋势出现在许多市场中：金融市场（郁金香狂热 [31], 比特币狂热 [21], 等）、服装业（快时尚品牌中的紧身裤 [6]）、食品业（有机食品产品趋势 [27]）、娱乐业（韩流 [17]），以及电子设备市场（智能手机成为时尚 [1]）。尽管这种描述不可避免地存在一定程度的简化，但此类趋势通常会经历一个由开始阶段、上升阶段、峰值阶段、衰退阶段和过时阶段组成的周期。趋势最初由少数早期采用者开始采纳（开始阶段）。随后，越来越多的人开始加入这一趋势（上升阶段）。当采纳者的数量达到峰值后（峰值阶段），一些人开始失去对该趋势的兴趣并逐渐退出（衰退阶段）。最终，该趋势失去其影响力，并彻底被人们遗忘（过时阶段）。这些阶段共同构成了一个趋势周期。（参见 [14] 中的图 1）

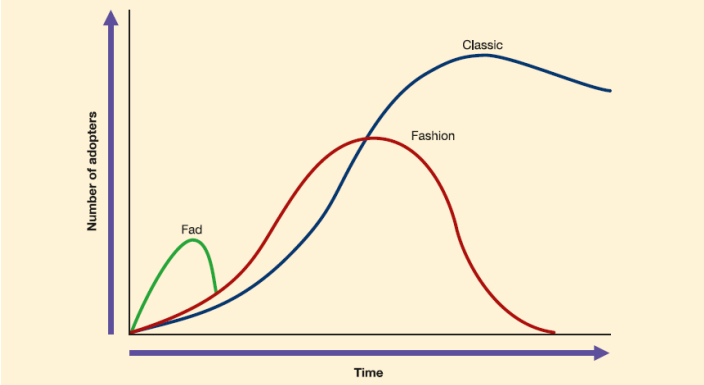



Figure 1. 趋势的分类：一时风潮、时尚和经典（来源：Susan Kaiser，《服装的社会心理学》 [14]）

这类趋势周期通常分为一时风潮、时尚和经典。一时风潮通常指一种短暂的趋势：它会在短时间内迅速走红，又很快消退。持续时间更长、被更多人口群体接受的趋势称为时尚。经典则是一种在社会或市场中已稳固确立的风格，持续时间要长得多。通常，它

*Key words and phrases.* 趋势周期，一时风潮，时尚，经典，数学建模。[1]

[1] https://sites.bu.edu/cmcs/2021/10/18/smartphones-fashion-galaxy-iphone/

更受顾客青睐，变化也较小。然而，文献中并没有对一时风潮、时尚和经典给出精确的定义（例如，[4,12,32]）。除了知道一时风潮的持续时间短于时尚，而经典的持续时间长于时尚之外，并没有明确的特征可以将这三种不同的周期区分开来。例如，这可能取决于具体行业。娱乐行业中的一时风潮（如《鱿鱼游戏》、YouTube 或 TikTok 上的热门短视频，以及鸟叔的热门歌曲《江南Style》）通常远比时尚产业或电子设备产业中的一时风潮（如黑莓和便携式媒体播放器）短暂。此外，时尚也可能以现有时尚风格的焕新形式出现（如各种牛仔裤款式）。可口可乐、路易威登和香奈儿等品牌的部分产品被视为经典商品的例子。

本研究有两个目的。首先，我们对趋势周期进行动态建模。我们提出了一个微分方程组，通过考察市场参与者之间的底层动态，解释趋势周期的形成。我们采用一个简单的图景，将社会划分为三组：尚未加入某一特定趋势的人、已采纳该趋势的人，以及已退出该趋势的人。随后，我们认识到流行病传播中的感染/康复过程与趋势周期中的采纳与拒绝过程之间存在类比，据此推导出这三组人群之间的动态规律。

其次，基于这一模型，我们提出了一个数学上严谨的判据，用于刻画一时风潮、时尚和经典。如上所述，趋势周期根据趋势的波动性被称为一时风潮、时尚或经典。但目前尚无明确的刻画标准。在这方面，我们发现，一时风潮、时尚和经典可以根据参与者离开趋势的方式加以区分。如图 1 所示，这体现在衰退阶段和过时阶段趋势周期曲线斜率的陡峭程度上。进而，我们可以通过在微分模型中适当选择拒绝率和参数来实现这一点（见第 2 节）。我们对趋势周期的描述为精确刻画这三种不同类型的趋势提供了严谨的方法。我们将一时风潮定义为在有限时间内消亡的周期，即曲线在有限时间内骤然落至谷底。经典则可定义为长期来看曲线至多以多项式阶衰减。时尚被定义为介于两者之间的趋势周期。时尚趋势的季节性复兴也可以被模型捕捉。我们的趋势周期模型提供了一个统一的框架，用于理解各种不同类型的趋势：时尚趋势、文学风格、商品受欢迎程度、音乐和电影中的文化狂热，以及加密货币市场中的投机行为。

对趋势周期的研究涉及许多主题，例如营销、法律问题、消费者行为、技术、媒体、历史分析、文化研究等。要全面综述如此广泛的主题并不现实。我们聚焦于与本文直接相关的文献。在 [26], 中，研究者构建了一个趋势周期模型，用以探讨新设计如何产生，以及随着其在人口群体中传播，其受欢迎程度最终如何随时间下降。如今，各类社交媒体的出现对时尚趋势产生了重大影响。在 [24], 中，作者考察了社交媒体与时尚之间的关系。 [16] 研究了社交媒体营销对顾客与奢侈品牌之间亲密感和信任度的影响。另一方面， [8] 的一项近期研究表明，消费者情绪已成为决定时尚趋势的关键因素。在一项开创性研究 [12], 中，Hemphill和Suk结合从众效应与差异化效应，描述了时尚趋势的演变，并据此探讨了时尚产业中的各种法律问题。关于时尚趋势在不同社会阶层间传播的研究，大致可分为以下三类：自上而下理论（时尚从上层阶级向下层阶级传播）、自下而上理论（时尚从下层阶级向上层阶级传播）以及横向传播理论（时尚的横向流动） [12,23,29]。关于时尚领域各类主题的综述，请参见 [9,10,12,14,18] 及其中的参考文献。

如上所述，我们的模型与流行病传播模型（例如易感者-感染者-康复者（SIR）类型模型）具有类比性。因此，有必要简要回顾一下SIR类型模型。自该模型于 [15], 提出以来，SIR模型一直被广泛用于流行病的定量建模 [3,11,19,28]。SIR模型也被成功用于研究近期的COVID-19

疫情至 u 了解传播机制并预测疫情可能的发展。

c[1, 13, 20, 25].

本文结构如下：第 2 节推导一个描述趋势周期动态变化的微分方程组。第 3 节验证我们的模型解满足所需的衰减性质。第 4 节进行多项数值实验，以验证我们的模型。第 5 节总结全文。

## 2. Dynamic modelling of trend cycle

我们推导出一个微分方程组来描述趋势周期。为此，我们引入三个变量，分别对应于某一趋势的潜在采纳者人数、已采纳该趋势的人数以及已退出该趋势的人数。然后，通过观察这三类人群如何采纳某一趋势以及如何拒绝该趋势，我们推导出这三类人群之间的动态规律。

首先，我们定义三个动态变量：

- $S(t)$：在时间 $t$ 时某一趋势的潜在采纳者数量，
- $I(t)$：在时间 $t$ 采纳该趋势的人数，
- $R(t)$：在时间 $t$ 已退出趋势的人数。

请注意，根据定义，任何合理的模型都必须满足

$$N = S(t) + I(t) + R(t) \quad t \geq 0, \tag{2.1}$$

其中，$N$ 是社会中的个体数量。现在，我们来考虑趋势中的这些分舱如何通过采纳和拒绝相互作用。

• **演化方程 $I$：** 我们首先推导 $I$的动态方程。一旦确定了 $I$ 的方程，其他变量的方程几乎就能自动得出。为此，我们考虑以下两个因素：趋势的采纳和拒绝。

**趋势采纳：** 我们的主要假设是，新趋势的采用率取决于社会中的人们接触该趋势的频率。在这里，我们假设这种接触可用以下乘法定律表示：

$$\alpha(t)\frac{I(t)}{N}S(t) \tag{2.2}$$

以便在每个时间点 $t$都获得适当的采用率 $\alpha$ 。接下来需要确定 $\alpha(t)$。为此，我们对采用率作出以下合理假设：1）随着采纳趋势的人数比例上升，人们对该趋势会越来越感兴趣（也就是说，$\alpha$ 是 $I/N$ 的单调函数）；2）随着采纳趋势的人数开始减少，人们对该趋势的兴趣也会降低。满足这些假设的适当采用率函数是一个 sigmoid 函数：

$$\alpha(t) := \alpha\left(\frac{I(t)}{N}\right) = \frac{m_1}{1 + \exp\left(-m_2\left(\frac{I(t)}{N} - \ell_\alpha\right)\right)}, \tag{2.3}$$

其中，$m_1 > 0$ 和 $m_2 > 0$ 分别描述采纳的强度和转变的陡峭程度，而 $\ell_\alpha$ 是采纳延迟。

**趋势拒绝：** 为了描述人们如何拒绝某种趋势，我们采用以下简单表达式，该表达式表明，离开该趋势的人数与 $I$成正比：

$$\beta(t)I(t).$$

我们在选择合适的 $\beta(t)$ 时，主要假设人们在趋势上升时几乎不会离开趋势，但在趋势达到峰值阶段后便开始离开。关键在于，当追随趋势的人数趋于饱和后，人们失去兴趣的速度有多快。为此，我们将 $t = t_*$ 设为 $I$ 首次达到最大值的时刻，并将其称为转折点：

$$t_* := \inf\{t > 0 |\, I'(t) = 0.\}$$

然后，我们将拒绝率定义如下：($p \in \mathbb{R}$)

$$\beta(t) := \beta\left(\frac{I(t)}{N}\right) = \begin{cases} \frac{m_3}{1+\exp\left(-m_4\left(\frac{I(t)}{N}-\ell_\beta\right)\right)} & (t \le t_*), \\ C_*\left(\frac{I(t)}{N}\right)^p & (t > t_*), \end{cases} \tag{2.4}$$

其中 $C_*$ 表示

$$C_* = \beta(t_*)\left(\frac{I(t_*)}{N}\right)^{-p}.$$

我们注意到， $m_3$， $m_4 > 0$ 描述了拒绝的强度和转变的陡峭程度，而$\ell_\beta \in \mathbb{R}$ 则表示拒绝的延迟。还要注意，在某些情况下， $I$ 会从 $t = 0$开始下降。在这种情况下，我们可以将 $t_*$ 设为无穷大。

选择 $\beta$ 背后的直觉如下：由于 $I$ 在 $t = t_*$之后下降，情形 $p \ge 0$对应于拒绝率逐渐减缓、导致尾部持续无限期的情况。另一方面， $p < 0$ 对应于拒绝率加速上升、导致趋势在有限时间内过时的情况，例如 $T_* > t_*$。我们将在下文进一步讨论这个问题。

最后， $I$ 的变化率由采纳率与拒绝率之间的差异决定：

$$I' = \frac{\alpha(I/N)}{N}IS - \beta(I/N)I. \tag{2.5}$$

如果没有歧义，为简洁起见，本文后续部分省略 $t$ 。

- **演化方程 $S$ 和 $R$：** 现在我们转向 $R$ 的方程。认为某种趋势不再有趣的人数，等于离开该趋势的人数：

$$\beta(I/N)I.$$

但有 些离开时尚的人会以比例 $\delta$ 再次成为潜在消费者：

$$\delta R.$$

因此， $R$ 的方程表示为

$$R' = \beta(I/N)I - \delta R.$$

同理，我们有

$$S' = -\frac{\alpha(I/N)}{N}IS + \delta R.$$

- **趋势周期模型的系统：** 然后，我们将这三个方程结合起来，得到以下趋势动态模型：

$$\begin{aligned} S' &= -\frac{\alpha(I/N)}{N}IS + \delta R, \\ I' &= \frac{\alpha(I/N)}{N}IS - \beta(I/N)I, \\ R' &= \beta(I/N)I - \delta R, \end{aligned} \tag{2.6}$$

其中，采用率 $\alpha$ 和拒绝率 $\beta$ 定义见 (2.3) 和 (2.4)。

- **重缩放趋势模型：** 为简化起见，我们改写

$$\frac{S}{N} \to S, \quad \frac{I}{N} \to I, \quad \frac{R}{N} \to R,$$

使得（2.6）转换为以下重缩放形式：

$$\begin{aligned} S' &= -\alpha(I)IS + \delta R, \\ I' &= \alpha(I)IS - \beta(I)I, \\ R' &= \beta(I)I - \delta R. \end{aligned} \tag{2.7}$$

请注意，过渡时间 $t_*$之后，系统变为

$$\begin{aligned} S' &= -\alpha(I)IS + \delta R, \\ I' &= \alpha(I)IS - C_* I^{p+1}, \\ R' &= C_* I^{p+1} - \delta R. \end{aligned} \tag{2.8}$$

本文始终研究这个经过重新缩放的系统。

• **趋势周期的特征——一时风潮、时尚与经典：**现在，我们说明如何通过适当选择拒绝率 $\beta$中的 $p$，使我们的模型能够刻画三种不同类型的趋势，即一时风潮、时尚和经典。我们尝试为 $\beta$ 提供清晰的数学推理。由于我们关注趋势达到峰值阶段后的行为，因此只考虑 $t > T_*$，此时 $I$ 的方程为（见（2.8））

$$I' = \alpha SI - C_* I^{p+1}.$$

在 $p = 0$的情况下， $I$ 的方程变为

$$I' = \alpha SI - C_* I.$$

由于 $\alpha$ 有下界和上界，我们可以预期 $I$ 的行为类似于通常的SIR模型，其中 $I$ 呈指数衰减。当 $p > 0$ 时， $I^{p+1}$ 远小于 $I$ （因为 $I$ 经过归一化：$0 \le I < 1$）。因此，我们可以预期 $I$ 的衰减速度远慢于 $p = 0$。最后，在 $p < 0$的情况下，随着 $I$ 趋近于0， $I^{p+1}$ 会变大。此外，由于 $SI$ 受 $I$限制，我们预计 $C_* I^{p+1}$ 将占主导地位，而非 $\alpha SI$，因此此时 $I$ 的方程由以下因素主导

$$I' \approx -C_* I^{p+1},$$

它会在有限时间内消失（见图 2）。这一理解引出了对 $I$ 阶段的如下分类：

如果 $p \le -1$, • $I$ 会在有限时间内消失，并以急剧的方式结束，
如果 $-1 < p < 0$, • $I$ 会在有限时间内消失，并以平缓的方式结束，
如果 $p = 0$, • $I$ 会呈指数级下降，但不会在有限时间内消失，
如果 $p > 0$, • $I$ 会按多项式阶下降，

这一点将在第 4 节通过解析方法验证，并在第 5 节通过数值方法验证。这为我们以数学上严谨的方式区分一时风潮、时尚和经典提供了方法：

- 一时风潮：当 $p \le -1$ 时，趋势周期会在有限时间内彻底消亡，并出现硬着陆。
- 快时尚：如果 $-1 < p < 0$，该周期将在有限时间内消亡，并实现平稳过渡。
- 时尚：如果 $p = 0$，该周期将以指数速度进入衰退阶段。
- 经典：如果 $p > 0$，该周期将按照多项式阶进入衰退阶段。

这种特征与我们的理解十分吻合：一时风潮、时尚和经典基本上取决于人们拒绝某种趋势的方式。而这一点又反映在衰退阶段和过时阶段曲线斜率的陡峭程度，以及趋势周期的持续时间上。我们还将周期性情形定义为：

- Periodic: $p \ge 0$ with $\delta > 0$.

请注意，我们仅考虑 $p \ge 0$ 的周期性情形，以避免趋势周期在进入下一个周期之前就消亡。

注释 2.1. 我们在此注意到， $I$ 的方程由幂律构成。我们可以发现趋势周期的行为与非牛顿幂律流体的运动之间存在相似性。 [2, 定理 5.1]表明

- 对于 $p < 0$ （剪切变稀流体），流体的能量会在有限时间内消失，这对应于一时风潮或快时尚，
- 对于 $p = 0$ （牛顿流体、纳维–斯托克斯方程），它呈指数衰减，这与时尚相对应，并且
- 对于 $p > 0$ （剪切增稠流体），它按多项式衰减，这对应于经典。

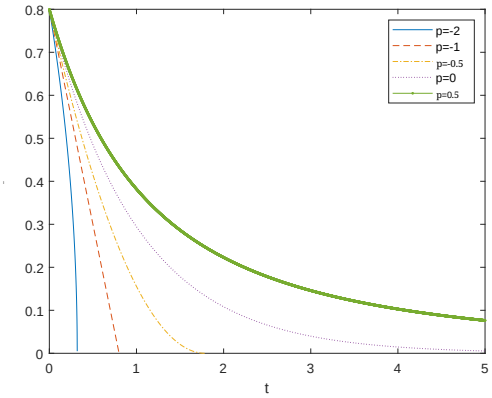



FIGURE 2. $p$ $I$的依赖关系。这里我们求解问题$I'(t) = -I^{p+1}$，其中 $I(0) = 0.8$。

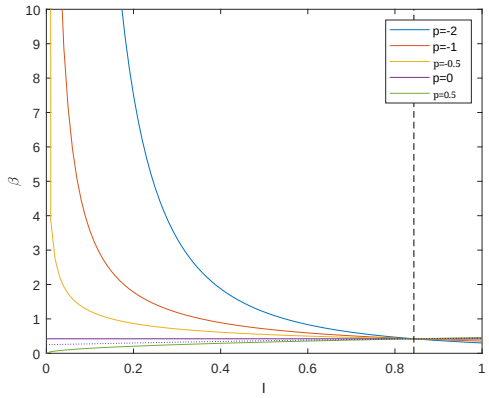



FIGURE 3. 函数 $\beta$在 $t = t_*$之后的形状。这里，$I \approx 0.84$ 是 $I(t_*)$的值。

## 3. Analysis of Classic, Fashion and Fad

在第 2 节中，我们根据一类趋势随时间推移消退的方式，对三种不同的趋势——一时风潮、时尚和经典——进行了刻画。本节将通过推导$I$ 依赖于 $p$时的各种衰减估计来验证这些刻画。在陈述主要定理之前，我们需要几个技术引理。本节中，我们只考虑非周期情形： $\delta = 0$。我们还回顾一下，$m_1$ 和 $m_3$ 分别表示式 (2.3) 和 (2.4) 中采用者与拒绝者的强度。为便于证明，本节中固定 $\ell_\alpha = \ell_\beta = 0$。

**引理 3.1.** 令

$$S(0) + I(0) + R(0) = 1.$$

则有

$$S(t) + I(t) + R(t) = 1.$$

*for* $t \geq 0$.

证明。 将方程组 (2.7) 中的各方程相加，并注意到 (2.7) 右端的各项相互抵消。于是，得到

$$\frac{d}{dt}(S + I + R) = 0,$$

这就得到了所需结果。 □

在下面的引理中，我们考察解 $S(t)$ $I(t)$ $R(t)$的正性。

**引理 3.2.** [**解的正性**]假设

$$S(0) > 0, \quad I(0) > 0, \quad R(0) = 0. \tag{3.1}$$

那么，我们有

$$S(t) > 0, \quad I(t) > 0, \quad R(t) > 0$$

适用于 $0 < t < T_*$。

证明。 见附录。 □

在下面的引理中，我们给出使转变时间 $t_*$ 有限的一个充分条件。

**引理 3.3.** 假设

$$S(0) > 0, \quad I(0) > 0, \quad R(0) = 0.$$

进一步假设

$$m_1 S(0) > 2m_3.$$

那么，转变时间 $t_* > 0$ 是有限的。

**引理 3.4.** [**在 $t_*$ 之后的有界性：** $p < 0$] 令 $p < 0$。假设

$$S(0),\ I(0),\ R(0) > 0$$

*and*

$$m_1 S(0) > 2m_3.$$

那么，存在 $t_* \le \tau < T_*$ 使得

$$I \le \left(\frac{C_*}{2m_1}\right) I^{p+1} \quad for\ all\ t > \tau.$$

证明。参见附录。 □

现在，我们研究两个伯努利型不等式，它们将在长期趋势周期行为的分析中发挥至关重要的作用。

**引理 3.5**。 [**伯努利型微分不等式** $(p > 0)$] 令 $p > 0$。假设 $I(t) > 0$且对 $T_0 < t < T_1$ 以下微分不等式成立:

$$-bI^{p+1} \le I' \le aI - bI^{p+1}.$$

那么，我们有

$$(I(T_0))^{-p} e^{-pa(t-T_0)} + \frac{b}{a}\left(1 - e^{-pa(t-T_0)}\right) \le (I(t))^{-p} \le pb(t-T_0) + (I(T_0))^{-p}.$$

**定理 3.6**。设 $\delta = 0$。假设

$$S(0),\ I(0),\ R(0) > 0$$

*and*

$$m_1 S(0) > 2m_3.$$

于是我们有

(1) **经典：** $(p > 0)$: 对于 $t > t_*$，我们有

$$\frac{1}{\left(a_*^{-1/p} + b(t-t_*)\right)^{\frac{1}{p}}} \le I(t) \le \frac{1}{\left(a_*^{-1/p} - (a_* - c)\left(1 - e^{-pm_1(t-t_*)}\right)\right)^{\frac{1}{p}}}.$$

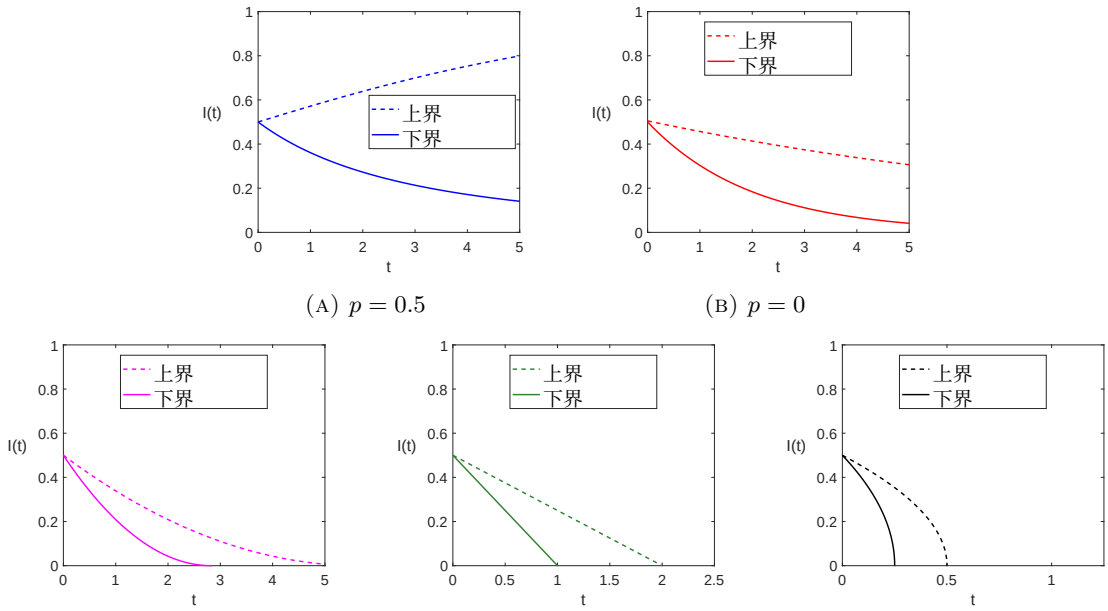
(2) **时尚：** $(p = 0)$。存在 $t_2 > t_*$，使得对于 $t > t_*$

$$a_* e^{-C_*(t-t_*)} \le I(t) \le a_2 e^{-\varepsilon(t-t_2)}.$$

(3) **一时风潮：** $p < 0$，对于 $\tau < t \le T_*$，我们有

$$\frac{1}{\left(a_\tau^{-p} + b(t-\tau)\right)^{\frac{1}{p}}} \le I(t) \le \frac{1}{\left(a_\tau^{-p} + \frac{b}{2}(t-\tau)\right)^{\frac{1}{p}}}.$$

这里， $a_* = I(t_*)$， $a_2 = \max\{a_*, I(t_2)\}$， $a_\tau = I(\tau)$， $b = pC_*$， $c = C_*/m_1$， $\varepsilon = \alpha(I(t_2))S(t_2) - C_*$。 $t_2$ 的定义见证明部分。




(A) $p = 0.5$ (B) $p = 0$

(C) $p = -0.5$ (D) $p = -1$ (E) $p = -2$

FIGURE 4. 不同 $p$ 值下 $I(t)$ 的上界和下界说明，对应于定理 3.6 中的估计。每幅图中，我们使用如下定义的上界 $U(t)$ 和下界 $L(t)$:

(A) $U(t) = \left(\sqrt{2} - \left(\sqrt{2}-1\right)\left(1-e^{-t/4}\right)\right)^{-2}$ and $L(t) = \left(t/4+\sqrt{2}\right)^{-2}$
(B) $U(t) = \frac{1}{2}\exp(-0.1(t-0.1))$ and $L(t) = \frac{1}{2}\exp(-t/2)$
(C) $U(t) = (\sqrt{2}-t/4)^2$ and $L(t) = (\sqrt{2}-t/2)^2$
(D) $U(t) = 1/2 - t/4$ and $L(t) = 1/2 - t/2$
(E) $U(t) = ((1/2)^2 - t/2)^{1/2}$ and $L(t) = ((1/2)^2 - t)^{1/2}$

证明。 **(1)** 由 $0 < S, I \le 1$ 和 $\alpha \le m_1$ 可得

$$-C_* I^{p+1} \le I' \le m_1 I - C_* I^{p+1}.$$

然后，引理 3.5 给出

$$(I(t_*))^{-p} e^{-pm_1(t-t_*)} + \frac{C_*}{m_1}\left(1 - e^{-pm_1(t-t_*)}\right) \le (I(t))^{-p} \le pC_*(t-t_*) + (I(t_*))^{-p}.$$

回顾 $C_* = \beta(I(t_*))(I(t_*))^{-p}$ 的定义以及 $\beta(I(t_*)) \le m_3 < {}^{m_1 S_{(0)}}{}_2 < m_1$ 这一事实，我们有

$$\begin{aligned}&(I(t_*))^{-p} e^{-pm_1(t-t_*)} + \frac{C_*}{m_1}\left(1 - e^{-pm_1(t-t_*)}\right)\\ &= (I(t_*))^{-p} + C_*\left(\frac{1}{m_1} - \frac{1}{\beta(I(t_*))}\right)\left(1 - e^{-pm_1(t-t_*)}\right)\end{aligned}$$

那么，我们有

$$(I(t_*))^{-p} - \left((I(t_*))^{-p} - \frac{C_*}{m_1}\right)\left(1 - e^{-pm_1(t-t_*)}\right) \le (I(t))^{-p} \le pC_*(t-t_*) + (I(t_*))^{-p}.$$

重新整理后，我们得到所需结果。

(2) 根据引理 3.2，对于 $p=0$，以下不等式成立。

$$I' = \alpha(I)SI - C_*I \geq -C_*I$$

由于 $S$、$\alpha$ 和 $I$ 均为正。因此，由 Gr¨onwall 不等式可得所需的下界。接下来证明上界。通过直接计算可得

$$I''(t_*) = \alpha(I(t_*))I(t_*)S'(t_*) < 0.$$

因此，$I'(t)$ 在 $t_*$ 附近 $<0$。假设存在 $t_1 > t_*$，使得 $I'(t_1)$ 首次在 $=0$ 时成立。该假设意味着

$$I(t_1) < I(t_*) \tag{3.2}$$

另一方面，由于 $S'(t) = -\alpha(I)SI < 0$，可得

$$S(t_1) < S(t_*). \tag{3.3}$$

现在，结合 (3.2)、(3.3) 以及 $\alpha$ 是 $I$ 的递增函数这一事实，可得

$$0 = I'(t_1) = (\alpha(I(t_1))S(t_1) - C_*)I(t_1) < (\alpha(I(t_*))S(t_*) - C_*)I(t_*) = I'(t_*) = 0.$$

这就产生了矛盾。因此，

$$I'(t) < 0 \quad \text{for all } t > t_*,$$

也就是说，$I$ 关于 $t > t_*$ 严格递减。这表明，若取 $t_2 > t_*$，则有

$$I(t) < I(t_2), \quad S(t) < S(t_2) \quad \text{for all } t > t_2$$

这就得到

$$\alpha(I(t))S(t) - C_* < \alpha(I(t_2))S(t_2) - C_*.$$

and

$$I'(t) = -(\alpha(I(t))S(t) - C_*)I(t) < -(\alpha(I(t_2))S(t_2) - C_*)I(t), \quad t > t_2$$

(3) 由于 $0 < S,\ I \leq 1$ 且 $\alpha \leq m_1$，根据引理 3.4 可得

$$-C_*I^{p+1} \leq I' \leq m_1 I - C_*I^{p+1} \leq -\frac{C_*}{2}I^{p+1}. \tag{3.4}$$

由此得到所需的估计。 □

## 4. Numerical Tests

在本节中，我们给出数值示例，说明我们的模型 (2.7) 能够捕捉趋势的周期性及其三种不同模式：一时风潮、时尚和经典。

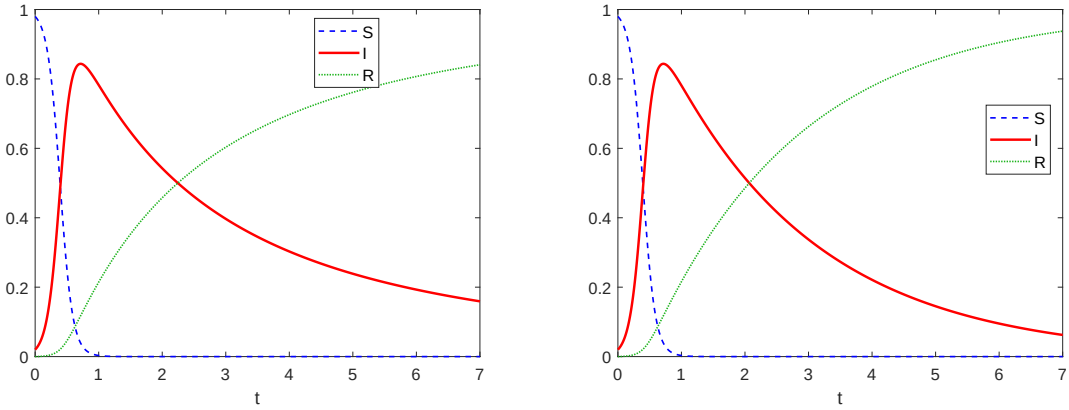
**4.1. 参数 $p$的影响。** 我们表明，$p$ 决定趋势的衰退速度，从而使我们能够刻画一时风潮、时尚和经典。为阐明 $p$的作用，我们在采纳/拒绝率 $\alpha, \beta$ 中固定其他参数 $m_1, m_2, \ell_a$ 和 $\ell_b$，令其为

$$(m_1, m_2) = (20, 0.2),\ \ell_a = 0, \quad (m_3, m_4) = (0.5, 2),\ \ell_b = 0 \tag{4.1}$$

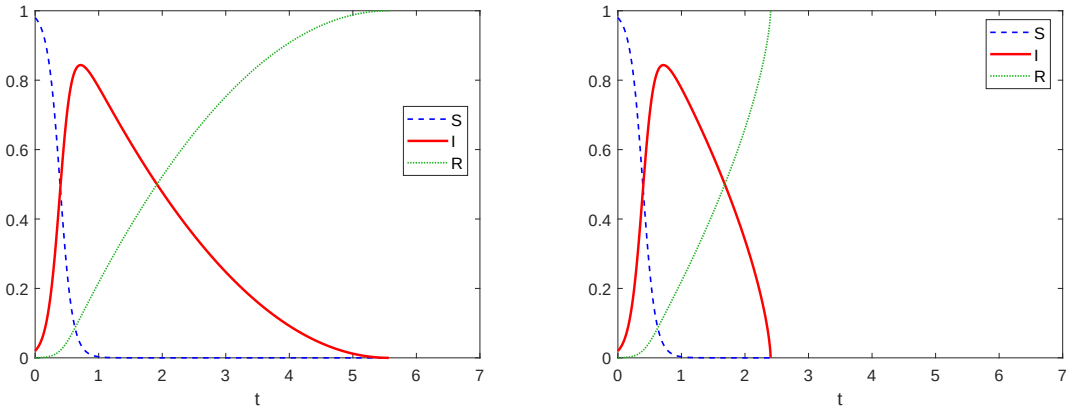
并设 $\delta = 0$。作为初始数据，我们选择

$$S(0) = 0.98, \quad I_1(0) = 0.02, \quad R(0) = 0. \tag{4.2}$$

在图 5 中，我们比较了对应于不同 $p$ 取值的数值解曲线。我们观察到，选择 $p > 0$ 会使 $I$（经典）的趋于稳定过程非常缓慢。$p = 0$ 的情况则表现出快得多的衰减速率（时尚）。当 $-1 < p < 0$ 时，$I$ 会在有限时间内以平缓的方式降至零（快时尚）。在 $p \leq -1$ 的情况下，$I$ 会在有限时间内骤然消亡（一时风潮）。




(A) $p = 0.5$ (B) $p = 0$




(C) $p = -0.5$ (D) $p = -1.5$

FIGURE 5. 时间演变 $S$， $I$， $R$。

**4.2. 我们模型的表现力**。在此测试中，我们展示了我们的模型具有足够强的表现力，只需适当选择采用率 $\alpha$ 和拒绝率 $\beta$ 中的参数，便能重现各种趋势周期。为此，我们重现了引自 [22] 的一幅图，描述了一时风潮、时尚和经典的趋势周期（见图 1）。对于每种情况，我们使用初始数据

$$S(0) = 98,\ I(0) = 2,\ R(0) = 0$$

参数集如下：

- 一时风潮：

$$m_1 = 3,\ m_2 = 0.2,\ m_3 = 1,\ m_4 = 4,\ \ell_\alpha = 0,\ \ell_\beta = 0,\ p = -2.$$

- 快时尚：

$$m_1 = 2,\ m_2 = 0.03,\ m_3 = 0.6,\ m_4 = 1.5,\ \ell_\alpha = 0,\ \ell_\beta = 0,\ p = -0.5.$$

- 时尚：

$$m_1 = 2,\ m_2 = 0.05,\ m_3 = 0.5,\ m_4 = 2\,,\ell_\alpha = 0,\ \ell_\beta = 0,\ p = 0.$$

- 经典：

$$m_1 = 1.2,\ m_2 = 0.03,\ m_3 = 0.2,\ m_4 = 0.5,\ \ell_\alpha = 0,\ \ell_\beta = 0,\ p = 6.$$

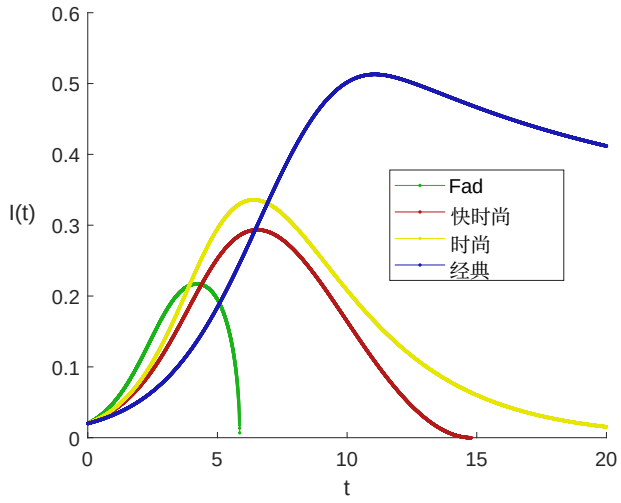
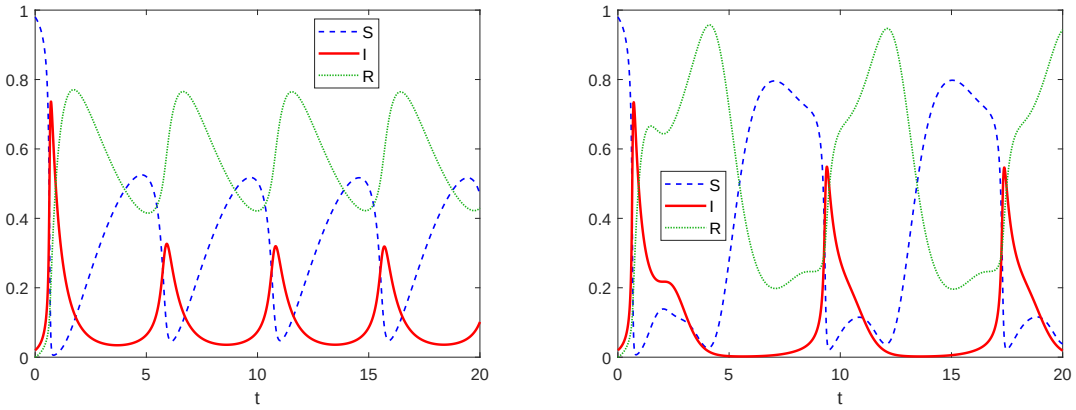



FIGURE 6. 图 1 中一时风潮、时尚和经典对应的趋势周期重现情况。我们还加入了快时尚的趋势周期。参数取值见正文。

**4.3. 趋势的周期性循环。** 通过令 $\delta$ 取正值，我们的模型还可以描述趋势的周期性循环。$\delta > 0$ 的情形对应于这样一种情况：消费者（曾经离开某种趋势）再次成为潜在消费者。为了阐明 $\delta$ 在决定此类循环的规模和周期方面的作用，在整个测试中我们固定

$$(m_1, m_2, m_3, m_4) = (50, 8, 4, 0.5),\ p = 0,\ \ell_\alpha = 0.3,\ \ell_\beta = 0$$

并采用不同类型的 $\delta$。这里，我们使用相同的初始数据 (4.2)。在图 7 中，我们观察到，选择 $\delta$ 使我们能够描述数值解的重复行为。模拟结果表明，与固定 $\delta$ 的情况相比，时间依赖函数 $\delta(t)$ 描述的解更加尖锐，但波动较小。我们可以将复发率 $\delta$ 设为时间依赖函数，以描述更复杂的周期性趋势周期（图 7 (B)）。




(A) $\delta = 0.4$　　(B) $\delta(t) = 0.4 + 0.5$ 正弦$(\frac{\pi}{2}t - 1)$

FIGURE 7. 趋势周期随 $\delta$ 的复现情况。

## 5. Conclusion

在本研究中，我们提出了一个微分方程组，通过考察趋势参与者之间的底层动态，对趋势的演变过程进行定量建模。我们的模型捕捉了趋势周期的五个阶段，即开始阶段、上升阶段、峰值阶段、衰退阶段和过时阶段。此外，该模型还提供了一种数学判据，用于区分一时风潮、时尚和经典。我们还证明了模型的若干数学性质，并通过模拟验证了该建模方法的合理性。需要注意的是，为了简化分析，我们研究的是单一时尚模型，即仅考虑一种趋势。将这种单一时尚模型扩展为多重时尚模型，并将细分时尚的区分纳入考虑，将是一个很有意义的研究课题。这也是我们下一步的研究工作。

**致谢：**
Bae 受到韩国教育与技术部资助、通过韩国国家研究基金会（NRF）实施的基础研究计划（NRF-2021R1A2C1093383）的支持，Cho 获得项目编号为 RS-2022-00166144 的资助，Yoo 获得亚洲大学研究基金的支持，Yun 则获得三星科学技术基金会项目（项目编号：SSTF-BA1801-02）的支持。

## Appendix A. Proof of Lemma 3.2

由于 $S(t) = S(0)e^{-\int_0^t \alpha I_{(s)} ds}$ 且 $R(t) = \beta SI$，因此只需证明 $I(t) > 0$。(1) $t < t_*$的情形：在此情形下，我们有

$$I'(t) \geq -\beta(I)I \geq -m_3 I.$$

因此

$$I(t) \geq \alpha SI - \beta I \geq -\beta I \geq e^{-m_3 t} I(0) > 0.$$

这就得到了所需结果。
(2) $t > t_*$ 和 $p \geq 0$的情况：在这种情况下，我们使用 $I^{p+1} \leq I$ 来得到

$$I'(t) = \alpha SI - C_* I^{p+1} \geq -C_* I^{p+1} \geq -C_* I(t)$$

从而 $I(t) \geq I(t_*)e^{-C_*(t-t_*)} > 0$.
（3） $t_* < t < T_*$ 和 $p < 0$的情形：在这种情况下， $I$ 满足

$$I'(t) = \alpha SI - C_* I^{p+1} \geq -C_* I^{p+1}$$

由此可得：

$$I(t) \geq \left(I^{-p}(t_*) + pm_3(t - t_*)\right)^{-\frac{1}{p}} > 0.$$

## Appendix B. Proof of Lemma 3.3

由于 $m_1 S(0) > 2m_3$， $I$ 起初增加：

$$I'(0) = \alpha(I(0))I(0)S(0) - \beta(I(0))I(0) \geq \frac{m_1}{2} I(0)S(0) - m_3 I(0) \geq \left(\frac{m_1}{2} S(0) - m_3\right) I(0) > 0.$$

假设对于所有 $t$， $I'(t) > 0$，从而

$$I(t) \geq I(0) > 0 \quad \text{for } t > 0$$

然而，这意味着

$$S(t) \leq S(0)e^{-\int_0^t \alpha I(0) ds} \leq S(0)e^{-\frac{m_1}{2} I(0) t} \to 0$$

当 $t$ 趋近于 $\infty$ 时。也就是说，存在一个充分大的时间 $T > 0$，使得

$$S(t) < \frac{m_3}{4m_1} < \frac{1}{8}$$

对于 $t > T$。因此

$$I' \leq (m_3/4)I - (m_3/2)I < 0.$$

这与假设矛盾。因此， $t_*$ 是有限的。

## Appendix C. Proof of Lemma 3.4

我们首先提出以下论断:

**断言：** 任取满足 $0 < I^* < I(t_*)$ 的 $I_*$，则 $I(t)$ 会在有限时间内变得小于 $I^*$。断言的证明：为证明该断言，反设对于所有 $t > t_*$，$I^* \le I(t) \le 1$。在此假设下，$S$ 满足

$$S(t) = S(t_*)e^{-\int_0^t \alpha(I(s))I(s)ds} \le S(t_*)e^{-\int_{t_*}^t \frac{m_1}{2}I(s)ds} \le S(t_*)e^{-\frac{m_1}{2}I_*(t-t_*)}.$$

因此，当 $t$ 足够大时，我们有

$$I' = \alpha(I)SI - C_*I^{p+1} \le \left(m_1 S - C_*\right)I \le -\frac{C_*}{2}I. \tag{C.1}$$

这意味着 $I$ 以指数速度下降，这与对所有 $t > t_*$ 都有 $I(t) \ge I^* > 0$ 的假设矛盾。断言得证。

现在，根据 $\beta$ 的定义中给出的 $C_*$ 的定义，我们可以看出

$$\left(\frac{C_*}{2m_1}\right)^{-1/p} \le \left(\frac{m_3}{2m_1}\left(I(t_*)\right)^{-p}\right)^{-1/p} \le I(t_*)$$

在最后一个不等式中，我们用到了 $m_3/m_1 < S(0)/2 < 1$。因此，借助该断言，我们可以找到$\tau > t_*$，使得

$$I(\tau) = \left(\frac{C_*}{2m_1}\right)^{-\frac{1}{p}}.$$

令 $\bar{t} > \tau$ 为满足 $I(\bar{t}) = I(\tau)$ 的首次时间。则对 $\tau < t < \bar{t}$，$I(t) < I(\tau)$ 成立。因此

$$I'(t) \le m_1 I(t) - C_* I(t)^{p+1} < m_1 I(t) - C_*\{I(\tau)\}^p I(t) = m_1 I(t) - \left(2m_1/C_*\right) I(t) \le -m_1 I(t),$$

这意味着 $I(\bar{t})$ 在 $\tau < t < \bar{t}$ 上严格小于 $I(\tau)$。这与假设矛盾。因此，对于所有 $t \ge \tau$，我们有 $I(t) \le I(\tau)$，这等价于

$$I(t) \le \frac{C_*}{2m_1}\left(I(t)\right)^{p+1}.$$

## Appendix D. Proof of Lemma 3.5

将不等式两边同时除以 $I^{p+1}$，得到

$$-b \le \left(\frac{1}{-p}I^{-p}\right)' \le aI^{-p} - b.$$

第二个不等式是显然的。对于第一个不等式，我们应用 Gr¨onwall 引理，得到 n

$$I^{-p}(t) \ge I^{-p}(T_0)e^{-pa(t-T_0)} + \frac{b}{a}\left(1 - e^{-pa(t-T_0)}\right),$$

至此，证明完成。

## References

[1] Ahmetolan S., Bilge A.H., Demirci A., Peker-Dobie A., Ergonul O. (2020). 利用易感者-感染者-移除者（SIR）模型，我们能从死亡病例和感染病例数据中估算出什么？COVID-19 大流行案例研究，《医学前沿》（Front. Med.），7，556366。[2] Bae, H.-O. (1999). 非牛顿流动解的存在性、正则性及衰减率。《数学分析与应用杂志》（J. Math. Anal. Appl.），231(2)，467—491。[3] Beckley R, Weatherspoon C,Alexander M, ChandlerM, Johnson A, Bhatt G. S. (2013). 利用微分方程对流行病进行建模。田纳西州立大学内部报告。[4] Berger, J. Mens, GL (2009). 采纳速度如何影响文化品味的放弃。《美国国家科学院院刊》（PNAS），106(20)，8146 - 8150。[5] Bhardwaj V., Fairhurst A. (2010). 快时尚：对时尚产业变化的响应。《国际零售、分销与消费者研究评论》（The International Review of Retail, Distribution and Consumer Research），20(1)，165-173。

[6] Cachon, G. P., Swinney, R. (2011). 快时尚的价值：快速响应、改进设计与战略性消费者行为。《管理科学》，57(4)，778-795。[7] Callahan, C. E. (2012). 《时尚受挫》：为什么《创新设计保护法》是迈向正确方向的必要一步，但仍远远不够。《布鲁克林公司、金融与商法期刊》，7，195。[8] Cho, H. S., Lee, J. (2005). 基于消费者情绪的近期时尚趋势宏观模型开发。《国际消费者研究杂志》，29(1)，17-33。[9] Ewing, E., Mackrell, A. (2014). 20世纪时尚史。Batsford。[10] Hansen, K. T. (2004). 着装世界：关于服装、时尚与文化的人类学视角。《人类学年度评论》，33，369-392。[11] Harko, T., Lobo, F. S., Mak, M. (2014). 易感者-感染者-康复者（SIR）流行病模型及具有相同死亡率和出生率的SIR模型的精确解析解。《应用数学与计算》，236，184-194。[12] Hemphill C. S., Suk J. (2009). 时尚的法律、文化与经济学。《斯坦福法律评论》，61，1147。[13] Gopagoni D., Lakshmi P. V. (2020). 易感者、感染者和康复者（SIR模型）预测模型：了解COVID-19 11 9 296 302 传播的关键因素。[14] 1997《国际先进计算机科学与应用杂志》，( )，- Kaiser, S. B. ( ). 《服装的社会心理学：情境中的象征性外观》。Fairchild Books。[15] Kermack, W. O., McKendrick, A. G. (1927). 对流行病数学理论的贡献。《伦敦皇家学会会刊》，A辑，数学与物理特辑，115(772)，700-721。[16] Kim, A. J., Ko, E. (2010). 奢侈时尚品牌的社交媒体营销对客户关系和购买意愿的影响。《全球时尚营销杂志》，1(3)，164-171。[17] Kim, K. H. (2011). 虚拟韩流。载于《虚拟韩流》。杜克大学出版社。[18] King, C. W., Ring, L. J. (1980). 风格与品味采纳及扩散的动态：时尚理论的贡献。《ACR北美进展》。[19] Kr¨oger, M., Schlickeiser, R. (2020). 流行病时间演变的SIR模型解析解。A部分：时间无关的再生数。《物理学杂志A：数学与理论》，53(50)，505601。[20] Law K.B., Peariasamy K.M., Gill B.S., Singh S., Sundram B.M., Rajendran K., Dass S.C., Lee Y.L., Goh P.P., Ibrahim H., Abdullah N.H. (2020). 利用时变SIR模型追踪COVID-19传播动态的早期衰减。《科学报告》，10(1)，1-11。[21] Lee, S. C. (2022). 魔法资本主义与赌徒主体：韩国的比特币投资狂热。《文化研究》，36(1)，96-119。[22] Lynch, A., Strauss, M. (2007). 时尚变迁：趋势分析与文化意义批判性导论。Berg。[23] McCracken, G. D. (1990). 文化与消费：关于消费品及活动象征性特征的新方法（第1卷）。印第安纳大学出版社。[24] Mohr, I. (2013). 社交媒体对时尚产业的影响。《应用商业与经济学杂志》，15(2)，17-22。[25] Neher R.A., Dyrdak R., Valentin D., Hodcroft E.B., Albert J. (2020). 季节性驱动对SARS-CoV-2大流行的潜在影响。《瑞士医学周刊》，150，p. w20224[26] Pesendorfer, W. (1995). 设计创新与趋势周期。《美国经济评论》，771-792。[27] Ritch, E. L. (2014). 将可持续性从食品延伸至时尚消费：职业母亲的亲身经历。《国际管理案例杂志》，16(2)，17-31。[28] Schlickeiser, R., Kr¨oger, M. (2021). 流行病时间演变的SIR模型解析解：B部分，半时变情形。《物理学杂志A：数学与理论》，54(17)，175601。[29] Simmel, G. (1957). 时尚。《美国社会学杂志》，62(6)，541-558。[30] Vanderploeg, A., Lee, S. E., Mamp, M. (2017). 3D打印技术在时尚产业中的应用。《国际时尚设计、技术与教育杂志》，10(2)，170-179。[31] Van der Veen, A. M. (2012). 荷兰郁金香狂热：金融泡沫的社会基础。威廉与玛丽学院政府系。[32] Yoganarasimhan, H. (2017). 识别数据中时尚周期的存在及成因。《营销研究杂志》，54(1)，5-26。

(BAE) Department of Financial Engineering, Ajou University, Suwon, Republic of Korea*Email address*: hobae@ajou.ac.kr(CHO) Department of Mathematics and Research Institute of Natural Science, Gyeongsang NationalUniversity, Jinju, Republic of Korea*Email address*: chosy89@gnu.ac.kr(YOO) Department of Financial Engineering, Ajou University, Suwon, Republic of Korea*Email address*: janeyoo@ajou.ac.krDepartment of mathematics, Sungkyunkwan University, Suwon 440-746, Republic of Korea*Email address*: sbyun01@skku.edu