arXiv:2304.10285v1 [math.LO] 20 Apr 2023

一种真正无类型的知者悖论解决方案

Paul Gorbow

1 引言

在 [9], 卡普兰和蒙塔古表明，某些关于一阶知识理论的直观公理（将知识形式化为谓词）联合起来是不一致的。蒙塔古在 [13]中也确立了类似结果。这两种论证都依赖自指公式。本文提出一种一致的一阶理论来解决这些知者悖论，其主要特点如下：

- 该理论通过忠实地形式化真实性原则（即知识要求真理），并同时使用知识谓词和真谓词，解决了知者悖论。
- 该理论真正无类型。也就是说，它无类型不仅是指使用一个适用于语言中所有句子的知识谓词（包括出现该谓词的句子），还指其公理对语言中的所有句子进行量化，从而支持对无类型知识断言进行全面推理。
- 共同知识谓词可以在系统中使用自指来定义。这一事实，加上该系统真正无类型的性质以及一种基于 L¨ob 定理的技术，使其能够支持对无类型共同知识归属的全面推理（无需任何直接涉及共同知识的公理）。

设 L 为皮亚诺算术（PA）的语言，设 L_{K} 为添加了一个表示知识的谓词 K 的 L。利用哥德尔将句法引入算术的方法（参见 [3]）， L_{K} 中的任意公式ϕ 都由 L 中的一个项 $\ulcorner\phi\urcorner$ 表示。假设 ϕ 是一个句子。那么，“主体知道ϕ”、“我们知道 ϕ”或类似表述，都可以形式化为 $\mathrm{K}(\ulcorner\phi\urcorner)$。此外， L 中存在一个公式 $\mathrm{Pr}_{\mathsf{PA}}$，使得“$\phi$ 在 PA 中是可证的”可以表示为 $\mathrm{Pr}_{\mathsf{PA}}(\ulcorner\phi\urcorner)$。在此背景下，卡普兰和蒙塔古的上述结果可以表述如下：

定理（卡普兰与蒙塔古，1960年）。将皮亚诺算术扩展并加入以下公理模式的 L_{K} 理论是不一致的，其中 ϕ、ψ 遍历语言 L 中的句子：

$$\mathrm{K}(\ulcorner\phi\urcorner) \to \phi \qquad (\mathsf{UT}^{\mathrm{K}})$$
$$\mathrm{K}(\ulcorner\mathrm{K}(\ulcorner\phi\urcorner) \to \phi\urcorner) \qquad (\mathrm{K}[\mathsf{UT}^{\mathrm{K}}])$$
$$\mathrm{Pr}_{\mathsf{PA}}(\ulcorner\phi \to \psi\urcorner) \wedge \mathrm{K}(\ulcorner\phi\urcorner) \to \mathrm{K}(\ulcorner\psi\urcorner) \qquad (\mathsf{I}^{\mathrm{K}})$$

定理（蒙塔古，1963年）。将皮亚诺算术扩展为包含以下公理模式和演绎规则的 L_{K}-理论是不一致的，其中 ϕ 遍历语言 L 中的句子：

$$\mathrm{K}(\ulcorner\phi\urcorner) \to \phi \qquad (\mathsf{UT}^{\mathrm{K}})$$
$$\vdash \phi \implies \vdash \mathrm{K}(\ulcorner\phi\urcorner) \qquad (\mathsf{NEC}^{\mathrm{K}})$$

UT^{K} 形式化了经典哲学真实性原则（即知识要求真理），其名称代表 K 的无类型 T 公理（因为它是模态逻辑中 T 公理的无类型类比）；$\mathrm{NEC}^{\mathrm{K}}$ 形式化了系统中的演绎是生成知识的正当方法，其名称代表 K 的必然化；I^{K} 形式化了知识在皮亚诺算术中对演绎封闭，并源自 [9]中的记号。请注意，只需对 $\mathrm{UT}^{\mathrm{K}}]$ 应用一次 $\mathrm{NEC}^{\mathrm{K}}$，即可推出 $\mathrm{K}[\mathrm{UT}^{\mathrm{K}}]$。这些定理的证明依赖于哥德尔的不动点引理。前一个定理使用句子 κ，使得 $\kappa \leftrightarrow \mathrm{K}(\neg\kappa)$；而后一个定理使用句子 δ，使得$\delta \leftrightarrow \neg\mathrm{K}(\delta)$。

第 2 节规定了全文所用的记号，并说明了语言以及所讨论理论的基本假 - tio设。它还简要解释了哥德尔如何实现句法。

在第 3 节中，我列出若干适用于知识与真理系统的目标特征——也可以说是一份设计规范——其中既包括上述主要特征，也包括其他一些值得期待的特征。随后，我介绍一阶公理系统 KT（知识与真理系统），并证明它具备所有这些特征。具体而言，KT 将真实性形式化为一条公理，表达为：对于语言中的所有句子 s，$\mathrm{K}(s) \rightarrow \mathrm{T}(s)$，其中 T 是一个真谓词。由于它还有其他公理和规则，可由此推导出 $\mathrm{NEC}^{\mathrm{K}}$ 和 I^{K}，且它是一致的（下文将予以说明），因此它是知者悖论的一种解决方案。

出于构建真正无类型系统的考虑，一个关键的设计选择是将 KT 公理化为 Friedman–Sheard 真理系统（FS，见 [1]）的扩展。Halbach 在 [4] 证明，FS 可由 Gupta 和 Herzberger 的修正语义（见 [2, 6, 7]）局部建模：FS 的每个有限片段，都能由算术标准模型的某种扩展满足，而该扩展是通过对真谓词的解释进行有限次此类修订而得到的。在 [16], , Stern 将修正语义发展为适用于必然性的一个版本；在该版本中，必然性被视为一阶谓词，而非模态算子，并且这一版本推广了通常的可能世界语义。在第 5 节中，我运用 Stern 的方法发展多主体知识的修正语义。这一方法推广了 Hintikka 在 [8], 提出的可能世界方法，因此与该传统相契合。KT 的一致性可作为定理 14 的推论得出；该定理表明，KT 的某个扩展可由这种修正语义局部建模。

KT 有一个自指公理 $\mathrm{R}_{\mathrm{DCB}}$，以稳健的方式断言知识具有演绎闭包；它被定义为一个 G¨ odel 不动点。除了直观上的吸引力之外，这条公理的价值还在于，它既与修正语义学相协调，也与一种基于 L¨ob 定理的有趣证明技巧相协调。后者使我能够证明，KT 支持对定义为 G¨ odel 不动点的共同知识进行便捷推理（且无需假设普通知识之外的任何原则）。具体而言，我证明了定义的共同知识谓词在某些精确意义下是唯一的，并且具有演绎闭包。这些结果在第 4 节中阐述。

总而言之，贯穿全文的主题是以真正无类型的方式解决知者悖论；具体创新包括对真实性的忠实形式化、将修正语义学推广到多主体知识、将演绎闭包稳健地形式化为 G¨odel 不动点并证明其可在修正语义学中得到验证，以及将共同知识定义为 G¨odel 不动点，并证明该定义的谓词是唯一的且具有演绎闭包。

2 形式化记法与预备知识

设 L 是一种一阶语言。L 系统定义为一个递归可枚举的 L 句子集，其中包含一阶逻辑的（希尔伯特式）公理化，并且在肯定前件式下封闭

。每个系统都以公理和演绎规则的列表给出，例如上文的演绎规则 $\mathrm{NEC}^{\mathrm{K}}$ 。请注意，如果一个系统 S 带有某条演绎规则，例如 $\mathrm{NEC}^{\mathrm{K}}$，并扩展为系统 S'，那么 $\mathrm{NEC}^{\mathrm{K}}$ 可以在 S' 中应用于 S' 的任何定理。另一方面，$\mathrm{NEC}^{\mathrm{K}}$ 通常不能在 S 中应用于 S' 的定理；换言之，它不能应用于尚未解除的假设，因此通常不能用于推导 $\phi \to \mathrm{K}(\ulcorner\phi\urcorner)$，其中 ϕ 是一个句子。对于任意元数 $n \in \mathbb{N}$，我采用以下记法：

变量集 $=_{\mathrm{df}}$ 变量的集合。$L^n =_{\mathrm{df}}$ 恰有 n 个自由变量的 L公式集合。$L^n[v_1, \cdots, v_n] =_{\mathrm{df}}$ 恰以 v_1、$\cdots$、v_n 为自由变量的 L公式集合。原子公式$^n_L =_{\mathrm{df}}$ 恰有 n 个自由变量的原子 L公式集合。项$^n_L =_{\mathrm{df}}$ 恰有 n 个自由变量的 L项集合。

省略上标 n 时，表示包含所有元数，例如，项集$_L$ 是所有L项的集合。替换函数记为 $\mathrm{sbt} : L \times \mathrm{Term}_{\mathcal{L}} \times \mathrm{Var} \to \mathcal{L}$，它将 $\langle \phi、t、v \rangle$ 映射为这样一个公式：将 ϕ 中的每个变量 v 都替换为项 t。

令 $\mathcal{L}$ 为一阶语言，其常用符号包括算术符号 0、S、$+$、$\cdot$,一个一元谓词符号 U，一个一元函数符号 u，一个一元谓词符号 K^1, 、一个二元关系符号 K^2, 、一个一元谓词符号 T，以及一个一元谓词符号主体集。若元数可由上下文确定，则 K^1 和 K^2 均记作 K。由算术符号生成的 $\mathcal{L}$ 子语言记作 $\mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$；由 0、$S$、、$\times$、$U$、$u$和主体集生成的子语言记作 $\mathcal{L}_{_}$。本文中的所有系统均表述为 $\mathcal{L}$中的皮亚诺算术（PA）或其某个子语言的扩展。算术的标准 $\mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$模型记作 $\mathbb{N}$。

K(x, y)旨在表示“主体 x 知道句子 y”。K(y)旨在表示“我们知道 y”之类的意思。T(y)旨在表示“y 为真”。Ag(x)旨在表示“x 是一个主体”。借助算术中的编码方法，符号 U、u 被用作通用关系符号和函数符号，以确保一般性，使所考察的系统能够无缝扩展到适用于任何递归可枚举语言。[1]

众所周知，哥德尔于 [3] 展示了如何在算术中实现句法资源。下面介绍这一机制的一些记号和基本性质：对于任意 $n \in \mathbb{N}$，num(n)（或$\underline{n}$）表示项 $S^n(0) \in$ 。令 $t \in$ 项$_{\mathcal{L}}$ 和 $\phi \in \mathcal{L}$。哥德尔引述 gq(t)（或 $\ulcorner t \urcorner$）和 gq(ϕ)（或 $\ulcorner \phi \urcorner$）分别表示在算术中代表 t 和 ϕ的数词。例如，若 $\phi \in \mathcal{L}^0$，则K(x,$\ulcorner \phi \urcorner$)表示“x 知道‘ϕ’”。与之密切相关的是 t 和 ϕ的哥德尔编码gc(t)、gc(ϕ)；它们是在标准模型中分别解释gq(t)、gq(ϕ)的数。

为了方便运用哥德尔的工具，本文讨论的系统均被表述为基础系统 Base 的扩展。出于句法目的，罗宾逊算术（Q）足以作为基础系统。但由于归纳证明十分自然，我要求 Base 能证明 PA($\mathcal{L}$) 的所有定理，并将其公理化为 PA，其中归纳模式扩展至 $\mathcal{L}$。我还要求 Base 包含关于哥德尔工具所涉及的各种表示的公理，下面将对此作出说明：

令 $\phi \in \mathcal{L}^n$，令 $R(x_1, \cdots, x_n)$ 为定义在 $\mathbb{N}$ 上的关系，并令 S 为一个 $\mathcal{L}$-系统。若对所有 a_1、$\cdots$、$a_n \in \mathbb{N}$，ϕ 在 S 中表示 R，则

$$R(a_1, \cdots, a_n) \iff S \vdash \phi(\underline{a_1}, \cdots, \underline{a_n}).$$

[1]在算术语境中，若对每个 n，$k \in \mathbb{N}$ R^n_k 是一个 n 元关系符号，那么每个$R^n_k(x_1, \cdots, x_n)$ 都可以解释为 $U(\langle S^n(0)\ S^k(0)\ x_1, \cdots, x_n \rangle)$。更准确地说，后者是$\exists y\big(U(y) \wedge \phi(S^n(0)\ S^k(0)\ x_1, \cdots, x_n, y)\big)$ 的简写，其中 $\phi(S^n(0)\ S^k(0)\ x_1, \cdots, x_n, y))$ 表示 y 对 n 元组 $\langle S^n(0)\ S^k(0)\ x_1, \cdots, x_n \rangle$ 进行编码。

函数的表示也以类似方式定义。我们假定基础系统配备了各种函数符号和关系符号，用以表示各种在语法上相关的函数和关系。形式上，这些符号通过上述的 U 和 u 实现，并通过基础系统的公理断言每个此类符号所表示的关系或函数。这些表示用相关关系或函数名称下方加点的形式表示。例如，$\dot{\mathcal{L}}^0$ 表示 $\mathcal{L}^0$ 的表示，而 $\dot{\wedge}$ 表示一个从 $\mathcal{L}\times\mathcal{L}$ 到 $\mathcal{L}$ 的函数，它将两个公式映射为它们的合取。用于返回任意闭合 $\mathcal{L}_{\mathsf{PA}}$-项数值的求值函数记作 $\mathsf{ev}:\mathrm{Term}^0_{\mathcal{L}_{\mathsf{PA}}}\to\mathbb{N}$。其表示 $\mathsf{ev}.(x)$ 也记作 x°。

由于基础系统 $\vdash$ 皮亚诺算术，基础系统中可用 G¨odel–Carnap 不动点引理，从而便于自指的形式化。更确切地说，对于任意 $\phi(x_1,\cdots,x_{n+1})\in\mathcal{L}^{n+1}$，都存在一个公式$\theta(x_1,\cdots,x_n)\in\mathcal{L}^n$，使得

$$\mathsf{Base}\vdash\forall x_1,\cdots,x_n\big(\theta(x_1,\cdots,x_n)\leftrightarrow\phi(x_1,\cdots,x_n,\ulcorner\theta\urcorner)\big).$$

G¨odel 机制使我们能够形式化关于知识的陈述，例如每个主体的知识都在肯定前件式下封闭这一陈述：

$$\forall\alpha\forall\phi\forall\psi\Big(\big(\mathrm{Ag}(\alpha)\wedge\dot{\mathcal{L}}^0(\phi)\wedge\dot{\mathcal{L}}^0(\psi)\big)\to\big(\mathrm{K}(\alpha,\phi\dot{\to}\psi)\to(\mathrm{K}(\alpha,\phi)\to\mathrm{K}(\alpha,\psi))\big)\Big)$$

为了使这类陈述更易读，对于任何含一个自由变量的公式 ϕ，以及任何公式 ψ，我引入以下缩写：

$$\begin{aligned}\forall x\in\phi\,\big(\psi(x)\big)\ &\text{abbreviates}\ \forall x\big(\phi(x)\to\psi(x)\big)\\ \exists x\in\phi\,\big(\psi(x)\big)\ &\text{abbreviates}\ \exists x\big(\phi(x)\wedge\psi(x)\big)\\ \forall x_1,\cdots x_n\psi\ &\text{abbreviates}\ \forall x_1\cdots\forall x_n\psi\\ \exists x_1,\cdots x_n\psi\ &\text{abbreviates}\ \exists x_1\cdots\exists x_n\psi\end{aligned}$$

Th这些缩写也可以组合使用。例如，上面的句子可以写成如下形式 ：

$$\forall\alpha\in\mathrm{Ag}\,\forall\phi,\psi\in\dot{\mathcal{L}}^0\,\big(\mathrm{K}(\alpha,\phi\dot{\to}\psi)\to(\mathrm{K}(\alpha,\phi)\to\mathrm{K}(\alpha,\psi))\big)$$

3 知识与真理系统

本节介绍并阐述了知识与真理的 $\mathcal{L}$-系统 KT，旨在解决知者悖论。实现这一目标有许多可能的方式，因此，退一步思考整个系统应当具备哪些特征会很有帮助。

目标特征。我认为以下特征尤为重要：

1. 该系统通过在真正无类型的框架中，一致地结合对真实性、演绎闭包和必然化这些哲学原则的自然形式化，解决了知者悖论。动机：在具备自然语言自指能力的环境中，证明我们可以安全地运用知识这一直观概念进行推理，具有根本性的哲学意义。下文具体的目标特征 2–6 涵盖了这一目标特征的各个组成部分。2. 该系统是真正无类型的，即支持对任意 $\mathcal{L}$-公式（包括自指公式）的知识断言进行推理。动机：Kripke 在[10], 中给出了关于自指合理性的详细论证，例如：

[哥德尔] 还表明，初等句法可以在数论中解释。通过这种方式，哥德尔使自指句子的合理性不再存疑；他证明了这些句子的合理性与算术本身一样无可争辩。

此外，自指相当有效地增强了语言的表达能力；事实上，本文利用自指来形式化演绎闭包并定义共同知识。

3. 该系统忠实地形式化了真实性原则。动机：在经典的知识概念中，一项基本要求是，某事若要被知晓，就必须为真。

4. 该系统支持知识的必然化（$\mathrm{NEC}^{\mathrm{K}}$）。
动机：$\mathrm{NEC}^{\mathrm{K}}$ 形式化了这一自然假设：主体知道自己的公理，并且从这些公理出发进行演绎推理，是生成知识的正当方法。这一原则并不意味着该系统能够证明一个内部量化断言，即系统中所有可证的内容都是已知的（假设 $\neg \mathrm{K}(\ulcorner \bot \urcorner)$可推导出来，那么这样的断言就会与G¨odel的第二不完备定理相矛盾）。它仅仅形式化了这样一条原则：在系统中推导出的任何定理都会作为知识传递给所有主体。尽管这或许可以被视为一种理想化，但如果$\mathrm{NEC}^{\mathrm{K}}$与其他动机充分的原则不一致，那么这种做法在方法论上是不可接受的。

5. 该系统为真理和知识都证明了自然的演绎闭包原则。动机：考虑卡普兰和蒙塔古悖论中的 I^{K} ，它蕴含一个内部量化断言：皮亚诺算术的每个定理都为人所知。尽管假定所有这些定理都为真是自然的，但自然语言中的知识概念很难支持“它们都为人所知”这一主张。即便如此，仍有理由将演绎闭包的知识纳入目标特征：为了解决这些悖论，必须证明这一原则是一致的。此外，即使不认为知识具有演绎闭包性，由知识取演绎闭包所得到的概念仍具有重要意义，因为它可作为一种逼近知识的极限理想化，并提供与逻辑的有益联系。

6. 该系统具有充分依据的语义学。
动机：语义学表明该系统是一致的，同时也让我们深入理解公理的含义，以及该系统公理化的真理观和知识观。

7. 该系统支持对多个主体进行推理，这些主体对句法有足够的共同知识。

动机：不同主体可能拥有不同的知识。但为了合理地比较他们的知识，可以假设他们对句法都有足够的知识，例如，他们都知道“$\ulcorner \phi \wedge \psi \urcorner$ 是 $\ulcorner \phi \urcorner$ 和 $\ulcorner \psi \urcorner$的合取”。

8. 对于任意句子 $\phi \in \mathcal{L}$，该系统证明 ϕ 当且仅当它证明 $\mathrm{T}(\ulcorner \phi \urcorner)$。
动机：在相关文献中，这类系统称为对称的。这一条件确保真理的形式化含义明确，具体来说：在系统 S 中形式化真理时，有一个特殊考量需要注意：对于任意 $\phi \in \mathcal{L}$，如果 $S \vdash \phi$ ，那么 ϕ 自然被视为真（例如，外在为真）；而如果 $S \vdash \mathrm{T}(\ulcorner \phi \urcorner)$，那么 ϕ 也被视为真（例如，内在为真）。对称性由

以下演绎规则给出：

$$\vdash \phi \implies \vdash \mathrm{T}(\ulcorner \phi \urcorner) \qquad (\mathsf{NEC}^{\mathrm{T}})$$

$$\vdash \phi \impliedby \vdash \mathrm{T}(\ulcorner \phi \urcorner) \qquad (\mathsf{CONEC}^{\mathrm{T}})$$

请注意，对称性可视为对以下塔斯基双条件式模式的弱化，其中 ϕ 的取值范围是 $\mathcal{L}$中的句子：

$$\mathrm{T}(\ulcorner \phi \urcorner) \leftrightarrow \phi \qquad (\mathsf{TB})$$

根据众所周知的说谎者悖论，这个模式在皮亚诺算术上是不一致的。

9. 该系统证明了真理双条件式的一种在哲学上令人满意的限制，并解释了这些实例为何成立。

   动机：鉴于真理双条件式有许多自然实例，理想情况下，该系统应从动机充分的公理出发，证明真理双条件式的一种在哲学上令人满意的限制，从而也解释这些实例为何成立。[2]

10. 该系统与受哲学应用启发的知识补充公理相容。动机：根据个人的哲学观点或目的，人们可能希望采用此类补充公理。

11. 该系统定义了共同知识，并支持对共同知识进行推理，却没有将任何直接处理共同知识的原则形式化。动机：这样的系统在理论上更为简洁，因为它用知识来解释共同知识，从而确立了无需单独处理共同知识。

为满足目标特征，我将系统 KT（知识与真理，公理化见图3.3）设计为 FS（Friedman–Sheard 真理系统，公理化见图3.2）和 DCB（演绎闭包信念，公理化见图3.1）的扩展。FS 最初发表于 [1], ，而这里给出的公理化方案取自 [4]。关于 FS 核心结果的完整阐述见 [5, 第 14]章。系统 UCT（无类型组合真理）是在 FS 的基础上移除演绎规则 $\mathsf{NEC}^{\mathrm{T}}$ 和 $\mathsf{CONEC}^{\mathrm{T}}$得到的。DCB 是本文的一项创新，旨在成为一个具有独立意义的重要系统，为多个主体的演绎闭包信念提供一种基础而稳健的形式化刻画。根据将 DCB 视为独立系统还是 KT 的子系统，K 分别被视为信念关系或知识关系。

我接下来将展示 KT 如何分别满足目标特征 1–11，并解释 KT 的公理。

1. 此 Target 特性已包含在 Target 特性 2–6 中。

2. 在允许语言中存在自指的同时，抑制自指在悖论中所起作用的一种常见做法，是引入一套类型规则。例如，可以引入符号 T_i 和 K_i 的层级，适用于所有 $i < \omega$；并对每个 T_i、K_i 制定公理，使其只适用于不包含 T_j、K_j （对所有 $j \geq i$）的公式。然而，这很难做到。

[2] McGee 在 [12] 中的一项观察表明，对于每个 $\mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$句子 ψ，都存在 $\mathrm{T}(\ulcorner \phi \urcorner) \leftrightarrow \phi$ 的一个实例 θ，使得 Base $\vdash \psi \leftrightarrow \theta$。因此，鉴于 G¨odel 的不完备性定理，我们不能指望找到一种公理化体系，能够证明 $\mathrm{T}(\ulcorner \phi \urcorner) \leftrightarrow \phi$ 的每个真实例；正如任何算术的公理化体系都无法证明每个真算术句子一样。

系统 DCB

DCB 通过以下公理扩展基础系统：

$$\exists \alpha\ (\text{主体集}(\alpha)) \qquad \text{（非平凡性）}$$

$$\forall \phi \in \mathcal{L}.^{\,0}\ (\mathrm{K}^1(\phi) \leftrightarrow \forall \alpha \in \text{主体集}\ \mathrm{K}^2(\alpha, \phi)) \qquad (\mathrm{K}^1\text{-}\mathrm{K}^2)$$

$$\forall \alpha \in \text{主体集}\ \forall \phi, \psi \in \mathcal{L}.^{\,0}\ \Big((\mathrm{K}(\alpha, \phi) \wedge \mathrm{K}(\alpha, \phi \rightarrow .\ \psi)) \rightarrow \mathrm{K}(\alpha, \psi)\Big) \qquad (\mathrm{UK}^{\mathrm{K}})$$

$$\forall \alpha \in \text{主体集}\ \forall \phi \in \mathcal{L}.^{\,0}\ (\mathrm{Pr}_{\mathrm{DCB}}(\phi) \rightarrow \mathrm{K}(\alpha, \phi)) \qquad (\mathrm{R}_{\mathrm{DCB}})$$

图 3.1：DCB 公理

FS 系统

FS 在基础系统的基础上扩展了以下公理和规则：

FS 公理

$$\forall t_1, \cdots, t_n \in \text{项}.^{\,0}_{\mathcal{L}.\,\mathsf{PA}}\ \Big(\mathrm{T}\big(R_{\circ}\ \ (t_1,\ \cdots,\ t_n)\ \ R(t_1^{\circ}, \cdots, t_n^{\circ})\big),\ \text{对于每个}\ R(\vec{x}) \in \mathrm{Atom}^n_{\mathcal{L}_\circ}\ \Big) \leftrightarrow \qquad (\mathrm{UCT}^{\mathrm{Atom}})$$

$$\forall \phi \in \mathcal{L}.^{\,0}\ (\mathrm{T}(\neg .\ \phi) \leftrightarrow \neg \mathrm{T}(\phi)) \qquad (\mathrm{UCT}^{\neg})$$

$$\forall \phi, \psi \in \mathcal{L}.^{\,0}\ (\mathrm{T}(\phi \rightarrow .\ \psi) \leftrightarrow (\mathrm{T}(\phi) \rightarrow \mathrm{T}(\psi))) \qquad (\mathrm{UCT}^{\rightarrow})$$

$$\forall \phi, \psi \in \mathcal{L}.^{\,0}\ (\mathrm{T}(\phi \wedge .\ \psi) \leftrightarrow (\mathrm{T}(\phi) \wedge \mathrm{T}(\psi))) \qquad (\mathrm{UCT}^{\wedge})$$

$$\forall \phi, \psi \in \mathcal{L}.^{\,0}\ (\mathrm{T}(\phi \vee .\ \psi) \leftrightarrow (\mathrm{T}(\phi) \vee \mathrm{T}(\psi))) \qquad (\mathrm{UCT}^{\vee})$$

$$\forall v \in \text{变量集}_{\circ}\quad \forall \phi \in \mathcal{L}.^{\,1}[v]\ \Big(\mathrm{T}(\forall .\ v\phi) \leftrightarrow \forall t \in \text{项}_{\circ}\ ^{0}_{\mathcal{L}_{\circ}}\ \big(\mathrm{T}(\mathrm{sbt}.\ (\phi, t, v))\big)\Big) \qquad (\mathrm{UCT}^{\forall})$$

$$\forall v \in \text{变量集}_{\circ}\quad \forall \phi \in \mathcal{L}.^{\,1}[v]\ \Big(\mathrm{T}(\exists .\ v\phi) \leftrightarrow \exists t \in \text{项}_{\circ}\ ^{0}_{\mathcal{L}_{\circ}}\ \big(\mathrm{T}(\mathrm{sbt}.\ (\phi, t, v))\big)\Big) \qquad (\mathrm{UCT}^{\exists})$$

FS 的规则

$$\vdash \phi \implies \vdash \mathrm{T}(\ulcorner \phi \urcorner),\ \text{对每个}\ \phi \in \mathcal{L}^0\text{】【}_{\circ} \qquad (\mathrm{NEC}^{\mathrm{T}})$$

$$\vdash \phi \impliedby \vdash \mathrm{T}(\ulcorner \phi \urcorner),\ \text{对每个}\ \phi \in \mathcal{L}^0_{\circ} \qquad (\mathrm{CONEC}^{\mathrm{T}})$$

图 3.2：FS的公理和规则

KT 系统

KT 是 DCB 和 FS 的扩展，包含以下公理和规则：

KT公理

$$\forall \alpha \in \text{主体集}\ \forall \phi \in \mathcal{L}_{\text{。}}^{0}\ (\mathrm{K}(\alpha, \phi) \rightarrow \mathrm{T}(\phi)) \tag{V}$$

KT规则

$$\vdash \phi \implies \vdash \forall \alpha \in \text{主体集}\ \mathrm{K}(\alpha, \ulcorner \phi \urcorner),\ \text{对每个}\ \phi \in \mathcal{L}^{0}\text{。} \tag{NEC$^{\mathrm{K}}$}$$

图3.3：KT的公理和规则

补充公理

$$\forall \alpha \in \text{主体集}\ \forall v \in \text{变量集。}\quad \forall \phi \in \mathcal{L}\text{。}\ {}^{1}[v]\left((\forall t \in \text{项。}\ {}_{\mathcal{L}\text{。}\ \text{皮亚诺算术}}^{0}\mathrm{K}(\alpha, \mathrm{sbt}.(\phi, t, v))) \rightarrow \mathrm{K}(\alpha, \forall .\ v\phi)\right) \tag{UBF$^{\mathrm{K}}$}$$

$$\forall \alpha \in \text{主体集}\ \forall \phi \in \mathcal{L}.\ {}^{0}\left(\mathrm{K}(\alpha, \mathrm{T}.(\mathrm{gq}.(\phi))) \leftrightarrow \mathrm{T}(\mathrm{K}.(\mathrm{num}.(\alpha)\text{·}\mathrm{gq}.(\phi)))\right) \tag{IA}$$

$$\forall \alpha \in \text{主体集}\ \forall \phi \in \mathcal{L}\text{。}\ {}^{0}\left(\mathrm{K}(\alpha,\ \mathrm{T}\text{。}\ (\mathrm{gq}.(\phi))) \rightarrow \mathrm{K}(\alpha,\ \mathrm{K}\text{。}\ (\mathrm{num}.(\alpha)\text{·}\mathrm{gq}.(\phi)))\right) \tag{在$^{+}$中}$$

$$\forall \alpha \in \text{主体集}\ \forall \phi \in \mathcal{L}\text{。}\ {}^{0}\left(\neg\mathrm{K}(\alpha,\ \mathrm{T}\text{。}\ (\mathrm{gq}.(\phi))) \rightarrow \mathrm{K}(\alpha,\ \neg\text{。}\ \mathrm{K}\text{。}\ (\mathrm{num}.(\alpha)\text{·}\mathrm{gq}.(\phi)))\right) \tag{在$^{-}$中}$$

图3.4：补充公理

从哲学上看，这一动机也很重要；而这种做法会妨碍对有用的自指公式（例如定义的共同知识谓词）进行推理。因此，为满足目标特征 2，该系统被设计为真正无类型的系统。具体而言，所有相关公理都对 $\mathcal{L}.^0$ （或 $\mathcal{L}.^1$）进行全称量化。

3. KT 的公理 V 是对真实性原则直接而忠实的形式化，它为知识关系和真谓词都采用了形式符号。

4. KT 具有规则 NEC^{K}。

5. KT 的公理 UK^{K} 断言，知识在肯定前件式下封闭。容易看出，这条公理与规则 NEC^{K}一起保证：对于任意 ϕ、$\psi \in \mathcal{L}$，若 $\text{KT} \vdash \text{K}(\ulcorner\phi\urcorner)$ 且 $\text{KT} \vdash \phi \to \psi$，则 $\text{KT} \vdash \text{K}(\ulcorner\psi\urcorner)$。因此，从这个意义上说，KT 将这样一种直觉形式化了：知识在任何经由外部量化、且由 KT 认可的推理下都是封闭的。此外，本文创新性地提出了针对 DCB 的反思公理 R_{DCB}，它提供了额外的内部量化演绎闭包。具体而言，很容易看出，它蕴含了卡普兰和蒙塔古悖论中所假定的图式 I^{K}。R_{DCB} 以稳健的方式断言，K 是基本可证性谓词 Pr_{DCB} 在演绎闭包下的扩展。这种稳健性源于 R_{DCB} 本身是系统 DCB 的一条公理，而它指称的正是 DCB 的可证性谓词。因此，R_{DCB} 实际上形式化了一个自指句子，其存在性由 G¨odel 不动点引理保证。请注意，不能通过将 $\forall\phi \in \mathcal{L}^0.\ \big(\text{Pr}_{\text{KT}}(\phi) \to \text{K}(\phi)\big)$ 代入 R_{DCB}来重新表述 KT，因为根据 V 和真理公理，这将推出 $\neg\text{Pr}_{\text{KT}}(\bot)$，从而与 G¨odel 第二不完备定理矛盾。总之，UK^{K}、R_{DCB} 和 NEC^{K} 确保 KT 以强意义满足目标特征 5。

6. FS 符合目标特征 6，这一点由修正语义体现，见 [5, 第 14 章1]。Stern 在 [16] 中将其推广到了模态逻辑。在第 5 节中，我调整 Stern 的方法，以获得多主体知识的修正语义。特别是，定理 14 证明了 $\text{KT} + \text{UBF} + \text{交互公理} + \text{In}^+ + \text{In}^-$ 可以在修正语义中得到验证。关键步骤是引理 12 和 13，它们证明了 DCB（尤其是公理 R_{DCB}）可以在修正语义中得到验证。

7. 这些公理针对二元知识关系 $\text{K}(\alpha, \phi)$ 的一般情形表述，该关系表示 α 知道 ϕ。此外，根据 R_{DCB}，KT 证明每个主体都知道 PA 中可证的句法定理。

8. FS 具有规则 NEC^{T} 和 CONEC^{T}。

9. FS 的子系统 UCT 是对 [17] 中塔斯基真理组合语义定义进行自然的非类型化公理化。因此，它将关于真理如何关联原子公式、逻辑联结词和量词的、在哲学上依据充分的假设形式化。正如目标特征 8 中所解释的，FS 的其余规则 NEC^{T} 和 CONEC^{T} 也有充分的哲学依据。根据 [5, 推论 14，24], FS 证明了一类在哲学上令人满意的 TB 实例。非正式地说，这类实例是 $\text{T}(\ulcorner\phi\urcorner) \leftrightarrow \phi$ 的实例，其中 ϕ 大致可类型化，即它与一种规范对应关系相对应：对应于在语言中加入真谓词类型化层级 $\text{T}_0, \text{T}_1, \cdots$.[3] 后所得语言中的一个句子。由于 FS 的公理在哲学上依据充分，这一结果也解释了这些 TB 实例为何成立。若加入补充公理 IA，这一结果可扩展到许多含有 K 的公式。对此类扩展结果作出精确的一般性陈述并给出证明，需要相当大的技术性迂回，超出了本文的范围。不过，一个有用的引理可以方便地陈述并证明：

[3]详见 [5, 第 14] 章。

这一结果需要相当大的技术性迂回，超出了本文的范围。不过，可以方便地陈述并证明一个有用的引理：

引理 1. 设 $\phi \in \mathcal{L}^0$，并设 S 是 KT $+$交互公理（允许 NEC$^{\mathrm{K}}$）的扩展。如果$S \vdash \mathrm{T}(\ulcorner\phi\urcorner) \leftrightarrow \phi$，那么

$$S \vdash \forall\alpha \in \mathrm{Ag}\left(\mathrm{T}\left(\ulcorner\mathrm{K}(\mathrm{nu\dot{m}}(\alpha), \ulcorner\phi\urcorner)\urcorner\right) \leftrightarrow \mathrm{K}\left(\alpha, \ulcorner\phi\urcorner\right)\right).$$

证明。我们在 KT $+$ 交互公理 中工作。假设 $\mathrm{T}(\ulcorner\phi\urcorner) \leftrightarrow \phi$。根据 NEC$^{\mathrm{K}}$，我们有 $\forall\alpha \in$主体集 $\mathrm{K}(\alpha, \ulcorner\mathrm{T}(\ulcorner\phi\urcorner) \leftrightarrow \phi\urcorner)$。因此根据 UK$^{\mathrm{K}}$，我们有 $\forall\alpha \in$主体集 $\left(\mathrm{K}(\alpha, \ulcorner\mathrm{T}(\ulcorner\phi\urcorner)\urcorner) \leftrightarrow \mathrm{K}(\alpha, \ulcorner\phi\urcorner)\right)$。现在根据交互公理，我们得到 $\forall\alpha \in$主体集 $\left(\mathrm{T}(\ulcorner\mathrm{K}(\mathrm{num.}(\alpha)\ \ulcorner\phi\urcorner)\urcorner) \leftrightarrow \mathrm{K}(\alpha, \ulcorner\phi\urcorner)\right)$。 □

特别是，如果 KT $+$ IA 的一个扩展 S 证明了 TB 关于一个 $\mathcal{L}$-句子ϕ 的实例，并证明某个 $\mathcal{L}$-项 t 满足 Ag(t)，那么它就证明了 TB 关于句子 $\mathrm{K}(t, \ulcorner\phi\urcorner)$ 的实例。

10. 根据推论 15，图3.4中的补充公理与 KT 联合一致。这些公理与形式认识论有关，但我认为它们比 KT公理更具争议。公理 UBF（无类型巴坎公式（UBF））断言：只要对所有 $\mathcal{L}_{\mathrm{PA}}$-项 t，句子 $\phi(t)$ 都是已知的，那么 $\forall x\, \phi(x)$ 也是已知的。公理 IA（交互公理）断言：某事物被知为真，当且仅当它确实被知道。公理 In^{+} （正内省）断言：凡是被知为真的事物，都被知道是已知的。公理 In^{-} （负内省）断言：凡是不被知为真的事物，都被知道是不被知道的。这些公理对于信念也很自然。由于 KT 满足目标特征9的方式，KT $+$ IA $+$ In^{+} 也证明了类似的正内省原则：对于一大类句子 A，如果 A 是已知的，那么 A 就被知道是已知的（负内省也类似）。然而，根据命题 10，KT 与这一断言的一个实例不一致，其中 A 是来自蒙塔古悖论的句子 δ。

考虑在 KT 中加入以下公理所得到的系统（但将 NEC$^{\mathrm{K}}$ 限制为仅适用于 KT 中的证明），其中 s 和 a 是常量：$s = \ulcorner\underline{0} = \underline{0}\urcorner$，Ag($a$)，$\neg$K($a, \ulcorner s = \ulcorner\underline{0} = \underline{0}\urcorner\urcorner$) 和 $\neg$K($a, \ulcorner$T(s)$\urcorner$)。（这形式化了这样一种可能情形：主体 a不知道“s 是‘$0 = 0$’”，因而也不知道“s 为真”。）在这个系统中推理，注意到 K(a, s)，这是由 NEC$^{\mathrm{K}}$ （以及相同项替换）得到的；而 $\mathrm{T}\left(\ulcorner\right.$K($a, s$)$\left.\urcorner\right)$则由 NEC$^{\mathrm{T}}$得到。此外，由 V、NEC$^{\mathrm{K}}$、UK$^{\mathrm{K}}$和 $\neg$K($a, \ulcorner$T(s)$\urcorner$)，我们可得 $\neg\mathrm{K}\left(a, \ulcorner\right.$K($a, s$)$\left.\urcorner\right)$。这个例子既反驳了交互公理，也反驳了“凡是已知的，都知道自己已知”这一原则。尽管如此，在假定所有主体都知道系统中关于句法的每个定理的前提下，交互公理仍是一个相当合理的公理（在这个反例中，主体 a 缺乏关于句子 s 所指为何的知识）；否则，就需要以某种方式对其加以限制。我对 In^{+} 和 In^{-} 的表述方式使它们与此例相容。请注意，正向内省的另一种形式化方式 $\forall\alpha \in \mathrm{Ag}\, \forall\phi \in \mathcal{L}.^{\,0}\left(\mathrm{T}(\mathrm{K.}\ (\mathrm{num.}\ (\alpha)^\frown \mathrm{gq.}\ (\phi))) \rightarrow \mathrm{K}(\alpha, \mathrm{K.}\ (\mathrm{num.}\ (\alpha)^\frown \mathrm{gq.}\ (\phi)))\right)$ 与此例不相容。

11. 在第 4 节中，我展示了 DCB 如何满足目标特征11。$\mathrm{R}_{\mathrm{DCB}}$ 的稳健自指公式在这些结果中发挥了关键作用，因为它使一种基于 L¨ob 定理的证明方法成为可能。关于 DCB，我的主要结果是：DCB 证明了所定义的共同信念/知识谓词在某种意义上是唯一的，并且它们具有与 K 类似的

演绎闭包性质。至此，关于 KT 具备目标特征1–11的论证便告完成。

DCB 的公理 K^1-K^2 确保 $\mathrm{K}^1(y)$ 表示所有主体都相信/知道 y。最后请注意，由于 $\mathrm{Pr}_{\mathsf{DCB}}$ 表示 DCB 的可证性谓词，公理 $\mathrm{R}_{\mathsf{DCB}}$ 蕴含 DCB 接受演绎规则 $\mathrm{NEC}^{\mathrm{K}}$。

4 DCB 促进关于共同信念/知识的推理

在本节中，我将展示 DCB 如何自指地定义共同信念/知识，并支持对其进行便捷推理。这些证明采用了一种基于 L¨ob 定理的技术。

设 $A(x)$ 是一个仅含 x 个自由变量的 $\mathcal{L}$-公式。我将 $\mathrm{CK}_A(y)$（读作满足 A 的主体的共同信念/知识）记作一个仅含 y 个自由变量的 $\mathcal{L}$-公式，使得

$$\mathsf{DCB} \vdash \forall u \in \dot{\mathcal{L}}^0 \Big[\mathrm{CK}_A(u) \leftrightarrow \forall x \in \mathrm{Ag}\Big(A(x) \to \big[\mathrm{K}(x,u) \wedge \mathrm{K}\big(x, \dot{\mathrm{sbt}}(\ulcorner \mathrm{CK}_A \urcorner, \dot{\mathrm{gq}}(u), \ulcorner y \urcorner)\big)\big]\Big)\Big]. \tag{CKE}$$

我将其称为共同信念/知识等价；它由 G¨odel–Carnap 不动点引理推出。将 CKE 缩写如下会很方便：

$$\mathsf{DCB} \vdash \forall u \in \dot{\mathcal{L}}^0 \left[\mathrm{CK}_A(u) \leftrightarrow \Psi_A(u, \ulcorner \mathrm{CK}_A \urcorner)\right],$$

其中 $\Psi_A(u,v)$ 是公式

$$\forall x \in \mathrm{Ag}\Big(A(x) \to \big[\mathrm{K}(x,u) \wedge \mathrm{K}\big(x, \dot{\mathrm{sbt}}(v, \dot{\mathrm{gq}}(u), \ulcorner y \urcorner)\big)\big]\Big).$$

本节的结果与 Smory´nski [15, 第4]章中关于自指的结果有关。它们采用相同的技巧，利用 [14] 中的 L¨ob 定理得以证明：

定理 2（L¨ob）。设 S 是一个扩展 PA 的（递归可枚举）系统，ϕ 是其语言中的一个句子。若 $S \vdash \mathrm{Pr}_S(\ulcorner \phi \urcorner) \to \phi$，则 $S \vdash \phi$。

定理 3。设 $A(x)$ $\theta(y)$ $\theta'(y)$ 是 $\mathcal{L}$ 公式，使得

$$\mathsf{DCB} \vdash \forall u \in \dot{\mathcal{L}}^0 \left(\theta(u) \to \Psi_A(u, \ulcorner \theta \urcorner)\right),$$
$$\mathsf{DCB} \vdash \forall u \in \dot{\mathcal{L}}^0 \left(\theta'(u) \leftarrow \Psi_A(u, \ulcorner \theta' \urcorner)\right).$$

那么 $\mathsf{DCB} \vdash \forall u \in \mathcal{L}^0$。 $\big(\theta(u) \to \theta'(u)\big)$.

证明。我们先证明 DCB 可以证明

$$\mathrm{Pr}_{\mathsf{DCB}}\Big(\ulcorner \forall y \in \dot{\mathcal{L}}^0 \left(\theta(y) \to \theta'(y)\right) \urcorner\Big) \to$$
$$\forall u \in \dot{\mathcal{L}}^0 \left(\Psi_A(u, \ulcorner \theta \urcorner) \to \Psi_A(u, \ulcorner \theta' \urcorner)\right). \tag{†}$$

由 $\mathrm{Pr}_{\mathsf{DCB}}\Big(\ulcorner \forall y \in \mathcal{L}^0$。 $\big(\theta(y) \to \theta'(y)\big) \urcorner\Big)$，以及 $\mathrm{Pr}_{\mathsf{DCB}}$ 内部的全称实例化，

$$\forall u \in \dot{\mathcal{L}}^0 \Big(\mathrm{Pr}_{\mathsf{DCB}}\big(\dot{\mathrm{sbt}}(\ulcorner \theta(y) \to \theta'(y) \urcorner, \dot{\mathrm{gq}}(u), \ulcorner y \urcorner)\big)\Big).$$

[4]对于任意句子 $\phi \in \mathcal{L}$，$\mathsf{DCB} \vdash \phi \Longrightarrow \mathsf{DCB} \vdash \mathrm{Pr}_{\mathsf{DCB}}(\ulcorner \phi \urcorner) \Longrightarrow \mathsf{DCB} \vdash \forall \alpha \in$ 主体集 $\big(\mathrm{K}(\alpha, \ulcorner \phi \urcorner)\big)$。

展开代换，并将 $\mathsf{R}_{\mathsf{DCB}}$ 应用于此处，我们得到

$$\forall u \in \dot{\mathcal{L}}^0 \, \forall x \in \mathrm{Ag} \left(\mathrm{K}\big(x, \dot{\mathrm{sbt}}(\ulcorner \theta \urcorner, \dot{\mathrm{gq}}(u), \ulcorner y \urcorner) \dot{\to} \dot{\mathrm{sbt}}(\ulcorner \theta' \urcorner, \dot{\mathrm{gq}}(u), \ulcorner y \urcorner)\big)\right).$$

现在通过 UK^{K},

$$\forall u \in \dot{\mathcal{L}}^0 \, \forall x \in \mathrm{Ag} \left(\mathrm{K}\big(x, \dot{\mathrm{sbt}}(\ulcorner \theta \urcorner, \dot{\mathrm{gq}}(u), \ulcorner y \urcorner]\big) \to \mathrm{K}\big(x, \dot{\mathrm{sbt}}(\ulcorner \theta' \urcorner, \dot{\mathrm{gq}}(u), \ulcorner y \urcorner)\big)\right).$$

由此以及 Ψ_A 的定义可知。

$$\forall u \in \dot{\mathcal{L}}^0 \, \big(\Psi_A(u, \ulcorner \theta \urcorner) \to \Psi_A(u, \ulcorner \theta' \urcorner) \big),$$

建立 ({v1)。

根据（†）和本定理的假设,

$$\begin{aligned} \mathsf{DCB} \vdash \mathrm{Pr}_{\mathsf{DCB}} \Big(\ulcorner \forall y \in \dot{\mathcal{L}}^0 \, \big(\theta(y) \to \theta'(y) \big) \urcorner \Big) \to \\ \forall y \in \dot{\mathcal{L}}^0 \, \big(\theta(y) \to \theta'(y) \big). \end{aligned}$$

因此，根据 L¨ob 定理,

$$\mathsf{DCB} \vdash \forall y \in \dot{\mathcal{L}}^0 \, \big(\theta(y) \to \theta'(y) \big).$$

如所愿。 □

由上述定理，我们得到定义的共同信念/知识谓词相对于 DCB 中可证性的唯一性:

推论 4（定义的共同知识的唯一性）。设 $\mathsf{CK}'_A(y)$ 是一个 $\mathcal{L}$-公式，满足

$$\mathsf{DCB} \vdash \forall u \in \dot{\mathcal{L}}^0 \, \big[\mathrm{CK}'_A(u) \leftrightarrow \Psi_A(u, \ulcorner \mathrm{CK}'_A \urcorner) \big].$$

那么 $\mathsf{DCB} \vdash \forall y \in \mathcal{L}^0$。 $\big[\mathsf{CK}_A(y) \leftrightarrow \mathsf{CK}'_A(y)\big]$.

证明。由于

$$\begin{aligned} \mathsf{DCB} \vdash \forall u \in \dot{\mathcal{L}}^0 \, \big[\mathrm{CK}_A(u) \leftrightarrow \Psi_A(u, \ulcorner \mathrm{CK}_A \urcorner) \big], \\ \mathsf{DCB} \vdash \forall u \in \dot{\mathcal{L}}^0 \, \big[\mathrm{CK}'_A(u) \leftrightarrow \Psi_A(u, \ulcorner \mathrm{CK}'_A \urcorner) \big], \end{aligned}$$

根据定理 3，分别沿两个方向应用即可得出该结果。 □

其哲学意义在于，如果我们一般性地要求定义的共同知识谓词满足这样的条件：我们的语法理论 基础系统（甚至 DCB）足以证明它们是共同知识的充分表征，那么这些谓词在 DCB 中（因而在 KT 中也）在等价意义下是唯一的。

以下是上述推论的一个有用应用:

引理 5。设 $A(x) \in \mathcal{L}$，并设 $\phi, \psi \in \mathcal{L}^0$。

$$\mathsf{DCB} \vdash \mathrm{CK}_A(\ulcorner \phi \urcorner) \wedge \mathrm{CK}_A(\ulcorner \psi \urcorner) \leftrightarrow \mathrm{CK}_A(\ulcorner \phi \wedge \psi \urcorner).$$

证明。设 θ为公式 $\mathrm{CK}_A(\ulcorner\phi\urcorner) \wedge \mathrm{CK}_A(\ulcorner\psi\urcorner)$。我们在 DCB 中进行推导。根据推论 4，只需证明

$$\theta \leftrightarrow \Psi_A(\ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner, \ulcorner\theta\urcorner).$$

这由以下等价关系表明：

$$\begin{aligned}
&\mathrm{CK}_A(\ulcorner\phi\urcorner) \wedge \mathrm{CK}_A(\ulcorner\psi\urcorner) \\
\iff &\forall x \Big(A(x) \to \big[\mathrm{K}(x, \ulcorner\phi\urcorner) \wedge \mathrm{K}(x, \ulcorner\psi\urcorner) \wedge \mathrm{K}\big(x, \ulcorner\mathrm{CK}_A(\ulcorner\phi\urcorner)\urcorner\big) \wedge \mathrm{K}\big(x, \ulcorner\mathrm{CK}_A(\ulcorner\psi\urcorner)\urcorner\big)\big]\Big) \\
\iff &\forall x \Big(A(x) \to \big[\mathrm{K}(x, \ulcorner\phi \wedge \psi\urcorner) \wedge \mathrm{K}\big(x, \ulcorner\mathrm{CK}_A(\ulcorner\phi\urcorner) \wedge \mathrm{CK}_A(\ulcorner\psi\urcorner)\urcorner\big)\big]\Big).
\end{aligned}$$

最后一个等价关系由 $\mathbf{UK}^{\mathrm{K}}$ 和 $\mathbf{NEC}^{\mathrm{K}}$ 推出。 □

定理 3 可以推广如下：

定理 6. 假设 $A(x)$ $B(x)$ $\theta(y)$ $\theta'(y)$ 是 $\mathcal{L}$-公式，并且 f 是一个可在 DCB 中定义的函数，使得 DCB 证明了

$$\begin{aligned}
&\forall u \in \dot{\mathcal{L}}^0 \big(\theta(u) \to \Psi_A(u, \ulcorner\theta\urcorner)\big), \\
&\forall u \in \dot{\mathcal{L}}^0 \big(\theta'(u) \leftarrow \Psi_B(u, \ulcorner\theta'\urcorner)\big), \\
&\forall x \big(B(x) \to A(x)\big), \\
&\forall u \in \dot{\mathcal{L}}^0 \, \forall x \in B \big(\mathrm{K}(x, u) \to \mathrm{K}(x, f(u))\big).
\end{aligned}$$

那么 $\mathbf{DCB} \vdash \forall u \in \mathcal{L}^0 \circ \quad \big(\theta(u) \to \theta'(f(u))\big)$.

证明。只需说明如何修改定理 3 的证明即可。关键区别在于，现在我们需要证明 DCB 能够证明

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Pr}_{\mathbf{DCB}}\Big(\ulcorner\forall y \in \dot{\mathcal{L}}^0 \big(\theta(y) \to \theta'(f(y))\big)\urcorner\Big) \to \\
&\forall u \in \dot{\mathcal{L}}^0 \big(\Psi_A(u, \ulcorner\theta\urcorner) \to \Psi_B(f(u), \ulcorner\theta'\urcorner)\big). \qquad (\ddagger)
\end{aligned}$$

与之前一样，我们从 $\mathrm{Pr}_{\mathbf{DCB}}\Big(\ulcorner\forall y \in \mathcal{L}^0. \quad \big(\theta(y) \to \theta'(f(y))\big)\urcorner\Big)$ 证明

$$\forall u \in \dot{\mathcal{L}}^0 \, \forall x \Big(\mathrm{K}\big(x, \dot{\mathrm{sbt}}(\ulcorner\theta\urcorner, \dot{\mathrm{gq}}(u), \ulcorner y\urcorner]\big) \to \mathrm{K}\big(x, \dot{\mathrm{sbt}}(\ulcorner\theta'\urcorner, \dot{\mathrm{gq}}(f(u)), \ulcorner y\urcorner)\big)\Big).$$

由此以及新的假设可推出

$$\forall u \in \dot{\mathcal{L}}^0 \big(\Psi_A(u, \ulcorner\theta\urcorner) \to \Psi_B(f(u), \ulcorner\theta'\urcorner)\big),$$

从而证得 (‡)。 □

推论 7. 假设 $A(x)$ $B(x)$ 是 $\mathcal{L}$-公式，且 f 是 DCB 中可定义的函数，使得 DCB 可以证明

$$\begin{aligned}
&\forall x \big(B(x) \to A(x)\big), \\
&\forall u \in \dot{\mathcal{L}}^0 \, \forall x \in B \big(\mathrm{K}(x, u) \to \mathrm{K}(x, f(u))\big).
\end{aligned}$$

那么 $\mathbf{DCB} \vdash \forall u \in \mathcal{L}^0 \circ \quad \big(\mathrm{CK}_A(u) \to \mathrm{CK}_B(f(u))\big)$.

证明。直接应用定理 6，其中 CK_A 作为 θ，CK_B 作为 θ'。 □

下面的定理表明，DCB 中为 K 公理化的演绎闭包性质也适用于每个共同知识谓词 CK_A，而无需为 CK_A 引入任何原始谓词或公理：

定理 8（共同知识的演绎闭包）。设 $A(x) \in \mathcal{L}$。

(a) $\mathsf{DCB} \vdash \forall \phi,\psi \in \mathcal{L}^0.\ \big(\mathsf{CK}_A(\phi) \wedge \mathsf{CK}_A(\phi \dot{\to} \psi) \to \mathsf{CK}_A(\psi)\big)$(b) $\mathsf{DCB} \vdash \forall \phi \in \mathcal{L}^0.\ \big(\mathsf{Pr}_{\mathsf{DCB}}(\phi) \to \mathsf{CK}_A(\phi)\big)$(c) 对每个 $\phi \in \mathcal{L}^0$：$\mathsf{DCB} \vdash \phi \implies \mathsf{DCB} \vdash \mathsf{CK}_A(\ulcorner \phi \urcorner)$

证明。(a) DCB 定义了一个函数 f，使得

$$\mathsf{DCB} \vdash \forall \phi, \psi \in \mathcal{L}^0_{\cdot}\ \big(f(\phi \dot{\wedge} (\phi \dot{\to} \psi)) = \psi\big).$$

此外，

$$\mathsf{DCB} \vdash \forall \phi, \psi \in \mathcal{L}^0_{\cdot}\, \forall x \in \mathrm{Ag}\ \big(\mathrm{K}(x, \phi \dot{\wedge} (\phi \dot{\to} \psi)) \to \mathrm{K}(x, \psi)\big).$$

因此，根据推论 7，

$$\mathsf{DCB} \vdash \mathrm{CK}_A(\phi \dot{\wedge} (\phi \dot{\to} \psi)) \to \mathrm{CK}_A(\psi).$$

根据引理 5，

$$\mathsf{DCB} \vdash \mathrm{CK}_A(\phi) \wedge \mathrm{CK}_A(\phi \dot{\to} \psi) \leftrightarrow \mathrm{CK}_A(\phi \dot{\wedge} (\phi \dot{\to} \psi)),$$

由此即可得出该结果。

(b) 根据定理 3，令 $\mathsf{Pr}_{\mathsf{DCB}}$ 为 θ，令 CK_A 为 θ'，只需证明的是

$$\mathsf{DCB} \vdash \forall u \in \mathcal{L}^0_{\cdot}\ \big(\mathrm{Pr}_{\mathsf{DCB}}(u) \to \Psi_A(u, \ulcorner \mathrm{Pr}_{\mathsf{DCB}}(y) \urcorner)\big).$$

由 $\mathsf{R}_{\mathsf{DCB}}$，

$$\mathsf{DCB} \vdash \forall u \in \mathcal{L}^0_{\cdot}\ \big(\mathrm{Pr}_{\mathsf{DCB}}(u) \to \forall x \in \mathrm{Ag}\, \mathrm{K}(x, u)\big).$$

可证性具有一个众所周知的性质，即

$$\mathsf{DCB} \vdash \forall u \in \mathcal{L}^0_{\cdot}\ \big[\mathrm{Pr}_{\mathsf{DCB}}(u) \to \mathrm{Pr}_{\mathsf{DCB}}\big(\dot{\mathrm{sbt}}(\ulcorner \mathrm{Pr}_{\mathsf{DCB}}(y) \urcorner, \dot{\mathrm{gq}}(u), \ulcorner y \urcorner)\big)\big].$$

因此，根据 $\mathsf{R}_{\mathsf{DCB}}$，

$$\mathsf{DCB} \vdash \forall u \in \mathcal{L}^0_{\cdot}\ \big[\mathrm{Pr}_{\mathsf{DCB}}(u) \to \forall x \in \mathrm{Ag}\, \mathrm{K}\big(x, \dot{\mathrm{sbt}}(\ulcorner \mathrm{Pr}_{\mathsf{DCB}}(y) \urcorner, \dot{\mathrm{gq}}(u), \ulcorner y \urcorner)\big)\big].$$

结合第二个和第四个展示项，我们得到第一个展示项，一个 s
所需的。

（c）假设 $\mathsf{DCB} \vdash \phi$。由于 $\mathsf{Pr}_{\mathsf{DCB}}$ 表示 DCB 中的可证性，我们有基础系统 $\vdash \mathsf{Pr}_{\mathsf{DCB}}(\ulcorner \phi \urcorner)$。因此，根据本定理的上一项，$\mathsf{DCB} \vdash \mathsf{CK}_A(\ulcorner \phi \urcorner)$。 □

上述定理确立了 KT 证明其公理 UK^{K} 和 $\mathsf{R}_{\mathsf{DCB}}$关于共同知识的推广。KT 是否允许共同知识的完全必然化规则，即 $\mathsf{KT} \vdash \phi \implies \mathsf{KT} \vdash \mathsf{CK}_A(\ulcorner \phi \urcorner)$，仍是一个悬而未决的问题。

5 多主体知识的修正语义

Gupta 和 Herzberger 在 [2], [6] 和 [7], 中提出的修正语义，是解决说谎者悖论的一种方法。其基本思想是从一个基础模型 $\langle \mathcal{M}, P_0 \rangle$ （其中 P_0是真谓词的一个解释）开始，并通过递归 $P_{n+1} =_{\mathrm{df}} \{\mathrm{gc}(\sigma) \mid \langle \mathcal{M}, P_n \rangle \models \sigma\}$，迭代地将真谓词的解释修正为 $P_1, P_2, \cdots$。对于所有 $P \subseteq \mathbb{N}$, 由$P \mapsto \{\mathrm{gc}(\sigma) \mid \langle \mathcal{M}, P \rangle \models \sigma\}$定义的映射称为修正语义算子。

根据 McGee 定理 [11], ，FS 是 ω不一致的。具体而言，它没有标准模型。不过，FS 与修正语义之间存在一种联系，这为 FS 提供了辩护：取一个将真谓词任意解释后的算术标准模型作为基础模型；将其称为 $\langle \mathbb{N}, P_0 \rangle$。在 [4], Halbach 证明了，FS 在修正语义中局部成立，这意味着对于 FS 的每个有限片段，都存在$n \in \mathbb{N}$，使得对于所有 $m \geq n$, $\langle \mathbb{N}, P_m \rangle$ 都是该片段的标准模型。由于每个证明只使用有限个公理，因此对系统的任何特定演绎应用，都只需要一个有限片段。因此，对于 FS 的任何应用，都可以通过有限次迭代修正语义算子，获得一个适当的标准模型。

在 [16], Stern 证明了，可以在一系列扩展 FS 的系统中将必然化和真理（作为谓词处理）形式化，并提出了一种灵活的广义修正语义，可在局部验证它们。由于 KT 公理化了多个主体的知识，我对这种语义作了少许推广。它建立在传统的可能世界语义之上；每个可能世界都是满足基础系统 Base 的标准$\mathcal{L}_{-}$-结构，并且每个主体都与可能世界集合上的一个二元可及关系相关联。该语义涉及求值函数，它将每个可能世界映射到该世界中真句子的 G¨odel 编码集合。任何求值函数都会在每个可能世界中诱导出 K 和 T 的解释，从而将每个可能世界扩展为一个 $\mathcal{L}$-结构。修正语义算子将每个求值函数映射为一个修正后的求值函数，从而诱导出每个可能世界的一个修正后 $\mathcal{L}$扩展。

定理 14 证明，KT $+$UBF $+$IA $+\mathrm{In}^{+}$ $+\mathrm{In}^{-}$ 在这种修正语义下是局部有效的，也就是说，在某些自然假设下，KT+UBF+IA $+\mathrm{In}^{+}+\mathrm{In}^{-}$的任意有限片段，经过有限次修订后，最终都会在每个世界中得到满足。具体而言，KT+UBF+IA+In^{+}+In^{-} 的任意有限片段都有一个标准模型，而且 KT+UBF+IA+In^{+}+In^{-} 是一致的。引理 12 和 13 是该定理证明中的两个关键步骤，它们证明了 DCB 在修正语义下有效。

[16] 的结果是在这样一个框架下展开的：基础系统是 PA，并扩展了对这样一种语言的归纳；该语言是在 $\mathcal{L}_{\mathsf{PA}}$ 中加入谓词 N 和 T 后得到的。 [16] 还解释了如何将其推广到其他基础系统，这一推广适用于 PA($\mathcal{L}$)。在本节中，我始终假设 Base $=$ PA($\mathcal{L}$)。

下面我将逐一介绍与本文相关的广义定义和定理。假定所有可能世界都是标准模型 $\mathbb{N}$ 的扩张；为简便起见，假定Ag 的解释在所有可能世界中都相同。将Ag 的解释推广到不同情形是直接的。固定一个非空子集 $G \subseteq \mathbb{N}$，其元素称为主体。对于任意扩展 $\mathcal{L}_{\mathsf{PA}}$的一阶语言 L， G 的一个 L-主体框架是一个元组$F = \langle W, (R_\alpha)_{\alpha \in G} \rangle$，其中 W 是对 $\mathbb{N}$ 的 L-扩张的集合，并通过 G 解释 Ag，而 R_α 是 W上的二元关系，对每个 $\alpha \in G$均如此。

本节余下部分，固定一个用于 G 的 $\mathcal{L}_{-}$-主体框架 F。对于每个主体 $\alpha \in G$: $\langle W, R_\alpha \rangle$称为 α 的 $\mathcal{L}_{-}$-Kripke 框架，其元素 W 称为可能世界，而 R_α 称为 α的可及关系。 F 的求值函数是一个函数 $f\colon W \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$，可将其视为把一个可能世界映射到该可能世界中真句子的 G¨odel 编码集合。Val_F 表示 F的所有求值函数的集合。对于本段余下部分，固定 $f \in \mathrm{Val}_F$。 $f_\alpha\colon W \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$

以及 $f^{\mathrm{K}}\colon\ W \to \mathcal{P}(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$ 定义如下，适用于所有 $\alpha \in G$ 和所有 $w \in W$：

$$f_\alpha(w) =_{\mathrm{df}} \bigcap\{f(v) \mid wR_\alpha v\}$$
$$f^{\mathrm{K}}(w) =_{\mathrm{df}} \{\langle\alpha,\phi\rangle \mid \alpha \in G \wedge \phi \in f_\alpha(w)\}$$

对于每个 $\mathcal{L}_-$-模型 $w \in W$， f 都会在 w上诱导出一个 $\mathcal{L}$-扩展 w^f，其中 T 由 $f(w)$解释，K^2由 $f^{\mathrm{K}}(w)$解释，而 K^1由 $\{\phi \mid \forall\alpha \in G(\langle\alpha,\phi\rangle \in f_{\mathrm{K}}(w))$解释$\}$。因此， f也会诱导出一个 $\mathcal{L}$-主体框架 $F^f =_{\mathrm{df}} \langle W^f, (R^f_\alpha)_{\alpha\in G}\rangle$，其中 $W^f =_{\mathrm{df}} \{w^f \mid w \in W\}$和 $R^f_\alpha =_{\mathrm{df}} \{\langle v^f, w^f\rangle \mid \langle v,w\rangle \in R_\alpha\}$，对每个 $\alpha \in G$均如此。

修正语义算子 $\Gamma : \mathsf{Val}_F \to \mathsf{Val}_F$ 定义如下，对所有 $f \in \mathsf{Val}$ 和所有 $w \in W$：

$$\big(\Gamma(f)\big)(w) =_{\mathrm{df}} \{\mathrm{gc}(\phi) \mid w^f \models \phi\}$$

注意，对于任何形式为 F^f 的 $\mathcal{L}$ 代理框架（其中 F 是一个 $\mathcal{L}_-$ 代理框架，且 $f \in \mathsf{Val}_F$），Γ 都会诱导出一个经过修正的 $\mathcal{L}$ 代理框架 $F^{\Gamma(f)}$。通过反复应用 Γ，可以迭代地进行这种修正，从而为本文的研究场景提供适当的修正语义。这种修正语义与系统 BEFS（基本认知 Friedman–Sheard）密切相关，该系统的公理化形式如图 5.1 所示。[5]

BEFS 的公理 $\mathsf{UNS}^{\mathrm{K}}$ （无类型必然替换原则）断言，当 $\mathcal{L}_{\mathsf{PA}}$-项求值为相同的值时，知识在替换下保持不变。BEFS 的公理 $\mathsf{UND}^{\mathrm{K}}$ （无类型差异必然性）断言，只要两个 $\mathcal{L}_{\mathsf{PA}}$-项求值为不同的值，这一点就是已知的（等式的对应版本在该系统中是可证的）。

命题 9. KT $+$ UBF $+$ 交互公理 $\equiv$ BEFS $+\mathsf{V}$ $+\mathsf{R}_{\mathsf{DCB}}$。

证明。由 $\mathsf{CONEC}^{\mathrm{T}}$ 和 $\mathsf{NEC}^{\mathrm{K}}$，KT $+$UBF $+$交互公理允许规则 T/K。由 $\mathsf{NEC}^{\mathrm{T}}$ 和 T/K，BEFS $+$ V $+\mathsf{R}_{\mathsf{DCB}}$ 允许 $\mathsf{NEC}^{\mathrm{K}}$。只需证明 KT 中的 $\mathsf{UNS}^{\mathrm{K}}$ 和 $\mathsf{UND}^{\mathrm{K}}$ 。由于 $\mathcal{L}_{\mathsf{PA}}$-项的求值是原始递归的，皮亚诺算术证明，$\mathsf{UNS}^{\mathrm{K}}$ 的前件 $s^\circ = t^\circ$ 等价于 $\mathsf{Pr}_{\mathsf{PA}}(s{=}.\,t)$。因此，可以直接由 $\mathsf{R}_{\mathsf{DCB}}$、$\mathsf{UK}^{\mathrm{K}}$ 和 $\mathsf{NEC}^{\mathrm{K}}$证明 $\mathsf{UNS}^{\mathrm{K}}$ 。同样的方法也适用于 $s^\circ \neq t^\circ$，从而类似地确立 $\mathsf{UND}^{\mathrm{K}}$ 。 □

有人可能会觉得，模态逻辑中公理 4 的无类型版本

$$\forall\alpha \in \mathrm{Ag}\,\forall\phi \in \mathcal{L}^0\Big(\mathrm{K}(\alpha,\phi) \to \mathrm{K}\big(\alpha, \mathrm{K}(\mathrm{num}(\alpha), \mathrm{gq}(\phi))\big)\Big), \tag{U4}$$

是对正内省原则的直接形式化，但正如下一个命题所示，它与 KT 不一致。事实证明，在这种真正无类型的语境中，In^+ 才是正内省原则的恰当形式化。

命题 10。KT $+$ U4 不一致。

证明。考虑 δ，使得基础系统 $\vdash \delta \leftrightarrow \neg\mathrm{K}(\ulcorner\delta\urcorner)$。假设 $\mathrm{K}(\ulcorner\delta\urcorner)$。由 U4，我们得到 $\mathrm{K}\big(\ulcorner\mathrm{K}(\ulcorner\delta\urcorner)\urcorner\big)$。但是基础系统 $\vdash \neg\delta \leftrightarrow \mathrm{K}(\ulcorner\delta\urcorner)$，因此根据基本演绎闭包（由 $\mathsf{NEC}^{\mathrm{K}}$ 和 UK^{K}推出），我们得到 $\mathrm{K}(\ulcorner\neg\delta\urcorner)$ 和 $\mathrm{K}(\bot)$。现在根据 V，我们有 $\mathrm{T}(\bot)$，由 FS 的公理 $\mathsf{UCT}^{\mathrm{Atom}}$ 可得 $\bot$ 。这证明了 $\neg\mathrm{K}(\ulcorner\delta\urcorner)$，它等价于 δ。既已证明 δ，根据 $\mathsf{NEC}^{\mathrm{K}}$，我们得到 $\mathrm{K}(\delta)$，它等价于 $\neg\delta$，矛盾。 □

伪系统定义为一阶语言中的递归可枚举句子集。伪系统是近似系统的一种辅助工具。对于每个

[5] BEFS 类似于 Stern 在 [16] 中提出的 BMFS 系统。

系统 BEFS

BEFS 通过以下公理和规则扩展 FS：

BEFS 的公理

$$\exists \alpha\,(\text{主体集}(\alpha)) \qquad \text{（非平凡性）}$$

$$\forall \phi \in \mathcal{L}.\ {}^{0}\left(\mathrm{K}^{1}(\phi) \leftrightarrow \forall \alpha \in \mathrm{Ag}\ \mathrm{K}^{2}(\alpha, \phi)\right) \qquad (\mathrm{K}^{1}\text{-}\mathrm{K}^{2})$$

$$\forall \alpha \in \text{主体集}\ \forall \phi, \psi \in \mathcal{L}.\ {}^{0}\left(\left(\mathrm{K}(\alpha, \phi)\ \wedge \mathrm{K}(\alpha, \phi \rightarrow .\ \psi)\right) \rightarrow \mathrm{K}(\alpha, \psi)\right) \qquad (\mathrm{UK}^{\mathrm{K}})$$

$$\forall \alpha \in \text{主体集}\ \forall v \in \text{变量集}.\quad \forall s, t \in \text{项}.\ {}^{0}_{\mathcal{L}_{\mathrm{PA}}}\ \forall \phi \in \mathcal{L}.\ {}^{1}[v]\left(s^{\circ} = t^{\circ} \rightarrow \mathrm{K}\left(\alpha, \mathrm{sbt}.\ (\phi, s, v)\right) \leftrightarrow \mathrm{K}(\alpha, \mathrm{sbt}.\ (\phi, t, v))\right)$$

$$\forall \alpha \in \text{主体集}\ \forall s, t \in \text{项}.\ {}^{0}_{\mathcal{L}.\ \mathrm{PA}}\left(s^{\circ} \neq t^{\circ} \rightarrow \left(\mathrm{K}(\alpha, {}^{s}\neq .\ t)\right)\right) \qquad (\mathrm{UNS}^{\mathrm{K}})$$

$$\forall \alpha \in \text{主体集}\ \forall v \in \text{变量集}_{\circ}\quad \forall \phi \in \mathcal{L}_{\circ}\ {}^{1}[v]\left(\left(\forall t \in \text{项}_{\circ}\ {}^{0}_{\mathcal{L}_{\circ}\ \text{皮亚诺算术}}\mathrm{K}(\alpha, \mathrm{sbt}.\ (\phi, t, v))\right) \rightarrow \mathrm{K}(\alpha, \forall_{\circ}\ v\phi)\right) \qquad (\mathrm{UND}^{\mathrm{K}})$$

$$\forall \alpha \in \text{主体集}\ \forall \phi \in \mathcal{L}_{\circ}\ {}^{0}\left(\mathrm{K}\left(\alpha,\ \mathrm{T}_{\circ}\ (\mathrm{gq}.\ (\phi))\right) \leftrightarrow \mathrm{T}\left(\mathrm{K}_{\circ}\ (\mathrm{num}.\ (\alpha)\mathrm{gq}.\ (\phi))\right)\right) \qquad (\mathrm{UBF}^{\mathrm{K}})$$

$$(\mathrm{IA})$$

BEFS 规则

$$\vdash \mathrm{T}(\ulcorner \phi \urcorner) \quad \Longrightarrow \quad \vdash \forall \alpha \in \text{主体集}\ \mathrm{K}(\alpha, \ulcorner \phi \urcorner),\ \text{对每个}\ \phi \in \mathcal{L}^{0}_{\circ} \qquad (\mathrm{T/K})$$

图 5.1：BEFS 的公理与规则

$2 \leq n < \omega$，伪系统 BEFS_n 和 EFS_n 的定义分别与 BEFS 和 EFS 相同，但在一个证明中，$\mathrm{NEC}^{\mathrm{T}}$ 和 $\mathrm{CONEC}^{\mathrm{T}}$ 的应用总次数至多允许 $n-1$ 次。系统 BEFS_0 和 EFS_0 定义为 $\mathsf{PA}(\mathcal{L})$。系统 BEFS_1 和 EFS_1 除分别采用 BEFS 和 EFS 的公理外，还采用下文的公理 $\mathsf{R}^{\mathrm{T}}_{\mathsf{PA}(\mathcal{L})}$ 以及演绎规则 T/K。

$$\forall \phi \in \mathcal{L}^0 \left(\mathrm{Pr}_{\mathsf{PA}(\mathcal{L})}(\phi) \to \mathrm{T}(\phi)\right) \qquad (\mathsf{R}^{\mathrm{T}}_{\mathsf{PA}(\mathcal{L})})$$

对于任意函数 $h\colon\ A \to B$ 以及任意 $A' \subseteq A$, $h[A'] =_{\mathrm{df}} \{h(a) \mid a \in A'\}$。令 $R \subseteq A \times A$。如果 $\forall a, b, c \in A \left((aRb \wedge aRc) \to bRc\right)$，则 R 是欧几里得的。

定理 11. 设 $f \in \mathsf{Val}_F$ 且设 $n < \omega$。

(a) 那么

$$f \in \Gamma^n[\mathrm{Val}_F] \Longleftrightarrow \forall w \in W \left(w^f \models \mathsf{BEFS}_n\right).$$

(b) 若 R_α 是自反的且 $1 \leq n$，那么

$$f \in \Gamma^n[\mathrm{Val}_F] \Longleftrightarrow \forall w \in W \left(w^f \models \mathsf{BEFS}_n + \mathsf{V}\right).$$

(c) 若 R_α 是传递的且 $1 \leq n$，那么

$$f \in \Gamma^n[\mathrm{Val}_F] \Longleftrightarrow \forall w \in W \left(w^f \models \mathsf{BEFS}_n + \mathsf{In}^+\right).$$

(d) 若 R_α 是欧几里得的且 $1 \leq n$，那么

$$f \in \Gamma^n[\mathrm{Val}_F] \Longleftrightarrow \forall w \in W \left(w^f \models \mathsf{BEFS}_n + \mathsf{In}^-\right).$$

证明。下面说明如何将 [16] 中定理 4.11 和 4.12 的证明推广到 $BMFS$ 多智能体情境。首先注意，[16] 中的公理和推理规则可直接推广为 BEFS 中相应的多智能体公理。此外，V 是将 [16] 中的 T' 推广到多智能体情境后的直接对应形式。利用交互公理和 $\mathsf{UCT}^{\neg}$，可以看出，In^+ 和 In^- 中的公理分别等价于将 [16] 中 $4'$ 和 E' 直接推广到多智能体情境后的形式。

非平凡性源于 G 非空。K^1-K^2 源于定义 w^f 中对 K^1 的解释（对任意 $w \in W$）。其余相关公理都对主体集作全称量化。我们将 Stern 的单个一元必然性谓词 N 推广为一个可数集合 $\{\mathsf{K}_\alpha \mid \alpha \in G\}$ 的一元知识谓词（每个主体对应一个）。请注意，对于标准模型，主体集 Ag 和二元知识谓词 K 的解释会导出一个主体集合 G 以及对每个 $\alpha \in G$ 的 K_α 解释；反之亦然。任取 $\alpha \in G$ 后，公理的验证过程与 [16], 中针对单个一元谓词 K_α 和单个可及关系 R_α 的验证完全相同。

□

[{"id": 0, "input": "The left-to-right directions of the above theorem show that for any finite fragment of BEFS +V + In^+ + In^-, it is satisfied by all the worlds in the $\mathcal{L}$-agency-frame induced by an evaluation function of F obtained by a finite number of revisions of an arbitrary evaluation function of F. The following lemmata are provided for the sake of extending this result to the axiom $\mathsf{R}_{\mathsf{DCB}}$.", "layout_label": "plain text"}]

设 $R \subseteq A \times A$。R 是左全的，当且仅当对每个 $a \in A$，都存在 $b \in A$，使得 aRb。注意，若 R 是自反的，则它也是左全的。

引理 12. 若对所有 $\alpha \in G$， R_α 都是左全的，且 f 是一个求值函数，使得对所有 $w \in W$，都存在一个扩展 DCB 的 $\mathcal{L}$-系统 S_w，使得 $f(w) = \{\mathsf{gc}(\sigma) \mid S_w \vdash \sigma\}$，那么对所有 $w \in W$， $w^f \models \mathsf{DCB}$。

证明。设 $w \in W$ 任意。由于 S_w 的定理在肯定前件式下封闭，且对所有 $\alpha \in G$，R_α 都是左全的，因此我们有 $w^f \models \mathsf{UK}^{\mathrm{K}}$。由于 w 是标准的，对所有 $\sigma \in \mathcal{L}^0$，我们有 $S_w \vdash \sigma \iff w \models \mathsf{Pr}_{S_w}(\ulcorner\sigma\urcorner)$。因此，由于 $S_w \vdash \mathsf{DCB}$， $f(w) = \{\mathsf{gc}(\sigma) \mid S_w \vdash \sigma\}$，且对所有 $\alpha \in G$，R_α 都是左全的，因此我们有 $w^f \models \mathsf{R}_{\mathsf{DCB}}$。 □

引理 13。设 $f \in \mathsf{Val}_F$，并假设对所有 $\alpha \in G$， R_α 都是左全的，且对所有 $w \in W$， $w^f \models \mathsf{DCB}$。那么对所有 $n < \omega$ 以及对所有 $w \in W$， $w^{\Gamma^n(f)} \models \mathsf{DCB}$。

证明。我们通过归纳来证明这一点。设 $w \in W$ 任意。根据假设， $w^f \models \mathsf{DCB}$。假设对于某个 $n < \omega$， $w^{\Gamma^n(f)} \models \mathsf{DCB}$。那么 $\{\mathsf{gc}(\sigma) \mid \mathsf{DCB} \vdash \sigma\} \subseteq (\Gamma^{n+1}(f))(w)$。因此，对每个 $\alpha \in G$，由 R_α 的左全性可知， $\{\langle \alpha, \mathsf{gc}(\sigma)\rangle \mid \mathsf{DCB} \vdash \sigma\} \subseteq (\Gamma^{n+1}(f))^{\mathrm{K}}(w)$。此外，由于 w 是标准的，对所有 $\sigma \in \mathcal{L}^0$，我们有 $\mathsf{DCB} \vdash \sigma \iff w \models \mathsf{Pr}_{\mathsf{DCB}}(\ulcorner\sigma\urcorner)$。结合这些事实，我们得到 $w^{\Gamma^{n+1}(f)} \models \mathsf{R}_{\mathsf{DCB}}$。此外，由定理 11 可知，对所有 $k \geq 1$， $w^{\Gamma^k(f)} \models \mathsf{K}^1\text{-}\mathsf{K}^2 + \mathsf{UK}^{\mathrm{K}}$。因此， $w^{\Gamma^{n+1}(f)} \models \mathsf{DCB}$，如所需。 □

定理 14。设 f 是一个求值函数，使得对所有 $w \in W$，都存在一个 $\mathcal{L}$-系统 $S_w \vdash \mathsf{DCB}$，使得 $f(w) = \{\mathsf{gc}(\sigma) \mid S_w \vdash \sigma\}$。

(a) 如果对于所有 $\alpha \in G$， R_α 都是自反的，那么对于每个有限的 $\Phi \subseteq \mathsf{KT} + \mathsf{UBF}$ + 交互公理，都存在 $m < \omega$，使得对于所有 $n \geq m$ 和所有 $w \in W$，

$$w^{\Gamma^n(f)} \models \Phi.$$

(b) 如果对于所有 $\alpha \in G$， R_α 都是自反且传递的，那么对于每个有限的 $\Phi \subseteq \mathsf{KT} + \mathsf{UBF}$ + 交互公理 $+ \mathsf{In}^+$，都存在 $m < \omega$，使得对于所有 $n \geq m$ 和所有 $w \in W$，

$$w^{\Gamma^n(f)} \models \Phi.$$

(c) 如果对于所有 $\alpha \in G$， R_α 都是自反、传递且欧几里得的，那么对于每个有限的 $\Phi \subseteq \mathsf{KT} + \mathsf{UBF}$ + 交互公理 $+ \mathsf{In}^+ + \mathsf{In}^-$，都存在 $m < \omega$，使得对于所有 $n \geq m$ 和所有 $w \in W$，

$$w^{\Gamma^n(f)} \models \Phi.$$

证明。该结果可由定理 11、引理 12 和引理 13 直接得出。 □

推论 15. $\mathsf{KT} + \mathsf{UBF}$ + 交互公理 $+ \mathsf{In}^+ + \mathsf{In}^-$ 是一致的。

证明。这可由定理 14 和一阶逻辑的可靠性得出。 □

6 结论与进一步研究建议

我提出了一种真正非类型化的知者悖论解决方案，该方案具有若干独特优势。值得注意的是，该框架能够通过 G¨odel 不动点公式来定义共同信念/知识。具体而言，我证明了，合理的信念演绎闭包公理足以确立共同信念/知识具有这些演绎闭包性质。因此，我们得以用普通知识来解释共同知识。

Stern 关于必然性的修正语义被推广到了多主体知识。这种语义学既推广了传统的知识 Hintikka 式可能世界语义，也推广了关于真理的修正语义。结果表明，这种语义学验证了公理 IA，因此适用于这样一类应用：在这些应用中，假定所有主体都知道系统中关于句法的每一个定理。未来研究的一个方向是探究 Stern 的语义学能否进一步推广，以容纳交互公理 IA 失效的情况（参见第 3 节中关于 KT 如何满足目标特征10的解释）。

进一步研究的另一个方向是寻找第 4 节中所采用技术的更多应用。具体而言，是否还有其他有用的定义可以作为 G¨odel 不动点来构造？是否可以获得关于这些定义的 L¨ob 定理的正面应用？

7 致谢

我谨向 Rasmus Blanck、Volker Halbach、Graham Leigh 和 Øystein Linnebo 致以谢意，感谢他们的真知灼见、指导和建设性反馈，这些都对本文的撰写和完善作出了重要贡献。本研究得到克努特和爱丽丝·瓦伦堡基金会 (KAW) [2015.0179],和瑞典研究委员会 (VR) [2020-00613]的资助。

参考文献

[1] Friedman, H. 和 Sheard, M.，《自指真理的公理化方法》，《纯粹与应用逻辑年刊》，第33卷（1987年），第1–21页。[2] A. Gupta：《真理与悖论》，《哲学逻辑杂志》，第11卷（1982年），第1–60页。.[3] G¨odel, K.，《关于《数学原理》及相关系统中形式上不可判定命题的论述 I》，《数学月刊》，第38卷，第1期（1931年），第173–198页。[4] Halbach, V.：《完备且一致的真理系统》，《圣母大学形式逻辑杂志》，第35卷（1994年），第3期，第311–327页。[5] Halbach, V.：《真理公理理论》，修订版，剑桥大学出版社（2014年）。[6] H. G. Herzberger：《朴素语义札记》，《哲学逻辑杂志》，第11卷（1982年），第61–102页。[7] H. G. Herzberger：《朴素语义与说谎者悖论》，《哲学杂志》，第79卷（1982年），第479–497页。[8] Hintikka, J.：《知识与信念：两种概念的逻辑导论》，第二版，V. F. Hendriks 和 J. Symons 编（《哲学文献》第1卷），伦敦：College Publications（2005年） [初版： 1962]。[9] Kaplan, D. 和 Montague, R.：《悖论的重新获得》，《圣母大学形式逻辑杂志》，第1卷（1960年），第79–90页。[10] Kripke, S.：《真理理论纲要》，《哲学杂志》，第72卷（1975年），第690–712页。[11] McGee, V.：《谓词能够有多像真理？一项否定性结果》，《哲学逻辑杂志》，第14卷（1985年），第399–410页。

[12] McGee, V.：《塔斯基模式（T）实例的极大相容集》，《哲学逻辑杂志》，第21卷（1992年），第235–241页。[13] Montague, R.：《模态的句法处理：关于反思原理和有限公理化性的推论》，《芬兰哲学学报》，第16卷（1963年），第153–67页。[14] L¨ob, M.：《Leon Henkin 问题的解答》，《符号逻辑杂志》，第20卷，第2期（1955年）：第115–118页。[15] Smory´nski, C.：《自指与模态逻辑》，F.W. Gehring、P.R. Halmos、C.C. Moore 编，纽约：施普林格出版社（1985年）。[16] Stern, J.：《模态与真理公理理论 I：Friedman–Sheard》，《符号逻辑评论》，第7卷，第2期（2014年6月），第273–298页。[17] Tarski, A.：《形式化语言中的真理概念》，载于 A. Tarski（编）《逻辑、语义学、元数学》，牛津大学出版社（1936年），第152–278页。