arXiv:2304.10274v1 [math.GT] 20 Apr 2023

计算给定交换子长度的测地线

VIVEKA ERLANDSSON 和 JUAN SOUTO

Abstract. 设 Σ 为一闭双曲曲面。对于固定的 g，我们研究 Σ中长度不超过 L 且可写成 g 个交换子的乘积的周期测地线数量的渐近行为。基本思路是将这些结果归结为计算 Σ中三价图的临界实现。在附录中，我们采用相同的策略证明 Huber 几何素数定理。

1. Introduction

本文将研究一固定的连通定向闭双曲曲面 $\Sigma = \Gamma\backslash\mathbb{H}^2$中某些类别测地线数量的增长情况。

在 [10]中，Huber 证明，长度为 $\ell_\Sigma(\gamma) \leqslant L$ 的非平凡定向周期测地线集合 $\mathbf{C}(L)$ 的基数满足如下渐近关系

$$|\mathbf{C}(L)| \sim \frac{e^L}{L} \text{ as } L \to \infty. \tag{1.1}$$

这里的 $\sim$ 表示，当 $L \to \infty$时，两个量的比值趋于 1。Huber 的结果已在所有可能的方向上得到推广，例如允许考虑有限面积的曲面 [9] 和更高维的负曲率流形，或者将周期测地线替换为阿诺索夫流的轨道[12]。在对所计数的测地线施加额外限制时，也得到了 Huber 结果的变体。这里应提及 Mirzakhani 关于简单测地线计数的工作 [13]，以及更一般地对给定类型测地线的计数 [14, 8], ；不过，与本文关注的问题更接近的，是 Katsuda-Sunanda [11] 和 Phillips-Sarnak [16]较早的结果：它们给出了长度不超过 L且满足某种同调条件的测地线数量的渐近行为。例如，Katsuda-Sunada [11] 证明了

$$|\{\gamma \in \mathbf{C}(L) \text{ homologically trivial}\}| \sim (g_\Sigma - 1)^{g_\Sigma} \cdot \frac{e^L}{L^{g_\Sigma+1}} \tag{1.2}$$

第一作者衷心感谢英国工程与自然科学研究委员会（EPSRC）项目资助 EP/T015926/1 以及 UiT 计算数学结构极光中心（ MASCOT ）提供的支持。本研究未使用任何数据。

其中， g_Σ 是 Σ的亏格。Phillips-Sarnak [16] 得到了相同的结果，并对误差项给出了估计。

在这里，我们将统计某些同调平凡曲线。每条同调平凡曲线 γ 都可以在自由同伦意义下表示为 $\pi_1(\Sigma)$ 中若干交换子的乘积。所需交换子的最小数量称为 γ 的交换子长度。这个量等于满足以下条件的最小连通定向曲面 S 的亏格：该曲面具有连通边界 ∂S，并且存在一个（连续）映射 $S \to \Sigma$，将 ∂S 映至 γ。这解释了为什么我们把 γ 的交换子长度 $cl(\gamma)$看作 的亏格。

在本文中，我们研究对于固定但其他方面任意的 $g \geqslant 1$，具有给定交换子长度的集合的基数的渐近行为。

$$\mathbf{B}_g(L) = \left\{ \gamma \subset \Sigma \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{closed geodesic with } \ell_\Sigma(\gamma) \leqslant L \text{ and} \\ \text{commutator length } cl(\gamma) = g \end{array} \right\} \tag{1.3}$$

这是我们的主要结果：

定理 1.1. 设 Σ 是一个闭、连通且定向的双曲曲面，对于 $g \geqslant 1$ 和 $L > 0$，令 $\mathbf{B}_g(L)$ 如 (1.3) 中所定义。我们有

$$|\mathbf{B}_g(L)| \sim \frac{2}{12^g \cdot g! \cdot (3g-2)! \cdot \mathrm{vol}(T^1\Sigma)^{2g-1}} \cdot L^{6g-4} \cdot e^{\frac{L}{2}}$$

如 $L \to \infty$。

这里，与本文一贯的做法相同，我们在单位切丛 $T^1\Sigma$ 上赋予 Liouville 测度，并以使 $\mathrm{vol}(T^1\Sigma) = 2\pi \cdot \mathrm{vol}(\Sigma) = -4\pi^2\chi(\Sigma)$ 成立的方式进行归一化。特别地，与 (1.2) 中一样，定理 1.1 中的量取决于底层曲面 Σ 的拓扑，但不取决于其几何。

注意，根据定义，$\mathbf{B}_g(L)$ 中的曲线围成一个亏格为g的曲面，但这个曲面只是某个连续映射（或者说，光滑映射）的像。我们证明，$\mathbf{B}_g(L)$ 中只有一个虽小但确定的比例的元素，是某个亏格为 g（且边界连通）的浸入曲面的边界：

定理 1.2. 设 Σ 是一个闭、连通且定向的双曲曲面，对于 $g \geqslant 1$ 和 $L > 0$，令 $\mathbf{B}_g(L)$ 如 (1.3) 中所定义。则有

$$|\{\gamma \in \mathbf{B}_g(L) \text{ bounds immersed surface of genus } g\}| \sim \frac{1}{2^{4g-2}} |\mathbf{B}_g(L)|$$

作为 $L \to \infty$。

定理 1.2 或许应当与[4, 定理 4.79]中的浸入定理进行比较。浸入定理断言，每条同调平凡的测地线 γ 在 Σ 中都在某个有限覆盖空间中围成一张浸入曲面，这意味着存在一个从紧曲面 S 到 Σ 的浸入，使得 S 的边界以正次数映射到 γ 上。从某种意义上说，定理 1.2 似乎表明，在大多数情况下， S 的亏格与 γ的亏格并不一致。

在定理 1.1 的证明过程中，我们将需要一个不同的计数结果，我们认为该结果本身也具有一定的研究价值。具体而言，假设 X 是一个紧三价图。我们将 X 在 Σ 中的临界实现理解为一个（连续）映射

$$\phi : X \to \Sigma$$

将每条边映射为一条非退化测地线段，并使得与同一顶点关联的任意两条（边的芽）映射后都成为以角度 $\frac{2\pi}{3}$ 相交的测地线段（关于这一术语词源的解释，见引理 2.2）。尽管读者此时或许还不完全明白，集合

$$\mathbf{G}^X(L) = \left\{ \begin{array}{c} \phi : X \to \Sigma \text{ critical realization} \\ \text{with length } \ell_\Sigma(\phi) \leqslant L \end{array} \right\} \tag{1.4}$$

是有限的，其中临界实现的长度 定义为总和

$$\ell_\Sigma(\phi) = \sum_{e \in \mathbf{edge}(X)} \ell_\Sigma(\phi(e))$$

即 ϕ（e）的测地线段长度之和，其中 e 遍历 X的边集合。以下是定理 1.1 的关键:

定理 1.3。 设 Σ 是一个闭、连通且定向的双曲曲面。对于每个连通三价图 X，有

$$|\mathbf{G}^X(L)| \sim \left(\frac{2}{3}\right)^{3\chi(X)} \cdot \frac{\mathrm{vol}(T^1\Sigma)^{\chi(X)}}{(-3\chi(X)-1)!} \cdot L^{-3\chi(X)-1} \cdot e^L$$

当 $L \to \infty$时。这里， $\chi(X)$ 是图 X的欧拉示性数。

我们简要概述定理 1.3 的证明。首先回顾一下，据我们所知，证明 Huber 定理 (1.1) 基本上有两种方法：一种是按照 Huber 的方式 `，也就是从谱分析的角度着手；另一种则是 Margulis 后来采用的方法 [12], ，利用测地流的遍历性质。事实上，Huber 定理的先驱——Delsarte 格点计数定理 [7] ——也可以从这两种不同的角度来证明。在下文第 3 节中，我们将概述如何由测地流具有混合性这一事实推出 Delsarte 定理的论证；同时也会讨论对这类测地弧的计数：它们在 Σ中从 x 出发到达 y ，且其初速度和末速度分别属于预先指定的单位切空间区域——精确表述见定理 3.1。这正是证明上述定理所需的全部动力系统知识。明确地说，我们不使用测地流混合性质的任何较为罕见的强化结果。具体而言，我们不需要指数混合性或类似性质。

定理 1.3 证明的基本思路是注意到，对于固定的图 X，它在 Σ 中所有实现构成的集合（即以测地方式映射每条边的映射 $X \to \Sigma$ ）自然是一个流形。泛型情况下，每个连通分支都包含唯一的临界实现。为了计算这样的临界实现有多少个

总长度小于 L，我们考虑较小 ε 时的集合 $\mathcal{G}_{\varepsilon-\mathrm{crit}}(L)$：其中包含长度至多为 L 的测地实现，并且角度不必恰好为 $\frac{2\pi}{3}$，而是落在其周围大小为 ε 的区间内。Delsarte 定理使我们能够计算这组测地实现的体积 $\mathrm{vol}(\mathcal{G}_{\varepsilon-\mathrm{crit}}(L))$。接着，借助一些双曲几何知识可以证明，$\mathcal{G}_{\varepsilon-\mathrm{crit}}(L)$ 的大多数连通分支的体积基本相同。因此，我们可以在误差较小的情况下得知连通分支的数量，进而得知临界实现的数量。定理 1.3 的证明概要至此结束。

注。 用于证明定理 1.3 的策略也可以用来简洁地证明 Huber 定理（1.1）。我们将在附录中详细说明这一点。尽管这样做在逻辑上并无必要，我们仍建议读者在推导定理 1.3 的证明细节之前先看一看。

带状图 基本上是配备了正则邻域**邻域**(X)的图，而该邻域同胚于一个定向曲面。如果这个正则邻域同胚于一个亏格为 g、边界连通的紧曲面，那么这样的带状图的亏格为 g。考虑带状图的关键在于，每当我们有一个亏格为 g 的带状图底层图的一个实现 $\phi\colon X\to\Sigma$ 时，就能得到一条曲线，即 $\phi(\partial$**邻域**$(X))$，其亏格至多为 g。定理 1.1 证明的基本思路是考虑集合

$$\mathbf{X}_g=\left\{(X,\phi)\;\middle|\;\begin{array}{c}X\text{ is a fat graph of genus }g\text{ and}\\ \phi:X\to\Sigma\text{ is a critical realization}\\ \text{of the underlying graph}\end{array}\right\}\Big/_{\text{equiv}}$$

（等价类）实现（详见第 7 节），并证明该映射

$$\Lambda:\mathbf{X}_g\to\mathbf{C},\quad (X,\phi)\mapsto\ \text{geodesic homotopic to }\phi(\partial X)$$

基本上是到 $\mathbf{B}_g$ 上的双射，并且泛型地，测地线 $\Lambda(X,\phi)$ 的长度几乎恰好等于 $2\cdot\ell(\phi)-C$，其中某个显式常数为 C。至此，结合 Bacher 和 Vdovina 的一项结果 [1]，我们便可以从定理 1.3 得到定理 1.1 的结论。除了证明定理 1.3 之外，大部分工作都在于确立映射 Λ 的性质。关键步骤是对长度至多为 L、且以两种本质不同的方式作为亏格为 g 的曲面边界出现的曲线数量进行估计：

定理 1.4. 对于任意 g，在 Σ 中，长度为 $\ell(\gamma)\leqslant L$、亏格为 g 的闭测地线 γ 至多有 $\mathbf{const}\cdot L^{6g-5}\cdot e^{\frac{L}{2}}$ 条，并且具有如下性质：存在两个非同伦填充 $\beta_1:S_1\to\Sigma$ 和 $\beta_2:\ S_2\to\Sigma$，其亏格均为 $\leqslant g$。

这里，亏格 g 填充的 γ 是一个连续映射 $\beta:S\to\Sigma$，其定义域为具有连通边界的亏格g 曲面 S，满足 $\beta(\partial S)=\gamma$。

定理 1.4 可能看起来有些弱，因为我们仅通过 $\mathbf{const}_L$ 来界定在 $\mathbf{B}_g(L)$ 中被~~~~我们重复计数的那些元素所占的比例，而当

我们统计亏格为 g 的曲面，而不是统计曲线。不过，应当注意，这是 (1.2) 中误差项的阶（见 [16]），这也确实是我们预期在此证明的结果中的误差项阶。无论如何，不难证明，定理 1.4 中那些γ的集合至少具有 $\mathbf{const}\cdot L^{6g-10}\cdot e^{\frac{L}{2}}$ 的阶。事实上，若$\omega\in\pi_1(\Sigma)$作为交换子有两种不同的表示方式，例如若我们选择$\omega=[aabab,ba^{-1}a^{-1}]=[aaba,bba^{-1}]$，且 η是随机选取的、由 $g-1$ 个生成元构成的乘积，则 $\omega\eta$ 作为 g 个交换子的乘积有两种不同的表示方式，因此对应于两个非同伦填充；而 η有$\mathbf{const}\cdot L^{6g-10}\cdot e^{\frac{L}{2}}$种选择。

逐节摘要。 在第 2 节中，我们讨论图的实现，以及实现空间的拓扑与几何。

在第 3 节中，我们将讨论 Delsarte 经典的格点计数结果及其两个最小推广。

至此，我们将具备证明定理 1.3 所需的全部工具。证明将在第 4 节中给出。

在第 5 节和第 6 节中，我们将详细阐述定理 1.1 证明中的几何方面，其中主要结果是定理 1.4。尽管我们并未使用任何关于折叠曲面的结果，但对于那些习惯于研究此类对象的读者而言，这两节中的一些论证将显得相当自然。

在第 7 节中，我们结合前两节的结果与定理 1.3，证明定理 1.1。定理 1.2 将在第 8 节中证明。

最后，第 9 节将专门讨论：如果我们放宽 Σ 是闭双曲曲面这一假设，我们所做的工作中哪些部分仍然成立。

最后，我们在附录 A 中给出 Huber 定理的一个证明，其采用的思路与定理 1.3 的证明相同。

注记。 本文结束后，我们得知，在其他一些情形下，也有人研究过如何计算某个群中有多少个元素可以表示为交换子。具体而言，Park [15] 使用 Wicks 形式，得到了自由群$\mathbb{F}_r$ 中秩为 r 、可表示为交换子且词长度为 L 的元素个数的渐近行为，其结果如 $L\to\infty$所示。在同一篇论文中，他还研究了群为两个非平凡有限群的自由积的情形。若能弄清楚是否可以运用本文中的方法重新得到 Park 的那些优美定理，将会是一件很有意义的事情。

致谢。 感谢 Vincent Delecroix、Lars Louder、Michael Magee 和 Peter Sarnak 提供了非常有帮助的意见。第二位作者还要特别感谢 S´ebastien Gou¨ezel、Vincent Guirardel 和 Fran¸cois Maucourant 对他所有问题所表现出的耐心——把办公室设在他们旁边真是件愉快的事。

记号。

我们所说的图 X 是一个只有有限多个胞腔的一维 CW 复形。我们用 **顶点** $=$**顶点**(X) 表示顶点集合，用 **边** $=$**边**(X) 表示 X 的边集合，并用 **半边** $=$ **半边**(X) 表示图 X 的半边集合——半边无非就是一条边的芽。给定一个顶点 $v \in$**顶点**(X)，记 **半边**$_v$ $=$**半边**$_v(X)$ 为从 v 发出的半边集合。注意，**半边**$_v$ 中的两个元素完全可能对应于同一条边——也就是说，X 可能有这样的边：其两端都与同一个顶点关联。**半边**$_v$ 的基数就是 X 在 v 处的度数；如果 X 在每个顶点处的度数都是 3，我们就称其为三价 图。读者可以放心地假定，他们所遇到的图都是三价图。

谈到曲面时，我们始终使用同一个底层曲面，即固定的闭、连通且定向的双曲曲面 $\Sigma = \Gamma\backslash\mathbb{H}^2$。我们将 $T^1\Sigma$ 与 $\Gamma\backslash T^1\mathbb{H}^2 = \Gamma\backslash \mathrm{PSL}_2\,\mathbb{R}$ 识别，并赋予$T^1\Sigma$ 其由 $\mathrm{PSL}_2\,\mathbb{R}$ 上的左不变黎曼度量所诱导的距离，例如取一种使每个单位切空间 2π 具有长度 $T^1_{x_0}\Sigma$，且使投影 $T^1\mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2$ 成为黎曼浸没的度量。这意味着单位切丛的体积为 $\mathrm{vol}(T^1\Sigma) = 2\pi \cdot \mathrm{vol}(\Sigma) = 4\pi^2 \cdot |\chi(S)|$。基于 Σ同一点的切向量之间的角度始终是不定向的，这意味着它们取值于 $[0, \pi]$——注意，这与单位切空间具有长度 2π是一致的。

我们通常会用黑体大写字母表示所计数的离散集合，例如 $\mathbf{C}$ 或 $\mathbf{B}$。这些集合通常还会带有丰富的装饰，例如 $\mathbf{G}^X(L)$ 或 $\mathbf{B}_g(L)$。这些集合通常是更大空间中的离散子集，而这些空间将用花体字母表示。黑体字母和花体字母通常是相互对应的：$\mathbf{G}$ 将是空间 $\mathcal{G}$ 的一个子集。

关于常数的说明。本文中有两类常数：一类是我们试图实际计算其数值的常数，另一类则是我们只需知道其存在即可的常数。显然，对于第一类常数，我们必须仔细追踪其取值。然而，对所有可能的常数都这样做未免过于繁琐，而且没有明显的收益。一般而言，常数往往会不断引出更多常数。因此，我们统一用 **const**表示实际取值无关紧要的常数，并允许 **const** 的具体数值随行而变化。希望这不会造成任何混淆。

现在说明一下欧几里得向量。这里出现的所有向量都用箭头标记，如 $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_k)$，并且都是正的，也就是说，其分量 v_i 均为正数。换言之，它们属于 $\mathbb{R}^k_+$，也可能属于 $\mathbb{N}^k$。我们将写作

$$\|\vec{v}\| = |v_1| + \cdots + |v_k| = v_1 + \cdots + v_k$$

对于向量的 L^1 范数。这是我们在本文中会遇到的唯一范数。

2. Realizations of graphs in surfaces

在本节中，我们将讨论图到曲面的某些映射空间。这些空间在本文中发挥着关键作用。尽管本节篇幅较长，但内容应该通俗易懂且读起来轻松愉快——只有命题 2.3 的证明需要花费一些功夫。

实现。 我们关注嵌入双曲曲面 Σ中的连通图，或者更准确地说，关注连续映射

$$\phi : X \to \Sigma \tag{2.1}$$

图 X 到 Σ，且将其限制在每条边上时都是测地线。我们称这样的映射 (2.1) 为 X 在 Σ中的实现。需要强调的是，实现不必是单射，事实上，映射 ϕ 在某些边上，甚至在图的更大部分上，都可能是常值映射。正则实现是指在每条边上的限制都非常值的实现。若$\phi:\ X \to \Sigma$ 是一个正则实现，且 $\vec{e} \in$ **半**(X) 是与顶点 $v \in \mathbf{vert}(X)$ 相接的一条半边，则我们用 $\phi(\vec{e}) \in T^1_{\phi(v)}\Sigma$ 表示 $\phi(v)$ 处沿着 $\vec{e}$的像方向的单位切向量。

我们在集合 $\mathcal{G}^X$ （即图 X 的所有实现构成的集合；该图始终是连通的）上赋予紧开拓扑，并注意到，除非 X 本身可缩，否则空间 $\mathcal{G}^X$ 并不连通：$\mathcal{G}^X$ 的连通分支对应于将 X 映入 Σ的映射所可能具有的不同自由同伦类。事实上，将线段相对于其端点拉紧可知，任意同伦

$$[0,1] \times X \to \Sigma,\ \ (t,x) \mapsto \varphi_t(x)$$

两个实现之间的同伦相对于 $\{0,1\}\times X$ 同伦于一个同伦映射，我们仍用相同的符号表示该映射，使得

(1) 对于每个顶点 $v \in \mathbf{vert}(X)$, $\ t \mapsto \varphi_t(v)$ 都是测地线；(2) 对所有 t, $\ \varphi_t : X \to \Sigma$ 都是一个实现。

满足条件 (1) 和 (2) 的同伦 $[0,1] \times X \to \Sigma$ 称为 测地同伦。

测地同伦还有另一种内在描述。事实上，由于每个弧的同伦类中测地代表的唯一性，每个实现 $\phi \in \mathcal{G}^X$ 都有一个由顶点的像参数化的邻域。这意味着映射

$$\Pi : \mathcal{G}^X \to \Sigma^{\mathbf{vert}(X)},\ \ \phi \mapsto (\phi(v))_{v\in\mathbf{vert}(X)} \tag{2.2}$$

是一个覆盖。通过拉回双曲度量的乘积，我们将其视为一个局部由双曲平面的 $(\mathbb{H}^2)^{\mathbf{vert}(X)} = \mathbb{H}^2 \times \cdots \times \mathbb{H}^2$ 个副本的乘积建模的流形**垂直**(X)。从这个角度来看，测地同伦不过是 $\mathcal{G}^X$ 中的测地线。

由于这些内容都非常重要，我们在此将其记录为一个命题：

命题 2.1. 设 X 是一个图。映射 (2.2) 是一个覆盖，并且测地同伦相对于拉回度量而言是测地线。□

长度函数。 在 Σ 中图 X 的实现 $\mathcal{G}^X$ 空间上，我们有长度函数

$$\ell_\Sigma : \mathcal{G}^X \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}, \quad \ell_\Sigma(\phi) = \sum_{e \in \mathbf{edge}(X)} \ell_\Sigma(\phi(e)).$$

首先，Arzela-Ascoli 定理表明 ℓ_Σ 是一个适当函数。因此， ℓ_Σ 在 $\mathcal{G}^X$ 的任意一个连通分支上的限制均存在最小值。现在，距离函数 $d_{\mathbb{H}^2}(\cdot,\cdot)$ 的凸性意味着 ℓ_Σ 是凸的。更确切地说，若 (φ_t) 是 Σ 中两个实现之间的测地同伦，则函数 $t \mapsto \ell_\Sigma(\varphi_t)$ 是凸的。事实上，除非 $[0,1] \times X$ 的像包含在 Σ 中的一条测地线上，否则该函数是严格凸的；更准确地说，若某个（因而任意一个）到万有覆盖空间的提升的像包含在 $\mathbb{H}^2$ 中的一条测地线上，则该函数不是严格凸的。

还需注意，当限制在正则实现的集合上时，长度函数也是光滑的——其导数由一阶变分公式给出。

$$\frac{d}{dt}\ell_\Sigma(\phi_t) = \sum_{v \in \mathbf{vert}(X)} \sum_{\vec{e} \in \mathbf{half}_v(X)} \left\langle -\phi(\vec{e}), \frac{d}{dt}\phi_t(v) \right\rangle$$

其中， $\phi(\vec{e}) \in T^1_v\Sigma$ 是以 v 为基点、指向半边 $\vec{e}$ 的像的单位切向量。由此可知，正则实现 ϕ 是长度函数 $\ell_\Sigma : \mathcal{G}^X \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ 的临界点，当且仅当对于每个**顶点**(X)，都有 $\sum_{\vec{e} \in \text{半边}_v} \phi(\vec{e}) = 0$。注意，这意味着，在我们所关注的 X 为三价的情形下，入射于同一顶点的任意两条半边的像之间的（无向）角 $\angle(\phi'(\vec{e}_1)\ \phi'(\vec{e}_2))$等于 $\frac{2\pi}{3}$ 。

—

定义。 一个正则实现 $\phi:\ X \to \Sigma$ 将三价图 X 映入 Σ是临界 若我们有

$$\angle(\phi(\vec{e}_1), \phi(\vec{e}_2)) = \frac{2\pi}{3}$$

对于每个顶点 $v \in$ **顶点**(X) 以及任意两个不同的 $\vec{e}_1, \vec{e}_2 \in$ **半**$_v(X)$。

我们在下一个引理中汇总临界实现的一些性质：

引理 2.2. 设 X 是一个三价图。当且仅当 ϕ 是一个临界实现时，正则实现 $\phi \in \mathcal{G}^X$ 才是长度函数的临界点。此外，若 $\phi \in \mathcal{G}^X$ 是一个临界实现，且 $\mathcal{G}^\phi$ 是包含 ϕ 的 $\mathcal{G}^X$ 的连通分支，则有以下结论：

(1) ϕ是 $\mathcal{G}^\phi$ 中唯一的临界实现。(2) ϕ 是 $\mathcal{G}^\phi$ 上长度函数的全局最小值。(3) 除 ϕ 外，长度函数在 $\mathcal{G}^\phi$ 中不存在其他局部极小值。(4) 连通分支 $\mathcal{G}^\phi$ 与由 $\mathbf{vert}(X)$ 个双曲平面构成的乘积 $\mathbb{H}^2 \times \cdots \times \mathbb{H}^2$ 等距。

请注意，长度函数缺乏全局光滑性，这意味着我们无法直接从（1）推导出（2）和（3）。这就是为什么它们被作为独立的陈述提出。

证明。 陈述 (1) 实际上已在临界实现定义前的段落中讨论过。我们聚焦于接下来的陈述。回想一下，如果

$$[0,1] \to \mathcal{G}^{\phi},\ t \mapsto \phi_t$$

是一个以 $\phi_0 = \phi$ 为端点的（非恒定）测地同伦，那么长度函数 n

$$t \mapsto \ell_{\Sigma}(\phi_t(X)) \tag{2.3}$$

是凸的。不过，在我们的情形中它是严格凸的：由于 ϕ 是临界的，我们得到其像，或者更确切地说，它在万有覆盖中的各个提升的像，不包含在任何一条测地线上；因为若是如此，从同一顶点出发的任意两条半边之间的角度就只能取 0 或 π。现在，严格凸性以及 $\phi = \phi_0$ 是长度函数的临界点这一事实表明， $t = 0$ 是函数 (2.3) 的最小值点，也是唯一的临界点。由此可直接得到 (2) 和 (3)。为证明 (4)，注意若 $\mathcal{G}^{\phi}$ 不是单连通的，那么就会存在一个非平凡的测地同伦，其起点和终点均为 ϕ，这与长度函数的严格凸性矛盾。现在注意，将覆盖 (2.2) 限制在 $\mathcal{G}^{\phi}$ 上，可得到一个局部等距覆盖 $\mathcal{G}^{\phi} \to \Sigma^{\mathbf{vert}(X)}$。由于该覆盖的定义域连通且单连通，因此它就是 $\Sigma^{\mathbf{vert}(X)}$ 的万有覆盖。由此证明了 (4)，并完成了引理的证明。□

备注。 虽然这里不需要用到，但我们简要谈谈 $\mathcal{G}^X$ 的连通分支的拓扑。包含一个实现 $\phi \in \mathcal{G}^X$ 的连通分支 $\mathcal{G}^{\phi}$ 的基本群，同构于 $\pi_1(\Sigma)$ 中由 $\pi_1(X)$ 在 ϕ_* 下的像 $\pi_1(X) \to \pi_1(\Sigma)$ 的中心化子 $\mathcal{Z}_{\pi_1(\Sigma)}(\phi_*(\pi_1(X)))$。由此可得，$\mathcal{G}^{\phi}$ 同构于 $\mathbb{H}^2 \times \cdots \times \mathbb{H}^2$ 个双曲平面的 $\mathbf{vert}(X)$ 份在 $\mathcal{Z}_{\pi_1(\Sigma)}(\phi_*(\pi_1(X)))$ 的对角作用下的商。特别地，我们有：

<escape>• </escape>如果 <escape> ϕ </escape> 是同伦平凡的，那么 <escape> $\mathcal{G}^{\phi} \simeq \pi_1(\Sigma)\backslash(\mathbb{H}^2 \times \cdots \times \mathbb{H}^2)$ </escape>。

- 如果 $\phi_*(\pi_1(X)) \neq \mathrm{Id}_{\pi_1(\Sigma)}$ 是阿贝尔群，则 $\mathcal{G}^{\phi} \simeq \mathbb{Z}\backslash(\mathbb{H}^2 \times \cdots \times \mathbb{H}^2)$。

如果 • $\phi_*(\pi_1(X))$ 是非阿贝尔的，那么 $\mathcal{G}^{\phi} \simeq \mathbb{H}^2 \times \cdots \times \mathbb{H}^2$.

在附录中，我们将针对 X 是一个环的情形，即由一个顶点和一条边构成的图，给出 $\mathcal{G}^X$ 的连通分支的具体描述。

引理 2.2 尽管十分优美，却并未说明临界实现是否存在。我们的下一个目标是证明，任何从远处看起来有些像临界实现的实现，实际上都与某个临界实现同伦。

拟临界实现。 回顾一下，三价图 X 的正则实现 $\phi\colon X \to \Sigma$若同一顶点处任意两条入射半边的像之间的角都等于 $\frac{2\pi}{3}$ ，则称其为临界。如果这些角都不小于 $\frac{1}{2}\pi$ ，则称正则实现为拟临界；如果对于 X的所有边 $\overline{e}$，实现 ℓ_0-长，即 $\ell(\phi(e))_- > \ell_0$ ，则称其为如此。回顾一下，我们使用 $[0,\pi]$来度量所有角度。

我们在这里的下一个目标是证明，每个足够长的拟临界实现都同伦于一个临界实现。这将由以下技术结果轻易推出：

命题 2.3。 对于任意三价图 X 和常数 $C \geq 0$ ，存在常数 ℓ_0、$D > 0$ ，使得给定一个 ℓ_0- 长的拟临界实现 $\phi\colon X \to \Sigma$ 、一个三价图 Y 以及实现 $\psi\colon Y \to \Sigma$ ，满足

(1) $\ell(\psi) \leq \ell(\phi) + C$，并且(2) 存在一个同伦等价 $\sigma\colon X \to Y$，其中 ϕ 且 $\sigma \circ \psi$ 同伦于，

那么存在一个同胚 $F\colon Y \to X$ ，以恒定速度映射每条边，使得 $\sigma \circ F$ 同伦于恒等映射，并且连接 $\phi_0(\cdot) = \phi \circ F(\cdot)$与 $\phi_1(\cdot) = \psi(\cdot)$ 的测地同伦 $X \times [0,1] \to \sigma$，$(x,t) \mapsto \phi_t(x)$ 的轨迹由 D界定。

由于命题 2.3 的证明相当长，我们先说明它可能很有用：

推论 2.4。 设 X 为一个三价图。存在正数 ℓ_0和 D ，使得 $\mathcal{G}^X$ 中每个包含一个 ℓ_0长的准临界实现 $\phi\colon X \to \Sigma$的连通分支，也包含一个临界实现 ψ；此外，该实现是唯一的，并且与 ϕ 同伦，且同伦的轨迹长度有界于 D。

证明。 设 ℓ_0 和 D 由引理 2.3 针对 $C = 0$ 给出，并在必要时增大 ℓ_0 ，使其大于 $2D$。设 $\phi\colon X \to \Sigma$ 是一个 ℓ_0-长的拟临界实现。设 $\psi\colon X \to \Sigma$ 是连通分支 $\mathcal{G}^\phi$ 中长度函数的极小元——它存在，因为长度函数是适当的。我们断言 ψ 是临界的。根据引理 2.2，只需证明 ψ 是正则的。

由于它是极小元，我们有 $\ell_\Sigma(\psi) \leqslant \ell_\Sigma(\phi)$。因此，根据命题 2.3，存在一个同胚 $F\colon X \to X$ ，它与恒等映射同伦，以恒定速度映射各边，且从 $\phi \circ F$到 ψ的测地线同伦，其轨迹被 D所界定。现在，由于 X是三价的，我们可知同胚 F与恒等映射同伦且以恒定速度映射各边，因此实际上等于恒等映射。由此得到的是 ϕ 与 ψ 之间的一个同伦，其轨迹被 D所界定。现在，由于 $\phi(X)$的每条边长度至少为 $\ell_0 > 2D$ ，且该同伦的轨迹被 D所界定，因此 ψ 是正则的，从而根据引理 2.2 是临界的，正如我们需要证明的那样。引理 2.2 还表明 ψ 是唯一的。□

接下来证明该命题:

命题 *2.3* 的证明。设 $\phi\colon X \to \Sigma$ 是一个拟临界实现，并假设它是 ℓ_0-长的，其中 ℓ_0 足够大，以满足证明过程中将给出的一些条件。设 $H\colon X \times [0,1] \to \Sigma$ 是 ϕ 与 $\psi \circ \sigma$之间的同伦。

为了能够一致地选取 ϕ、ψ 和 σ 到 X、Y 和 Σ 的万有覆盖 $\widetilde{X}$、$\widetilde{Y}$ 和 $\mathbb{H}^2$ 上的提升，我们先选取基点。固定 $x_0 \in X$，考虑基点 $\sigma(x_0) \in Y$ 和 $\phi(x_0) \in \Sigma$，并为这些端点分别选取提升 $\widetilde{x}_0 \in \widetilde{X}$、$\widetilde{\sigma}(x_0) \in \widetilde{Y}$ 和 $\widetilde{\phi}(x_0) \in \mathbb{H}^2$。选定这些基点后，我们唯一确定了满足 $\widetilde{\phi}(\widetilde{x}_0) = \phi(x_0)$ 且 $\widetilde{\sigma}(\widetilde{x}_0) = \sigma(x_0)$ 的 ϕ 和 σ 的提升 $\widetilde{\phi}\colon \widetilde{X} \to \mathbb{H}^2$ 和 $\widetilde{\sigma}\colon X \to Y$。我们还可以将路径 Σ 中由 $t \mapsto H(x_0, t)$ 给出的路径提升到 $\mathbb{H}^2$ 上，并使其始于 $\widetilde{\phi}(\widetilde{x_0})$。这条路径的端点是 $\psi \circ \sigma(x_0)$ 的一个提升，我们取提升 $\widetilde{\psi}\colon \widetilde{Y} \to \mathbb{H}^2$，它将 $\widetilde{\sigma}(\widetilde{x}_0)$ 映到该点。所有这些提升都满足以下等变性性质:

$$\widetilde{\phi}(g(x)) = \phi_*(g)(\widetilde{\phi}(x)) \text{ and } (\widetilde{\psi} \circ \widetilde{\sigma})(g(x)) = \phi_*(g)\left((\widetilde{\psi} \circ \widetilde{\sigma})(x)\right) \tag{2.4}$$

对于所有 $x \in X$ 以及所有 $g \in \pi_1(X, x_0)$，其中 $\phi_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(\Sigma, \phi(x_0))$ 是由 ϕ 和所选基点诱导的同态。

注意，由于 ϕ 几乎临界且为 ℓ_0-长，只要 ℓ_0足够大，提升 $\widetilde{\phi}\colon \widetilde{X} \to \mathbb{H}^2$ 就是一个单射拟等距嵌入。为方便起见，记 $T_X = \widetilde{\phi}(\widetilde{X}) \subset \mathbb{H}^2$ ϕ 的像，并将刚才所说的重新表述如下：若 ℓ_0 足够大，则T_X 是一个拟凸树，其拟凸常数只取决于 ℓ_0的一个下界。我们记$\hat{\pi}\colon \mathbb{H}^2 \to T_X$ 为一个最近点收缩映射，它在 $\phi_*(\pi_1(X, x_0))$作用下等变。我们希望定义

$$\pi\colon \widetilde{Y} \to T_X$$

作为$\hat{\pi} \circ \psi$，但由于$\hat{\pi}$ 显然不连续，我们必须稍微谨慎一些。我们如下定义 π ： 首先，对 Y的所有顶点 $v \in$ **顶点**(Y)，令 $\pi(v) = \hat{\pi}(\psi(v))$，然后在 Y的边上（以恒定速度）延拓。注意，(2.4)与 π的等变性共同推出$\pi \circ \widetilde{\sigma}\colon X \to T_X$ 满足

$$(\pi \circ \widetilde{\sigma})(g(x)) = \phi_*(g)(\pi \circ \widetilde{\sigma}(x))$$

对所有 $x \in X$ 和 $g \in \pi_1(X, x_0)$均成立。

断言1。只要 ℓ_0 足够大，我们就有： π 将 Y 的每个顶点映射到 T_X中唯一一个顶点的**常数** 范围内。

从该断言的证明开始，注意存在一个常数 $A \geqslant 0$，它仅取决于 T_X 的拟凸常数以及

$$d_{\mathbb{H}^2}(x, y) \geqslant -A + d_{\mathbb{H}^2}(\hat{\pi}(x), \hat{\pi}(y)) \tag{2.5}$$

对于所有 $x,\ y \in \mathbb{H}^2$。事实上，存在常数 $K,\ A' > 0$，它们同样仅取决于 T_X 的拟凸常数，使得当 $d_{\mathbb{H}^2}(\hat{\pi}(x),\ \hat{\pi}(y)) > K$ 时，我们可以得到更好的上界。

$$d_{\mathbb{H}^2}(x,y) \geqslant -A' + d_{\mathbb{H}^2}(x,\hat{\pi}(x)) + d_{\mathbb{H}^2}(\hat{\pi}(x),\hat{\pi}(y)) + d_{\mathbb{H}^2}(\hat{\pi}(y),y). \tag{2.6}$$

对于 $a,\ b \in T_X$ 令 $d_{T_X}(a,\ b)$ 表示它们之间的内部距离。我们将关注这一距离的一个修正版：令 B 为 $\mathbb{H}^2$ 中以 T_X 的每个顶点为中心、半径为 1 的球的集合，并定义 $d_{T_X \mathrm{rel} B}(a,\ b)$ 为 T_X 中连接它们的路径位于 B之外的部分的长度。对于所有足够大的 ℓ_0 （其大小仅取决于 $\mathbb{H}^2$的双曲性），根据半径[1] 的选取，我们有

$$d_{T \mathrm{rel} B}(a,b) \leq d_{\mathbb{H}^2}(a,b) \tag{2.7}$$

对于所有 $a,\ b \in T_X$。

~给定与同一顶点相邻的两条边 e, e' Y 定义

$$\mathrm{Fold}(e,e') = \ell_{T \mathrm{rel} B}(\pi(e) \cap \pi(e'))$$

并令 then

$$\mathrm{Fold}(\pi) = \max \mathrm{Fold}(e,e')$$

其中最大值取遍所有这样的边对。引入这一量的原因是我们有

$$\sum_{[v,v'] \in \mathbf{edge}(Y)} d_{T_X \mathrm{rel} B}(\pi(v),\pi(v')) \geq \ell(\phi) + \mathrm{Fold}(\pi) - A'' \tag{2.8}$$

对于某个正的常数 A''，该常数仅取决于顶点的数量（以及我们选择半径为 1 的球 B 这一事实）—— 这里我们已将 Y 的每条边与其在 Y 中的一个代表元 ~ 对应起来。

现在，利用 (2.5)、(2.7) 和 (2.8)，我们得到】【，

$$\begin{aligned}
\ell(\psi) &= \sum_{[v,v'] \in \mathbf{edge}(Y)} d_{\mathbb{H}^2}(\tilde{\psi}(v), \tilde{\psi}(v')) \\
&\geq -\mathbf{const} + \sum_{[v,v'] \in \mathbf{edge}(Y)} d_{\mathbb{H}^2}(\pi(v),\pi(v')) \\
&\geq -\mathbf{const} + \sum_{[v,v'] \in \mathbf{edge}(Y)} d_{T_X \mathrm{rel} B}(\pi(v),\pi(v')) \\
&\geq -\mathbf{const} + \ell(\phi) + \mathrm{Fold}(\pi)
\end{aligned}$$

其中，每个**const** 都是一个正数常量（但不一定相同），其取值取决于 Y的拟凸常数和组合结构。

由于 $\ell(\psi) \leq \ell(\phi) + C$，因此 $\mathrm{Fold}(\pi) \leq \mathbf{const}$，其中常数取决于 C、ℓ_0 的下界以及 Y 的组合结构。特别地，对于每个 $v \in$ **顶点**，都存在一个顶点 $v' \in T_X$，使得$d_{T_X \mathrm{rel} B}(\pi(v)\ v') \leq$ **常数**，并且我们可以选择足够大的 ℓ_0，使得 v' 是唯一的。由此，我们证明了断言1。□

[1]事实上，对于足够大的 ℓ_0，任何大于 $\frac{1}{2}\log\sqrt{2} \approx 0.3466$ 的半径都适用。

利用断言1，我们可以定义一个映射 $F\colon Y \to T_X$： 首先将$v \in$ vert(Y)映射到 T_X 中距离 $\pi(v)$最近的唯一顶点，再将其延拓，使其以恒定速度映射每条 $e \in$ 边(Y)。注意， π的等变性意味着 F满足 $F(\sigma_*(g)(y)) = g(F(y))$，对所有 $y \in Y$以及 $g \in \pi_1(X, x_0)$均成立，其中 $\sigma_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, \sigma(x_0))$是由 σ 和所选基点诱导的同构。因此， F 可下降为一个映射$F\colon Y \to X$。

断言2. $F\colon \ Y \to X$ 是一个同胚，且 $F \circ \sigma$ 与恒等映射同伦。

$F \circ \sigma$ 与恒等映射同伦这一点可直接由这一事实推出: $X \to X$ 满足，对于$g \in \pi_1(X, x_0)$，$(F \circ \sigma)(gx) = g((F \circ \widetilde{\sigma})(x))$。我们真正需要证明的是 F 是一个同胚。为此，注意到映射 F、$\pi\colon Y \to X$ 将点映到彼此相距不超过 const 的位置；并且在证明断言1的过程中，我们证明了 Fold(π) $<$ const，因此可得 Fold(F) $<$ const。另一方面，由于 F 将顶点映到顶点，并且在边上具有恒定速度，因此若 Fold(F) $\neq 0$，那么 Fold(F) 必须至少与 X的最短边一样大。这意味着，利用 Fold(F) 一致有界这一事实，只要 ℓ_0 足够大，就有 Fold(F) $= 0$。进而可知， F 是局部单射。 F的局部单射性，加上 F作为 σ的同伦逆而为同伦等价这一事实，意味着 F 是一个同胚。我们已经证明了断言2。□

剩下的工作是界定从 $\phi \circ F$ 到 ψ 的测地同伦的轨迹——其论证与证明 F 存在的论证类似。首先，注意到 ，我们知道，对于每个顶点 $v \in Y$，最近点投影 $\hat{\pi}$ 将 $\psi(v)$ 映射到 T_X 的顶点 $\phi(F(v))$ 附近。因此，如果我们选择足够大的 ℓ_0 ，还可以假设，对于任意两个不同顶点 $v, v' \in \mathbf{vert}(Y)$，都有 $d_{\mathbb{H}^2}(\hat{\pi}(\psi(v)), \hat{\pi}(\psi((v')))) > K$。这意味着 (2.6) 适用，因此我们有

$$\begin{aligned}
\ell(\psi(Y)) &= \sum_{[v,v'] \in \mathbf{edge}} d_{\mathbb{H}^2}(\tilde{\psi}(v), \tilde{\psi}(v')) \\
&\geq -\mathbf{const} + \sum_{[v,v'] \in \mathbf{edge}} d_{\mathbb{H}^2}(\hat{\pi}(\tilde{\psi}(v)), \hat{\pi}(\tilde{\psi}(v'))) + \\
&\qquad + 3 \sum_{v \in \mathbf{vert}} d_{\mathbb{H}^2}(\tilde{\psi}(v), \hat{\pi}(\tilde{\psi}(v))) \\
&\geq -\mathbf{const} + \ell(\phi(X)) + 3 \sum_{v \in \mathbf{vert}} d_{\mathbb{H}^2}(\tilde{\psi}(v), \hat{\pi}(\tilde{\psi}(v)))
\end{aligned}$$

其中，与之前一样，每个**常数** 都是正数，第一个不等式由（2.6）得出，第二个由（2.7）和（2.8）得出。因此，再由引理中的假设（1），我们必有 $d_{\mathbb{H}^2}(\psi(v), \hat{\pi}(\psi(v))) <$ **常数** 对所有 $v \in$ **绝对值**(Y)均成立。

由于 $F(v)$ 和 $\pi(\psi(v))$ 彼此接近，因此对所有 $v \in$ **绝对值**(Y)，都有 $d_{\mathbb{H}^2}(\psi(v)\ F(v)) <$ **常数**。长度函数的凸性意味着，ψ 与 $\phi \circ F$ 之间的测地同伦的轨迹因此被同一个常数**常数**所界，正如我们所声称的那样。□

ε-临界实现。推论 2.4 断言，只要我们有一个边很长、看起来隐约具有临界性的实现，它就不会离临界实现太远。我们的下一个目标是在实现看起来更具临界性的情况下，更精确地描述这一情形。具体来说，假设 X 是一个三价图，且ε 为正且很小。正则实现 $\phi\colon X \to \Sigma$ 若满足以下条件，则称其为 ε-临界：

$$\angle(\phi(\vec{e}_1), \phi(\vec{e}_2)) \in \left[\frac{2\pi}{3} - \varepsilon, \frac{2\pi}{3} + \varepsilon\right]$$

对于任意顶点 $v \in$ **vert**(X)处相邻的任意两条半边 $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2 \in$ **half**$_v$。

本节的目标是确定 X 的 ε-临界实现 $\mathcal{G}^X_{\varepsilon-\mathrm{crit}}$ 构成的集合是什么样子。为此，我们需要引入一些记号并做一些准备工作。首先，我们将三叉形理解为一个元组 $\tau = (p, \{v, v', v''\})$，其中 $p \in \mathbb{H}^2$ 是一个点，而 $\{v, v', v''\} \subset T^1_p\mathbb{H}^2$ 是以 p 为基点、由三个互不相同的单位向量组成的无序集合。若三叉形$\tau = (p,$ $\{v, v', v''\})$中的三个向量 $v, v', v,''$ 两两之间的角都等于 $\frac{2\pi}{3}$，则称其为临界三叉形。任意三叉形 τ 都确定三条测地射线，即$\partial_\infty\mathbb{H}^2$中的三个点，也就是一个理想三角形 $T_\tau \subset \mathbb{H}^2$（见图 1 左侧）。反过来，对于每个 $p \in \mathbb{H}^2$，任意理想三角形 $T \subset \mathbb{H}^2$ 都确定一个三叉形 $\tau^T_p = (p, \{v, v', v''\})$：向量 $v, v', v,''$ 以 p 为基点，并指向理想三角形 T的（理想）顶点。注意，T 恰好由所有满足以下条件的点 p 组成：三叉形 τ^T_p中的向量两两之间的（始终取无向）角之和等于 2π。对于给定的 ε，我们记

$$T(\varepsilon) = \left\{ p \in T \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{the angles between the vectors} \\ \text{in } \tau^T_p \text{ lie in } [\frac{2\pi}{3} - \varepsilon, \frac{2\pi}{3} + \varepsilon] \end{array} \right\}$$

是满足三叉形的角 τ^T_p 与$\frac{2\pi}{3}$的角度差在 ε 以内的点的集合。集合 $T(\varepsilon)$至少在 $\varepsilon \in (0, \frac{\pi}{6})$时是一个以三角形中心为中心的六边形——六边形的边不是测地线，而是常曲率曲线的子线段，见图 1。然而，若将所有内容按 ε^{-1} 缩放，则 $\varepsilon^{-1} \cdot T(\varepsilon)$收敛到边长为$2\sqrt{3}$的正欧几里得六边形。这尤其意味着

$$\mathrm{diam}(T(\varepsilon)) \sim \frac{4}{3}\varepsilon \text{ and } \mathrm{vol}(T(\varepsilon)) \sim \frac{2}{\sqrt{3}}\varepsilon^2 \text{ as } \varepsilon \to 0. \tag{2.9}$$

注记。 要得到 $T(\varepsilon)$ 的形状，可以运用初等的综合双曲几何。但也可以借助双曲三角学。例如，利用 Buser 著作 [3] 后面的公式 2.2.2 (iv)，可得

$$T(\varepsilon) = \left\{ p \in T \;\middle|\; \cot\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\varepsilon}{2}\right) \le \sinh(d(p, \partial T)) \le \cot\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\varepsilon}{2}\right) \right\}.$$



图 1. 左：一个临界三叉形及其确定的理想三角形（的一部分）。右：六边形 $T(\varepsilon)$。构成六边形边界的每条直线都对应于 p中两向量之间的角度测度为 $\frac{2\pi}{3}-\varepsilon$ 的点： τ_P^T（虚线）和$\frac{2\pi}{3}+\varepsilon$ （实线）。

—

现在假设 $\phi\colon X\to\Sigma$ 是我们闭双曲曲面上的一个三价图X 的临界实现，并回顾一下，根据引理 2.2，与 ϕ 同伦的测地实现的连通分支 $\mathcal{G}^\phi$ 同构于若干个双曲平面的乘积 $\mathbb{H}^2\times\cdots\times\mathbb{H}^2$，其中每个因子对应 X的一个顶点。对于 X 的每个顶点 x ，我们首先可以关联三叉形$\tau_x^\phi=(\phi(x),\{\phi(\vec{e})\}_{\vec{e}\in\mathbf{half}_x(X)})$，它由顶点 x在 ϕ下的像以及与关联于 x的半边像相切的单位向量 $\phi(\vec{e})$ 组成；然后， $T_{\tau_x^\phi}$关联于临界三叉架 τ_x^ϕ的理想三角形。假设 ϕ 是临界的，这意味着对于每个顶点 $x\in$**顶点**，点 $\phi(x)$ 都是 $T_{\tau_x^\phi}$的中心。令

$$\mathcal{T}^\phi=\prod_{x\in\mathbf{vert}(X)}T_{\tau_x^\phi}\subset\prod_{x\in\mathbf{vert}(X)}\mathbb{H}^2=\mathcal{G}^\phi$$

为 $\mathcal{G}^\phi$ 中由与 ϕ 同伦的测地实现所组成的子集，其中该同伦将每个顶点 x 映射到 $T_{\tau_x^\phi}$ 内。因此，我们定义

$$\mathcal{T}^\phi(\varepsilon)=\prod_{x\in\mathbf{vert}(X)}T_{\tau_x^\phi}(\varepsilon)\subset\mathcal{T}^\phi$$

并且我们注意到，

$$\mathrm{vol}(\mathcal{T}^\phi(\varepsilon))\sim\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\varepsilon^2\right)^{|\mathbf{vert}(X)|}.$$

我们之所以关心所有这些集合，是因为渐近而言， $\mathcal{T}^\phi(\varepsilon)$ 与集合$\mathcal{G}^\phi_{\varepsilon-\text{临界}}$ ε-临界实现 ψ 同伦于 ϕ的集合相一致。事实上，由推论 2.4 可知，从 ψ 到 ϕ 的测地同伦长度有一个统一上界。这意味着，对于所有 $e\in$**边**(X)，测地线段 $\phi(e)$ 和 $\psi(e)$ 都很长，但其端点彼此相对接近。这意味着，从其某个顶点 x观察时，线段 $\psi(e)$ 非常接近渐近于 $\phi(e)$。特别地， $\psi(e)$ 与从 $\psi(x)$出发的测地射线之间的角

以及与从 $\phi(x)$ 沿 $\phi(e)$ 方向出发的射线之间的角，小于$\delta = \delta(\min_{e\in\mathbf{edge}(X)} \ell(\psi(e)))$，其中某个正函数满足 $\delta(t) \to 0$ 当$t \to \infty$。由于我们使用的记号相当笨拙，可以得到 δ 从上方界定了三叉形 τ_x^{ψ}和 $\tau_{\psi}^{T_x^{\phi}(x)}$对应边之间的角。根据假设， τ_x^{ψ}的角属于$[\frac{2\pi}{3}-\varepsilon, \frac{2\pi}{3}+\varepsilon]$，因此 $\tau_{\psi}^{T_x^{\phi}(x)}$的角属于 $[\frac{2\pi}{3}-\varepsilon-2\delta, \frac{2\pi}{3}+\varepsilon+2\delta]$，这意味着 $\psi(x) \in T_{\tau_x^{\phi}}(\varepsilon + 2\delta)$。

总而言之，我们证明了对于所有 $\varepsilon_1 > \varepsilon$，存在 ℓ_1，使得如果 $\phi\colon X \to \Sigma$ 是临界的，且对于所有 $e \in$ **边**， $\ell(\phi(e)) \geqslant \ell_1$，那么

$$\mathcal{G}^{\phi}_{\varepsilon-\mathrm{crit}} \subset \mathcal{T}^{\phi}(\varepsilon_1).$$

同样的论证可以证明，对于所有 $\varepsilon_2 < \varepsilon$，都存在 ℓ_2，使得如果 $\phi\colon X \to \Sigma$ 是临界的，且 $\ell(\phi(e)) \geqslant \ell_2$ 对所有 $e \in$ **边**，那么

$$\mathcal{T}^{\phi}(\varepsilon_2) \subset \mathcal{G}^{\phi}_{\varepsilon-\mathrm{crit}}$$

我们记录以下事实：

引理 2.5. 存在函数 $h\colon (0, \frac{\pi}{6}) \to \mathbb{R}_{>0}$和 $\delta\colon (0, \varepsilon_0) \to \mathbb{R}_{>0}$，满足 $\lim_{t\to 0} h(t) = 0$ 且 $\lim_{t\to\infty} \delta(t) = 0$，使得对于每个临界实现 $\phi\colon X \to \Sigma$，都有

$$\mathcal{T}^{\phi}(\varepsilon - r(\varepsilon,\phi)) \subset \mathcal{G}^{\phi}_{\varepsilon-\mathrm{crit}} \subset \mathcal{T}^{\phi}(\varepsilon + r(\varepsilon,\phi))$$

其中 $r(\varepsilon, \phi) = h(\varepsilon) + \delta(\min_{e\in\mathbf{edge}(X)} \ell(\phi(e)))$。 □

最后，为了结束本节，我们将把关于单个 ε-临界实现的实际所需内容汇总为一个陈述。

命题 2.6。 设 X 为一个三价图。存在 $\ell > 0$ 和函数$\rho_0, \rho_1\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$，满足 $\lim_{t\to 0} \rho_0(t) = 0$ 以及 $\lim_{t\to\infty} \rho_1(t) = 0$，并且对所有 $\varepsilon \in [0, \frac{\pi}{6}]$，以下结论均成立：

如果 $\phi \in \mathcal{G}_{\varepsilon-\mathrm{crit}}(X)$ 是一个 ℓ 长的 ε-临界实现，则

$$\left|\mathrm{vol}(\mathcal{G}^{\phi}_{\varepsilon-\mathrm{crit}}) - \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\varepsilon^2\right)^V\right| \leqslant \rho_0(\varepsilon)\cdot\rho_1\left(\min_{e\in\mathbf{edge}} \ell(\phi(e))\right)\cdot\varepsilon^{2V}, \tag{2.10}$$

此外，$\mathcal{G}^{\phi}_{\varepsilon-\text{临界}}$ 包含唯一的临界实现 ψ，并且我们有

$$\max_{e\in\mathbf{edge}} |\ell_\Sigma(\phi(e)) - \ell_\Sigma(\psi(e))| \leqslant \rho_0(\varepsilon) + \rho_1\left(\min_{e\in\mathbf{edge}} \ell(\phi(e))\right)\cdot\varepsilon \tag{2.11}$$

这里， V同样表示 X 的顶点数，而 **边** $=$**边**(X) 表示其边的集合。

证明。 首先，假设 ℓ 至少与推论 2.4 中的 ℓ_0 一样大。因此，我们得到 $\mathcal{G}^{\phi}$ 包含唯一的临界实现 ψ。由引理 2.5 可知，

$$\mathcal{T}^{\phi}(\varepsilon - r(\varepsilon,\phi)) \subset \mathcal{G}^{\phi}_{\varepsilon-\mathrm{crit}} \subset \mathcal{T}^{\phi}(\varepsilon + r(\varepsilon,\phi)) \tag{2.12}$$

其中 $r(\varepsilon,\phi) = h(\varepsilon) + \delta(\min_{e\in\mathbf{edge}} \ell(\phi(e)))$，这里存在函数 $h:(0,\frac{\pi}{6}) \to \mathbb{R}_{>0}$，满足且 $\delta:(0,\varepsilon_0) \to \mathbb{R}_{>0}$，满足 $\lim_{t\to\infty} h(t) = 0$ 且 $\lim_{t\to\infty} \delta(t) = 0$。现在由 (2.12) 和 (2.9) 可得界 (2.10) 和 (2.11)。□

3. Variations of Delsarte's theorem

本节将确立满足某些长度条件的实现数量的渐近行为$\phi : X \to \Sigma$，其中每个顶点都映射到 Σ中的某个预先指定点，且半边像的方向组属于给定的此类方向组开集；详情见定理 3.2。除了一些记账工作外，我们还需要对 Delsarte 的格点计数定理 [7], 作一项小幅扩展，即下文的定理 3.1。专家们早已熟知这一结果，文献中还能找到比我们这里所需结果精细得多的版本——例如见 [17,定`理` 4.11]。不过，为求完整起见，我们将说明如何从测地流具有混合性这一事实推出定理 3.1。所需背景知识可参见这些非常出色的著作 [2, 17]。

我们先回顾一些关于双曲曲面上测地流动力学的熟知事实。首先回想一下，我们可以将 $T^1\mathbb{H}^2$ 与 $\mathrm{PSL}_2\,\mathbb{R}$等同起来，并将 $T^1\Sigma = T^1(\Gamma\backslash\mathbb{H}^2)$ 与 $\Gamma\backslash\,\mathrm{PSL}_2\,\mathbb{R}$等同起来。更具体地说，使用以下等同关系时

$$\mathrm{PSL}_2\,\mathbb{R} \to T^1\mathbb{H}^2 \quad g \mapsto \frac{d}{dt} g(e^t i)|_{t=0}$$

其中计算是在上半平面模型中进行的，且 $i \in \mathbb{H}^2$ 是虚数单位，那么测地流和 horocycle 流分别等价于右乘以下矩阵

$$\rho_t = \begin{pmatrix} e^{\frac{t}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{t}{2}} \end{pmatrix} \text{ and } h_s = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

。注意，$K = \mathrm{SO}_2 \subset \mathrm{PSL}_2\,\mathbb{R}$ 是 $\mathrm{PSL}_2\,\mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{H}^2$作用下 i 的稳定子，它是一个极大紧子群——在 $\mathrm{PSL}_2\,\mathbb{R} \simeq T^1\mathbb{H}^2$ 的等同关系下，K 对应于基点 $i \in \mathbb{H}^2$处的单位切空间 $T^1_i\mathbb{H}^2$。KAN 分解（本质上是线性代数中 Gram-Schmidt 过程的结果）断言，$g \in \mathrm{PSL}_2\,\mathbb{R}$ 中的每个元素都能以唯一的方式写成

$$g = k\rho_t h_s \tag{3.1}$$

对于 $k \in K$ 和 $t,\ s \in \mathbb{R}$。在这些坐标下，$\mathrm{PSL}_2\,\mathbb{R}$的 Haar 测度为

$$\int f(g)\ \mathrm{vol}_{T^1\mathbb{H}^2}(g) = \iiint f(k\rho_t h_s)\cdot e^{-t}\,dk\,dt\,ds$$

其中，dk 表示对 $K \simeq T^1_i\mathbb{H}^2$中的弧长进行积分，并将其归一化为总测度 2π。

我们所需的基本事实是， $T^1\Sigma$ 上的测地流 ρ_t 具有混合性[2, III.2.3]，，或者更确切地说，是其一个直接推论：对于每个 $x_0 \in \mathbb{H}^2$ ，以 x_0为中心、半径为 L 的球面 $S(x_0, L)$在 Σ 上的投影，在 $L \to \infty$ [2, III.3.3]时于 Σ 中等分布。更精确地说，注意到不妨假设$x_0 = i$，这意味着我们将 $T^1_{x_0}\mathbb{H}^2 = K$视为同一对象。测地流具有混合性这一事实随后意味着，对于每个非退化区间$I \subset K$，球面弧 $I\rho_t$ 在 $\Gamma\backslash\mathrm{PSL}_2\,\mathbb{R}$ 中等分布，即对于任意连续函数 $f \in C^0(T^1\Sigma) = C^0(\Gamma\backslash\,\mathrm{PSL}_2\,\mathbb{R})$，都有

$$\lim_{L\to\infty}\frac{1}{\ell(I)}\int_I f(\Gamma k\rho_L)\,dk = \frac{1}{\mathrm{vol}_{T^1\Sigma}(T^1\Sigma)}\int_{T^1\Sigma} f(\Gamma g)\cdot dg \tag{3.2}$$

其中， $\ell(I)$ 是 I 的弧长，第二个积分则是关于 $\mathrm{vol}_{T^1\Sigma}$ 的积分。无论如何，我们关注球面的均匀分布，原因如下。若 $f \in C^0(\Sigma)$ 是一个连续函数，并且令 $\tilde{f}$ 为 f 与覆盖 $\mathbb{H}^2 \to \Sigma$ 的复合函数，那么由 (3.2) 可知，在 $I = K$ 的条件下，

$$\lim_{L\to\infty}\frac{1}{\mathrm{vol}_{\mathbb{H}^2}(B(x_0,L))}\cdot\int_{B(x_0,L)}\tilde{f}(x)\,dx = \frac{1}{\mathrm{vol}(\Sigma)}\int_\Sigma f(x)dx$$

将其应用于一个非负函数 $f_{y_0,\varepsilon} \in C^0(\Sigma)$，该函数的积分总值为 1，且其支撑集包含于 $B(y_0,\varepsilon)$，我们得到：

$$\int_{B(x_0,L)}\tilde{f}_{y_0,\varepsilon}(x)\,dx \sim \frac{\mathrm{vol}_{\mathbb{H}^2}(B(x_0,L))}{\mathrm{vol}(\Sigma)}$$

现在，根据 $f_{y_0,\varepsilon}$ 的性质，我们得到เน็ตกรู

$$\int_{B(x,L-\varepsilon)}\tilde{f}_{y_0,\varepsilon}(\cdot)d\,\mathrm{vol}_{\mathbb{H}^2} \leqslant |\Gamma\cdot y_0\cap B(x_0,L)| \leqslant \int_{B(x,L+\varepsilon)}\tilde{f}_{y_0,\varepsilon}(\cdot)d\,\mathrm{vol}_{\mathbb{H}^2} \tag{3.3}$$

综合最后两个显示的方程可知，对所有 ε 均有

$$\frac{\pi\cdot e^{L-\varepsilon}}{\mathrm{vol}(\Sigma)} \leqslant |\Gamma\cdot y_0\cap B(x_0,L)| \leqslant \frac{\pi\cdot e^{L+\varepsilon}}{\mathrm{vol}(\Sigma)}$$

因此得出的是

$$|\Gamma\cdot y_0\cap B(x_0,L)| \sim \frac{\pi\cdot e^L}{\mathrm{vol}(\Sigma)}\ \text{as}\ L\to\infty. \tag{3.4}$$

这就是Delsarte格点计数定理 [7]——更多详情请参阅 [2, III.3.5]。

一个观察：请注意，计算 $\Gamma\cdot y_0$中包含在球$B(x_0,L)$内的元素个数，与计算 Σ 中从 x_0 到 y_0、长度至多为 L 的测地弧个数完全相同；更准确地说，是从 x_0 的投影到 y_0的投影的测地弧个数。这样，如果给定一条线段 $I \subset K = T^1_{x_0}\Sigma$ ，并利用球面线段 $I\rho_t$ 的等分布性，那么在执行上述论证时，我们就会得到集合$\mathbf{A}_{I,y_0}(L)$中测地线

弧的基数：这些弧的长度至多为 L，从 x_0 出发，初速度属于 I，并终止于 y_0。如预期，结果是

$$|\mathbf{A}_{I,y_0}(L)| \sim \frac{\ell(I)}{2\pi} \cdot \frac{\pi \cdot e^L}{\mathrm{vol}(\Sigma)} \quad \text{when } L \to \infty.$$

现在，假设我们稍微提高要求，引入第二个扇区 $J \subset T^1_{y_0}\Sigma$，并且对于某个固定的 h，关注长度属于 $[L, L+h]$、连接 x_0 与 y_0、且初速度和末速度分别属于 I 和 J 的测地弧集合 $\mathbf{A}_{I,J}(L, h)$ 的基数。我们可以沿用上文 Delsarte 定理证明中的基本思路，得到 $|\mathbf{A}_{I,J}(L, h)|$ 的渐近行为。不过，我们需要用其他函数替换鼓包函数 $f_{y_0,\varepsilon}$。

使用坐标 (3.1)，考虑 h 和 δ 为正且较小时的集合

$$\mathcal{J}(J, h, \delta) = \{J\rho_t h_s \text{ with } s \in [-\delta, \delta] \text{ and } t \in [0, h]\} \subset T^1\Sigma$$

并注意到其体积为 $\ell(J)\cdot 2\delta\cdot(1-e^{-h})$。还要注意，$\mathcal{J}(J, h, \delta)$ 与任意极限球面的外法向量场的交集由形如 $H_{v\rho_t} = \{v\rho_t h_s$ 的线段组成，其中 $s \in [-\delta, \delta]\}$，且 $v \in J$ 和$t \in [0, h]$；每条这样的线段长度为 2δ。最后请注意，每个集合 $H_{v\rho_t}$ 恰好包含一个向量，即 $v\rho_t$；让该向量沿着 $[-h, 0]$ 中的测地流动一段时间后，它会落入J。因此，对于所有区间 $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ 和 $w \in T^1\Sigma$，我们有

$$\left| \left| \left\{ r \in \mathbb{I} \;\middle|\; \begin{array}{c} \exists s \in [-\delta, \delta], t \in [-h, 0] \\ \text{with } wh_s\rho_t \in J \end{array} \right\} \right| - \frac{\ell(\{s \in \mathbb{I} \text{ with } wh_s \in \mathcal{J}\})}{2\delta} \right| \leqslant 2$$

其中 $\mathcal{J} = \mathcal{J}(J, h, \delta)$，而数字 2 则用于考虑到双曲线段两端附近可能出现的重复计数。

利用这样一个事实：当 $L \to \infty$ 球面 $S(x_0, L+h) \subset \mathbb{H}^2$ 越来越像一个极限球面时，我们便得到 (3.3) 的如下类似结果：对于任意 $\delta' < \delta < \delta''$、$h' < h < h''$ 和 $J' \Subset J \Subset J''$，当 L 足够大时，均有

$$\int_{I\rho_{L+h}} \chi_{\mathcal{J}(J',h',\delta')} \leqslant 2\delta \cdot |\mathbf{A}_{I,J}(L, h)| \leqslant \int_{I\rho_{L+h}} \chi_{\mathcal{J}(J'',h'',\delta'')}$$

其中，$\chi_{\mathcal{J}}$ 是 $\mathcal{J}$的示性函数。由此我们得到，

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}_{I,J}(L, h)| &\sim \frac{1}{2\delta} \int_{I\rho_{L+h}} \chi_{\mathcal{J}(J,h,\delta)} \sim \frac{1}{2\delta} \cdot \frac{e^{L+h}}{2} \cdot \int_I \chi_{\mathcal{J}(J,h,\delta)}(k\rho_{L+h})\, dk \\ &\overset{(3.2)}{\sim} \frac{1}{2\delta} \cdot \frac{e^{L+h}}{2} \cdot \ell(I) \cdot \frac{\mathrm{vol}_{T^1\Sigma}(\mathcal{J}(J, h, \delta))}{\mathrm{vol}_{T^1\Sigma}(T^1\Sigma)} \\ &\sim \frac{\ell(I) \cdot \ell(J)}{4\pi} \cdot \frac{e^{L+h} - e^L}{\mathrm{vol}(\Sigma)} \end{aligned}$$

我们记录 Delsarte 定理的这一稍作推广的版本，以供后文参考：

定理 3.1（入射-出射扇区的 Delarte 定理）。设 Σ 为一个闭双曲曲面，h 为正数，且 $I \subset T_{x_0}\Sigma$ 和 $J \subset T_{y_0}\Sigma$ 为非退化线段。令 $\mathbf{A}_{I,J}(L, h)$ 表示满足长度为 $r \in [L, L+h]$、端点为 $\alpha(0) = x_0$ 和$\alpha(r) = y_0$，且初始速度和终端速度分别满足 $\alpha'(0) \in I$ 和$\alpha'(r) \in J$的测地线弧$\alpha : [0, r] \to \Sigma$ 的集合。那么我们有

$$|\mathbf{A}_{I,J}(L, h)| \sim \frac{\ell(I) \cdot \ell(J)}{4\pi} \cdot \frac{e^{L+h} - e^{L}}{\mathrm{vol}(\Sigma)}$$

当 $L \to \infty$。 □

如前所述，定理 3.1 是更一般的 [17, Th´eor`eme 4.1.1] 的一个非常特殊的情形。如果还有我们尚未注意到的其他参考文献，我们也不会感到意外。

备注。还要注意，只要 I 和 J 属于一个紧集内的选择范围，定理 3.1 中的渐近行为就是一致的。例如，由于曲面 Σ 是紧的，我们得到：对于所有 $\delta > 0$，只要 I 和 J 分别是包含在 $T^1_{x_I}\Sigma$ 和 $T^1_{x_J}\Sigma$ 中、长度至少为 δ 的区间，其中 x_I 和 x_J 属于 Σ，定理 3.1 中的渐近行为就是一致的。

现在，设 X 是一个顶点集为 **顶点**(X) 的三价图，并设 $\vec{x} = (x_v)_{v \in \mathbf{vert}(X)} \in \Sigma^{\mathbf{vert}(X)}$ 是曲面上的一个 **顶点**(X) 元点组。再设

$$U \subset \prod_{v \in \mathbf{vert}(X)} \left(\bigoplus_{\bar{e} \in \mathbf{half}_v(X)} T^1_{x_v}\Sigma \right) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbb{T}_{\vec{x}}$$

是一个开集，其中一如既往，**半**$_v(X)$ 是从顶点 v 出发的 X 的所有半边的集合。

对于每条边 $e \in$ **边**(X)，给定一个正数 L_e，并记$\vec{L} = (L_e)_{e \in \mathbf{edge}(X)}$，我们将关注实现的集合 $\mathbf{G}^X_U(\vec{L}_e,\ h)$ $\phi :\ X \to \Sigma$

(a) 将每个顶点 $v \in$**vert**(X) 映射到点 x_v，(b) 满足 $(\phi(\vec{e}))_{\bar{e} \in \mathbf{half}(X)} \in U$，以及 (c) 对所有 $e \in$ **边**(X)，满足 $\ell(e) \in [L_e, L_e + h]$。

在这一情形下，我们有如下版本的 Delsarte 定理，它将 $\mathbf{G}^X_U(\vec{L}_e, h)$ 的基数与 U 在平坦环面 $\mathbb{T}_{\vec{x}}$中的体积 $\mathrm{vol}_{\vec{x}}(U)$ 联系起来。

定理 3.2（图实现的 Delarte 定理）。设 Σ 为一闭双曲曲面，设 X 为一有限图，固定 $\vec{x} \in \Sigma^{\mathbf{vert}(X)}$ 和一个开集$U_{\vec{x}} \subset \mathbb{T}_{\vec{x}}$。如果 体积$_{\vec{x}}(U_{\vec{x}} \setminus U_{\vec{x}}) = 0$，那么对于每个 $h > 0$，我们都有

$$|\mathbf{G}^X_{U_{\vec{x}}}(\vec{L}, h)| \sim \frac{\mathrm{vol}_{\vec{x}}(U_{\vec{x}})}{(4\pi)^E} \cdot \frac{(e^h - 1)^E \cdot e^{\|\vec{L}\|}}{\mathrm{vol}(\Sigma)^E}$$

¯当最小值$_{e\in\mathbf{edge}(X)}\, L_e \to \infty$。这里， $U_{\vec{x}}$ 是 $\mathbb{T}_{\vec{x}}$ 中 $U_{\vec{x}}$ 的闭包，而体积$_{\vec{x}}$ $(\cdot)$表示其中的体积。此外， $E = |$**边**$(X)|$ 是 X中的边数，并且$\|\vec{L}\| = \sum_{e\in$**边**$}$ $_{(X)}L_e$。

我们强调， $\mathrm{vol}_{\vec{x}}$ 的归一化方式满足 $\mathrm{vol}_{\vec{x}}(\mathbb{T}_{\vec{x}}) = (2\pi)^{2E}$。我们还要强调，这与我们使用区间$[0,\pi]$ 度量无向角这一事实是一致的。

证明。 我们称形如以下形式的闭集为

$$\prod_{v\in\mathbf{vert}(X)} \left(\prod_{\bar{e}\in\mathbf{half}_v(X)} I_{\bar{e}} \right) \subset \mathbb{T}_{\vec{x}} = \prod_{v\in\mathbf{vert}(X)} \left(\bigoplus_{\bar{e}\in\mathbf{half}_v(X)} T^1_{x_v}\Sigma \right)$$

其中每个 $I_{\bar{e}}$都是 $T^1_{x_v}\Sigma$中的一条线段，称为立方体。如果闭子集$\prod_{v\in\mathbf{vert}(X)}$ $\left(\oplus_{\bar{e}\in\mathbf{half}_v(X)} T^1_{x_v}\Sigma\right)$ it立方体式的 可表示为有限个互不相交的内部的立方体之并，我们就称其为立方体式集合。假设陈述中的开¯集合 $U = U_{\vec{x}}$ 满足 $U \setminus U$ 是零测集，这意味着 U可以从内外分别用立方体式集合 $U' \subset U \subset U''$逼近，且 $\mathrm{vol}(U'')$ $- \mathrm{vol}(U')$ 可以小到任意程度。因此，只需证明当 U 是一个立方体式集合（的内部）时，该定理成立。

现在注意，如果 $U = U_1 \cup U_2$ 是两个集合 U_1 和 U_2 的不交并，并且定理的陈述对 U_1 和 U_2 均成立，那么它对 U 也成立。由于每个立方体式集合都由有限多个内部互不相交的立方体构成，因此我们可以推知，实际上只需对单个立方体证明该定理即可。

$$U = \prod_{v\in\mathbf{vert}(X)} \left(\prod_{\bar{e}\in\mathbf{half}_v(X)} I_{\bar{e}} \right)$$

注意，至多重新排列因子，我们可以看到 U as

$$U = \prod_{e\in\mathbf{edge}(X)} \left(I_{e^+} \times I_{e^-}\right).$$

这里我们用 e^+ 和 e^- 表示边 $e \in$**边**(X) 的两条半边。现在，展开记号可知，实现 ϕ 属于 $\mathbf{G}_U(\vec{L}_e, h)$，当且仅当对于所有的 $e \in$**边**(X)，弧 $\phi(e)$ 都属于$\mathbf{A}_{I_{e^+},I_{e^-}}(L_e, h)$。因此，根据入射-出射扇区的 Delsarte 定理

that

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{G}_U^X(\vec{L},h)| &= \prod_{e\in\mathbf{edge}(X)} \left|\mathbf{A}_{I_{e^+},I_{e^-}}(L_e,h)\right| \\
&\sim \prod_{e\in\mathbf{edge}(X)} \left(\frac{\ell(I_{e^+})\cdot\ell(I_{e^-})}{4\pi}\cdot\frac{(e^h-1)\cdot e^{L_e}}{\mathrm{vol}(\Sigma)}\right) \\
&= \frac{\prod_{e\in\mathbf{edge}(X)}(\ell(I_{e^+})\cdot\ell(I_{e^-}))}{(4\pi)^E}\cdot\frac{(e^h-1)^E\cdot e^{\sum_{e\in\mathbf{edge}(X)}L_e}}{\mathrm{vol}(\Sigma)^E} \\
&= \frac{\mathrm{vol}(U)}{(4\pi)^E}\cdot\frac{(e^h-1)^E\cdot e^{\|\vec{L}\|}}{\mathrm{vol}(\Sigma)^E}
\end{aligned}
$$

其中，正如陈述中所设，集合 $E=|\mathbf{边}(X)|$。证毕。 □

现在我们来考虑最关心的具体情形。也就是说，假设 X 是一个三价图，并且我们希望所有角度都介于 $\frac{2}{3}\pi-\varepsilon$和 $\frac{2}{3}\pi+\varepsilon$之间。换言之，我们关注的是将顶点映射到指定元组 $\vec{x}\in\Sigma^{\mathbf{vert}(X)}$的$\varepsilon$-临界实现 $\phi: X\to\Sigma$ 的集合。于是我们需要考虑如下集合

$$
U^X_{\vec{x},\varepsilon-\mathrm{crit}} \subset \prod_{v\in\mathbf{vert}(X)}\left(\bigoplus_{\vec{e}\in\mathbf{half}_v(X)} T^1_{x_v}\Sigma\right)
$$

由满足条件的元组 $(v_{\vec{e}})_{\vec{e}\in\mathbf{half}(X)}$构成，其中对所有不同的$\vec{e}_1,\ \vec{e}_2\in\mathbf{半}(X)$，若它们关联于同一个顶点，则 $\angle(v_{\vec{e}_1},\ v_{\vec{e}_2})\in[\frac{2\pi}{3}-\varepsilon,\frac{2\pi}{3}+\varepsilon]$。

那么，让我们计算$U^X_{\vec{x},\ \varepsilon-\mathrm{crit}}$的体积。注意，与不同顶点相关的$U^X_{\vec{x},\ \varepsilon-\mathrm{crit}}$ 条件彼此独立，因此只需逐个考虑顶点，再将各顶点所得的数值相乘。对于每个顶点 v，任意将与之关联的半边标记为v的 $\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$和 $\vec{e}_3$。我们对 $v_{\vec{e}_1}\in T_{x_v}\Sigma$的位置没有限制。一旦固定了 $v_{\vec{e}_1}\in T^1_{x_v}(\Sigma)$，便知 $v_{\vec{e}_2}$可以位于两条线段上，每条长度均为 2ε，且都在 $T^1_{x_v}(\Sigma)$中——请记住，我们的所有角度都是无向的。随后，一旦固定了 $v_{\vec{e}_1}$ 和 $v_{\vec{e}_2}$，就必须在长度为 $2\varepsilon-|\angle(v_{\vec{e}_1},\ v_{\vec{e}_2})-\frac{2\pi}{3}|$的区间内选择 $v_{\vec{e}_3}$。这意味着，选定 $v_{\vec{e}_1}$以及 $v_{\vec{e}_2}$所在的线段后，$(v_{\vec{e}_2},\ v_{\vec{e}_3})$仍有 $3\varepsilon^2$ 的选择空间。也就是说，$T^1_{x_v}\Sigma\times T^1_{x_v}\Sigma\times T^1_{x_v}\Sigma$中可能选择的集合体积为 $12\pi\varepsilon^2$。由于正如我们先前所提到的，X 所有顶点处的条件彼此独立，因此我们得到

$$
\mathrm{vol}_{\vec{x}}(U^X_{\vec{x},\varepsilon-\mathrm{crit}}) = (12\pi\varepsilon^2)^{|\mathbf{vert}(X)|}
$$

由定理 3.2 可知，对于所有 $h>0$ 和所有 $\vec{x}\in\Sigma^{\mathbf{vert}(X)}$，我们都有

$$
|\mathbf{G}^X_{\vec{x},\varepsilon-\mathrm{crit}}(\vec{L},h)| \sim \frac{(12\pi\varepsilon^2)^V}{(4\pi)^E}\cdot\frac{(e^h-1)^E\cdot e^{\|\vec{L}\|}}{\mathrm{vol}(\Sigma)^E} \text{ as } \min_{e\in\mathbf{edge}(X)} L_e\to\infty,
$$

其中，我们用 V 和 E 分别表示 X的顶点数和边数，并用 $\mathbf{G}^X_{\vec{x},\varepsilon-\mathrm{crit}}$ 代替 $\mathbf{G}^X_{U_{\vec{x}},\varepsilon-\mathrm{crit}}$。考虑到 X 是三价的，因此满足 $V=-2\chi(X)$ 和 $E=-3\chi(X)$，我们可以将其简化为

$$|\mathbf{G}^X_{\vec{x},\varepsilon-\mathrm{crit}}(\vec{L},h)| \sim \varepsilon^{4|\chi(X)|}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2\chi(X)}\cdot\pi^{\chi(X)}\cdot\frac{(e^h-1)^{-3\chi(X)}\cdot e^{\|\vec{L}\|}}{\mathrm{vol}(\Sigma)^{-3\chi(X)}}$$

至少为 $\min_{e\in\mathbf{edge}(X)} L_e\to\infty$。此外，由于集合 $U^X_{\vec{x}}(\varepsilon\text{ –crit})$ 的几何与点 $\vec{x}$ 无关，因此趋于这一渐近行为的收敛速度与 $\vec{x}$无关。综上，得到以下结果：

推论 3.3. 设 Σ 为闭双曲曲面，X 为三价图，固定 $\varepsilon>0$ 和 $h>0$，并且对于 $\vec{x}\in\Sigma^{\mathbf{vert}(X)}$，令 $\mathbf{G}^X_{\vec{x},\varepsilon-\mathrm{crit}}(\vec{L},h)$ 表示将顶点 v 映射到点$x_v=\phi(v)$ 的 ε-临界实现 $\phi\colon X\to\Sigma$ 的集合。则有

$$|\mathbf{G}^X_{\vec{x},\varepsilon-\mathrm{crit}}(\vec{L},h)| \sim \varepsilon^{4|\chi(X)|}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2\chi(X)}\cdot\pi^{\chi(X)}\cdot\frac{(e^h-1)^{-3\chi(X)}\cdot e^{\|\vec{L}\|}}{\mathrm{vol}(\Sigma)^{-3\chi(X)}} \tag{3.5}$$

至少为 $\min_{e\in\mathbf{edge}(X)} L_e\to\infty$。 □

注意，建立推论 3.3 所需的集合 $U^X_{\vec{x},\varepsilon-\mathrm{crit}}$ 对于 $\vec{x}$的所有取值基本相同。例如，若取另一个 $\vec{y}\in\Sigma^{\mathbf{vert}(X)}$，并通过平行移动（沿任意一组曲线）将 $\mathbb{T}_{\vec{x}}$ 与 $\mathbb{T}_{\vec{y}}$ 等距地对应起来，那么 $U^X_{\vec{x},\varepsilon-\mathrm{crit}}$ 会被映射到 $U^X_{\vec{y},\varepsilon-\mathrm{crit}}$。由此可知，我们可以同时用具有相同数量立方体且边长相同的立方体式集合来近似 $U^X_{\vec{x},\varepsilon-\mathrm{crit}}$和 $U^X_{\vec{y},\varepsilon-\mathrm{crit}}$。因此，根据定理 3.1 后的说明，推论 3.3 中的渐近行为关于 $\vec{x}$是一致的。我们记录这一事实：

推论 3.3 的补充说明。 (3.5) 中的渐近行为关于$\vec{x}\in\Sigma^{\mathbf{vert}(X)}$是一致的。□

4. Counting critical realizations

在本节中，我们将证明引言中的定理 1.3。在重新陈述该定理之前，回顾一下，如果 X 是一个三价图，那么我们记为

$$\mathbf{G}^X(L)=\left\{\begin{array}{c}\phi:X\to\Sigma\text{ critical realization}\\ \text{with length }\ell_\Sigma(\phi)\leqslant L\end{array}\right\} \tag{4.1}$$

长度至多为 L 的所有长度为 $\ell_\Sigma(\phi)$ 的临界实现集合。

定理 1.3. 设 Σ 为一个闭、连通且定向的双曲曲面。对于每个连通的三价图 X，我们有

$$|\mathbf{G}^X(L)| \sim \left(\frac{2}{3}\right)^{3\chi(X)}\cdot\frac{\mathrm{vol}(T^1\Sigma)^{\chi(X)}}{(-3\chi(X)-1)!}\cdot L^{-3\chi(X)-1}\cdot e^L$$

为 $L\to\infty$。

在本节剩余部分固定三价图 X，我们将用**顶点** $=$**顶点**(X) 和 **边** $=$ **边** (X) 分别表示顶点集和边集，并用$V = |$ **顶点** $|$和 $E = |$ **边** $|$ 表示它们的基数。类似地，我们将用 $\mathcal{G} = \mathcal{G}^X$ 表示 X 在 Σ 中的实现流形，并用 $\mathbf{G}(L)$ $= \mathbf{G}^X(L)$ 表示长度至多为 L的临界实现集合。

定理 1.3 的证明中的主要步骤，是计算满足以下条件的 X 的临界实现数量：相应的长度向量 $(\ell(\phi(e)))_{e\in\mathbf{edge}}$ 属于一个大小为 $h > 0$的盒子。更具体地说，我们要计算集合中有多少个元素

$$\mathbf{G}(\vec{L}, h) = \left\{ \begin{array}{c} \phi : X \to \Sigma \text{ critical realization with} \\ \ell(\phi(e)) \in (L_e, L_e + h] \text{ for all } e \in \mathbf{edge} \end{array} \right\} \tag{4.2}$$

其中 $\vec{L} = (L_e)_{e\in\mathbf{edge}}$ 是一个正向量。我们首先为实现的同伦类数量建立某种上界，方法是限制每条边各自的长度——回想一下，根据引理 2.2，任意两个同伦的临界实现都相同。

引理 4.1。对于所有 $\vec{L} \in \mathbb{R}_+^{\mathbf{edge}(X)}$，实现 $\phi\colon X \to \Sigma$ 的同伦类至多有 $\mathbf{const} \cdot e^{\|\vec{L}\|}$ 个，且对所有 $e \in$ **边**(X)，都有 $\ell(\phi(e)) \leqslant L_e$。

值得指出的是，如果允许 Σ 具有尖点，引理 4.1 将不成立——参见第9节。

证明。固定一个点 $x_0 \in \Sigma$，并注意到 Σ 中的每个点——可以将其视为 X 的顶点在某个实现下的像 —— 都可以沿着一条长度至多为 $\mathrm{diam}(\Sigma)$ 的路径移动到 x_0。由此可知，每个实现 $\phi\colon X \to \Sigma$ 都同伦于一个新的实现 $\psi\colon X \to \Sigma$，该实现将 X 的所有顶点映射到 x_0，并且具有

$$\ell(\psi(e)) \leqslant \ell(\phi(e)) + 2 \cdot \mathrm{diam}(\Sigma) \leqslant L_e + 2 \cdot \mathrm{diam}(\Sigma). \tag{4.3}$$

对于每条边 $e \in$**边**(X)。注意，ψ 的同伦类由环 $\psi(e)$ 的同伦类决定，其中 e 遍历 X 的边。现在，(4.3) 意味着，在同伦意义下，测地线段 $\psi(e)$ 至多有$\mathbf{const} \cdot e^{L_e}$ 种选择。这意味着 ψ的同伦类至多有 $\mathbf{const} \cdot e^{\|\vec{L}\|}$ 种选择，从而 ϕ的同伦类也至多有 $\mathbf{const} \cdot e^{\|\vec{L}\|}$ 种选择。我们完成了。□

尽管引理 4.1 显然相当粗略，但它将在定理 1.3 的证明中发挥关键作用。不过，证明该定理的主要工具如下：

命题 4.2。对于所有 $h > 0$ 我们都有

$$|\mathbf{G}(\vec{L}, h)| \sim \frac{2^{4\chi(X)}}{3^{3\chi(X)}} \cdot \pi^{\chi(X)} \cdot \frac{(e^h - 1)^{-3\chi(X)} \cdot e^{\|\vec{L}\|}}{\mathrm{vol}(\Sigma)^{-\chi(X)}}$$

至少$_{e\in\mathbf{edge}} L_e \to \infty$。这里$\mathbf{G}(\vec{L}, h)$ 与(4.2)中的定义相同。

证明。用 $\mathcal{G}(\vec{L},h) \subset \mathcal{G}$ 表示所有实现的集合 $\phi: X \to \Sigma$ 满足$\ell_\Sigma(\phi) \in [L_e, L_e+h]$ 对所有 $e \in$ **边** 均成立，然后令

$$G_\varepsilon(\vec{L},h) = \left\{\mathcal{G}^\phi \in \pi_0(\mathcal{G}) \text{ with } \mathcal{G}^\phi_{\varepsilon-\mathrm{crit}} \subset \mathcal{G}(\vec{L},h)\right\}$$

$$\hat{G}_\varepsilon(\vec{L},h) = \left\{\mathcal{G}^\phi \in \pi_0(\mathcal{G}) \text{ with } \mathcal{G}^\phi_{\varepsilon-\mathrm{crit}} \cap \mathcal{G}(\vec{L},h) \neq \varnothing\right\}$$

是 $\mathcal{G}$ 的连通分支的集合，其中其 ε-临界实现的集合完全包含在（分别与）$\mathcal{G}$（$\vec{L},h$）相交。由推论 2.4¯可知，存在某个 ℓ_0，只要 L 满足 $\min L_e \geqslant \ell_0$，那么列在 ˆ $G_\varepsilon(\vec{L},h)$中的每个连通分支都恰好包含图 X的一个临界实现。从现在起假设我们处于这种情形，于是得到

$$|G_\varepsilon(\vec{L},h)| \leqslant |\mathbf{G}(\vec{L},h)| \leqslant |\hat{G}_\varepsilon(\vec{L},h)|.$$

现在，根据命题 2.6 中的 (2.10)，我们得到，对于所有 $\delta > 0$，都存在 $\ell_1 > \ell_0$，使得

$$(1-\delta)\cdot \mathrm{vol}\left(\bigcup_{\mathcal{G}^\phi \in G_\varepsilon(\vec{L},h)} \mathcal{G}^\phi_{\varepsilon-\mathrm{crit}}\right) < \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\varepsilon^2\right)^V \cdot |G_\varepsilon(\vec{L},h)|$$

$$(1+\delta)\cdot \mathrm{vol}\left(\bigcup_{\mathcal{G}^\phi \in \hat{G}_\varepsilon(\vec{L},h)} \mathcal{G}^\phi_{\varepsilon-\mathrm{crit}}\right) > \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\varepsilon^2\right)^V \cdot |\hat{G}_\varepsilon(\vec{L},h)|$$

每当 ε 足够小且 $\min L_e \geqslant \ell_1$ 时。综上，对于所有正且足够小的 ε，我们有

$$(1-\delta)\cdot \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\varepsilon^2\right)^{-V} \cdot \mathrm{vol}\left(\bigcup_{\mathcal{G}^\phi \in G_\varepsilon(\vec{L},h)} \mathcal{G}^\phi_{\varepsilon-\mathrm{crit}}\right) < |\mathbf{G}(\vec{L},h)|$$

$$(1+\delta)\cdot \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\varepsilon^2\right)^{-V} \cdot \mathrm{vol}\left(\bigcup_{\mathcal{G}^\phi \in \hat{G}_\varepsilon(\vec{L},h)} \mathcal{G}^\phi_{\varepsilon-\mathrm{crit}}\right) > |\mathbf{G}(\vec{L},h)|$$

¯对于所有满足 $\min L_e \geqslant \ell_1$ 的 L。

根据命题 2.6 中的 (2.11)，我们现在得到存在 $\ell_2 > \ell_1$，使得只要 ε 低于某个阈值，就有：每当 ϕ，$\psi \in \mathcal{G}$ 是同伦的 ε-临界实现，且对于所有 $e \in$ **边**，$\ell(\phi(e))$ $\ell(\psi(e)) \geqslant \ell_2$，那么长度 $\ell(\phi(e))$ 和 $\ell(\psi(e))$ 之差至多为 2ε，其中¯对应于每条边 $e \in$**边**。这意味着，对于任意这样的 L 和 ε，我们都有

$$\mathcal{G}_{\varepsilon-\mathrm{crit}}(\vec{L}+[2\varepsilon], h-4\varepsilon) \subset \bigcup_{\mathcal{G}^\phi \in G_\varepsilon(\vec{L},h)} \mathcal{G}^\phi_{\varepsilon-\mathrm{crit}}$$

$$\mathcal{G}_{\varepsilon-\mathrm{crit}}(\vec{L}-[2\varepsilon], h+4\varepsilon) \supset \bigcup_{\mathcal{G}^\phi \in \hat{G}_\varepsilon(\vec{L},h)} \mathcal{G}^\phi_{\varepsilon-\mathrm{crit}}$$

其中 $\vec{L}+[t] \in \mathbb{R}^{\mathbf{edge}}$ 是一个向量，其元素为 $(\vec{L}+[t])_e = \vec{L}_e + t$。

让我们总结一下目前为止所得到的结果：

$$(1-\delta)\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\varepsilon^2\right)^{-V}\cdot \mathrm{vol}\left(\mathcal{G}_{\varepsilon-\mathrm{crit}}(\vec{L}+[2\varepsilon],h-4\varepsilon)\right)<|\mathbf{G}(\vec{L},h)|$$

$$(1+\delta)\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\varepsilon^2\right)^{-V}\cdot \mathrm{vol}\left(\mathcal{G}_{\varepsilon-\mathrm{crit}}(\vec{L}-[2\varepsilon],h+4\varepsilon)\right)>|\mathbf{G}(\vec{L},h)|.$$

我们的下一个目标是计算左边的体积。利用覆盖（2.2），我们可以通过对交集的基数积分来计算体积 $\mathrm{vol}(\mathcal{G}_{\varepsilon-\mathrm{crit}}(\vec{L},h))$，其中 $\Sigma^{\mathbf{vert}}$

$$\mathbf{G}^X_{\vec{x},\varepsilon-\mathrm{crit}}(\vec{L},h)=\Pi^{-1}(\vec{x})\cap\mathcal{G}_{\varepsilon-\mathrm{crit}}(\vec{L},h)$$

纤维 $\Pi^{-1}(\vec{x})$ 与我们所关注的集合的交集。根据推论 3.3，我们由此得到：

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}(\mathcal{G}_{\varepsilon-\mathrm{crit}}(\vec{L},h))&=\int_{\Sigma^{\mathbf{vert}}}\left|\mathbf{G}^X_{\vec{x},\varepsilon-\mathrm{crit}}(\vec{L},h)\right|\,d\vec{x}\\&\overset{\text{Cor. 3.3}}{\sim}\int_{\Sigma^{\mathbf{vert}}}\varepsilon^{4|\chi(X)|}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2\chi(X)}\cdot\pi^{\chi(X)}\cdot\frac{(e^h-1)^{-3\chi(X)}\cdot e^{\|\vec{L}\|}}{\mathrm{vol}(\Sigma)^{-3\chi(X)}}\,d\vec{x}\\&=\varepsilon^{4|\chi(X)|}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2\chi(X)}\cdot\pi^{\chi(X)}\cdot\frac{(e^h-1)^{-3\chi(X)}\cdot e^{\|\vec{L}\|}}{\mathrm{vol}(\Sigma)^{-3\chi(X)}}\,\mathrm{vol}(\Sigma)^V\\&=\varepsilon^{4|\chi(X)|}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2\chi(X)}\cdot\pi^{\chi(X)}\cdot\frac{(e^h-1)^{-3\chi(X)}\cdot e^{\|\vec{L}\|}}{\mathrm{vol}(\Sigma)^{-\chi(X)}}\end{aligned}$$

其中我们利用了 $V=-2\chi(X)$，并且当 $\min_e L_e\to\infty$ 时，渐近行为成立。这意味着，只要 $\min_e L_e$ 足够大，我们就有

$$(1-\delta)\cdot\frac{2^{4\chi(X)}}{3^{3\chi(X)}}\cdot\pi^{\chi(X)}\cdot\frac{(e^{h-4\varepsilon}-1)^{-3\chi(X)}\cdot e^{\sum_{e\in\mathbf{edge}}(L_e+2\varepsilon)}}{\mathrm{vol}(\Sigma)^{-\chi(X)}}<|\mathbf{G}(\vec{L},h)|$$

$$(1+\delta)\cdot\frac{2^{4\chi(X)}}{3^{3\chi(X)}}\cdot\pi^{\chi(X)}\cdot\frac{(e^{h+4\varepsilon}-1)^{-3\chi(X)}\cdot e^{\sum_{e\in\mathbf{edge}}(L_e-2\varepsilon)}}{\mathrm{vol}(\Sigma)^{-\chi(X)}}>|\mathbf{G}(\vec{L},h)|$$

由于这对所有 $\varepsilon>0$ 都成立，我们得到。

$$(1-\delta)\cdot\frac{2^{4\chi(X)}}{3^{3\chi(X)}}\cdot\pi^{\chi(X)}\cdot\frac{(e^h-1)^{-3\chi(X)}\cdot e^{\|\vec{L}\|}}{\mathrm{vol}(\Sigma)^{-\chi(X)}}\leqslant|\mathbf{G}(\vec{L},h)|$$

$$(1+\delta)\cdot\frac{2^{4\chi(X)}}{3^{3\chi(X)}}\cdot\pi^{\chi(X)}\cdot\frac{(e^h-1)^{-3\chi(X)}\cdot e^{\|\vec{L}\|}}{\mathrm{vol}(\Sigma)^{-\chi(X)}}\geqslant|\mathbf{G}(\vec{L},h)|$$

因此，由于对于所有 $\delta>0$，我们都可以将 L 取得足够大，使得上述界成立，我们有

$$\frac{2^{4\chi(X)}}{3^{3\chi(X)}}\cdot\pi^{\chi(X)}\cdot\frac{(e^h-1)^{-3\chi(X)}\cdot e^{\|\vec{L}\|}}{\mathrm{vol}(\Sigma)^{-\chi(X)}}\sim|\mathbf{G}(\vec{L},h)|$$

正如我们所要证明的。 □

有了引理 4.1 和命题 4.2，我们现在可以证明该定理：

定理 *1.3* 的证明。 令 $h > 0$ 足够小，并对 $\vec{n} \in \mathbb{N}^{\mathbf{edge}}$ 考虑与 (4.2) 中相同记号的集合 $\mathbf{G}(h \cdot \vec{n}, h)$。令

$$\Delta(N) = \{\vec{n} \in \mathbb{N}^{\mathbf{edge}} \text{ with } \|\vec{n}\| \leqslant N\}$$

其中 $\|\vec{n}\| = \sum_e n_e$，请注意

$$\sum_{\vec{n} \in \Delta(N-E)} |\mathbf{G}(h \cdot \vec{n}, h)| \leqslant |\mathbf{G}(h \cdot N)| \leqslant \sum_{\vec{n} \in \Delta(N)} |\mathbf{G}(h \cdot \vec{n}, h)| \tag{4.4}$$

其中，$\mathbf{G}(h \cdot N) = \mathbf{G}^X(h \cdot N)$ 如 (4.1) 中所定义，并且再次地，$E = |\textbf{边}|$ 表示图 X 的边数。最后，记作

$$\kappa = \frac{2^{4\chi(X)}}{3^{3\chi(X)}} \cdot (\pi \cdot \mathrm{vol}(\Sigma))^{\chi(X)}$$

命题 4.2 现在读作

$$|\mathbf{G}(h \cdot \vec{n}, h)| \sim \kappa \cdot (e^h - 1)^{-3\chi(X)} \cdot e^{h \cdot \|\vec{n}\|}$$

其中，当 h 固定且 $\min \vec{n}_e \to \infty$ 时，渐近行为成立。这意味着，对于所有 h 和 δ，存在 $n(h, \delta)$，使得

$$|\mathbf{G}(h \cdot \vec{n}, h)| > (\kappa - \delta) \cdot (e^h - 1)^{-3\chi(X)} \cdot e^{h \cdot \|\vec{n}\|}$$

and

$$|\mathbf{G}(h \cdot \vec{n}, h)| < (\kappa + \delta) \cdot (e^h - 1)^{-3\chi(X)} \cdot e^{h \cdot \|\vec{n}\|}$$

对于所有满足 $\vec{n}$ 且使 $\vec{n}_e \geqslant n(h, \delta)$ 取最小值的情形。因此，由 (4.4) 的左侧可得，

$$\begin{aligned} |\mathbf{G}(h \cdot N)| &\geqslant \sum_{\substack{\vec{n} \in \Delta(N-E), \\ \min \vec{n}_e \geqslant n(h,\delta)}} |\mathbf{G}(h \cdot \vec{n}, h)| \\ &> (\kappa - \delta)(e^h - 1)^{-3\chi(X)} \sum_{\substack{\vec{n} \in \Delta(N-E), \\ \min \vec{n}_e \geqslant n(h,\delta)}} e^{h \cdot \|\vec{n}\|} \\ &= (\kappa - \delta)(e^h - 1)^{-3\chi(X)} \sum_{K=0}^{N-E} P(K) \cdot e^{h \cdot K} \end{aligned}$$

其中，$P(K)$ 表示满足 $\|n\| = K$ 且具有最小 $\vec{n}_e \geqslant n(h, \delta)$ 的那些 $\vec{n} \in \mathbb{N}^{\mathbf{edge}}$ 的数量。当 K 趋于 ∞ 时，我们有 $P(K) \sim \frac{1}{(E-1)!} K^{E-1}$。考虑到

对于 $E=-3\chi(X)$，我们得到对于所有足够大的 N，都有

$$\begin{aligned}|\mathbf{G}(h\cdot N)| &\succeq \frac{\kappa-\delta}{(-3\chi(X)-1)!}(e^h-1)^{-3\chi(X)}\sum_{K=0}^{N-E} K^{-3\chi(X)-1}\cdot e^{h\cdot K}\\ &= \frac{\kappa-\delta}{(-3\chi(X)-1)!}\left(\frac{e^h-1}{h}\right)^{-3\chi(X)}\sum_{K=0}^{N-E}(hK)^{-3\chi(X)-1}\cdot e^{h\cdot K}\cdot h\\ &\succeq \frac{\kappa-\delta}{(-3\chi(X)-1)!}\left(\frac{e^h-1}{h}\right)^{-3\chi(X)}\int_0^{(N-E)h} x^{-3\chi(X)-1}e^x dx\end{aligned}$$

其中，符号 $\succeq$ 表示左侧与右侧之比渐近地至少为 1。当 $N\to\infty$ 时，积分的值渐近于 $((N-E)\cdot h)^{-3\chi(X)-1}\cdot e^{(N-E)h}$，这意味着对于所有足够大的 N，都有

$$|\mathbf{G}(h\cdot N)| \succeq \frac{\kappa-\delta}{(-3\chi(X)-1)!}\left(\frac{e^h-1}{h}\right)^{-3\chi(X)}(Nh-Eh)^{-3\chi(X)-1}\cdot e^{Nh-Eh}$$

由于这对所有 δ 和所有 h都成立，并将 Nh 替换为 L，我们得到

$$|\mathbf{G}(L)| \succeq \frac{\kappa}{(-3\chi(X)-1)!}L^{-3\chi(X)-1}\cdot e^L$$

当 $L\to\infty$时。换言之，我们已经得到了所需的渐近下界 r

。

从上界出发，对于正且足够小的 h，再次由 (4.4) 右侧可得

$$|\mathbf{G}(h\cdot N)| \leqslant \sum_{\substack{\vec{n}\in\Delta(N),\\ \min\vec{n}_e\geqslant n(h,\delta)}} |\mathbf{G}(h\cdot\vec{n},h)| + \sum_{\substack{\vec{n}\in\Delta(N),\\ \min\vec{n}_e\leqslant n(h,\delta)}} |\mathbf{G}(h\cdot\vec{n},h)|.$$

与上面相同的计算可得，

(4.5)

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{\vec{n}\in\Delta(N),\\ \min\vec{n}_e\geqslant n(h,\delta)}} |\mathbf{G}(h\cdot\vec{n},h)| &\preceq\\ &\preceq \frac{\kappa+\delta}{(-3\chi(X)-1)!}\left(\frac{e^h-1}{h}\right)^{-3\chi(X)}(h(N+E))^{-3\chi(X)-1}\cdot e^{h(N+E)}\end{aligned}$$

当 $N\to\infty$ 时。另一方面，根据引理 4.1 可得，存在 $C>0$，使得 $|\mathbf{G}(h\cdot\vec{n},h)|\leqslant C\cdot e^{h\cdot|\vec{n}|}$ 对所有 $\vec{n}$ 均成立。因此，这意味着

$$\sum_{\substack{\vec{n}\in\Delta(N),\\ \min\vec{n}_e\leqslant n(h,\delta)}} |\mathbf{G}(h\cdot\vec{n},h)| \leqslant C\cdot\sum_{K=1}^{N} Q(K)\cdot e^{h\cdot K}$$

其中 $Q(K)$ 表示满足 $\min \vec{n}_e < n(h,\ \delta)$ 且$|\vec{n}| = K$ 的那些 $\vec{n} \in \mathbb{N}^{\mathbf{edge}}$ 的数量。当 $K \to \infty$ 时，函数 $Q(K)$ 渐近于 $C' \cdot K^{E-2}$，其中某个正数常量为 C'，也就是说，我们有

$$\sum_{\substack{\vec{n} \in \Delta(N),\\ \min \vec{n}_e \leqslant n(h,\delta)}} |\mathbf{G}(h \cdot \vec{n}, h)| \leqslant \frac{(1+\delta) \cdot C \cdot C'}{h^{E-1}} \cdot \sum_{K=1}^{N} h \cdot (hK)^{E-2} \cdot e^{h \cdot K}$$

对所有足够大的 L 都成立。因此，类似于上述估计可知，存在另一个正常数 C''，使得

$$\sum_{\substack{\vec{n} \in \Delta(N),\\ \min \vec{n}_e \leqslant n(h,\delta)}} |\mathbf{G}(h \cdot \vec{n}, h)| \leqslant C'' \cdot (N \cdot h)^{-3\chi(X)-2} \cdot e^{N \cdot H} \tag{4.6}$$

(4.6) 右侧的量与 (4.5) 右侧相比可以忽略不计，这意味着我们有

$$|\mathbf{G}(h \cdot N)| \preceq \frac{\kappa + 2\delta}{(-3\chi(X)-1)!} \left(\frac{e^h - 1}{h}\right)^{-3\chi(X)} (h(N+E))^{-3\chi(X)-1} \cdot e^{h(N+E)}$$

对所有足够大的 N 都成立。由于这对所有 δ 和所有 h 都成立，用 L 替换 hN 后，我们可得

$$|\mathbf{G}(L)| \preceq \frac{\kappa}{(-3\chi(X)-1)!} L^{-3\chi(X)-1} \cdot e^{L}.$$

现在也已建立渐近上界，因此定理的证明至此完成。□

在讨论其他事项之前，我们先说明一个稍后会用到的观察。定理 1.3 的证明的基本策略是：将计数问题分解为两个步骤，先统计长度不超过给定值的所有临界实现中，边长落在给定区域内的那些，再对所有区域求和。对于大多数区域，命题 4.2 对其中临界实现的数量给出了相当精确的估计；而根据引理 4.1，我们可以得到所有区域的上界。我们结合这两者得到了定理中的所需上界，并由此推得可以忽略命题 4.2 不适用的那些区域。类似的论证表明，某条边短于 ℓ_0 的临界实现集合也可以忽略。我们将这一观察表述为一个引理：

引理 4.3。对于所有 ℓ，除一个可忽略集外，所有临界实现都是ℓ-长的。□

结合上下文，大概可以看出这里“可忽略”的含义；但准确地说，我们是指该集合在下文（7.2）意义下的所有临界实现构成的集合中是可忽略的。

5. Fillings

设 S_g 是一亏格为 g 且只有一个边界分支的紧致连通定向曲面。下文我们将关注连续映射

$$\beta : S_g \to \Sigma \tag{5.1}$$

它们将 ∂S_g 映射为闭测地线 $\gamma = \beta(S_g)$。我们将这样的映射称为 γ的亏格为 g 的 填充，或称为 γ的亏格为 g 填充，也可以简称为 γ 的填充，其中亏格 g 要么尚未确定，要么可由上下文推知。曲线 $\gamma \subset \Sigma$ 的亏格是所有满足存在一个亏格为 g 的填充 (5.1)，且 $\gamma = \beta(\partial S_g)$ 的 g 的下确界。请注意，除非 γ 是同调平凡的，否则曲线的亏格为无穷；换言之，除非 γ 由 $\pi_1(\Sigma)$ 的交换子子群中的元素表示。事实上，作为 $\pi_1(S_g)$ 的一个元素，边界 ∂S_g 是若干交换子的乘积。因此，如果曲线 γ 在 Σ 中的亏格为 g，那么将其视为 $\pi_1(\Sigma)$ 中的元素时，它是若干交换子的乘积。反过来，如果 γ 是若干交换子的乘积，那么就存在一个如 (5.1) 所示的映射，其 S_g 的亏格为 g。简而言之，γ 的亏格与交换子长度相同。我们记录这一事实以便查阅：

引理 5.1. 曲线的亏格与其交换子长度相同。 □

沿用相同的记号和术语，设曲线γ 在 Σ 中的亏格为 g。于是，我们将 (5.1) 中任何满足 S 的亏格为 g 的 $\beta : S \to \Sigma$ 称为最小亏格填充。最小亏格填充具有非常好的拓扑性质。事实上，设 $\beta : S_g \to \Sigma$ 是 (5.1) 中的一个填充，并设存在一条本质简单曲线 $m \subset S_g$，使得 $\beta(m)$ 同伦平凡。对曲面 S_g 和映射 β 进行手术后，我们得到一个更小亏格的填充 $\beta' : S_{g'} \to \Sigma$，满足 $\beta'(\partial S_{g'}) = \beta(\partial S_g)$ 且 $g' < g$。由此可知，若 $\beta : S_g \to \Sigma$ 是$\gamma = \beta(\partial S_g)$ 的一个最小亏格填充，则 β 是几何不可压缩的，也就是说，$\ker(\beta_* : \pi_1(S_g) \to \pi_1(\Sigma))$ 中没有由简单曲线表示的元素。我们记录这一事实：

引理 5.2. 最小亏格填充是几何不可压缩的。 □

从现在起，我们将只讨论最小亏格填充，因此读者每次看到“填充”一词时，都可以放心地将其理解为“最小亏格填充”。

我们对单个填充并没有太大兴趣，而是更关注填充的同伦类。特别是，我们会选择特别理想的填充。更准确地说，我们将研究双曲填充，这里所说的双曲填充，是指一种特定类型的折叠曲面。提醒读者，根据 Thurston [18]（另见 [5]）的定义，折叠曲面是从双曲曲面到双曲流形的映射，且定义域中的每一点都包含在某条测地线段上，该线段在映射下是等距的。

定义。填充 $\beta: S \to \Sigma$ 若赋予了带测地边界的双曲度量，且映射 β 满足每个$x \in S$ 都包含在测地弧 I 的内部，并且 β 将 I等距映射到 Σ中的一条测地弧上，则称其为双曲的。

一个重要的观察是：如果 $\beta: S \to \Sigma$ 是一个双曲填充，如果 $x \in \partial S$，并且如果 $I \subset S$ 是一条测地线段，且其内部有 x，那么$I \subset \partial S$。由此可知，双曲填充将边界等距映射。

引理 5.3。任意双曲填充 $\beta: S \to \Sigma$ 在 ∂S 上的限制都是测地线的。□

我们不应再拖延确认双曲填充确实存在：

命题 5.4。每个最小亏格填充都同伦于一个双曲填充。

为了证明这一命题，我们首先证明：如果 $\beta: S \to \Sigma$ 是任意一个填充，并且曲面 S 允许一个具有某些性质的三角剖分，那么 β 同伦于一个双曲填充。由于没有更好的名称，我们称 $\mathcal{T}$对 S 的一个三角剖分是有用的，如果它满足以下三个条件：

(i) $\mathcal{T}$恰有 $g+1$ 个顶点 $v_0, \ldots, v_g$，其中 $v_0 \in \partial S$，其余的位于 S的内部。(ii) $\mathcal{T}$中存在一组边 $I_0, \ldots, I_g$，使得对于所有 $i = 0, \ldots, g$，I_i的两个端点都附着于 v_i。此外 $I_0 = \partial S$。

显然，这两个条件都相当宽松。接下来要陈述的条件，才是有用三角剖分真正有用的原因。我们先引入一些记号：若 I是 $\mathcal{T}$中一条边，且不是 $I_0, \ldots, I_g$，那么令 G_I 表示包含 I 的 $I \cup I_0 \cup \cdots \cup I_g$ 的连通分支。

(iii) 对于任意一条边 I，若它不是 $I_0, \ldots, I_g$，则在β_* 下的像 $\pi_1(G_I) \to \pi_1(\Sigma)$ 不是阿贝尔的。

注意，$\pi_1(G_I)$ 是一个秩为 2 的自由群。这意味着它的像$\beta_*(\pi_1(G_I))$) 的秩至多为 2。由于我们假设它不是阿贝尔群，因此可知它实际上是一个秩为 2 的自由群。自由群是 Hopf 群，因此我们推得 $\beta_*: \pi_1(G_I) \to \pi_1(\Sigma)$ 是到其像上的同构。换言之，β_* 在 $\pi_1(G_I)$ 上是单射。

以下结果说明了我们为何关注此类三角剖分：

引理 5.5。如果填充 $\beta: S \to \Sigma$ 的定义域 S 具有一个有用的三角剖分 $\mathcal{T}$，那么 β 同伦于一个双曲填充。

证明。正如我们刚才所讨论的，我们的条件意味着，对于所有 I，β_* 在 $\pi_1(G_I)$ 上是单射。这尤其意味着，$\mathcal{T}$ 的每条例外边 $I_0, \ldots, I_g$ 都会闭合成 S 中的一条简单闭曲线 $\gamma_0, \ldots, \gamma_g$，且其像是一条同伦本质曲线。进而，这意味着 $\gamma_0, \ldots, \gamma_g$ 的像同伦于非平凡闭测地线。由于所有这些 $g+1$ 曲线两两不相交，我们便可以对 β 作同伦变形，使得对于所有 i，$\beta(\gamma_i)$ 都是闭测地线 $\hat{}\gamma_i$。

现在令 I 为 $\mathcal{T}$ 的一条剩余边，令 v_i 和 v_j 为其端点（可能相同），并注意到 $G_I = \gamma_i \cup I \cup \gamma_j$。由于 β_* 在 $\pi_1(G_I, v_i)$ 上是单射，我们知道元素 $\beta_*(\gamma_i)$ 和 $\beta_*(I * \gamma_j * I^{-1})$ 不交换，因此它们在 $\partial_\infty \mathbb{H}^2$ 中有不同的不动点。这一看似较弱的性质，正是我们按照标准方法构造折叠曲面所需的一切：将三角剖分的边绕着测地线 $\hat{}\gamma_i$ 旋转——可与 [5] 中定理 I.5.3.6 的证明相比较。□

现在我们可以证明命题 5.4。

证明。设 $\beta\colon\ S \to \Sigma$ 是测地线 $\gamma = \beta(\partial S)$ 的一个最小亏格填充，其亏格为 g。根据引理 5.5，要证明 β 同伦于一个双曲填充，只需证明 S 存在一个有用三角剖分。现在，我们先取 g 个互不相交的紧致单孔环面 $T_1, \ldots, T_g \subset S$。我们断言，$\beta$ 在每个 T_i 上的限制都是 π_1-单射。事实上，由于我们知道 β 几何不可压缩，因此可推得 ∂T_i 不属于基本群层面上诱导同态的核。由此可知，$\beta_*(\pi_1(T_i))$ 的像不可能是阿贝尔群。于是，$\beta_*(\pi_1(T_i))$ 是自由群，且显然秩为 2。因此，同样由于自由群是 Hopf 群，我们得到对于所有 i，β_* 在 $\pi_1(T_i)$ 上的限制都是单射。

那么，我们为什么要关心这一点呢？这是因为，知道对于任意 i，β_* 到 $\pi_1(T_i)$ 的限制是单射，意味着当 T_i 中非边界平行简单闭曲线在 $\pi_1(\Sigma)$ 中的像确定了无穷多个极大阿贝尔子群的共轭类时，我们可以据此作出选择。因此，对于每个 $i = 1, \ldots, g$，选取一条非边界平行简单闭曲线 $\gamma_i \subset T_i$，并且也令 $\gamma_0 = \partial S$，这样便有

(*) $\pi_1(\Sigma)$ 中包含$\beta_*(\gamma_0), \ldots, \beta_*(\gamma_g)$ 的极大阿贝尔子群两两不共轭。

现在，在每条曲线 γ_i 中各选取一个顶点 v_i。由 **(*)** 可知，若 I 是连接 v_i 与 v_j 的任意一条简单路径（$i \neq j$），则$\beta_*(\pi_1(\gamma_i \cup I \cup \gamma_j))$ 的像不是阿贝尔群。

所有这些的要点是，任意三角剖分 $\mathcal{T}$ 均具有。

(1) 顶点集 $v_0, \ldots, v_g$，**(2)** 存在边 $I_0, \ldots, I_g$，其两端均与 v_i 相接，且其像为 γ_i，并且 **(3)** 所有其他边都连接不同的端点，

是有用的。为了说明这样的三角剖分确实存在，沿着 γ_1、……、γ_g 将 S 割开。这样做之后，我们得到一个带 $2g+1$ 个孔的带孔球面 Δ，并且每个顶点 v_1、……、v_g 都出现两次——如图 2 所示，将 v_i 的两个副本分别记为 v_i 和 v_i'。现在，任何一个以 v_0、v_1、v_1'、v_2、v_2'、……、v_g、v_g' 为顶点集的 Δ 的三角剖分，并且……

- 包含一串 $2g-1$ 条边，从而形成一条路径

$$[v_1, v_2], [v_2, v_3], \ldots, [v_g, v_1'], [v_1', v_2'], \ldots, [v_{g-1}', v_g']$$

and

- 与 v_0 相接的所有其他边

得到一个满足上述 (1)–(3) 的 S 三角剖分。证明存在有用三角剖分后，由引理 5.5 可知， β 同伦于双曲填充，正如我们需要证明的那样。□

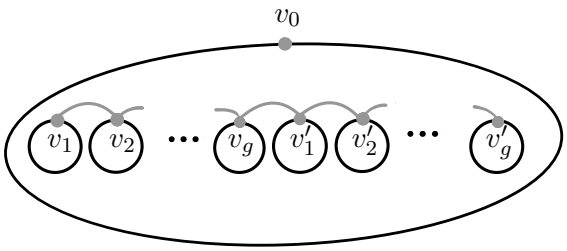

图 2。命题 5.4 中有用三角剖分的构造：沿着 $\gamma_1, \dots, \gamma_g$ 切割 S 后得到的 $2g + 1$ 带孔球面。顶点 $v_1, \dots, v_g$ 及其副本 $v_1', \dots, v_g'$ 由一串边连接：$[v_1, v_2], [v_2, v_3], \dots, [v_g, v_1'], [v_1', v_2'], \dots, [v_{g-1}', v_g']$。为完成三角剖分，按需添加尽可能多的边，将 v_0 与其他顶点连接起来。

能够处理双曲填充，这将在下一节中发挥关键作用；届时我们将为 Σ 中长度为 $\ell_\Sigma(\gamma) \leqslant L$ 的闭测地线 γ 的数量给出上界，并且这些闭测地线至少允许两种同伦不等价的填充。

定义。两个填充 $\beta_1 : S_1 \to \Sigma$ 和 $\beta_2 : S_2 \to \Sigma$ 称为同伦的，如果存在一个同胚 $F\colon S_1 \to S_2$，使得 β_1 与 $\beta_2 \circ F$ 同伦。

显然，为了界定具有相同边界的非同伦填充对的数量，我们需要某种判据来判断两个填充何时同伦。为陈述该判据，请注意，若 $\beta_1 : S_1 \to \Sigma$ 和 $\beta_2 : S_2 \to \Sigma$ 是同伦的双曲填充，则存在

> 一个通过沿边界将 $S = S_1 \cup_{\partial S_1 = \partial S_2} S_2$ 等距粘合 S_1 和 S_2 而得到的闭双曲曲面，其中存在折叠曲面 $\Theta : S \to \Sigma$，且 $\Theta|_{S_i} = \beta_i$。

由于没有更好的名称，我们将 $\Theta : S \to \Sigma$ 称为与 β_1 和 β_2 相关联的伪双重，并将曲线 $\partial S_1 = \partial S_2 \subset S$ 称为伪双重的折痕 。

我们将根据相关伪双重的定义域的 ε_0 薄部结构，来判定测地线 γ 的两个双曲填充 β_1 和 β_2 是否同伦；其中常数一经选定便不再改变

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{10} \cdot \min\left\{\text{Margulis constant of } \mathbb{H}^2,\ \text{systole of } \Sigma\right\}. \tag{5.2}$$

以下是我们的判据。

引理 5.6。假设 $\beta_1:\ S_1 \to \Sigma$ 和 $\beta_2:\ S_2 \to \Sigma$ 是亏格为 g 的测地线 γ 的双曲最小亏格填充，设 $\Theta:\ S \to \Sigma$ 为其对应的伪双重，并将其折痕 $\partial S_1 = \partial S_2 \subset S$ 也记为 γ。如果

(1) S的 ε_0薄部有 $6g-3$个连通分支 U_1、.....、U_{6g-3}，并且(2) γ 恰好遍历每个 U_i 两次，

那么 β_1 和 β_2 同伦。

证明。注意，曲面 S 的亏格为 $2g$。特别地，关于 ε_0-薄部的假设意味着存在一个裤子分解 P，它位于 S中，且由长度至多为 $2\varepsilon_0$的闭测地线组成。现在，由于 Θ 显然是 1-Lipschitz 的，且由于 $2\varepsilon_0$ 小于 Σ的单纯长度，我们得到 P 的每个连通分支都被映射为一条同伦平凡的曲线。折痕 γ是一条简单曲线，它与裤子分解的每个连通分支恰好相交两次；这一假设意味着 γ 将每个裤子曲面分割成两个六边形。将 S_1 中的六边形涂成蓝色，将 S_2中的六边形涂成黄色。

现在，我们可以按如下方式构造一个相对于折痕的同伦。每个 P 连通分支都由一条蓝色弧和一条黄色弧组成，二者的并置是同伦平凡的。这意味着，我们可以将所有黄色弧相对于其端点同伦变形为相应的蓝色弧。将这一同伦延拓为一个固定 ∂S_2 且定义在整个 S_2上的同伦。现在，每个黄色六边形的边界都映射到相应蓝色六边形的边界上。由于 Σ具有平凡的 π_2，我们可以推知这两个六边形是同伦的。按照这种方式逐一处理每个六边形，我们便得到一个相对于折痕的同伦，将 S 的黄色部分变形为蓝色部分。这正是我们希望得到的结果。□

6. Bounding the number of multifillings

本节的目标是证明定理 1.4:

定理 1.4. 对于任意 g，在 Σ 中，长度为 $\ell(\gamma) \leqslant L$ 且具有两个非同伦填充 $\beta_1 : S_1 \to \Sigma$ 和 $\beta_2:\ S_2 \to \Sigma$ 的亏格为 $\leqslant g$ 的闭测地线 γ 至多有 $\mathbf{const} \cdot L^{6g-5} \cdot e^{\frac{L}{2}}$ 条。

定理 1.4 的证明颇为复杂。我们希望读者不会因下文中出现的各种奇怪对象和相当晦涩的陈述而感到气馁。

带边界曲面。我们将带边界曲面 理解为一个紧致连通单纯复形 Δ，其构造如下：从一个紧致、可能不连通的三角剖分曲面 Surf(Δ) 出发，并取三角剖分 Surf(Δ) 的顶点集合中的一个显然有限的子集 P_Δ，使得 Surf(Δ)$\setminus P_\Delta$ 的每个连通分支都具有负欧拉示性数。我们将 P_Δ 中的元素视为插头。现在连接 1-单形（我们称之为导线），将其两个端点都连接到插头上，并且如此进行，使得

每个插头恰好作为一条导线的端点出现一次——我们用**wire(Δ)**表示导线集合。没有导线的带边界曲面 Δ，即其 $\Delta = \emptyset$ 为 Surf(Δ) 的曲面，称为退化的。否则称为非退化的。

带边界曲面如何出现？我们称一对 $(\mathbb{F}, \mathbb{T})$ 为曲面 S 的装饰，如果

- $\mathbb{F}$ 是 S 上的部分叶状结构，其支撑集为有限个两两不相交、本质且互不平行的圆柱之并，且
- $\mathbb{T}$ 是那些圆柱的内部补集的三角剖分。

现在，若 $(\mathbb{F}, \mathbb{T})$ 是 S的装饰，则通过将 $\mathbb{F}$ 的每条叶压缩为一点，并在由此产生的每个大边形内部添加一个顶点，将其分成两个三角形，即可得到相应的带边界曲面$\Delta = S/\sim_{\mathbb{F}}$。我们称商映射 $\pi : S \to \Delta$ 为 Δ的分解，其关联叶状结构为 $\mathbb{F}$。每个带边界曲面都存在本质上唯一的分解；所谓唯一，是指任意两个分解之间相差一个 PL 同胚，且该同胚将一种叶状结构映射到另一种。

现在设 Δ是一个带边界曲面。 Δ 上的一条简单曲线是一个映射$\eta : \mathbb{S}^1 \to \Delta$，满足存在一个分解 $\pi : S \to \Delta$及其关联叶状结构 $\mathbb{F}$，并存在一条与$\mathbb{F}$ 横截相交的本质简单曲线 $\eta' : \mathbb{S}^1 \to S$，且 $\eta = \pi \circ \eta'$。

注意，与相应叶状结构横截这一条件意味着，若 η 是带边界曲面 Δ 中的一条简单曲线，那么 $\eta \cap \pi^{-1}(\Delta \setminus \text{Surf}(\Delta))$ 由一组线段组成，每条线段都被同胚地映射到一条导线上。若 I 是这样一条导线，我们用 $n_I(\eta)$ 表示 η 在 I 中的权重，也就是 $\eta \cap \pi^{-1}(\Delta \setminus \text{Surf}(\Delta))$ 中被同胚地映射到 I 的连通分支数；换言之，就是 η 与 I 相交的次数。我们将该向量称为

$$\vec{n}_\Delta(\eta) = (n_I(\eta))_{I \in \mathbf{wire}(\Delta)} \tag{6.1}$$

η 在 Δ 中的权重向量。 η 的像与曲面部分 Surf(Δ) 的交集是一个简单弧系，其端点属于集合 P_Δ。注意，通过将 η 同伦变形为 Δ 中的另一条简单曲线，我们可以假设弧系 $\eta \cap$Surf(Δ) 的所有连通分支都是本质的。这等价于要求：对于每条导线 I，对于 Δ 中与 η 同伦的任意其他简单曲线 η'，都有 $n_I(\eta) \leqslant n_I(\eta')$。从现在起，除非另有说明，我们都假设 Δ 中的所有简单曲线均满足这些极小性要求。

迄今为止，带边界曲面还只是拓扑对象。现在我们来改变这一点。我们将双曲带边界曲面理解为一种带边界曲面 Δ，其曲面部分 Surf(Δ) 配备了分片双曲度量，也就是说，相对于该度量，Surf(Δ) 的三角剖分中的单形均与双曲三角形等距。

设 Δ 是一个双曲带边界曲面，并且和往常一样，设 Σ 是我们固定的双曲曲面。若映射 $\Xi : \Delta \to \Sigma$ 满足以下条件，我们就称其为紧致的：

- Ξ将每根导线映射为一条测地线段，并且
- Ξ 限制在 Surf(Δ) 的三角剖分中的每个单形上时，都是等距映射。

我们将关注由紧映射和简单曲线构成的数对（$\Xi : \Delta \to \Sigma$, γ）。显然，如果不加进一步限制，这样的数对可能有无穷多个。我们要计数的是曲线长度有界的数对。不过，我们将采用一种相当奇特的长度概念。具体来说，对于给定的一个较小但为正的 ε，考虑以下量

$$\ell^{\varepsilon}_{\Xi}(\gamma) = \varepsilon \cdot \ell_{\mathrm{Surf}(\Delta)}(\gamma \cap \mathrm{Surf}(\Delta)) + \sum_{I \in \mathbf{wire}} n_I(\gamma) \cdot \max\left\{ \ell_{\Sigma}(\Xi(I)) - \frac{1}{\varepsilon}, 0 \right\} \tag{6.2}$$

显然，这种长度概念恰好符合我们后面所需，但我们还是来试着解读一下 (6.2) 的实际含义。ε起什么作用呢？如果把长度看作一次旅程的花费，那么第一个 ε 会让沿曲面部分行进的成本变得很低，也就是说，花同样的钱，我们可以在那一段路上走得更远。类似地，穿过导线时，只有导线非常长，我们才需要付出代价。

引理 6.1. 设 Δ 是一张非退化双曲带边界曲面，其边界分支集合为 **边界分支** $=$ **边界分支**(Δ)。固定一个紧致映射 $f : \Delta \to \Sigma$、一个正整数向量 $\vec{n} = (n_I)_{I \in \mathbf{wire}} \in \mathbb{N}_+^{\mathbf{wire}}$，并记

$$\min = \min_{I \in \mathbf{wire}} n_I \geqslant 1 \text{ and } d = |\{I \in \mathbf{wire} \text{ with } n_I = \min\}|$$

$\vec{n}$ 的最小分量以及该值出现的次数。

对于任意 $\varepsilon > 0$，满足以下条件的同伦类对 $(\Xi : \Delta \to \Sigma, \gamma)$ 至多有 **常数** $\cdot L^{d-1} \cdot e^{L/\min}$ 个：其中 Ξ 是满足 $\Xi|_{\mathrm{Surf}(\Delta)} = f|_{\mathrm{Surf}(\Delta)}$ 的紧致映射，且 γ 是 Δ 中满足以下条件的简单多重曲线：对于每条边界分支 I，都有 $n_I(\gamma) \geqslant n_I$，并且 $\ell^{\varepsilon}_{\Xi}(\gamma) \leqslant L$。

请注意，所得上界（或者更确切地说，其增长率）不依赖于 ε，这意味着实际上，获得大量同伦类的唯一方式就是对边界分支做文章。事实上，由于给定的上界只依赖于 d 和 min，因此真正起作用的只有那些曲线尽可能少穿过的边界分支。

在开始证明之前，再补充一点说明。具体而言，如果引理 6.1 中的带边界曲面 Δ 是退化的，会发生什么情况？实际上，如果不存在任何边界线，那么 Δ 就只不过是一个带有（分段双曲）度量的曲面。在这样的曲面中，长度不超过 L 的简单多重曲线至多有 $\mathbf{const} \cdot L^{3 \cdot |\chi(\Delta)|}$ 条——例如参见 [8]。这意味着，对于一个退化的

对于带边界曲面，实际上得到的是多项式界，而不是指数界。

现在我们可以开始证明引理 6.1 了：

证明。注意，由于映射 Ξ 在 Surf(Δ) 上是固定的，因此该映射的同伦类型，甚至映射本身，都由线上发生的情况决定。特别地，正如引理 4.1 的证明中那样，若给定一个正向量 $\vec{\lambda} = (\lambda_I)_{I\in\mathbf{wire}} \in \mathbb{R}_+^{\mathbf{wire}}$，则至多存在 $\mathbf{const}\cdot e^{\|\vec{\lambda}\|}$ 个紧映射 $\Xi\colon \Delta \to \Sigma$的同伦类，它们满足 $\Xi|_{\mathrm{Surf}(\Delta)} = f$，并且

$$\lambda_I \leqslant \ell_\Sigma(\Xi(I)) \leqslant \lambda_I + 1 \text{ for all } I \in \mathbf{wire}. \tag{6.3}$$

一如既往，我们令 $\|\vec{\lambda}\| = \lambda_1 + \cdots + \lambda_r$。

现在，我们计数的不是映射的同伦类，而是由 $(\Xi\colon \Delta \to \Sigma,\ \gamma)$ 构成的二元组，其中多重曲线 γ 满足 $\ell^\varepsilon_\Xi(\gamma) \leqslant L$。注意，若 Ξ满足 (6.3)，那么给定的长度上界 $\ell^\varepsilon_\Xi(\gamma) \leqslant L$ 意味着

$$\begin{aligned}
\ell_{\mathrm{Surf}(\Delta)}(\gamma \cap \mathrm{Surf}(\Delta)) &= \frac{1}{\varepsilon}\left(\ell^\varepsilon_\Xi(\gamma) - \sum_{I\in\mathbf{wire}} n_I(\gamma)\cdot\max\left\{\ell_\Sigma(\Xi(I)) - \frac{1}{\varepsilon}, 0\right\}\right)\\
&\leqslant \frac{1}{\varepsilon}\left(L - \sum_{I\in\mathbf{wire}} n_I\cdot\max\left\{\lambda_I - \frac{1}{\varepsilon}, 0\right\}\right)\\
&\leqslant \frac{1}{\varepsilon}\left(L - \langle\vec{n},\vec{\lambda}\rangle + \frac{1}{\varepsilon}\cdot\|\vec{n}\|\right)
\end{aligned}$$

现在，由于对于任意给定的长度，长度有界的简单弧系只有多项式数量，因此我们可以推 deduce：对于每个满足 (6.3) 的 Ξ，在 Δ 中，满足 $\ell^\varepsilon_\Xi(\gamma) \leqslant L$ 且对每条线 I 都满足 $n_I(\gamma) \geqslant n_I$ 的简单多重曲线的同伦类至多有 $\mathbf{const}\cdot(L - \langle\vec{n},\vec{\lambda}\rangle)^{\mathbf{const}}$ 个。将上述所有结果综合起来，我们得到以下结论：

事实。 至多存在 $\mathbf{const}\cdot(L - \langle\vec{n},\vec{\lambda}\rangle)^{\mathbf{const}}\cdot e^{\|\lambda\|}$ 个配对的同伦类 $(\Xi\colon \Delta \to \Sigma, \gamma)$，其中 Ξ是满足 $\Xi|_{\mathrm{Surf}(\Delta)} = f$ 和(6.3)的紧映射，而 γ 是 Δ 中的一条简单曲线，满足对于每条线丝 I，均有 $n_I(\gamma) \geqslant n_I$，且 $\ell^\varepsilon_\Xi(\gamma) \leqslant L$。□

现在我们得到，我们要估计的量，也就是满足以下条件的有序对的同伦类数量：$(\Xi\colon \Delta \to \Sigma, \gamma)$，其中 Ξ 是一个紧映射，满足$\Xi|_{\mathrm{Surf}(\Delta)} = f$；$\gamma$ 是 Δ 中的一条简单曲线，且对每条线段 I，都有 $n_I(\gamma) \geqslant n_I$，并且 $\ell^\varepsilon_\Xi(\gamma) \leqslant L$，其上界为

$$\sum_{\lambda\in\mathbb{N}^{\mathbf{wire}},\ \|\lambda\|\leqslant L} \mathbf{const}\cdot(L - \langle\vec{n},\vec{\lambda}\rangle)^{\mathbf{const}}\cdot e^{\|\lambda\|}$$

于是，这个量的上界为积分的值

$$\mathbf{const}\int_{\{\vec{x}\in\mathbb{R}_+^{\mathbf{wire}},\ \langle\vec{n},\vec{x}\rangle\}\leqslant L} (L - \langle\vec{n},\vec{x}\rangle)^{\mathbf{const}}\cdot e^{\|\vec{x}\|}dx$$

现在这就成了一个微积分问题，留给读者验证该积分有如下上界：**const** $\cdot L^{d-1}\cdot e^{n_{\min}^{L}}$ 其中 $n_{\min}=\min_I n_I\geqslant 1$，且 $\overline{d}=|\{I \text{ wire 与 } n_I=n_{\min}\}|$。我们就此完成。□

到目前为止，我们已经知道如何界定带边界曲面的紧映射的同伦类数量。现在，是时候解释我们为什么关心能否做到这一点了。

伪双体。此前，就在引理 5.6 的陈述之前，我们引入了与两个填充相关联的伪双重。让我们稍微扩展一下这个术语：所谓伪双重，我们指的是一对 $(\Theta\colon S\to\Sigma,\ \gamma)$，其中

- $\Theta: S\to\Sigma$ 是一个折叠曲面，S 闭合，
- $\gamma\subset S$，折痕，是一条将 S 分割成两个连通分支的简单曲线，并且
- Θ 将 γ 映射到 Σ中的一条测地线，而其在 γ 补集上的限制 $\Theta|_{S\setminus\gamma}$ 是几何不可压缩的。

如果存在一个同胚 $f\colon S\to S'$，使得 $f(\gamma)$ 与 γ' 同伦，且 $\Theta'\circ f$ 与 Θ 同伦，则两个伪双体 $(\Theta\colon S\to\Sigma,\ \gamma)$ 和 $(\Theta'\colon S'\to\Sigma,\ \gamma')$ 是同伦的。

请注意，这一术语与上一节中 pseudo-double 一词的用法是一致的。

现在回顾一下，我们之前固定了若干满足 (5.2) 的 ε_0，并注意到，如果 $(\Theta\colon S\to\Sigma,\ \gamma)$ 是一个伪双体，那么折痕 γ 由于是分隔的，会与薄部 $S^{\leqslant\varepsilon_0}$ 的每个连通分支 U 相交偶数次 $\iota(\gamma,U)\in 2\mathbb{N}$。事实上，由于根据 ε_0 的选取，我们得到 Θ 将薄部每个连通分支的核心映射为一条同伦平凡曲线；又由于 Θ 在 $S\setminus\gamma$ 上的限制是几何不可压缩的，因此实际上

$$\iota(\gamma,U)\geqslant 2 \text{ for all components } U \text{ of the thin part of } S, \tag{6.4}$$

也就是说，γ 至少两次经过每个这样的 U。

我们的下一个目标是，对于不断增大的 L，界定伪双重的同伦类（$\Theta\colon S\to\Sigma,\ \gamma$）的数量，其中 S 具有给定的拓扑类型，薄部中恰好有 d 个连通分支 U，满足 $\iota(\gamma,\ U)=2$，且 $\ell_S(\gamma)\leqslant L$:

命题 6.2。设 ε_0 如(5.2) 中所述，并假设 S_0 是一个闭可定向曲面。

(1) 对于每个 $d\geqslant 1$，伪双体的同伦类数量至多为 **常数** $\cdot L^{d-1}\cdot e^{\frac{L}{2}}(\Theta\colon S\to\Sigma,\gamma)$，其中 S 与 S_0 同胚，S 的薄部 $S^{\leqslant\varepsilon_0}$ 恰有 d 个连通分支 U，满足$\iota(\gamma,U)=2$，且 γ 的长度为 $\ell_S(\gamma)\leqslant L$。

(2) 至多有$\mathbf{const}\cdot e^{\frac{L}{3}}$个伪双体的同伦类$(\Theta:\ S\to\Sigma,\ \gamma)$其中$S$与$S_0$同胚，不存在满足$\iota(\gamma,\ U)=2$的薄部连通分支$U$，且$\gamma$的长度为$\ell_S(\gamma)\leqslant L$。

回想一下，我们将曲面S的一个装饰$(\mathbb{F},\mathbb{T})$定义为一对对象：其一是由互不相交且互不平行的本质圆柱之并支撑的部分叶状结构$\mathbb{F}$，其二是这些圆柱内部补集的三角剖分$\mathbb{T}$。为了说明这些装饰从何而来，假设S是一个双曲曲面。

- S的ε_0厚部在度量意义下有界，即存在一个三角剖分$\mathbb{T}$，其顶点两两间距至少为$\frac{1}{10}\varepsilon_0$，边长至多为$\frac{1}{3}\varepsilon_0$，且边均为测地线，除非它们包含在$\varepsilon_0$厚部的边界$\partial(S^{\geqslant\varepsilon_0})$内——在这种情况下，它们仅具有常曲率。

  ε_0薄部$S^{\leqslant\varepsilon_0}$的连通分支在度量意义下并无界，但仍具有非常简单的结构：它们是由常曲率圆构成叶状结构的圆柱；这些圆就是与圆柱核心处的测地线距离恒定的曲线。

将这些内容结合起来，也就是厚部的三角剖分$\mathbb{T}$和薄部的叶状结构$\mathbb{F}$，我们得到将称为薄厚装饰$(\mathbb{F},\mathbb{T})$的S——注意，三角剖分$\mathbb{T}$并不唯一，这也是我们使用不定冠词的原因。更重要的是，还要注意，薄部的连通分支数仅由S的拓扑决定，并且三角剖分$\mathbb{T}$中的顶点数由某个取决于所选ε_0以及S的拓扑类型的数所界定。由于我们已经固定了ε_0，因此每个紧曲面S_0都只容许有限多个装饰$(\mathbb{F}_1,\mathbb{T}_1)\dots,(\mathbb{F}_r,\mathbb{T}_r)$，使得如果$S$是一个与$S_0$同胚的双曲曲面，那么存在一个同胚$\sigma\colon S_0\to S$以及某个$i$，使得$(\sigma(\mathbb{F}_i)$ $\sigma(\mathbb{T}_i))$是S的ε_0-薄厚装饰。我们陈述这一事实，以便之后引用：

引理 6.3。对于每个闭曲面S_0，都存在有限多个装饰$(\mathbb{F}_1,\mathbb{T}_1)\dots,(\mathbb{F}_r,\mathbb{T}_r)$，使得对于任意与$S_0$同胚的双曲曲面$S$，都存在$i\in\{1,\dots,r\}$和一个同胚$\sigma\colon S_0\to S$，使得$\sigma(\mathbb{F}_i,\mathbb{T}_i)$是$S$的一个$\varepsilon_0$-薄厚装饰。□

在这些说明之后，我们终于可以开始证明命题 6.2：

命题 *6.2* 的证明。首先证明 (1)，注意到根据引理 6.3，我们只需证明，对于S_0的每个固定装饰$(\mathbb{F},\mathbb{T})$，都有

(*) 伪双的同伦类至多有$\mathbf{const}\cdot L^{d-1}\cdot e^{\frac{L}{2}}$个（$\Theta:\ S\to\Sigma,\gamma$），其中存在一个同胚$\sigma:\ S_0\to S$

使得 $(\sigma(\mathbb{F})\ \sigma(\mathbb{T}))$ 是 S 的 ε_0-薄厚分解的一个装饰，其中 S 的薄部 $S^{\leqslant\varepsilon_0}$ 恰好有 d 个连通分支U，满足 $\iota(\gamma,\ U) = 2$，并且 γ 的长度为 $\ell_S(\gamma) \leqslant L$。

以下假设我们有一个 ε_0-薄厚装饰（$\mathbb{F}$，$\mathbb{T}$），令$\Delta = S_0/\sim_{\mathbb{F}}$ 表示将$\mathbb{F}$ 的每条叶片压缩为一点后从 S 得到的带边界曲面，并令 $\pi\colon S_0 \to \Delta$ 表示相应的商映射。

我们考虑 Δ的原因在于，正如前文所述，根据 ε_0 的选择，叶状结构 $\sigma(\mathbb{F})$ 的所有叶片都由 Θ映射为同伦平凡的曲线。这意味着存在一个映射

$$\Xi : \Delta \to \Sigma$$

将 Δ 的边界线映射为测地线段，并且 $\Theta \circ \sigma$ 与$\Xi \circ \pi$ 通过一个轨迹由**const**所界定的同伦相同。在 $\mathbb{T}$中，边被映射到与长度至多为**const**的测地线路径同伦的路径。相对于顶点进行拉紧后，我们可以假设 Ξ 将 Δ 的三角剖分中的二维单纯形映射为双曲三角形。注意到$\mathbb{T}$ 的边的像的长度界，这意味着 Ξ 在 Surf(Δ) 上的限制是**const**-Lipschitz 的。

这个统一的 Lipschitz 界意味着 $\Xi|_{\mathrm{Surf}(\Delta_0)}$ 只属于有限多个同伦类，并且到任意选定的、属于正确同伦类的代表元的同伦轨迹长度均有界。选取相对于 Δ_0 上某个双曲结构的紧映射作为代表元，我们得到：

事实。 Δ 上存在有限多个双曲结构 $\Delta_1, \dots, \Delta_r$，以及有限多个紧映射 $f_1, \dots, f_r\colon \Delta_i \to \Sigma$，使得对于任意如 **(*)** 中所述的 $\Theta\colon S \to \Sigma$和 $\sigma\colon S_0 \to S$，都存在 $i \in \{1, \dots, r\}$ 及一个紧映射 $\Xi\colon \Delta_i \to \Sigma$，满足 $\Xi|_{\mathrm{Surf}(\Delta_i)} = f_i|_{\mathrm{Surf}(\Delta_i)}$，并且 $\Theta \circ \sigma\colon S_0 \to \Sigma$ 与 $\Xi \circ \pi\colon S_0 \to \Sigma$ 同伦，且该同伦的轨迹长度至多为 **const**。□

延续相同的记号，注意，同伦 $\Theta \circ \sigma$ 和 $\Xi \circ \pi$ 的轨迹上界意味着，当我们比较双曲带边界曲面 S 中测地线 γ 的长度与双曲带边界曲面 Δ_i 中曲线 $\eta = (\pi \circ \sigma^{-1})(\gamma)$ 的长度时，每当 γ 穿过带边界曲面的一个单形，长度至多增加一个加性常数。这意味着长度

- 每当我们穿过薄部的一个分支时，至多增加一个加性量，并且
- 当我们处于厚部时，数量按乘法因子增长。

换句话说：存在某个 R，使得

$$\ell_\Sigma(\Xi(\eta \cap \mathrm{Surf}(\Delta))) \leqslant R \cdot \ell_S(\gamma \cap S^{\geqslant\varepsilon_0})$$
$$\ell_\Sigma(\Xi(\eta \setminus \mathrm{Surf}(\Delta))) \leqslant \sum_{\kappa \in \pi_0(\gamma \cap S^{\leqslant\varepsilon_0})} (\ell_S(\kappa) + R)$$

回想一下， Δ_0 的线 I 对应于 $S^{\leqslant\varepsilon_0}$ 的薄部，并且权重 $n_I(\eta)$ 不过是 η 穿过线 I 的次数，由最后两个不等式可得

$$\frac{1}{R}\cdot\ell_\Xi(\eta\cap\mathrm{Surf}(\Delta))+\sum_{I\in\mathbf{wire}(\Delta_0)}n_I(\eta)\cdot\max\{\ell_\Xi(I)-R,0\}\leqslant\ell_S(\gamma)\tag{6.5}$$

这里出现“max”是因为长度总是非负的。无论如何，注意到使用 (6.2) 中引入的记号，我们可以将 (6.5) 改写为

$$\ell_\Xi^{\frac{1}{R}}(\gamma)\leqslant\ell_S(\gamma)$$

还要注意，由 (6.4) 可得，对于所有 $I\in\mathbf{wire}(\Delta_0)$， $n_I(\eta)\geqslant 2$。这意味着，使用引理 6.1 中的记号，我们可以将命题 6.2 (1) 中的假设重述如下：$\min=2$，且此值恰好取到 $d\geqslant 1$ 次。因此，引理 6.1 表明，由伪双重 $(\_:S\to\Sigma,\gamma)$ 产生的二元组 (Ξ,η) 的同伦类至多有 $\mathbf{const}\cdot L^{d-1}\cdot e^{\frac{L}{2}}$ 个，其中 Θ 如事实中所述，且 $\ell_S(\gamma)\leqslant L$。这进一步意味着， Ξ 的同伦类至多也有同样多种选择。由于 Ξ 的同伦类决定了 Θ 的同伦类，(1) 的证明到此完成。(2) 的证明基本相同，唯一的区别是现在 $\min\geqslant 4$。将此代入上述论证，可得界 $\mathbf{const}\cdot L^{k-1}e^{\frac{L}{4}}$，其中某个 k。这显然是比 $\mathbf{const}\cdot e^{\frac{L}{3}}$ 更强的界，证明至此完成。□

我们辛勤工作的成果。经过这一番努力，我们现在终于可以证明定理 1.4 了。

*定理 1.4 的证明。*设 γ 是一条长度为 $\ell_\Sigma(\gamma)\leqslant L$ 的闭测地线，并且存在两个非同伦的最小亏格填充 $\beta_1:S_1\to\Sigma$ 和 $\beta_2:S_2\to\Sigma$，满足 $\beta_i(\partial S_i)=\gamma$。由命题 5.4 可知，不失一般性，我们可以假设 $\beta_1:S_1\to\Sigma$ 和 $\beta_2:S_2\to\Sigma$ 都是双曲填充。

于是，令 $S=S_i\cup_{\partial S_1=\partial S_2}S_2$ 为将两个曲面 S_1 和 S_2 沿边界粘合所得的双曲曲面，粘合方式使得存在一个折叠曲面 Θ: $S\to\Sigma$，满足 $\Theta|_{S_i}=\beta_i$。再次注意，映射 Θ 将折痕 $\hat{}\gamma=\partial S_1=\partial S_2$ 按测地线方式映到 γ。此外，引理 5.2 表明， Θ 在 $S\setminus\hat{}\gamma$ 上的限制是几何不可压缩的。综合这些结果可知，$(\Theta:S\to\Sigma,\ \hat{}\gamma)$ 是一个伪双。

现在，引理 5.6 结合 β_1 和 β_2 不同伦这一假设，可以推出， S 的 ε_0-薄部中，至多有 $6g-4$ 个连通分支被折痕 $\hat{}\gamma$ 两次穿过。因此，由命题 6.2 可知，$(\Theta:S\to\Sigma,\hat{}\gamma)$ 的同伦类至多有 $\mathbf{const}\cdot L^{6g-5}\cdot e^{\frac{L}{2}}$ 种选择。由于测地线 γ 由 $\Theta(\hat{}\gamma)$ 的同伦类唯一确定，因此我们证明了 γ 至多有 $\mathbf{const}\cdot L^{6g-5}\cdot e^{\frac{L}{2}}$ 种选择，这正是我们所要证明的。□

7. Proof of the main theorem

本节证明引言中的定理 1.1。

定理 1.1. 设 Σ 为闭、连通且定向的双曲曲面，对于 $g \geqslant 1$ 和 $L > 0$，令 $\mathbf{B}g(L)$ 如 (1.3) 中所定义。我们有

$$|\mathbf{B}_g(L)| \sim \frac{2}{12^g \cdot g! \cdot (3g-2)! \cdot \mathrm{vol}(T^1\Sigma)^{2g-1}} \cdot L^{6g-4} \cdot e^{\frac{L}{2}}$$

如 $L \to \infty$。

在我们甚至能够解释定理 1.1 的证明思路之前，需要先回顾什么是带状图，以及它们的一些性质：

带状图。带状图 X 是赋予了循环次序的图：对每个 v，集合 half_v 都带有一个循环次序——带状图有时也称为带状图。每个带状图都带有一个自然构造的加厚邻域 $\mathsf{neigh}(X)$，即 X 的加厚。为具体说明，我们讨论 X 为三价的特殊情形。首先，对每个顶点 v，取一个定向填充六边形 G_v，见图 3。若按照正确的循环次序，将 half_v 中的三个元素标记为 a、b、c，那么我们就按照正确的循环次序，将 G_v 的边界分支标记为 a、ab、b、bc、c、ca。现在，对于每条边 $e \in \mathsf{edge}(X)$，令 v_1、$v_2 \in \mathsf{vert}(X)$ 为两条对应于 e 的半边 $\vec{e}_1 \in \mathsf{half}_{v_1}$ 和$\vec{e}_2 \in \mathsf{half}_{v_2}$ 所依附的两个（可能相同的）顶点，并以反向定向的方式，将 ∂G_{v_1} 的 $\vec{e}_1$ 边与∂G_{v_2} 的 $\vec{e}_2$ 边粘合。对所有边依次进行上述操作，最终得到 X 的加厚邻域 $\mathsf{neigh}(X)$。



图 3。构造 X 的加厚。图中展示了两个定向六边形，分别对应由一条边连接的两个顶点。较浅的线表示这两个六边形的粘合方式。

定义。若三价带状图 X 的亏格 g，且$\mathbf{neigh}(X)$ 与一个亏格为 g、具有一个边界分支的曲面同胚。

定理 1.1 右侧出现的量之一，是亏格为 g 的带状图的数量，或者更确切地说，是按每个此类带状图的自同构数量加权后的数量；其中，两个带状图之间的映射 $F\colon X \to X'$ 是带状图同胚，当且仅当它首先是两个底层图之间的同胚，并且还将

一种胖结构映射为另一种胖结构。总之，对我们来说真正幸运的是，Bacher 和 Vdovina [1] 已经计算出

$$\sum \frac{1}{|\operatorname{Aut}(X)|} = \frac{2}{12^g} \cdot \frac{(6g-5)!}{g! \cdot (3g-3)!}$$

其中求和遍历所有亏格为 g 的带状图同胚类。

注释。 Bacher 和 Vdovina 的结果是以亏格为 g 的闭曲面上的单顶点三角剖分（模去保向同胚）来表述的。下面简要说明如何在这类三角剖分与亏格为 g 的带状图之间相互转换。曲面三角剖分的对偶图是一个三价带状图——其加厚部分就是去掉三角剖分顶点后的曲面。因此，如果三角剖分只有一个顶点，且曲面是亏格为 g 的闭曲面，那么该带状图的亏格为 g。反过来，带状图的加厚部分具有一个自然的弧系（每条边对应一条对偶弧）。将加厚部分的每个边界分支压缩为一个点后，便得到一个闭曲面及其上的一个三角剖分，其顶点数等于边界的连通分支数。因此，如果 X 是一个亏格为 g 的带状图，那么便可得到一个亏格为 g 的曲面上的单顶点三角剖分。

现在令 X 为一个带状图。为具体起见，假设它的亏格为 g。根据构造，我们有一个从 X 到$\mathbf{neigh}(X)$的典范嵌入，其像是一条脊。特别地，存在一个收缩映射

$$\text{spine} : \mathbf{neigh}(X) \to X$$

使得每个顶点的原像是一个三叉形，而 X 中每条边内部的每个点的原像是一条线段。$\partial\mathbf{neigh}(X)$在脊映射下的像沿着 X的每条边经过两次。我们将 X 中的这条参数化曲线称为 ∂X。

注。 注意，反转 X的定向，也就是反转每个顶点处的循环次序，其效果是反转 ∂X的定向。

映射。 我们将把定理 1.1 的证明归结为这样一个事实：我们知道如何计算图的临界实现数，也就是定理 1.3。下面说明基本思路。对于给定的 g ，考虑如下集合

$$\mathbf{X}_g = \left\{ (X,\phi) \,\middle|\, \begin{array}{c} X \text{ is a fat graph of genus } g \text{ and} \\ \phi : X \to \Sigma \text{ is a criticial realization} \\ \text{of the underlying graph} \end{array} \right\} \Big/ \text{equiv}$$

实现的等价类，其中两个实现 $\phi:\ X \to \Sigma$和 $\phi':\ X' \to \Sigma$ 称为等价，若存在一个带状图同胚$\sigma:\ X \to X'$ 使得 $\phi = \phi' \circ \sigma$。

> **我们强调一件非常重要的事：**临界实现 ϕ 对于 $(X,\phi) \in \mathbf{X}_g$ 明确不假定保留胖结构。另一方面，同胚

σ 在等价的定义中则必须保留
胖结构。

注意，如果 $(X,\ \phi)$ 等价于 $(X',\ \phi')$，那么曲线 $\phi(\partial X)$ 和$\phi'(\partial X')$ 彼此自由同伦。特别地，我们有一个良定义的映射

$$\Lambda : \mathbf{X}_g \to \mathbf{C},\ \ (X,\phi) \mapsto \text{ geodesic homotopic to } \phi(\partial X) \tag{7.1}$$

其中，$\mathbf{C}$ 与前文一样，表示 Σ中所有有向测地线的集合。

定理 1.1 的证明的基本思路是，映射 (7.1) 具有以下非正式表述的性质：

(1) Λ 基本上是单射，其像基本上包含于$\mathbf{B}_g$中，(2) Λ基本上满射到$\mathbf{B}_g$上，并且 (3) 通常情况下，测地线 $\Lambda(X,\phi)$ 的长度几乎恰好等于$2\cdot\ell(\phi) - C$，其中 C为某个明确的常数。

让我们先澄清最后一点。假设 $(X,\phi) \in \mathbf{X}_g$ 满足条件，使得 ϕ 对于某个较大的 ℓ_0而言是 ℓ_0-长的。由于曲线 ∂X 恰好沿着每条边 X 经过两次，因此其像 $\phi(\partial X)$由 2**边**(X)条测地线段组成，每条线段的长度至少为 ℓ_0，并且有 $3\cdot$**顶点**(X) 个 $=-6\cdot\chi(X)$ 角，在这些角处形成的角度等于 $\frac{2\pi}{3}$。现在，根据标准的双曲几何计算（或者，如果你愿意，也可以通过极限论证），我们得到：当 ℓ_0 足够大时，在将 $\phi(\partial X)$ 拉紧以得到 $\Lambda(X,\phi)$ 时，在这些角中的每一个处，我们都能节省 $\log\frac{4}{3}$，误差至多为一个依赖于 ℓ_0 的小量。考虑到当 X 的亏格为 g 时，$\chi(X) = 1-2g$，这就是我们已经证明的结论：

引理 7.1。对于每个 $\delta>0$，都存在一个 ℓ_δ，使得

$$\left|\ell_\Sigma(\Lambda(X,\phi)) - \left(2\ell_\Sigma(\phi) - 6\cdot(2g-1)\cdot\log\frac{4}{3}\right)\right| \leqslant \delta$$

对于每个 $(X,\phi) \in \mathbf{X}_g$，满足 ϕ 是 ℓ_δ-长的。 □

注。$\log\frac{4}{3}$ 是怎么来的？实际上，若 $\Delta\subset\mathbb{H}^2$ 是一个顶点为 θ_1,θ_2 和 θ_3、中心为 p 的理想三角形，且 p' 是 p 在一条边（比如说 (θ_1,θ_2)）上的投影，那么 $\log\frac{2}{\sqrt{3}}$ 就是以 θ_1 为中心的布塞曼函数在 p 和 p' 处的取值之差；每当我们经过一个顶点时，基本上都会节省两倍于此的长度（见图 4）。

我们的下一个目标是证明映射 Λ 基本上是到 $\mathbf{B}_g$ 上的双射，但我们应该先明确“基本上”的含义。假设有一个集合 Z，其元素可以是实现、曲线，或任何其他对象，且其元素 $\alpha\in Z$ 的长度 $\ell_\Sigma(\alpha)$ 可以测量；再设 $Z(L) = \{\alpha\in Z$，其中 $\ell_\Sigma(\alpha)\leqslant L\}$。我们将称一个子集

$$W\subset Z \text{ is } \textit{negligible} \text{ in } Z \text{ if } \limsup_{L\to\infty}\frac{|W(L)|}{|Z(L)|} = 0 \tag{7.2}$$

如果环境集合 Z 可以根据上下文确定，那么我们也可以直接说 W 是可忽略的。可忽略集的补集称为泛型。

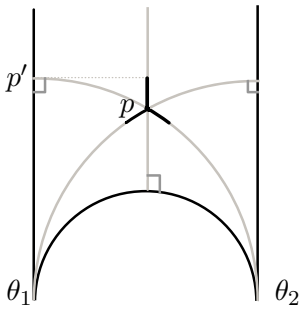

图 4. 顶点为 θ_1、θ_2、$\theta_3 = \infty$ 、中心为 p 的理想三角形 Δ 。
粗体印刷的三叉形的每一条支腿长度均为 $\log \frac{2}{\sqrt{3}}$。

而一般集合中的元素本身也是泛型。例如，由引理 4.3 和引理 7.1 可知，对于所有 δ ，都有

$$\left|\ell_\Sigma(\Lambda(X,\phi)) - \left(2\ell_\Sigma(\phi) - 2\cdot(6g-3)\cdot\log\frac{4}{3}\right)\right| \leqslant \delta$$

对于 $(X,\phi) \in \mathbf{X}_g$ 泛型。

的基本双射性 Λ。 上文中，我们用“基本上”表示某事在忽略可忽略集后成立。先来证明映射 Λ 基本上是单射，且其像包含于$\mathbf{B}_g$ 中，其中$\mathbf{B}_g$ 是亏格为 g 的闭测地线集合。

引理 7.2. 存在一个泛型子集 $W \subset \mathbf{X}_g$ ，使得Λ 在 W 上的限制是单射，且其像包含于 $\mathbf{B}_g$。

证明。 设 ℓ_0 和 C 满足：对于每个长度为 ℓ_0 的 $(X,\phi) \in \mathbf{X}_g$ ，都有 ϕ We have

$$2\cdot\ell_\Sigma(\phi) - C \leqslant \ell_\Sigma(\Lambda(X,\phi)) \leqslant 2\ell_\Sigma(\phi)$$

并令 $\mathbf{X}_{g,\ \ell_0}$ 为这些有序对构成的集合。由引理 4.3 可知，$\mathbf{X}_{g,\ \ell_0}$在$\mathbf{X}_g$中是泛型的。因此，由定理 1.3 可得

$$|\{(X,\phi) \in \mathbf{X}_{g,\ell_0} \text{ with } \ell_\Sigma(\Lambda(X,\phi)) \leqslant L\}| \geqslant \mathbf{const}\cdot L^{6g-4}\cdot e^{\frac{L}{2}} \tag{7.3}$$

注意，现在每个元素 (X,ϕ) of $\mathbf{X}_g$，因而也属于 $\mathbf{X}_{g,\ell_0}$，不仅确定了曲线 $\Lambda(X,\phi)$，还确定了该曲线的一个填充的同伦类，即 $\phi\circ$脊 : **邻域**(X) $\to \Sigma$。现在令 $Z \subset \mathbf{X}_{g,\ell_0}$ 为满足以下条件的有序对 (X,ϕ) 的集合：填充 $\phi\circ$脊 : **邻域**(X) $\to \Sigma$ 不是唯一的，即曲线 $\Lambda(X,\phi)$ 还存在另一个非同伦的亏格 g 填充，并令

$$W = \mathbf{X}_{g,\ell_0} \setminus Z$$

为其补集。由定理 1.4 可知， Z 至多包含$\mathbf{const}\cdot L^{6g-5}\cdot e^{\frac{L}{2}}$ 个元素，因此 W是泛型的。

断言。 如果 ℓ_0 超过某个阈值，我们就有 $\Lambda(W) \subset \mathbf{B}_g$。

证明。 首先，根据构造，曲线 $\Lambda(X,\phi)$ 存在亏格为 g 的填充，其脊为 $\phi\circ x$：**邻域**(X) $\to\Sigma$。假设它存在一个亏格更小的填充。那么，添加把手并将其映射到点后，我们得到 $\Lambda(X,\phi)$ 存在一个非-π_1-单射的亏格为 g 的填充。另一方面，只要 ℓ_0 超过某个阈值，填充 $\phi\circ$的脊 x： **邻域**(X) $\to\Sigma$ 就是 π_1-单射的，因此我们得到 $\Lambda(X,\phi)$ 存在两个非同伦的亏格为g的填充，这与假设 $(X,\phi)\in W$ 矛盾。□

还需证明，将 Λ 限制在一般集合 W 上是单射。

那么，假设我们有 $(X,\ \phi)$，$(X',\ \phi')\in W$，其中 $\Lambda(X,\ \phi)=\Lambda(X',\ \phi')$。由于 $(X,\ \phi)$ 和 $(X',\ \phi')$ 属于 W，我们知道这两个填充

$$\phi\circ\mathrm{spine}_X:\mathbf{neigh}(X)\to\Sigma \text{ and } \phi'\circ\mathrm{spine}_{X'}:\mathbf{neigh}(X')\to\Sigma$$

是同伦的。回想一下，这意味着存在一个同胚

$$\sigma:\mathbf{neigh}(X)\to\mathbf{neigh}(X')$$

使得 $\phi'\circ$ 的脊与 $\phi\circ$ 的脊同伦。由于 X 和 X' 分别是**邻域**(X) 和 **邻域**(X') 的脊，我们推得存在一个同伦等价映射$\bar\sigma$： $X\to X'$，使得 $\phi'\circ\bar\sigma$ 与 ϕ 同伦。现在，由于 $\phi(X)$ 和 $\phi'(X')$ 的长度都基本上是 $\Lambda(X,\ \phi)$ $=\Lambda(X',\ \phi')$ 长度的一半（相差一个常数因子），可见 ϕ 和 ϕ' 满足命题 2.3 中的条件。因此可知存在一个同胚 F： $X'\to X$，以恒定速度映射各条边，且 $F\circ\bar\sigma$ 与恒等映射同伦，并且 $\phi\circ F$ 与 ϕ' 同伦。现在，两者

$$\phi\circ F,\phi':X\to\Sigma$$

都是临界实现，且彼此同伦。因此，由引理 2.2 中的 (1) 可得 $\phi'=\phi\circ F$。最后，注意到 F是 $\bar\sigma$ 的同伦逆，且 $\bar\sigma$ 是由同胚σ： **邻域**(X') $\to$**邻域**(X) 诱导的，因此 F 是一个带状图同胚。这证明了 (X,ϕ) 与 (X',ϕ') 等价，从而 Λ 在 W 上的限制是单射。引理 7.2 证毕。□

注。注意，(7.3) 和引理 7.2 蕴含

$$|\mathbf{B}_g(L)|>\mathbf{const}\cdot L^{6g-4}\cdot e^{\frac{L}{2}} \tag{7.4}$$

对所有足够大的 L 均成立。

我们的下一个目标是证明， Λ的像包含$\mathbf{B}_g$的一个大子集。

引理 7.3。存在$\mathbf{B}_g$ 的一个一般子集，它包含在 Λ的像中。

证明。 令 $Z\subset\mathbf{B}_g$ 为满足以下条件的测地线集合：存在一个双曲亏格 g 填充 β：$S\to\Sigma$，使得 S的双 DS 的 ε_0-薄部至多有 $6g-4$ 个连通分支 U 通过 $\iota(U,\partial S)$ $=2$。它

由命题 6.2 可知， Z 至多有$\mathbf{const}\cdot L^{6g-5}\cdot e^{\frac{L}{2}}$ 个长度为 $\leqslant L$的元素。由 (7.4) 可知， Z 可以忽略，因此其补集 $W=\mathbf{B}_g\setminus Z$ 是泛型的。我们声称， W 包含在 Λ的像中，至少当 ε_0 选得足够小时如此。

事实上，每个 $\gamma\in W$ 都存在一个双曲填充 $\beta\colon S\to\Sigma$ ，使得其双 DS 的ε_0-薄部至少有 $6g-3$ 个连通分支 U，且满足 $\iota(\partial S,U)=2$。由于 DS的亏格为 $2g$，我们知道 $6g-3$实际上是其薄部所能具有的连通分支的最大数量。因此， S 的双 DS 存在一个由极短曲线组成的裤子分解，而且 ∂S 恰好将其中每条曲线切成两段。由此可知， S 有 $6g-3$ 条正交测地线，将 S 切分为由$4g-2$ 个直角六边形组成的并。每个六边形都有 3 条交替边极短。因此，每个六边形都包含一个相当大的紧集，该紧集几乎等距于 $\mathbb{H}^2$中某个理想三角形中心的一个大邻域。将六边形的中心定义为理想三角形中心在此近似等距映射下的像。现在，我们可以将由这些短正交测地线段对 S 所作分解的对偶图表示为 S 的一个测地子图 X ，其顶点位于各六边形的中心，见图 5。

图 X 是 S 的脊，因此它继承了 S 的带状图结构，其邻域为 S 。现在令 $\psi\colon X\to\Sigma$ 为通过将边拉紧而由 β 在 X 上的限制所得到的实现。

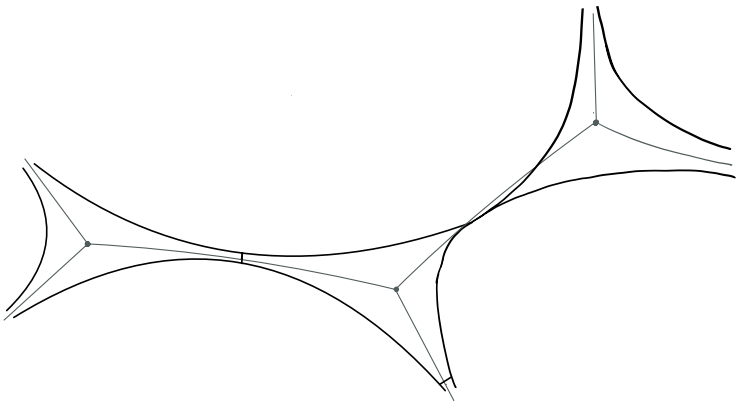

图 5. 从一个定义域可由极短正交测地线切分成六边形的填充中，得到一个近临界实现。

断言。 对于所有 δ，存在 ε，使得若 $\varepsilon_0<\varepsilon$，则实现 $\psi\colon\ X\to\Sigma$是 δ-临界的。

证明。 假设该结论不成立。这意味着，对于某个 δ，存在一个满足 $\varepsilon_0\to 0$ 的反例序列。由于 $\varepsilon_0\to 0$ ，我们得到

六边形的像收敛为一个将测地三角形映射到 Σ的1-Lipschitz映射，但该映射将边界测地线映射为测地线。这样的映射是所讨论三角形的等距嵌入。现在，在一个测地三角形中，从中心出发并指向尖点的测地射线之间的角为$\frac{2\pi}{3}$。这意味着，近似图形中的角度收敛到 $\frac{2\pi}{3}$，这与我们的假设矛盾，因为其中一些角度至少δ 偏离了 $\frac{2\pi}{3}$。我们已经证明了该断言。□

—

因此，由该断言和推论 2.4 可知，只要 ε_0 低于某个阈值，实现 $\psi\colon X \to \Sigma$ 就与临界实现 $\phi\colon X \to \Sigma$同伦。这意味着 $(X,\ \phi)$ 属于 Λ 的定义域，且 $\gamma = \Lambda(X,\ \phi)$。我们已证明，一般集合 $W \subset \mathbf{B}_g$ 包含于 Λ的像中。□

现在我们可以将这一切总结起来了。

定理 1.1 的证明。结合引理 7.1、引理 7.2 和引理 7.3，我们得到：对于所有 $\delta > 0$，存在一个一般子集 $W \subset \mathbf{X}_g$，它在 Λ 下被单射映射到$\mathbf{B}_g$ 的一个一般子集，使得

$$|\ell_\Sigma(\Lambda(X,\phi)) - 2\ell_\Sigma(\phi) + 2\kappa| \leqslant \delta$$

其中

$$\kappa = -3\chi(X)\cdot \log\frac{4}{3} = \log\left(\left(\frac{4}{3}\right)^{6g-3}\right) \tag{7.5}$$

由此可知，对于所有 $\delta > 0$，集合 $\mathbf{B}_g(L)$ 对于 $L \to \infty$至少与 $\mathbf{X}_g(\frac{L}{2}+\kappa-\delta)$ 一样多，且至多与 $\mathbf{X}_g(\frac{L}{2}+\kappa+\delta)$ 一样多。用符号表示，这意味着

$$\left|\mathbf{X}_g\left(\frac{L}{2}+\kappa-\delta\right)\right| \preceq |\mathbf{B}_g(L)| \preceq \left|\mathbf{X}_g\left(\frac{L}{2}+\kappa+\delta\right)\right| \tag{7.6}$$

当 L 足够大时。因此，剩下的就是估计 $\mathbf{X}_g(L)$ 的基数。

引理 7.4。我们有

$$|\mathbf{X}_g(L)| \sim \frac{1}{12^g}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{6g-3}\cdot\frac{1}{g!\cdot(3g-2)!\cdot \mathrm{vol}(T^1\Sigma)^{2g-1}}\cdot L^{6g-4}\cdot e^L$$

如 $L \to \infty$。

证明。由定理 1.3 可知，每个三价图 X 都有

$$|\mathbf{G}^X(L)| \sim \left(\frac{2}{3}\right)^{3\chi(X)}\cdot\frac{\mathrm{vol}(T^1\Sigma)^{\chi(X)}}{(-3\chi(X)-1)!}\cdot L^{-3\chi(X)-1}\cdot e^L$$

长度至多为 L 的 Σ中的临界实现。这意味着，每当 X是亏格为 g 的带状图时，渐近行为表明存在

$$\frac{1}{|\operatorname{Aut}(X)|}\left(\frac{2}{3}\right)^{3\chi(X)}\cdot\frac{\mathrm{vol}(T^1\Sigma)^{\chi(X)}}{(-3\chi(X)-1)!}\cdot L^{-3\chi(X)-1}\cdot e^L$$

许多由（X，ϕ）表示的$\mathbf{X}_g(L)$中的元素，其中某个临界 ϕ： $X \to \Sigma$的长度为 $\ell(\phi) \leqslant L$。对亏格为 g 的带状图所有可能的类型求和后，我们得到

$$|\mathbf{X}_g(L)| \sim \sum_X \frac{1}{|\operatorname{Aut}(X)|} \left(\frac{2}{3}\right)^{3\chi(X)} \cdot \frac{\operatorname{vol}(T^1\Sigma)^{\chi(X)}}{(-3\chi(X)-1)!} \cdot L^{-3\chi(X)-1} \cdot e^L$$

根据前面提到的 Bacher-Vdovina [1] 结果，并考虑到 $\chi(X) = 1-2g$，我们得到

$$|\mathbf{X}_g(L)| \sim \frac{2}{12^g} \cdot \frac{(6g-5)!}{g! \cdot (3g-3)!} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{6g-3} \cdot \frac{\operatorname{vol}(T^1\Sigma)^{1-2g}}{(6g-4)!} \cdot L^{6g-4} \cdot e^L$$

现在该结论可由初等代数推得。 □

现在，由引理 7.4 可知,

$$\left|\mathbf{X}_g\left(\frac{L}{2}\right)\right| \sim \frac{1}{12^g} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{6g-3} \cdot \frac{1}{g! \cdot (3g-2)! \cdot \operatorname{vol}(T^1\Sigma)^{2g-1}} \cdot \frac{L^{6g-4}}{2^{6g-4}} \cdot e^{\frac{L}{2}}.$$

考虑到

$$\left|\mathbf{X}_g\left(\frac{L}{2}+\kappa\right)\right| \sim \left|\mathbf{X}_g\left(\frac{L}{2}\right)\right| \cdot e^{\kappa} = \left|\mathbf{X}_g\left(\frac{L}{2}\right)\right| \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{6g-3}$$

我们得到的是

$$\left|\mathbf{X}_g\left(\frac{L}{2}+\kappa\right)\right| \sim \frac{2}{12^g \cdot g! \cdot (3g-2)! \cdot \operatorname{vol}(T^1\Sigma)^{2g-1}} \cdot L^{6g-4} \cdot e^{\frac{L}{2}}$$

因此由 (7.6) 可得

$$|\mathbf{B}_g(L)| \sim \frac{2}{12^g \cdot g! \cdot (3g-2)! \cdot \operatorname{vol}(T^1\Sigma)^{2g-1}} \cdot L^{6g-4} \cdot e^{\frac{L}{2}}$$

正如我们所要证明的那样。定理 1.1 的证明至此结束。 □

8. Curves bounding immersed surfaces

现在我们转而讨论定理 1.2:

定理 1.2。设 Σ 是一个闭、连通且定向的双曲曲面，对于 $g \geqslant 1$ 和 $L > 0$，令 $\mathbf{B}_g(L)$ 如 (1.3) 中所示。我们有

$$|\{\gamma \in \mathbf{B}_g(L) \text{ bounds immersed surface of genus } g\}| \sim \frac{1}{2^{4g-2}} |\mathbf{B}_g(L)|$$

如 $L \to \infty$。

记为

$$\mathbf{B}_g^{\mathrm{imm}}(L) = \{\gamma \in \mathbf{B}_g(L) \text{ bounds immersed surface of genus } g\}$$

我们想要计数的集合。由定理 1.1 的证明可知,

$$|\mathbf{B}_g^{\mathrm{imm}}(L)| \sim \left|\mathbf{X}_g^{\mathrm{imm}}\left(\frac{L}{2}+\kappa\right)\right|$$

其中 κ 与 (7.5) 中相同，且其中

$$\mathbf{X}_g^{\mathrm{imm}}(L) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \left\{ (X,\phi) \in \mathbf{X}_g(L) \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{the realization } \phi : X \to \Sigma \text{ extends} \\ \text{to an immersion of the thickening} \\ \mathbf{neigh}(X) \text{ of } X \end{array} \right\}.$$

等价地，若每个顶点处的循环次序都与通过 ϕ 从 Σ 拉回的循环次序一致，也就是源自 Σ 定向的循环次序，则 $(X,\phi) \in \mathbf{X}_g$ 属于 $\mathbf{X}_g^{\mathrm{imm}}$。我们可以将带状图的这类实现称为带状实现。用这种说法，我们有：

$$\mathbf{X}_g^{\mathrm{imm}}(L) = \{(X,\phi) \in \mathbf{X}_g(L) \,|\, \phi \text{ is a fat realization of the fat graph } X\}.$$

对于给定的三价带状图 X，令

$$\mathbf{G}_{\mathrm{imm}}^X(L) = \{\phi \in \mathbf{G}^X(L) \,|\, \phi \text{ is a fat realization of } X\}$$

为总长度不超过 L 的 X 的带状临界实现集合。注意，

$$|\mathbf{X}_g^{\mathrm{imm}}(L)| = \sum_X \frac{1}{|\operatorname{Aut}(X)|} |\mathbf{G}_{\mathrm{imm}}^X(L)|.$$

要按照定理 1.1 的证明来完成证明，目前还缺少的是针对 $\mathbf{G}_{\mathrm{imm}}^X$ 的定理 1.3 的一个版本。好，这就给出：

定理 8.1. 设 Σ 是一个闭、连通且定向的双曲曲面。对于每个连通的三价带状图 X，我们有

$$|\mathbf{G}_{\mathrm{imm}}^X(L)| \sim 2^{2\chi(X)} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{3\chi(X)} \cdot \frac{\mathrm{vol}(T^1\Sigma)^{\chi(X)}}{(-3\chi(X)-1)!} \cdot L^{-3\chi(X)-1} \cdot e^L$$

如 $L \to \infty$。

暂且假设定理 8.1，我们由 $\chi(X) = 1-2g$ 得到，并由 Bacher-Vdovina 定理得出，

$$|\mathbf{X}_g^{\mathrm{imm}}(L)| \sim \frac{1}{2^{4g-2}} \cdot \frac{2}{12^g} \cdot \frac{(6g-5)!}{g! \cdot (3g-3)!} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{6g-3} \cdot \frac{\mathrm{vol}(T^1\Sigma)^{1-2g}}{(6g-4)!} \cdot L^{6g-4} \cdot e^L$$

由此可得，与定理 1.1 的证明中一样，因而

$$|\mathbf{B}_g^{\mathrm{imm}}(L)| \sim \frac{1}{2^{4g-2}} \frac{2}{12^g \cdot g! \cdot (3g-2)! \cdot \mathrm{vol}(T^1\Sigma)^{2g-1}} \cdot L^{6g-4} \cdot e^{\frac{L}{2}}$$

定理 1.2 的结论现在可由这一陈述与定理 1.1 结合得出。

剩下要做的就是证明定理 8.1。由于其证明与定理 1.3 的证明基本相同，我们只指出其中的差异。关键在于得到命题 4.2 的带状图版本。简而言之，这个命题的证明思路是：

(1) 我们可以计算边长位于某个盒子内的 X 的 ε-临界实现集合的体积 $\mathrm{vol}(\mathcal{G}_{\varepsilon-\mathrm{crit}}^X(\vec{L},h))$；(2) 我们知道每个连通分支贡献相同的数量，并且知道具体是多少。

因此，令 $\mathcal{G}^X_{\varepsilon-\mathrm{crit}\ -\mathrm{imm}}(\vec{L},h)\subset\mathcal{G}^X_{\varepsilon-\mathrm{crit}}(\vec{L},h)$ 表示盒子中保持胖结构的那些 ε-临界实现。现在回想一下，根据命题 2.6，$\mathcal{G}^X_{\varepsilon-\mathrm{crit}}(\vec{L},h)$ 的连通分支直径很小，由此可推得每个这样的连通分支上诱导的胖结构都是常量。因此，$\mathcal{G}^X_{\varepsilon-\mathrm{crit}\ -\mathrm{imm}}(\vec{L},h)$ 是 $\mathcal{G}^X_{\varepsilon-\mathrm{crit}}(\vec{L},h)$ 的若干连通分支之并。特别地，为了得到命题 4.2 的带状图版本，我们只需能够计算 $\mathrm{vol}(\mathcal{G}^X_{\varepsilon-\mathrm{crit}\ -\mathrm{imm}}(\vec{L},h))$。

现在，在命题 4.2 的证明中，计算 $\mathcal{G}_{\varepsilon-\mathrm{crit}}(\vec{L},\ h)$ 体积的关键在于推论 3.3——提醒读者，该推论的陈述是：对于任意 $\vec{x}\in\Sigma^{\mathbf{vert}\,X}$，我们有

$$|\mathbf{G}^X_{\vec{x},\varepsilon-\mathrm{crit}}(\vec{L},h)|\sim\varepsilon^{4|\chi(X)|}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2\chi(X)}\cdot\pi^{\chi(X)}\cdot\frac{(e^h-1)^{-3\chi(X)}\cdot e^{\|\vec{L}\|}}{\mathrm{vol}(\Sigma)^{-3\chi(X)}}$$

作为 $\min_{e\in\mathbf{edge}(X)}L_e\to\infty$，其中 $\mathbf{G}^X_{\vec{x},\ \varepsilon-\mathrm{crit}}(\vec{L},\ h)$ 是 ε-临界实现 ϕ 的集合：$X\to\Sigma$ 将顶点 v 映射到点 $x_v=\phi(v)$。正如我们所见，如果我们想逐行照搬计算 $\mathcal{G}_{\varepsilon-\mathrm{crit}}(\vec{L},\ h)$ 体积的过程来求 $\mathcal{G}_{\varepsilon-\mathrm{crit}\ -\mathrm{imm}}(\vec{L},\ h)$ 的体积，就需要知道集合 $\mathbf{G}^X_{\vec{x},\ \varepsilon-\mathrm{crit}\ -\mathrm{imm}}(\vec{L},\ h)$ 中元素的个数。该集合由 ε-临界实现 ϕ 组成：$X\to\Sigma$将顶点 v 映射到点 $x_v=\phi(v)$，并保持胖结构。

现在，为了得到 $\mathbf{G}^X_{\vec{x},\varepsilon-\mathrm{crit}}(\vec{L},h)$ 中元素的数量，我们所做的是调用定理 3.2 并计算该集合的体积

$$U^X_{\vec{x},\varepsilon-\mathrm{crit}}\subset\prod_{v\in\mathbf{vert}(X)}\left(\bigoplus_{\vec{e}\in\mathbf{half}_v(X)}T^1_{x_v}\Sigma\right)$$

这些元组 $(v_{\vec{e}})_{\vec{e}\in\mathbf{half}(X)}$ 的集合，其中 $\angle(v_{\vec{e}_1},v_{\vec{e}_2})\notin[\frac{2\pi}{3}-\varepsilon,\frac{2\pi}{3}+\varepsilon]$ 对于所有不同的$\vec{e}_1,\vec{e}_2\in$半(X)，它们都与同一个顶点关联。因此，为了计算 $\mathbf{G}^X_{\vec{x},\ \varepsilon-\mathrm{crit}\,\mathrm{imm}}(\vec{L},h)$ 中元素的数量，我们需要计算该集合的体积

$$U^X_{\vec{x},\varepsilon-\mathrm{crit}\ -\mathrm{imm}}\subset U^X_{\vec{x},\varepsilon-\mathrm{crit}}$$

由满足如下条件的元组组成：对于任意顶点 $v\in\mathbf{vert}(X)$，与其关联的半边的循环次序 v 与相应单位切向量的循环次序一致。根据 $\mathrm{vol}(U_{\vec{x},\varepsilon=\mathrm{crit}})$ 的计算，我们得到

$$\mathrm{vol}(U^X_{\vec{x},\varepsilon-\mathrm{crit}\ -\mathrm{imm}})=\frac{1}{2^{|\,\mathbf{vert}(X)|}}\,\mathrm{vol}(U^X_{\vec{x},\varepsilon-\mathrm{crit}})=2^{2\chi(X)}\cdot\mathrm{vol}(U^X_{\vec{x},\varepsilon-\mathrm{crit}})$$

正如我们刚才讨论的，这意味着

$$|\mathbf{G}^X_{\vec{x},\varepsilon-\mathrm{crit}\ -\mathrm{imm}}(\vec{L},h)|\sim2^{2\chi(X)}\cdot|\mathbf{G}^X_{\vec{x},\varepsilon-\mathrm{crit}}(\vec{L},h)|$$

从而得出av电影

$$\mathrm{vol}(\mathcal{G}^X_{\varepsilon-\mathrm{crit}\ -\mathrm{imm}}(\vec{L},h))\sim2^{2\chi(X)}\cdot\mathrm{vol}(\mathcal{G}^X_{\varepsilon-\mathrm{crit}}(\vec{L},h))$$

因此

$$|\mathbf{G}^X_{\mathrm{imm}}(L)| \sim 2^{2\chi(X)} \cdot |\mathbf{G}^X(L)|.$$

定理 8.1 现在可由定理 1.3 推出。 □

9. Comments

本节讨论我们在何处以及在多大程度上使用了 Σ isaclosed orientable surface 这一假设。

首先，如果将 Σ 替换为紧致的二维轨形 $\mathcal{O} = \Gamma\backslash\mathbb{H}^2$，这里的结果是否仍然成立? 答案是，定理 1.3 仍然成立，证明完全相同。只需对所有步骤都采用等变方式。例如，图 X 在 $\mathcal{O}$ 中的一个实现应当是一个映射 $\tilde{\phi}\colon \tilde{X} \to \mathbb{H}^2$，它从 X 的万有覆盖映到 $\mathbb{H}^2$，并且关于一个同态

$\tilde{\phi}_*\colon \pi_1(X) \to \Gamma$ 是等变的；若两个这样的对 (ϕ, ϕ_*) 和 (ψ, ψ_*) 相差一个 Γ 中的元素，则将它们视为相同。用这些术语重新表述之后，所有内容都能以显而易见的方式推广。例如，图在 $\mathcal{O}$ 中的实现空间 $\mathcal{G}^X$ 现在是一个轨形：将每个实现映到各顶点像的映射 $\mathcal{G}^X \to \mathcal{O}^{\mathbf{vert}\,X}$，是轨形范畴中的一个覆盖。

另一方面，要证明定理 1.1，需要稍微谨慎一些，因为在第 5 节和第 6 节中，我们反复使用了这样一个事实：在 Σ 中，每条足够短的曲线都是同伦平凡的；而如果我们在 $\mathcal{O}$ 中工作，这一结论便不再成立。

如果允许 Σ 具有尖点呢? 在这里，我们再次遇到了第 5 节和第 6 节讨论中的问题，但这一次情况要严重得多。从某种意义上说，第 5 节和第 6 节的结果只是引理 4.1 的推广，而该引理在存在尖点时不再成立：事实上，假设 Σ 是一个带有一个穿孔的环面，而 X 是一个具有两个顶点 x 和 x' 的图（如果愿意，你可以在基本保持我们将要介绍的推理过程不变的情况下，使 X 成为三价图，但这样做可能会稍微掩盖问题），并且该图有 6 条边 f_1, f_2, e_1, e_2, e_3 和 h，使得

- 这些边 f_1, f_2 两端都与 x 相接,
- 边 e_1, e_2, e_3 两端都与 x'相接，并且
- 边 h 从 x 延伸至 x'。

现在固定 Σ中尖点的一个类球邻域，固定一点 $\mathbf{x}_0$，并令 $\mathbf{x}_t$ 为沿着直接指向尖点的射线、距离 $\mathbf{x}_0$ 为 t 的点。现在，若给定一个具有正实系数的向量 $\vec{L} = (F_1, F_2, E_1, E_2, E_3, H)$，则考虑实现 $\phi\colon X \to \Sigma$，满足 $\phi(x) = \mathbf{x}_0$,, 且 $\phi(x') = \mathbf{x}_H$，并且 $\phi(h)$ 等于连接 $\mathbf{x}_0$ 与 $\mathbf{x}_H$、长度为 H 的线段。现在，f_1 和f_2 的像共有 const $e^{F_1+F_2}$ 种选择，但须满足以下限制：对于 $i = 1$, $\phi(f_i)$ 是一条长度至多为 F_i的测地线段。另请注意，以 $\mathbf{x}_H$ 为基点的类球简单闭路长度为 const$\cdot e^{-H}$，而尖点中的测地闭路（基点为

$\mathbf{x}_H$ 且长度为 ℓ ）同伦于长度至多为$\mathbf{const}\cdot e^{\frac{\ell}{2}}$的类球线段。这意味着，若要将 e_i 映射为尖点中长度至多为 E_i的闭路，则至少有$\mathbf{const}\cdot e^{\frac{1}{2}E_i}\cdot e^H$种选择。总而言之，我们至少有

$$\mathbf{const}\cdot e^{F_1+F_2+\frac{1}{2}E_1+\frac{1}{2}E_2+\frac{1}{2}E_3+3H}$$

从 X 到 Σ 的（同伦类的）实现的选择，使得 $\ell(\phi(f_1))\leqslant F_1$、$\ell(\phi(f_2))\leqslant F_2$、$\ell(\phi(e_1))\leqslant E_1$、$\ell(\phi(e_2))\leqslant E_2$ $\ell(\phi(e_3))\leqslant E_3$、$\ell(\phi(H))\leqslant H$。特别地，如果我们令

$$\vec{L}=(F_1,F_2,E_1,E_2,E_3,H)=(n,n,\frac{1}{2}n,\frac{1}{2}n,\frac{1}{2}n,\frac{5}{2}n)$$

我们至少有 $\mathbf{const}\cdot e^{\frac{61}{4}n}$ 个这样的实现，这个数远大于 $\mathbf{const}\,e^{6n}=\mathbf{const}\,e^{\|L\|}$。这证明，若 Σ 不紧致，则引理 4.1 的类比不成立。

总之，如果 Σ 具有有限体积但不紧致，那么我们甚至不知道定理 1.3 是否成立。尽管我们猜测答案是肯定的。

可以 Σ 是不可定向的吗? 如果 Σ 是一个紧致的双曲曲面，但不可定向，那么我们知道定理 1.3 和定理 1.1 都成立：在证明它们时，我们从未用到可定向性。不过，在定理 1.2 的证明中，我们确实用到了：除非 Σ 是定向的，否则谈论其诱导的带状图结构就意义不大。对于环境曲面不可定向时定理 1.2 会如何，我们尚不清楚。

那么更高维的情形呢? 如果我们把 Σ 换成一个维数不为 2 的闭双曲流形，那么定理 1.3 和定理 1.1 应该仍然成立，而且其证明即使不完全相同，思路也应相近。不过，定理 1.2 是否存在有意义的类似结果则不太明朗：至少在 $\dim\geqslant 5$时，曲面的每个映射都可以变形为一个嵌入。

Appendix A. The geometric prime number theorem

我们用于证明定理 1.3 的论证也可以用来重新证明 Huber 的几何素数定理，这正是我们在此处要做的。除了为这一结果提供一个简洁的证明之外，这也有助于读者理解定理 1.3 的证明思路。

几何素数定理 (Huber)。设 Σ 为一个闭的、连通的、可定向的双曲曲面，并设$\mathbf{C}(L)$ 为 Σ 中长度不超过 L 的闭的非平凡有向测地线的集合。我们有

$$|\mathbf{C}(L)|\sim\frac{e^L}{L}$$

为 $L\to\infty$。

注记。 在第 9 节中，我们讨论了将主要结果推广到 Σ 为有限体积曲面或轨形的情形时可能面临的一些困难。在证明测地线素数定理时，这些问题实际上都不会出现。事实上，如果将 Σ 替换为任意有限面积轨形 $\Gamma\backslash\mathbb{H}^2$，我们在此给出的证明只需进行极少的修改即可成立。我们决定仅讨论紧致情形，以避免掩盖论证的结构。

如果所有闭测地线都是本原的，那么 Huber 定理的证明会更简洁、更漂亮。幸运的是，这几乎是事实。事实上，例如由 Coornaert 和 Knieper 的工作可知 [6]存在某个$C > 0$ ，使得

$$\frac{1}{C} \cdot \frac{e^L}{L} \leqslant |\mathbf{C}(L)| \leqslant C \cdot e^L \tag{A.1}$$

对所有 $L > 0$ 都成立。我们强调，Coornaert-Knieper 的论证相当粗略：他们实际证明的是关于群在 Gromov 双曲空间上等距、离散且余紧作用的一个命题。

对我们而言，关键在于 (A.1) 意味着长度不超过L 的大多数测地线都是本原的。事实上，每条长度不超过 L 的非本原测地线，都是一条长度不超过 $\frac{1}{2}L$的本原测地线的重数倍。另一方面，若 s_0 是$\overline{\Sigma}$ 的最短闭测地线，那么由任意给定测地线的重数倍构成的、长度不超过 L 的测地线至多有 $\frac{L}{s_0}$ 条。这两点观察结合 (A.1) 的右侧，意味着长度不超过L的非本原测地线至多有 $\frac{L}{s_0}\mathbf{C}(\frac{1}{2}L) \leqslant \frac{C}{s_0} \cdot L \cdot e^{L/2}$条。考虑到 (A.1) 的左侧，我们便可推得，正如上文所述，大多数测地线都是本原的。

引理 A.1. 固定 h ，并令 $\mathbf{C}(L, h)$ 和 $\mathbf{P}(L, h)$ 分别表示长度属于 $[L, L + h]$ 的所有测地线和所有本原测地线的集合。则有

$$|\mathbf{C}(L, h)| \sim |\mathbf{P}(L, h)|$$

如 $L \to \infty$。 □

完成这段准备性说明后，我们开始讨论正题。令 $\mathcal{L}$ 为 Σ中所有测地线环路构成的空间，并考虑映射 $\Pi\colon \mathcal{L} \to \Sigma$，它将每个环路映射到其基点。与更一般的图的情形一样，映射Π是一个覆盖，这意味着使用Π拉回双曲度量后，我们可以将 $\mathcal{L}$ 视为一个双曲曲面。还要注意， $\mathcal{L}$ 的连通分支集合与环路的自由同伦类集合一致。因此，对于每条闭测地线 γ ，都有一个连通分支 $\mathcal{L}^\gamma$。

现在，给定 $\varepsilon > 0$ small，令 $\mathcal{L}_\varepsilon$ 为所有角亏不超过 ε 的测地线环的集合，也就是说，该集合由初始速度向量与终止速度向量以无向角相交且夹角属于 $[0, \varepsilon]$ 的测地线环构成。对于 $L > 0$，令 $\mathcal{L}_\varepsilon(L,\ L+h)$ 表示 $\mathcal{L}_\varepsilon$ 中长度介于 L 和 $L + h$ 之间的元素。相应地，令 $\mathcal{L}^\gamma_\varepsilon(L,\ L + h) = \mathcal{L}^\gamma \cap \mathcal{L}_\varepsilon(L,\ L + h)$。

我们来确立 $\mathcal{L}_\varepsilon(L,\ L+h)$ 和 $\mathcal{L}_\varepsilon^\gamma(L,\ L+h)$ 的一些基本性质：

引理 A.2. 固定 $h>0$ 和 $\varepsilon>0$。我们有*AV*在线

$$\mathrm{vol}(\mathcal{L}_\varepsilon(L,L+h))\sim\varepsilon\cdot(e^{L+h}-e^L)\ \textit{as}\ L\to\infty.$$

此外，存在一个函数 $C(\varepsilon)$，满足 $\lim_{\varepsilon\to0}C(\varepsilon)=1$，使得对于每条足够长的闭测地线 γ，我们有

(1) $\mathcal{L}_\varepsilon^\gamma(L,L+h)=\varnothing$ *unless* $\ell(\gamma)\in[L-\varepsilon,L+h]$,
(2) $\mathrm{vol}(\mathcal{L}_\varepsilon^\gamma(L,L+h))\leqslant C(\varepsilon)\cdot\varepsilon\cdot L$, *and*
(3) $C(\varepsilon)^{-1}\leqslant\frac{1}{\varepsilon\cdot L}\mathrm{vol}(\mathcal{L}_\gamma^\varepsilon(L,L+h))\leqslant C(\varepsilon)$ *if* γ *is primitive and* $\ell(\gamma)\in[L,L+h-\varepsilon]$.

证明。 如同命题 4.2的证明中一样，我们利用覆盖 $\Pi:\mathcal{L}\to\Sigma$ 来计算 $\mathcal{L}_\varepsilon(L,\ L+h)$ 的体积：

$$\mathrm{vol}(\mathcal{L}_\varepsilon(L,L+h))=\int_\Sigma|\Pi^{-1}(x)\cap\mathcal{L}_\varepsilon(L,L+h)|dx$$

现在，$\Pi^{-1}(x)\cap\mathcal{L}_\varepsilon(L,L+h)$ 无非是从 x到 x的长度处于 $[L,L+h]$之间、且初速度和末速度之间的角至多为 ε的测地线弧数量。固定 x 后，初速度和末速度的可接受对集合是 $T_x^1\Sigma\times T_x^1\Sigma$ 的一个子集，其体积为 $4\pi\varepsilon$。因此，由定理 3.2 可得

$$|\Pi^{-1}(x)\cap\mathcal{L}_\varepsilon(L,L+h)|\sim\varepsilon\cdot\frac{e^{L+h}-e^L}{\mathrm{vol}(\Sigma)}$$

由于我们假设 Σ 是闭合的，因此该结论对 x一致，也就是说，我们得到

$$\mathrm{vol}(\mathcal{L}_\varepsilon(L,L+h))\sim\int_\Sigma\varepsilon\cdot\frac{e^{L+h}-e^L}{\mathrm{vol}(\Sigma)}=\varepsilon\cdot(e^{L+h}-e^L)$$

我们已经证明了第一个论断。

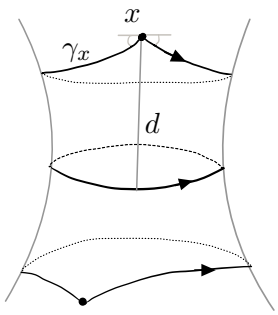

图 6. 圆柱 $\langle\gamma\rangle\backslash\mathbb{H}^2$。每个标记的角度都是 γ_x 的角亏的一半。

为了证明其余部分，让我们对 $\mathcal{L}^\gamma$ 给出具体描述。嗯，写作$\gamma = \eta^k$，其中 η 是某个本原，并且 $k \geqslant 1$ 考虑覆盖

$$\pi_\eta : \langle \eta \rangle \backslash \mathbb{H}^2 \to \Sigma$$

对应于 η 的 Σ。现在，对于每个 $x \in \langle \eta \rangle \backslash \mathbb{H}^2$，都存在唯一一个以 x 为基点、与绕 η 运行 k 次自由同伦的双曲闭路 γ_x。基本观察是，映射

$$\langle \eta \rangle \backslash \mathbb{H}^2 \to \mathcal{L}^\gamma,\ x \mapsto \pi_\eta \circ \gamma_x$$

是 $\langle \eta \rangle \backslash \mathbb{H}^2$ 与连通分支 $\mathcal{L}^\gamma$ 之间的等距映射。

现在，若将 d 记为 x 与中心测地线之间在 $\langle \eta \rangle \backslash \mathbb{H}^2$ 中的距离（见图 6），则由 [3] 最后一页中的公式 2.3.1(vi) 可得：

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot (\text{angle defect of } \gamma_x) &\sim \tan\left(\frac{1}{2} \cdot (\text{angle defect of } \gamma_x)\right) \\ &= \sinh(d) \cdot \tanh\left(\frac{\ell(\gamma)}{2}\right) \sim d \end{aligned}$$

其中，当 $\ell(\gamma)$ 较大且角亏较小时，渐近关系成立。现在，结论 (1)、(2) 和 (3) 可由初等方法直接得到。□

有了这两个引理，我们就可以完成几何素数定理的证明。注意，只需证明对于 h 为正且固定的情形，我们有

$$|\mathbf{C}(L,h)| \sim \frac{e^{L+h} - e^L}{L} \tag{A.2}$$

如 $L \to \infty$。这里 $\mathbf{C}(L,\ h)$ 与引理 A.1 中的定义相同。

总之，采用两个引理中的记号，对于较小的正数 ε 和较大的 L，有

$$\begin{aligned} |\mathbf{P}(L,h)| &\overset{\text{A.2(3)}}{\preceq} \frac{C(\varepsilon)}{\varepsilon \cdot L} \operatorname{vol}\left(\cup_{\gamma \in \mathbf{P}(L,h)} \mathcal{L}^\gamma_\varepsilon(L, L+h+\varepsilon)\right) \\ &\leqslant \frac{C(\varepsilon)}{\varepsilon \cdot L} \operatorname{vol}(\mathcal{L}_\varepsilon(L, L+h+\varepsilon)) \\ &\overset{\text{A.2}}{\sim} C(\varepsilon) \cdot \frac{e^{L+h+\varepsilon} - e^L}{L} \end{aligned}$$

另一方面，我们还知道

$$\begin{aligned} |\mathbf{C}(L,h)| &\overset{\text{A.2(2)}}{\geqslant} \frac{1}{C(\varepsilon) \cdot \varepsilon \cdot L} \operatorname{vol}\left(\cup_{\gamma \in \mathbf{C}(L,h)} \mathcal{L}_\varepsilon(L,h)\right) \\ &= \frac{1}{C(\varepsilon) \cdot \varepsilon \cdot L} \operatorname{vol}(\mathcal{L}_\varepsilon(L,h)) \\ &\overset{\text{A.2}}{\sim} \frac{1}{C(\varepsilon)} \frac{e^{L+h} - e^L}{L} \end{aligned}$$

由于这对所有 ε 都成立，并且当 $\varepsilon \to 0$ 时， $C(\varepsilon)$ 趋近于 1，因此我们有

$$|\mathbf{P}(L,h)| \preceq \frac{e^{L+h}-e^{L}}{L} \preceq |\mathbf{C}(L,h)|$$

现在，引理 A.1 推出 (A.2)，事情就大功告成了。

References

[1] R. Bacher 和 A. Vdovina， *Counting 1-vertex triangulations of oriented surfaces*，《离散数学》246（2002）。[2] B. Bekka 和 M. Mayer， *Ergodic theory and topological dynamics of group actions on homogeneous spaces* 269 ，伦敦数学学会讲义系列，。剑桥大学出版社，（2000）。[3] P. Buser， *Geometry and spectra of compact Riemann surfaces*，《数学进展》，106。Birkh¨auser，（1992）[4] D. Calegari， *scl*，MSJ 回忆录，20。日本数学会，（2009）。[5] R. Canary、D. Epstein 和 P. Green，Thurston 笔记的笔记，载于 *Analytical and geometric aspects of hyperbolic space (Coventry/Durham, 1984)* ，伦敦数学学会讲义系列，111，剑桥大学出版社，（1987）。[6] M. Coornaert 和 G. Knieper， *Growth of conjugacy classes in Gromov hyperbolic groups* 12， 2002 ，GAFA（）。[7] J. Delsarte， *Sur le gitter fuchsien*，《巴黎科学院院刊》214（1942），147–179。[8] V. Erlandsson 和 J. Souto， *Mirzakhani's curve counting and geodesic currents*，《数学进展》，345，Birkh¨auser（2002）。[9] D. Hejhal， *The Selberg Trace Formula for* $\mathrm{SL}_2\,\mathbb{R}$， *Vol. II*，《数学讲义》，第 1001 卷，Springer-Verlag，柏林-海德堡（1983）。[10] H. Huber， *Zur analytischen Theorie hyperbolischen Raumformen und Bewegungsgruppen* 138 1959 ，《数学年鉴》（）。[11] A. Katsuda 和 T. Sunada， *Homology and closed geodesics in a compact Riemann surface* 110 1988 ，《美国数学杂志》（）。[12] G. Margulis， *On some aspects of the theory of Anosov systems. With a survey by Richard Sharp: Periodic orbits of hyperbolic flows*，《数学专著丛书》。Springer-Verlag，（2004）。[13] M. Mirzakhani， *Growth of the number of simple closed geodesics on hyperbolic surfaces* 2 168 2008 ，《数学年鉴》（）（）[14] M. Mirzakhani， *Counting mapping class group orbits on hyperbolic surfaces*，arXiv:1601.03342（2016）。[15] P. Park， *Conjugacy growth of commutators*，《代数杂志》526（2019）。[16] R. Phillips 和 P. Sarnak， *Geodesics in homology classes*，《杜克数学杂志》55（1987）。[17] T. Roblin， *Ergodicité et équidistribution en courbure négative*，M´em. Soc. Math. Fr. 第 95 号（2003）。[18] W. Thurston， *Geometry and topology of 3-manifolds*，http://library.msri.org/books/gt3m/，讲义（1980）。

School of Mathematics, University of Bristol, Bristol BS8 1UG, UK 和 Department of Mathematics and Statistics, UiT The Arctic University of Norway
Email address: v.erlandsson@bristol.ac.uk

UNIV RENNES, CNRS, IRMAR - UMR 6625, F-35000 RENNES, FRANCE
Email address: jsoutoc@gmail.com