arXiv:2304.10343v1 [cs.LO] 20 Apr 2023

迈向类型理论的方程扩张的相干定理

RAFAËL BOCQUET

厄特沃什·罗兰大学程序设计语言与编译器系，匈牙利布达佩斯电子邮件地址: bocquet@inf.elte.hu网址: https://rafaelbocquet.gitlab.io/

摘要。我们研究了通过添加额外严格等式对依赖类型论（以及更一般的二阶广义代数理论）进行扩展时的保守性。Hofmann 已证明，外延类型论相对于内涵类型论具有保守性。我们的目标是将此类结果推广到不包含恒等证明唯一性原则的类型论，例如同伦类型论的各种变体。

为此，我们构造了基理论上的本质上由所考虑方程自由生成的 ∞-同余。这会诱导出任意方程扩张的一个分解，其两个因子可以独立研究。我们猜想，当基理论表现良好时，第一个因子总是一个等价。我们证明，当 ∞-同余是 0-截断时，第二个因子是一个等价。

1. 引言

相等性和计算是类型论的核心组成部分。类型论的计算内容通过计算规则（通常称为 β-规则，或针对归纳类型的 ι-规则）来呈现，也可能通过唯一性规则（通常称为 η-规则）或更特殊的规则（例如 ν-规则，该规则在 [AMB13]中有所讨论）来呈现。通常，我们通过正规化算法来解释这些计算内容。在存在恒等类型的情况下，类型论的项之间存在两种不同的相等或恒等概念。就内部而言，恒等类型提供了内部识别这一概念，也称为命题相等 或类型相等。就外部而言，我们也可以按照严格相等来比较项，即元理论中的证明无关相等。严格相等也常称为定义性 相等或 判断性 相等。

在类型论内部工作时，严格等式越多越理想。事实上，严格相等可以隐式且无声地进行强制转换。另一方面，内部识别需要显式的传输和强制转换，这很快就会使

编辑部收到日期：2023年4月21日。关键词和短语： 保守性、相干性、严格化、依赖类型论、同伦类型论、定义等式、严格等式。作者获得了欧盟的资助，资金由欧洲社会基金（EFOP- 3.6.3-VEKOP-16-2017-00002）共同资助。

© 迈向类型理论方程扩张的相干定理 CreativeCommons

理论中的项变得杂乱。反过来说，权衡之处在于，具有额外严格等式的类型理论拥有较少的模型，因此其语义也更加复杂。

Hofmann 在 [Hof95] 中证明了一个保守性定理，表明当基础类型论满足若干原则时，可以将类型论中的所有内部识别保守地转化为严格等式。其中最重要的原则是恒等证明唯一性（UIP）原则，它指出恒等类型中任意两个元素之间都存在一个识别。后来，Oury [Our05] 针对构造演算给出了一个更加句法化的证明。Oury 的证明存在一些问题，主要是因为类型论语法的呈现缺少足够的注释。最近，Winterhalter 等人 [WST19] 改进了 Oury 的证明，并将这一结果表述为一种构造性且有效的句法翻译。

自从 Hofmann 的保守性证明以来，人们对研究与 UIP 不相容、具有非平凡高维内容的类型论 [HS94], ，以及它们在同伦论 [AW09, KL21a] 和 ∞-范畴结构 [KS17] 中的语义产生了浓厚兴趣。对于不满足 UIP 的类型论，严格等式更加重要，因为它们自动满足相干性。因此，拥有更多严格等式意味着我们不仅可以摆脱“传输地狱”，还可以摆脱“高维传输与相干地狱”。反过来，在许多同伦论模型中，要论证严格等式在实践中要困难得多。一些作者甚至考虑了类型论基本计算规则的弱化变体。例如，弱恒等类型由 [vdB18], 引入，并称为命题恒等类型；其计算规则仅在内部路径意义下成立。立方类型论 [CCHM17] 的路径类型，其恒等类型计算规则也仅弱成立。其他类型结构也可以类似地弱化；我们甚至可以考虑这样一种类型论，其中所有计算规则都用内部识别而非严格等式来表达。在类型与宇宙层面，我们可以不要求每个类型构造子都由宇宙中的某个编码严格分类，而只要求它们在类型等价意义下得到分类。这些弱塔斯基宇宙由 [Gal14] 引入。直到最近，人们才证明同伦类型论可以用严格单值宇宙而非弱宇宙，在每个（∞，1）-拓扑斯中解释 [Shu19]。

在这种情形下，我们可以思考具有不同程度严格等式的类型理论如何相互比较。更确切地说，我们想知道如何建立相干性定理和严格化定理，使我们在弱类型论的模型内部工作时，可以通过将其替换为一个等价的更严格模型，假定它满足比实际更多的严格等式。严格恒等类型相对于弱恒等类型的保守性问题曾在 TYPES 2017 会议上被提出 [ACC$^+$17], 其动机在于立方类型论中的路径类型只满足弱恒等类型的消去原理。这也是本文最初的研究动机。

我们举出一些同伦类型论的弱化和扩展示例，它们理应等价于标准同伦类型论。

示例 1.1。

- 弱化恒等类型、 Σ-类型、归纳类型等的 β 和 η 计算规则，会得到同伦类型论的一个较弱变体。

- 我们可以添加严格等式，使自然数上的加法成为严格满足结合律和交换律的运算。也就是说，虽然 $(-+-):\mathbb{N}\to\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 的归纳定义只满足严格等式 $0+y=y$ 和 $(\mathsf{suc}\ x)+y=\mathsf{suc}\,(x+y)$,

我们还会添加严格等式 $x + 0 = 0$、 $x +$(suc y) $=$ suc $(x + y)$、 $x + y = y + x$、$(x + y) + z = x +(y + z)$ 等。

- 类似地，我们可以将路径的复合构造成严格结合的运算，并可选择加入严格逆元。
- 我们可以用一个严格命题 [GCST19]的宇宙扩展该理论，它与同伦命题的宇宙等价。
- 类似地，我们可以用定义范畴、定义环等的宇宙扩展该理论，使其严格满足范畴、环等理论的方程。
- 我们可以用一个“按定义”带基点类型的宇宙 DPtType 扩展该理论，它与带基点类型的宇宙 PtType $\triangleq (A : \mathcal{U}) \times A$等价，并带有一个楔积运算 $(- \wedge -)$：DPtType $\to$ DPtType $\to$ DPtType，其严格等式多于 PtType 的楔积。这将为 Brunerie 基于重写的方法提供另一种解释，用于证明楔积是带基点类型上的对称幺半群积 [Bru18]。

Isaev 在 [Isa18b]中取得了一些进展。在该论文中，Isaev 定义了类型理论之间 Morita 等价的概念，并给出了该概念的一些刻画。在没有UIP 的情况下，还证明了第一个保守性结果，表明具有弱单位类型或严格单位类型的类型理论是 Morita 等价的。

Isaev [Isa18a]以及 Kapulkin 和 Lumsdaine [KL16, KL21b], 在类型理论的模型范畴上构造 Quillen 模型结构或半模型结构，与我们的工作也极为相关。特别是，正如 [KL16], 中所述，Hofmann 的保守性定理恰好证明了从内涵类型论和外延类型论的初始模型之间的态射 $\mathbf{0}_{\mathsf{ITT}} \to \mathbf{0}_{\mathsf{ETT}}$ 是其半模型结构中的平凡纤维化。同一半模型结构中的弱等价对应于一种比平凡纤维化更弱的保守性概念。Isaev 对 Morita 等价的定义依赖于这一弱等价概念。

本文建立在上述工作的基础之上。Isaev 考虑的是类型理论之间任意态射的 Morita 等价概念，而我们将注意力限制在弱类型论到严格类型论的方程扩张 $\mathcal{T} \to \mathcal{T}_E$ 上：通过一个方程族 E进行扩张，这些方程应在 $\mathcal{T}$中弱成立，并在 $\mathcal{T}_E$中严格成立。随后，我们给出理论 $\mathcal{T}$和 $\mathcal{T}_E$ 成为 Morita 等价的充分条件。

这种情况可以与其他著名的相干定理相比较，例如 Mac Lane 关于幺半范畴的相干定理 [Lan63]。这些定理通常可以用多种不同方式表述。例如，下面给出两种表述幺半范畴相干定理的相关方式。

(1) 每个（弱）幺半范畴都与某个严格幺半范畴幺半等价。(2) 在自由生成的幺半范畴中，任何由结合子和单位子构成的图表都交换。

陈述 (1) 通常是我们想要使用的：它使我们能够把任意弱幺半范畴当作严格幺半范畴来处理。不过，陈述 (2) 或许更容易证明，因为自由幺半范畴可以看作语法对象，相对容易明确描述和理解。参见 [JS91] ，其中给出了一个依赖陈述 (2) 来证明陈述 (1) 的证明。对于幺半范畴，实际上可以使用类似于 Yoneda 引理的表示定理，更直接地证明陈述 (1)。这种方法似乎不适用于我们所关注的相干定理。

本文的主要结果是一个针对类型理论的相干定理，它类似于陈述 (1) 可由陈述 (2) 推出的这一事实。该定理指出，要确立方程扩张 $\mathcal{T} \to \mathcal{T}_E$ 的保守性，只需验证由 E 的方程在 $\mathcal{T}$ 上自由生成的 ∞-同余存在且是 0-截断的。这个 0-截断性条件表达了与以下事实相同的思想：在自由生成的幺半范畴中，由结合子和单位子构成的每个图表都交换。

一般来说，我们在 二阶广义代数理论（SOGAT）及其分类 $(\Sigma, \Pi_{\mathsf{rep}})$-CwF 的层面上工作。SOGAT 对应于由可表示映射范畴分类的理论类，这类范畴由 Uemura [Uem19] 引入。一阶广义代数理论也是 SOGAT，因此我们的结果也适用于非类型论的理论，例如幺半范畴等。SOGAT $\mathcal{T}$ 由其分类 $(\Sigma, \Pi_{\mathsf{rep}})$-CwF 指定，也记作 $\mathcal{T}$；它可以被视为某个类型论的句法模型。SOGAT 在 $(\Sigma, \Pi_{\mathsf{rep}})$-CwF 中具有函子语义。即使只对某个特定理论感兴趣，显式地使用 SOGAT 也很有优势。事实上，许多语义条件可以直接在 $(\Sigma, \Pi_{\mathsf{rep}})$-CwF $\mathcal{T}$ 的层面上，以句法形式表述得更简洁。

SOGAT $\mathcal{T}$ 上的 ∞-同余概念是在分类 $(\Sigma,\ \Pi_{\mathsf{rep}})$-CwF 的层面上定义的。非正式地说，$\mathcal{T}$ 上的 1-同余是将集合值 $(\Sigma,\ \Pi_{\mathsf{rep}})$-CwF $\mathcal{T}$ 扩展为集合胚值 $(\Sigma,\ \Pi_{\mathsf{rep}})$-CwF；这为 $\mathcal{T}$ 的上下文、代换、类型和项集合赋予满足若干条件的等价关系。相应地，∞-同余应是将 $\mathcal{T}$ 扩展为空间值 $(\Sigma,\ \Pi_{\mathsf{rep}})$-CwF；这为 $\mathcal{T}$ 的所有组成部分赋予 ∞-群胚结构。

定义 ∞-同余需要从众多 ∞-群胚模型中作出选择。我们不采用例如 Kan 单纯集合，而是利用这样一个事实： ∞-群胚与带恒等类型的类型论模型密切相关。我们不使用空间值 $(\Sigma,\ \Pi_{\mathsf{rep}})$-CwF，而使用带恒等类型的 $(\Sigma,\ \Pi_{\mathsf{rep}})$-CwF，即 $(\Sigma,\ \Pi_{\mathsf{rep}},\ \mathrm{Id})$-CwF。在本工作的初稿中，这一做法受到 Brunerie 关于 ∞-群胚的类型论定义 [Bru16]的启发。另一种观点是，带恒等类型的类型论模型对应于具有结构的 ∞-范畴。使用 $(\Sigma,\ \Pi_{\mathsf{rep}},\ \mathrm{Id})$-CwF 时，从理念上说，我们是在使用可表示映射 ∞-范畴。Nguyen 和 Uemura 近期利用可表示映射 ∞-范畴 [NU22]为 ∞-类型理论赋予函子语义，从而推广了可表示映射范畴中 1-类型理论的函子语义。

本文没有给出我们的相干定理的任何应用，而是着重证明适用于任意 SOGAT 的一般性结果。要将其用于实际应用，还有两项工作尚未完成，详见第 9 节。首先，我们需要证明猜想 6.3，它基本上断言：当 $\mathcal{T}$ 满足外部单值性 [Boc22] 时，我们构造的由 E 生成的 ∞ 同余是有意义的。其次，我们需要找到证明具体理论满足 0-截断性条件的方法。我们认为，在大多数情况下，这种 0-截断性可以作为同伦规范化证明的推论得到。严格规范化断言每个项都有唯一的范式；而同伦规范化则断言每个项的范式构成一个可缩空间。Uemura 最近提出了一种适用于 ∞ 型理论的通用规范化证明方案 [Uem22], ，可用于证明这类同伦规范化结果。由于我们研究的是 $(\Sigma,\ \Pi_{\mathsf{rep}},\ \mathrm{Id})$-上下文范畴，而不是 ∞ 型理论，因此该证明无法直接移植到我们的情形中，但我们相信，可以用类似的方法证明所需的结果。

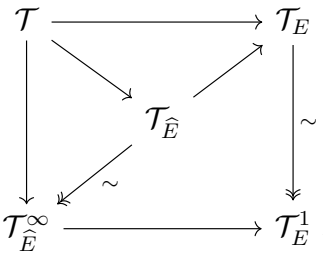
论文结构。第 2 节介绍我们的记号和约定，并回顾带族范畴（CwF）的概念及相关定义。我们利用预层范畴的内语言来描述我们的构造。特别是，我们通常不在外部处理 CwF，而更倾向于在预层范畴内部处理族。

在第 3 节中，我们定义弱恒等类型的结构，并说明这些结构可以从一个族提升到其望远镜族。这意味着，即使不存在 Σ-类型，这些结构仍然表现良好。

在第 4 节中，我们回顾二阶广义代数理论（SOGAT）的定义，以及它们在 $(\Sigma, \Pi_{\mathsf{rep}})$-CwF 中的函子语义。我们沿用作者关于 SOGAT 外部单值性的论文 [Boc22] 中的表述。示例包括范畴、幺半范畴等理论，以及具有各种类型结构的类型论。我们还回顾配备同伦关系的 SOGAT 的外部单值性概念。此外，我们还定义配备同伦关系的 SOGAT 模型之间的平凡纤维化、纤维化和弱等价类。

在第 5 节中，我们引入 SOGAT 的方程扩张 $\mathcal{T} \to \mathcal{T}_E$ 概念，其中 E 是 $\mathcal{T}$ 中的一组同伦，它们在 $\mathcal{T}_E$ 中变为严格等式。我们讨论了一些范畴论和类型论示例。我们还通过调整 Isaev 对 Morita 等价 [Isa18b] 的定义，明确了方程扩张的保守性概念。

在第 6 节中，我们引入部分饱和的概念：若一个 $(\Sigma, \Pi_{\mathsf{rep}}, \mathrm{Id})$-CwF $\mathcal{C}$ 带有一个态射 $\mathcal{T} \to \mathcal{C}$，并且其中的同伦可以提升到 $\mathcal{C}$的恒等类型中，则称它关于一组同伦 E 是部分饱和的。这推广了外部单值性的规格说明中使用的（完全）饱和概念。接着，我们将 $\mathcal{T}^{\infty}_{\widehat{E}}$定义为在 $\mathcal{T}$之下、关于E部分饱和的 $(\Sigma, \Pi_{\mathsf{rep}}, \mathrm{Id})$-CwF 中的始对象。它可以看作是由$E$的同伦自由生成的 ∞-同余；其恒等类型的元素是 E中同伦的提升的复合与高维复合。下一步，我们来考察以下图表。



模型 $\mathcal{T}_{\widehat{E}}$ 是 $\mathcal{T}^{\infty}_{\widehat{E}}$ 的子上下文范畴，由不包含恒等类型的上下文和类型张成。上下文范畴 $\mathcal{T}^{1}_{E}$ 是通过向 $\mathcal{T}^{\infty}_{\widehat{E}}$ 添加等式反射得到的，或者等价地说，是通过向 $\mathcal{T}_E$ 添加外延相等类型得到的。

要证明方程扩张 $\mathcal{T} \to \mathcal{T}_E$ 是 Morita 等价，只需证明 $\mathcal{T} \to \mathcal{T}_{\widehat{E}}$ 和 $\mathcal{T}_{\widehat{E}} \to \mathcal{T}_E$ 都是等价。

我们将证明 $\mathcal{T} \to \mathcal{T}_{\widehat{E}}$ 是等价（根据三取二性质，这等价于证明 $\mathcal{T} \to \mathcal{T}^{\infty}_{\widehat{E}}$）视为证明 $\mathcal{T}^{\infty}_{\widehat{E}}$ 确实是一个 ∞-同余。

猜想 (猜想 6.3 的简化表述)。 如果 $\mathcal{T}$满足外部单值性且是余纤维化的，那么 $\mathcal{T} \to \mathcal{T}^{\infty}_{\widehat{E}}$就是一个等价。」

我们将在第 9 节讨论这个猜想。对于大多数例子，可以使用 [Boc22] 的工具证明外部单值性。

本文的主定理涉及第二个态射 $\mathcal{T}_{\widehat{E}} \to \mathcal{T}_E$。

定理 （定理 8.1 的简化表述）。 如果 $\mathcal{T}^{\infty}_{\widehat{E}}$ 相对于 $\mathcal{T} \to \mathcal{T}^{\infty}_{\widehat{E}}$ 仅为 0-截断的，那么 $\mathcal{T}_{\widehat{E}} \to \mathcal{T}_E$ 是一个等价。

$(\Sigma, \Pi_{\mathsf{rep}}, \mathrm{Id})$-上下文范畴 $\mathcal{T}^{\infty}_{\widehat{E}}$是 0-截断的，意味着其所有类型都是 h-集合。仅仅是 0-截断的，意味着我们只知道见证 0-截断性的项的纯粹存在性。相对于 $\mathcal{T} \to \mathcal{T}^{\infty}_{\widehat{E}}$是 0-截断的，意味着这仅对 $\mathcal{T} \to \mathcal{T}^{\infty}_{\widehat{E}}$ 的像中的上下文成立。

在第 7 节中，我们讨论一阶广义代数理论模型的同余与商。主定理的证明需要构造 $(\Sigma, \Pi_{\mathsf{rep}})$-上下文范畴的商，其中同余是将集合值模型扩展为集合胚值模型。同余的广义代数理论模型范畴是余完备的，因此商总是存在，但一般而言它们的性质并不理想：商嵌入并不总是平凡纤维化（在每一种类上都是满射）。我们表明，将关注范围限制在纤维化的 同余上即可解决这一问题；纤维化同余是将集合值模型扩展为满足某种纤维化条件的集合胚值模型。纤维化同余的商嵌入总是平凡纤维化；反过来，每个平凡纤维化都是某个纤维化同余的商嵌入。

在第 8 节中，我们通过证明在其假设下，映射$\mathcal{T}_{\widehat{E}} \to \mathcal{T}_E$ 是某个商嵌入的收缩来证明定理 8.1。我们依赖于上一节建立的纤维化同余关系理论。

在第 9 节中，我们将讨论一些猜想，以及应用所需的未来工作。

2. 背景

本节回顾带族范畴（CwFs）中类型理论的语义，并介绍本文将使用的工具和记号。我们将特别利用预层范畴 **预层**$(\mathcal{C})$ 的内部类型论语言，作为定义和处理 CwF $\mathcal{C}$ 上类型论结构的工具。

2.1. 元理论和基本记号。 我们在构造性元理论中工作，例如具有足够多宇宙并包含所有 QIIT 的外延类型论。在某些情况下，我们需要区分分裂满射函数和非分裂满射函数。我们采用《HoTT》一书中的术语；使用副词仅仅表示我们拥有某个集合的命题截断中的一个元素。例如，函数 $f : A \to B$ 是分裂满射，当且仅当对于每个 $b : B$，都存在某个元素 $a : A$，使得 $f(a) = b$。函数 $f : A \to B$ 是非分裂满射，当且仅当对于每个 $b : B$，仅仅存在某个 $a : A$，使得 $f(a) = b$。

依赖函数的集合写作 $(a : A) \to B(a)$，依赖函数则通过 $(a : A) \mapsto b(a)$ 引入。当函数参数可以从上下文中推断出来时，我们有时会省略它们。例如，给定函数 $f : (a : A) \to B(a) \to C(a)$，以及元素 $a : A$和 $b : B(a)$，我们可以直接写作 $f(b)$ 或 $f_a(b)$，而不写 $f(a, b)$。

依赖对的集合记作 $(a : A) \times B(a)$，依赖对则通过 (a, b) 引入。

我们利用将外延类型论解释到预层拓扑斯中的解释。由于我们的元理论是构造性的，我们的任何外部构造也都可以在预层拓扑斯中得到解释。

2.2. **族**。

定义 2.1. 一个**族** $\mathbb{C}$ 由一个集合 $\mathbb{C}.\mathsf{Ty}$: 集合 的类型 以及一个依赖集合$\mathbb{C}.\mathsf{Tm}$: $\mathbb{C}.\mathsf{Ty}$ →集合 的项 或元素组成。我们常用 $\mathbb{C}$ 表示 $\mathbb{C}.\mathsf{Ty}$，并将 $\mathbb{C}.\mathsf{Tm}$ 用作从类型到集合的隐式强制转换。」

存在一个由族及族态射构成的范畴$\mathbf{Fam}$ 。它等价于箭头范畴 $\mathbf{集合}^{\to}$。

定义 2.2. 一个族 $\mathbb{C}$ 的**限制** 是一个映射 $\iota : \mathsf{Ty}' \to \mathbb{C}.\mathsf{Ty}$。它诱导出一个**受限族** $\mathbb{C}'$，其中 $\mathbb{C}'.\mathsf{Tm}(A) = \mathbb{C}.\mathsf{Tm}(\iota(A))$。由此还诱导出一个族态射$\mathbb{C}' \to \mathbb{C}$。如果一个族态射由族限制诱导而来，或者等价地说，它对项的作用是双射的，我们就称其为**笛卡尔** 。」

2.3. **类型结构**。

定义 2.3. 族 $\mathbb{C}$ 上的一个**1-类型结构** 由一个类型$\mathbf{1}$: $\mathbb{C}$ 和一个同构 $\mathbb{C}.\mathsf{Tm}(\mathbf{1}) \cong \{\star\}$组成。」

定义 2.4. 族 $\mathbb{C}$ 上的一个 Σ**-类型结构** 由以下内容组成：对于每个 A : $\mathbb{C}$ 和 B : $A \to \mathbb{C}$，一个类型 $\Sigma(A, B)$: $\mathbb{C}$ ，以及一个同构 $\mathbb{C}.\mathsf{Tm}(\Sigma(A, B)) \cong (a : A) \times B(a)$。」

定义 2.5. 族 $\mathbb{C}$ 上的一个 Π**-类型结构** 由以下内容组成：对于每个 A : $\mathbb{C}$ 和 B : $A \to \mathbb{C}$，一个类型 $\Pi(A, B)$: $\mathbb{C}$ ，以及一个同构 $\mathbb{C}.\mathsf{Tm}(\Pi(A, B)) \cong ((a : A) \to B(a))$。」

通常，一个族并不对任意的 Π-类型封闭，而只对定义域属于另一族的Π-类型封闭。

定义 2.6。 设 $\mathbb{C}$ 和 $\mathbb{D}$ 为两个族。 $\mathbb{D}$ 上的一个 Π**-类型结构** （其**元数**属于 $\mathbb{C}$ ）由以下数据组成：对每个 $A : \mathbb{C}$ 和 $B : A \to \mathbb{D}$，给定一个类型 $\Pi(A,\ B) : \mathbb{D}$ ，以及一个同构$\mathbb{D}.\mathsf{Tm}(\Pi(A,\ B)) \cong ((a : A) \to B(a))$。」

定义 2.7。 设 $\mathbb{C}$ 为一个族，并带有一个限制 $\mathbb{C}_{\mathsf{rep}} \to \mathbb{C}$。 $\mathbb{C}$ 上的一个 Π_{rep}**-类型结构** 由以下组成： $\mathbb{C}$ 上的一个 Π-类型结构，其**元数**属于 $\mathbb{C}_{\mathsf{rep}}$。」

$\mathbb{C}_{\mathsf{rep}}$ 的类型称为可表示类型。限制 $\mathbb{C}_{\mathsf{rep}} \to \mathbb{C}$ 不一定是单射的，但我们通常可以假定它是单射的并将其省略。

定义 2.8。 一个 $(\Sigma,\ \Pi_{\mathsf{rep}})$-族是一个族 $\mathbb{C}$，并带有一个限制 $\mathbb{C}_{\mathsf{rep}} \to \mathbb{C}$，满足 $\mathbb{C}$ 和 $\mathbb{C}_{\mathsf{rep}}$ 都具有 **1**- 和 Σ- 类型结构，且 $\mathbb{C}$ 具有一个 Π_{rep}- 类型结构。」

类似地，我们也可以讨论 Σ-族或 (Σ, Π)-族。

在处理 $(\Sigma, \Pi_{\mathsf{rep}})$-族时，我们有时可能会在某些构造中省略提及 $\mathbb{C}_{\mathsf{rep}}$ 。此时应理解为，对 $\mathbb{C}_{\mathsf{rep}}$应用相同的构造。例如， $\mathbb{C}$ 和 $\mathbb{C}_{\mathsf{rep}}$ 的**1**-类型与 Σ-类型是不同的，但在某些构造中，我们可能只提及 $\mathbb{C}$的**1**-类型与 Σ-类型。

2.4. 带族范畴。我们回顾用于建模类型论的上下文范畴（CwF）的概念。

我们首先回顾局部可表示预层的定义，它用于编码类型论模型中的上下文扩展。这个定义是对可表示自然变换这一概念的重新表述；Awodey [Awo18] 曾用它来定义自然模型，而自然模型与带族范畴等价。

定义 2.9. 设 Y 是预层 X 上的依赖预层。若对于每个元素 $x\colon X(\Gamma)$，预层 $Y_{|x} : (\mathcal{C}/\Gamma)^{\mathsf{op}} \to$ **集合** 可表示，则称 Y 是**局部可表示的**，其中

$$Y_{|x}(\rho : \Delta \to \Gamma) \triangleq Y(x[\rho]).$$

在这种情况下，其表示对象由一个**扩展上下文** $\Gamma.Y[x]$ 和一个**投影映射** $\boldsymbol{p}_x$ 组成：$\Gamma.Y[x] \to \Gamma$。存在一个**泛元素** $\boldsymbol{q}_x\colon\ Y(x[\boldsymbol{p}_x])$。它们满足以下泛性质：对于任意其他对象 Δ、映射 $\gamma : \Delta \to \Gamma$ 和元素 $a\colon Y(x[\gamma])$，都存在唯一的映射 $\langle \gamma, a\rangle\colon \Delta \to \Gamma.Y[x]$，使得 $\boldsymbol{p}_x \circ \langle \gamma, a\rangle = \gamma$ 和$\boldsymbol{q}_x[\langle \gamma, a\rangle] = a$。」

定义 2.10。一个**带族范畴**（CwF）由一个范畴 $\mathcal{C}$（带有一个终对象）以及预层$\mathbf{Psh}(\mathcal{C})$中的一个全局族 $\mathbb{C}$ 组成，并且 $\mathbb{C}.\mathsf{Tm}$是局部可表示的。」

一个$(\Sigma, \Pi_{\mathsf{rep}})$-CwF是一个CwF $\mathcal{C}$，其族 $\mathbb{C}$ 是$\mathbf{Psh}(\mathcal{C})$中的一个$(\Sigma, \Pi_{\mathsf{rep}})$-族。类似地，我们有 Σ-CwF、(Σ, Π)-CwF、(Σ, Eq)-CwF、$(\Sigma, \Pi_{\mathsf{rep}}, \mathsf{Id})$-CwF等。（恒等类型和相等类型将在第3节中具体说明。）$(\Sigma, \Pi_{\mathsf{rep}})$-CwF的1-范畴记作$\mathbf{CwF}_{\Sigma,\Pi_{\mathsf{rep}}}$，其他结构化CwF的1-范畴也用类似方式表示。

给定一个CwF $\mathcal{C}$，我们用$(\Gamma \vdash A\ \mathsf{type}) \in \mathcal{C}$ 表示 A 是上下文Γ中的一个类型，用$(\Gamma \vdash a : A) \in \mathcal{C}$ 表示 a 是上下文 Γ中类型 A 的一个项。偶尔我们也会写作$(\gamma :\ \Gamma \vdash A(\gamma)\ \mathsf{type}) \in \mathcal{C}$ 和$(\gamma :\ \Gamma \vdash a(\gamma) :\ A(\gamma)) \in \mathcal{C}$。当 $\mathcal{C}$ 是一个$(\Sigma, \Pi_{\mathsf{rep}})$-CwF时，如果 A 是 Γ上的一个可表示类型，我们就写作$(\Gamma \vdash A\ \mathsf{type}^{\mathsf{rep}}) \in \mathcal{C}$。在空上下文 $1_{\mathcal{C}}$中工作时，我们也可以写作$(A\ \mathsf{type}) \in \mathcal{C}$ 或$(a : A) \in \mathcal{C}$。

我们自由生成了 $(\Sigma, \Pi_{\mathsf{rep}})$-CwF（上下文范畴）。

$$\mathsf{Free}_{\Sigma,\Pi_{\mathsf{rep}}}(\boldsymbol{\Gamma} \vdash), \qquad \mathsf{Free}_{\Sigma,\Pi_{\mathsf{rep}}}(\boldsymbol{\Gamma} \vdash \boldsymbol{A}\ \mathsf{type}), \qquad \mathsf{Free}_{\Sigma,\Pi_{\mathsf{rep}}}(\boldsymbol{\Gamma} \vdash \boldsymbol{A}\ \mathsf{type}_{\mathsf{rep}}),$$

$$\mathsf{Free}_{\Sigma,\Pi_{\mathsf{rep}}}(\boldsymbol{\Gamma} \vdash \boldsymbol{a} : \boldsymbol{A}),$$

其中我们用粗体字母表示生成元。

我们有映射。

$$I^{\mathsf{ty}} : \mathsf{Free}_{\Sigma,\Pi_{\mathsf{rep}}}(\boldsymbol{\Gamma} \vdash) \to \mathsf{Free}_{\Sigma,\Pi_{\mathsf{rep}}}(\boldsymbol{\Gamma} \vdash \boldsymbol{A}\ \mathsf{type}),$$
$$I^{\mathsf{ty}_{\mathsf{rep}}} : \mathsf{Free}_{\Sigma,\Pi_{\mathsf{rep}}}(\boldsymbol{\Gamma} \vdash) \to \mathsf{Free}_{\Sigma,\Pi_{\mathsf{rep}}}(\boldsymbol{\Gamma} \vdash \boldsymbol{A}\ \mathsf{type}_{\mathsf{rep}}),$$
$$I^{\mathsf{tm}} : \mathsf{Free}_{\Sigma,\Pi_{\mathsf{rep}}}(\boldsymbol{\Gamma} \vdash \boldsymbol{A}\ \mathsf{type}) \to \mathsf{Free}_{\Sigma,\Pi_{\mathsf{rep}}}(\boldsymbol{\Gamma} \vdash \boldsymbol{a} : \boldsymbol{A}),$$

它们是通过添加一个新类型、可表示类型或项对（$\Sigma, \Pi_{\mathsf{rep}}$）-上下文范畴进行的泛扩张。我们还有映射

$$E^{\mathsf{ty}} : \mathsf{Free}_{\Sigma,\Pi_{\mathsf{rep}}}(\boldsymbol{\Gamma} \vdash \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}\ \mathsf{type}) \to \mathsf{Free}_{\Sigma,\Pi_{\mathsf{rep}}}(\boldsymbol{\Gamma} \vdash \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}),$$
$$E^{\mathsf{ty}_{\mathsf{rep}}} : \mathsf{Free}_{\Sigma,\Pi_{\mathsf{rep}}}(\boldsymbol{\Gamma} \vdash \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}\ \mathsf{type}_{\mathsf{rep}}) \to \mathsf{Free}_{\Sigma,\Pi_{\mathsf{rep}}}(\boldsymbol{\Gamma} \vdash \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}),$$
$$E^{\mathsf{tm}} : \mathsf{Free}_{\Sigma,\Pi_{\mathsf{rep}}}(\boldsymbol{\Gamma} \vdash \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} : \boldsymbol{A}) \to \mathsf{Free}_{\Sigma,\Pi_{\mathsf{rep}}}(\boldsymbol{\Gamma} \vdash \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}),$$

它们是通过在两个类型、可表示类型或项之间添加一个新方程对（$\Sigma, \Pi_{\mathsf{rep}}$）-上下文范畴进行的泛扩张。这些映射是 $\{I^{\mathsf{ty}}, I^{\mathsf{ty}_{\mathsf{rep}}}, I^{\mathsf{tm}}\}$ 的余对角映射。

我们将考虑由 $\{I^{\mathsf{ty}}, I^{\mathsf{ty}_{\mathsf{rep}}}, I^{\mathsf{tm}}, E^{\mathsf{ty}}, E^{\mathsf{ty}_{\mathsf{rep}}}, E^{\mathsf{tm}}\}$ 的子集生成的各种弱分解系统和正交分解系统。我们也可以类似地考虑其他 CwF 范畴上的分解系统，例如 **上下文范畴**$_\Sigma$，或仅考虑 **上下文范畴**。

在第 4 节中，我们还将考虑任意 SOGAT 的模型范畴上的类似分解系统。

我们从（余纤维化，平凡纤维化）弱分解系统开始。

定义 2.11。 映射 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 在 $(\Sigma, \Pi_{\mathsf{rep}})$-CwF 中，若其在类型、可表示类型和项上的作用均为分裂满射，则称为（分裂）**平凡纤维化** 。」

定义 2.12。在 $(\Sigma, \Pi_{\mathsf{rep}})$-上下文范畴中，映射 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是（非分裂）**平凡纤维化**，当且仅当它在类型、可表示类型和项上的作用均为弱满射。」

分裂平凡纤维化是由 $\{I^{\mathsf{ty}}, I^{\mathsf{ty}_{\mathsf{rep}}}, I^{\mathsf{tm}}\}$ 生成的弱分解系统的右类。左类中的映射称为余纤维化。

外延类型论相对于内涵类型论的保守性可以用平凡纤维化的概念来表述：两个类型理论的初始模型之间唯一的态射 $\mathbf{0}_{\mathsf{ITT}} \to \mathbf{0}_{\mathsf{ETT}}$ 是 CwF 中的非分裂平凡纤维化，也就是说，它在类型和项上的作用都是满射。

Hofmann 的保守性证明 [Hof95] 的整体思路如下。我们构造句法模型 $\mathbf{0}_{\mathsf{ITT}}$ 的一个商 Q。根据该商 Q 和模型 $\mathbf{0}_{\mathsf{ETT}}$ 的泛性质，我们得到一个截面-收缩对 $(\mathbf{0}_{\mathsf{ETT}} \to Q, Q \to \mathbf{0}_{\mathsf{ETT}})$。这表明映射 $\mathbf{0}_{\mathsf{ITT}} \to \mathbf{0}_{\mathsf{ETT}}$ 是商嵌入 $\mathbf{0}_{\mathsf{ITT}} \to Q$ 的一个收缩。由于商嵌入是非分裂平凡纤维化，且非分裂平凡纤维化在收缩下封闭，因此我们得到所需的保守性结果。证明的大部分复杂性都在于商 Q 的构造。

无法构造性地证明 $\mathbf{0}_{\mathsf{ITT}} \to \mathbf{0}_{\mathsf{ETT}}$ 是分裂平凡纤维化。事实上，若能做到这一点，就能通过判定它们在 ITT 中的提升是否相等，来判定 $\mathbf{0}_{\mathsf{ETT}}$ 中各项的相等性。

2.5. **上下文范畴 CwF**。 CwF 的一个重要类别是上下文CwF，其对象和态射实际上由类型和项的列表给出。事实上，从某种角度来看，在类型论语言中，我们从不显式讨论模型的对象和态射，而只讨论存在于给定模型的同一个上下文切片中的类型和项。从这一视角来看，只有上下文模型才是重要的。然而，直接定义上下文模型很复杂（它们的广义代数表示是无限的，因为需要对所有可能的上下文长度进行量化），而且许多中间构造都要经过非上下文模型。因此，将上下文性定义为一般模型的一种性质会更加方便。幸运的是，可以通过$\mathbf{CwF}$[1]上的一个正交分解系统来描述它们。

定义 2.13。 若 CwF 态射 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 在类型和项上的作用均为双射，则称其为**上下文同构**。」

[1]作者从 Christian Sattler 那里了解到上下文化的这一种定义。

上下文同构是由 $\{I^{\mathsf{ty}}, I^{\mathsf{tm}}\}$ 生成的正交分解系统的映射右类，或者等价地，是由 $\{I^{\mathsf{ty}}, E^{\mathsf{ty}}, I^{\mathsf{tm}}, E^{\mathsf{tm}}\}$ 生成的弱分解系统的映射右类。左类中的映射称为**左上下文映射**。

任意 CwF 态射 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 都存在一个唯一的（在同构意义下）分解$\mathcal{C} \to \mathsf{cxlim}(F) \to \mathcal{D}$，其中 $\mathcal{C} \to \mathsf{cxlim}(F)$ 是左上下文的，而 $\mathsf{cxlim}(F) \to \mathcal{D}$是一个上下文同构。CwF $\mathsf{cxlim}(F)$ 称为 F 的**上下文像**。

特别地，给定任意 $\mathcal{C}$： **上下文范畴**，唯一的态射 $\mathbf{0} \to \mathcal{C}$ 都具有这样的分解。其上下文像称为 $\mathcal{C}$ 的**上下文核**，记作 $\mathsf{cxl}(\mathcal{C})$。映射 $\mathsf{cxl}(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$ 按定义是一个上下文同构。当映射 $\mathsf{cxl}(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$ 同时也是 CwF 的同构时，我们称 $\mathcal{C}$ 是**上下文化的**。

这个上下文化的定义等价于通常的定义，例如可见于 [CCD19]。

命题 2.14。 当且仅当存在一个长度函数 l ： 对象$_{\mathcal{C}} \to \mathbb{N}$，使得对于任意 $\Gamma \in \mathcal{C}$，若 $l\,(\Gamma) = 0$，则 $\Gamma = 1_{\mathcal{C}}$；并且若 $l\,(\Gamma) = n+1$，则存在唯一的 $\Gamma' \in \mathcal{C}$ 和 $(\Gamma' \vdash A \text{ 类型}) \in \mathcal{C}$，使得 $\Gamma = \Gamma'.A$。 □

我们将$\mathbf{CwF}^{\mathsf{cxl}}$ 记作由上下文 CwF 所张成的$\mathbf{CwF}$ 的满子范畴。上下文核函子 cxl: $\mathbf{CwF} \to \mathbf{CwF}^{\mathsf{cxl}}$ 是$\mathbf{CwF}^{\mathsf{cxl}}$的右伴随。这表明$\mathbf{CwF}^{\mathsf{cxl}}$ 是$\mathbf{CwF}$的余反射子范畴。

通过考虑由 $\{I^{\mathsf{ty}}, E^{\mathsf{ty}}, I^{\mathsf{ty}_{\mathsf{rep}}}, E^{\mathsf{ty}_{\mathsf{rep}}}, I^{\mathsf{tm}}, E^{\mathsf{tm}}\}$ 生成的正交分解系统，即$\mathbf{CwF}_{\Sigma}$中的上下文同构,Π_{rep} 也需要在可表示类型上具有双射作用，这一定义可以推广到$\mathbf{CwF}_{\Sigma,\Pi_{\mathsf{rep}}}$ 。

2.6. **族与望远镜的并**。 我们并不总是假设存在 Σ-类型。为在某些构造中规避其缺失，我们需要处理望远镜族，其类型和项是基族中的类型与项所组成的有限序列。将它们表示为对所有 n 的长度为 n 的望远镜的余积 $\mathbb{N}$较为方便，并使用族的并[2]这一概念，将长度为 n 的望远镜的概念推广为更为异质的概念。

定义 n 2.15. 设 $\mathbb{C}$ 和 $\mathbb{D}$ 是两个族。它们的**联结** $\mathbb{C} * \mathbb{D}$ 是如下定义的族 y:

$$(\mathbb{C} * \mathbb{D}).\mathsf{Ty} \triangleq (A : \mathbb{C}) \times (B : A \to \mathbb{D})$$
$$(\mathbb{C} * \mathbb{D}).\mathsf{Tm}(A, B) \triangleq (a : A) \times (b : B(a))$$ 」

换言之， $\mathbb{C}$ 和 $\mathbb{D}$ 的联结是由长度为 2 的望远镜组成的族，其第一和第二个分量分别来自 $\mathbb{C}$ 和 $\mathbb{D}$。

联结运算是 **Fam** 上的幺半群乘积。

定义 2.16. 若 $\mathbb{C}$ 是一个族且 $n : \mathbb{N}$，则 $\mathbb{C}^{*n}$ 这一**长度为** n 的**望远镜**族是 $\mathbb{C}$ 的 n 重迭代联结。」

定义 2.17. 若 $\mathbb{C}$ 是一个族，则 $\mathbb{C}$ 的**望远镜**族是余积 $\mathbb{C}^{\star} \triangleq \coprod_{n:\,\mathbb{N}} \mathbb{C}^{*n}$。」

如果 $\mathcal{C}$ 是一个上下文范畴，我们可以将其对象视为类型的闭望远镜（即预层 $\mathbb{C}^{\star}.\mathsf{Ty}$ 的全局元素），并将从 Γ 到 Δ 的态射视为

[2]作者从 Christian Sattler 处了解到这种表述方式。

从 $\mathbb{C}^\star.\mathrm{Tm}(\Gamma)$到 $\mathbb{C}^\star.\mathrm{Tm}(\Delta)$的自然变换。当 $\mathcal{C}$ 是任意一个上下文范畴时，这就明确描述了 $\mathcal{C}$的上下文核的对象和态射。

3. 弱恒等类型

本节定义恒等类型的弱形式和严格形式。一般而言，弱类型结构的计算规则由内部识别表达，而严格类型结构的计算规则则由严格等式表达。这些概念不应与弱稳定和严格稳定的类型结构混淆。由于具有弱计算规则的类型理论是本文的主要关注点，我们将简短名称保留给这一概念。在有歧义的情况下，我们可以称之为弱计算型和严格计算型类型结构。在文献中，严格恒等类型有时指满足恒等证明唯一性原则的 (-1)-截断恒等类型。

3.1. 定义。在存在（严格） Σ-类型和 Π-类型的情况下，定义恒等类型消去子的方式有几种等价形式。Martin-Löf 消去子由以下规则给出。

$$\textsc{Martin-Löf eliminator}\quad \frac{\begin{array}{c} A\ \mathsf{type} \qquad x:A, y:A, p:\mathsf{Id}_A(x,y) \vdash D(x,y,p)\ \mathsf{type} \\ x:A \vdash d(x) : D(x,x,\mathsf{refl}) \qquad x:A \qquad y:A \qquad p:\mathsf{Id}_A(x,y) \end{array}}{\mathsf{J}(D,d,y,p) : D(x,y,p)}$$

在缺少 Π-类型时，Martin-Löf 消去子似乎甚至不足以定义传输。

在 [GG08]，中，提出了 Martin-Löf 消去子的一个变体，现称为 Martin-Löf 消去子的 Frobenius 变体。其思路是允许消去的目标类型族 D 依赖于任意参数望远镜 Δ，从而绕过缺少 Π-类型的问题。

$$\textsc{Frobenius Martin-Löf eliminator}\quad \frac{\begin{array}{c} A\ \mathsf{type} \qquad x:A, y:A, p:\mathsf{Id}_A(x,y) \vdash \Delta(x,y,p)\ \mathsf{type}^\star \\ x:A, y:A, p:\mathsf{Id}_A(x,y), \delta:\Delta(x,y,p) \vdash D(x,y,p,\delta)\ \mathsf{type} \\ x:A, \delta:\Delta(x,x,\mathsf{refl}) \vdash d(x,\delta) : D(x,x,\mathsf{refl},\delta) \\ x:A \qquad y:A \qquad p:\mathsf{Id}_A(x,y) \qquad \delta:\Delta(x,y,p) \end{array}}{\mathsf{J}(D,d,x,y,p,\delta) : D(x,y,p,\delta)}$$

另一种选择是 Paulin-Mohring 消去子，也称为基于路径归纳或单侧消去子。

$$\textsc{Paulin-Mohring eliminator}\quad \frac{\begin{array}{c} A\ \mathsf{type} \qquad x:A \qquad y:A, p:\mathsf{Id}_A(x,y) \vdash D(y,p)\ \mathsf{type} \\ d(x) : D(x,\mathsf{refl}) \qquad y:A \qquad p:\mathsf{Id}_A(x,y) \end{array}}{\mathsf{J}(D,d,y,p) : D(y,p)}$$

North [Nor19] 和 Isaev [Isa21] 分别独立证明了这样一个事实：在存在 Σ-类型的情况下，Paulin-Mohring 消去子等价于 Martin-Löf 消去子的 Frobenius 变体。

我们使用 Paulin-Mohring 消去子的弱变体，其计算规则被弱化为弱相等性。我们将证明，即使缺少 Σ-类型，也可以导出其他消去子。事实上，我们将证明弱恒等类型可以提升

从一个族 $\mathbb{C}$ 到其望远镜族 $\mathbb{C}^\star$，即其类型为 $\mathbb{C}$ 的类型列表的族；弗罗贝尼乌斯消去子的推导可视为这一事实的推论。该推导的主要步骤最初由 András Kovács 提出。Christian Sattler 利用族的并这一概念简化了证明。

定义 3.1。设 $\mathbb{C}$ 是一个族。$\mathbb{C}$ 上的**恒等类型引入结构** 由以下运算组成：

$$\begin{aligned}&\mathsf{Id} : (A : \mathbb{C})(x : A)(y : A) \to \mathbb{C},\\&\mathsf{refl} : (A : \mathbb{C})(x : A) \to \mathsf{Id}_A(x, x).\end{aligned}$$ ⌟

给定恒等类型引入结构和 $A : \mathbb{C}$，我们将 IdFrom(x) 记作以 $x : A$ 为固定左端点的恒等识别集合。

$$\mathsf{IdFrom}(x) \triangleq (y : A) \times \mathsf{Id}_A(x, y).$$

定义 3.2. 设 $\mathbb{C}$ 和 $\mathbb{D}$ 为两个具有恒等类型引入结构的族。从 $\mathbb{C}$ 到 $\mathbb{D}$ 的**弱恒等类型消去结构** 由以下运算构成：

$$\begin{aligned}\mathsf{J} \ &: (A : \mathbb{C})(x : A)(D : \mathsf{IdFrom}(x) \to \mathbb{D})\\&\quad (d : D(x, \mathsf{refl}))(p : \mathsf{IdFrom}(x))\\&\quad \to D(p)\\\mathsf{J}_\beta &: (A : \mathbb{C})(x : A)(D : \mathsf{IdFrom}(x) \to \mathbb{D})\\&\quad (d : D(x, \mathsf{refl}))\\&\quad \to \mathsf{Id}(\mathsf{J}(D, d, (x, \mathsf{refl})), d)\end{aligned}$$ ⌟

一个关于族 $\mathbb{C}$ 的**弱恒等类型结构** 由一个关于 $\mathbb{C}$ 的恒等类型引入结构，以及一个从 $\mathbb{C}$ 到$\mathbb{C}$的弱恒等类型消去结构组成。

定义 3.3。如果弱恒等类型结构对所有相关参数满足以下方程，则称其为**严格的**：

$$\begin{aligned}&\mathsf{J}(D, d, (x, \mathsf{refl})) = d,\\&\mathsf{J}_\beta(D, d) = \mathsf{refl}.\end{aligned}$$ ⌟

给定一个配备弱恒等类型的内部族 $\mathbb{C}$，我们可以导出传输运算：

$$\mathsf{transport} : (D : A \to \mathbb{C})(p : \mathsf{Id}(x, y)) \to D(x) \to D(y).$$

我们可以用 $p^\star(d)$ 代替 transport(D, p, d)，将族 D 保持为隐式 .

同伦类型论的标准概念，例如可缩类型、命题类型、等价等，都可以被定义。然而，由于我们可能没有 Σ-类型或 Π-类型，它们并不总是由该理论中的类型编码。

定义 3.4。族 $\mathbb{C}$ 上的**相等类型结构**是一种满足以下两个方程的弱恒等类型结构

$$\begin{aligned}&\mathsf{Id}(A, x, y) \to (x = y),\\&(p : \mathsf{Id}(A, x, y)) \to (p = \mathsf{refl}).\end{aligned}$$ ⌟

对于相等类型结构，我们将使用 Eq 而非 Id。

3.2. **将类型结构提升到望远镜**。 在本小节中，我们证明，族 $\mathbb{C}$ 上的 Id 类型结构可以提升到望远镜族 $\mathbb{C}^\star$。文献中已有类似结果，并已用于相关研究 [Gar09, KL21b]。我们将这些结果推广到弱类型结构，以及不含局部可表示元素的族。这些构造已在 Agda 中形式化。[3] 详细构造请参阅形式化文档。

构造 3.5. 设 $\mathbb{C}$ 和 $\mathbb{D}$ 为带有恒等类型引入结构的族，并且具有一个从 $\mathbb{C}$ 到 $\mathbb{D}$ 的弱恒等类型消去结构。

然后 th 该族 $\mathbb{C} * \mathbb{D}$配备了以下恒等类型引入结构：

$$\mathsf{Id}_{(A,B)}((x_c, x_d), (y_c, y_d)) \triangleq (\mathsf{Id}_A(x_c, y_c), \lambda p_c \mapsto \mathsf{Id}_{B(y_c)}(p_c^\star(y_c), y_d)$$
$$\mathsf{refl}_{(A,B)}(x_c, x_d) \triangleq (\mathsf{refl}, \mathsf{tr}_\beta),$$

其中 tr_β 是类型为 $\mathsf{Id}(\mathsf{refl}^\star(x_c)\ x_c)$ 的某个项，可用 J_β 定义。 」

构造 3.6. 设 $\mathbb{C}$、 $\mathbb{D}$ 和 $\mathbb{E}$ 是带有恒等类型引入结构的族，并且分别具有从 $\mathbb{C}$ 到 $\mathbb{D}$ 和 $\mathbb{E}$、从 $\mathbb{D}$ 到 $\mathbb{D}$ 和 $\mathbb{E}$，以及从 $\mathbb{E}$ 到 $\mathbb{E}$ 的恒等类型消去结构。

那么，就存在从 $(\mathbb{C} * \mathbb{D})$ 到 $\mathbb{E}$ 以及从 $\mathbb{C}$ 到 $(\mathbb{D} * \mathbb{E})$ 的弱恒等类型消去结构。」

构造 3.7。设 $\mathbb{C}$ 是一个带有弱恒等类型结构的族。

然后，对于每个 $n : \mathbb{N}$，长度为 n 的 $\mathbb{C}^{*n}$ 族都具有规范的恒等类型引入结构；并且对于每个 n，$m : \mathbb{N}$，都存在一个从 $\mathbb{C}^{*n}$ 到 $\mathbb{C}^{*m}$ 的弱恒等类型消去结构。

证明。 通过反复应用构造 3.5 和构造 3.6。 □

在所有这些构造中，如果所有给定的恒等类型都是严格的，那么所构造的类型结构也都是严格的。

3.3. **参数化消去结构**。

定义 3.8. 设 $\mathbb{C}$、 $\mathbb{D}$ 和 $\mathbb{E}$ 为族，并配备关于 $\mathbb{C}$ 和 $\mathbb{E}$ 的恒等类型引入结构。

一个从 $\mathbb{C}$ 到 $\mathbb{E}$、以 $\mathbb{D}$ 为参数的参数化恒等类型消去结构由若干运算组成。

$$\begin{aligned}
\mathsf{J} \ &: (A : \mathbb{C})(x : A)(Q : \mathsf{IdFrom}(x) \to \mathbb{D}) \\
&\quad (D : (p : \mathsf{IdFrom}(x))(q : Q(p)) \to \mathbb{E}) \\
&\quad (d : (q : Q(x, \mathsf{refl})) \to D((x, \mathsf{refl}), q)) \\
&\quad (p : \mathsf{IdFrom}(x))(q : Q(y)) \\
&\quad \to D(p, q) \\
\mathsf{J}_\beta &: (A : \mathbb{C})(x : A)(Q : \mathsf{IdFrom}(x) \to \mathbb{D}) \\
&\quad (D : (p : \mathsf{IdFrom}(x))(q : Q(y)) \to \mathbb{E}) \\
&\quad (d : (q : Q(x, \mathsf{refl})) \to D((x, \mathsf{refl}), q)) \\
&\quad \to \mathsf{Id}(\mathsf{J}(Q, D, d, (x, \mathsf{refl})), d(q))
\end{aligned}$$

」

[3] The Agda 文件可在 https://rafaelbocquet.gitlab.io/Agda/20230420_WeakIdType 获取。 s/.

构造 3.9. 假设 $\mathbb{C}$、$\mathbb{D}$ 和 $\mathbb{E}$ 是配备了恒等类型引入结构和恒等类型消去结构的族，其结构分别从 $\mathbb{C}$ 到 $\mathbb{C}$、$\mathbb{D}$ 和 $\mathbb{E}$，从$\mathbb{D}$ 到 $\mathbb{D}$ 和 $\mathbb{E}$，以及从 $\mathbb{E}$ 到 $\mathbb{E}$。

于是，我们可以构造一个从 $\mathbb{C}$ 到 $\mathbb{E}$的参数化恒等类型消去结构，其参数取自 $\mathbb{D}$。」

Paulin-Mohring 恒等类型消去子的 Frobenius 变体，恰好是一个参数取自望远镜族的参数化恒等类型消去结构。

3.4. **具有恒等类型的上下文范畴**。如果上下文范畴 $\mathcal{C}$ 的族 $\mathbb{C}$在 **预层($\mathcal{C}$)** 中具有全局弱恒等类型结构，则称其具有恒等类型。

我们用 **上下文范畴**$_{\mathsf{Id}}$ 表示由具有弱恒等类型的 CwF 构成的范畴。

在同时存在 Π-类型和 Id-类型时，我们总是假定函数外延性成立。我们用**上下文范畴**$_{\Sigma,\ \Pi_{\mathsf{rep}},\mathsf{Id}}$ 表示配备满足函数外延性的弱恒等类型的 $(\Sigma, \Pi_{\mathsf{rep}})$-CwF 范畴。我们用**上下文范畴**$_{\Sigma,\ \Pi_{\mathsf{rep}},\mathsf{Eq}}$ 表示配备外延相等类型的 $(\Sigma, \Pi_{\mathsf{rep}})$-CwF 范畴。

4. 二阶广义代数理论

本节回顾二阶广义代数理论。广义代数理论（GAT）是由一组依赖种类、运算以及它们之间的方程所指定的理论。二阶广义代数理论（SOGAT）通过允许二阶运算来推广 GAT，也就是说，运算的参数可以绑定某些变量。大多数类型理论都可以编码为 SOGAT。任何（一阶）GAT 也可以视为 SOGAT。作为其他例子，我们将考察弱恒等类型的 SOGAT $\mathcal{T}_{\mathsf{Id}}$、幺半范畴的 GAT $\mathcal{T}_{\mathbf{MonCat}}$，以及它们分别扩展为严格恒等类型和严格幺半范畴的理论。

可以在 $\mathbf{CwF}_{\Sigma,\ \Pi_{\mathsf{rep}}}$ 中发展 SOGAT 的函子语义。给定一个 SOGAT$\mathcal{T}$，可以在任意 $(\Sigma, \Pi_{\mathsf{rep}})$-CwF $\mathcal{C}$ 中定义 $\mathcal{T}$ 的模型概念，该模型对应于将 $\mathcal{T}$ 的种类和运算解释为 $\mathcal{C}$ 的类型和项。SOGAT $\mathcal{T}$ 可以与其分类 $(\Sigma, \Pi_{\mathsf{rep}})$-CwF 等同，也记作 $\mathcal{T}$。因此，$\mathcal{T}$ 在 $\mathcal{C}$ 中的模型可以等同于一个 $(\Sigma, \Pi_{\mathsf{rep}})$-CwF 态射 $\mathcal{T} \to \mathcal{C}$。

通过研究 SOGAT，我们知道我们的结果适用于一大类类型理论。更重要的是，许多语义条件在分类（Σ，Π_{rep}）-上下文范畴 $\mathcal{T}$的层面上可以更自然地表达。与其考虑 $\mathcal{T}$的任意模型，通常只需考虑 $\mathcal{T}$即可。其原因结合了两个观点。首先，$\mathcal{T}$的任何对象都可以被视为一个呈现有限生成模型的签名；这应当诱导出一个忠实满函子 $\mathbf{0}_{\mathcal{T}}[-]\colon \mathcal{T}_{\mathsf{op}} \to \mathbf{Mod}_{\mathcal{T}}$，其本质像由 $\mathcal{T}$的有限生成模型组成，见猜想 4.16。其次，任何模型都可以由有限生成模型逼近；更准确地说，任何模型都有一个自由生成的余纤维化替代，而任何自由生成模型都是有限生成模型的滤过余极限。

因此，我们聚焦于 SOGAT 的分类 $(\Sigma, \Pi_{\mathsf{rep}})$-上下文范畴。我们的主要结果在这一层面上陈述，且不依赖于 SOGAT 的语义。我们仍会发展部分语义，以便为我们的定义提供一些额外的直观说明。不过，需要相当技术性证明的语义考量将不予讨论，或留待未来研究。

我们还回顾了配备同伦关系的 SOGAT 的外部单值性概念。该概念由作者在 [Boc22]中提出。给定 SOGAT 每个种类的一个同伦关系，外部单值性表达了这些同伦关系的良定性；具体而言，它们在所有运算下都保持不变。外部单值性也在分类 $(\Sigma, \Pi_{\mathsf{rep}})$-上下文范畴 $\mathcal{T}$ 的层面上陈述，即 $\mathcal{T}$ 上存在某种恒等类型结构（遗憾的是，该结构既是弱计算的，也是弱稳定的）。这些恒等类型必须满足单值性条件，也称为饱和条件。类似的部分饱和条件将在第 6 节中引入。

从语义层面来看，外部单值性与模型范畴上的左半模型结构密切相关，Kapulkin 和 Lumsdaine [KL16] 以及 Isaev [Isa18a]均对其进行了研究。外部单值性也是一种从理念上将 SOGAT 视为 ∞-类型论（按照 Nguyen 和 Uemura [NU22]的定义）的方式，而无需使用拟范畴。

4.1. **定义与示例。**

定义 4.1. 一个**二阶广义代数理论**是一个 $\{I^{\mathsf{ty}}, I^{\mathsf{ty}_{\mathsf{rep}}}, I^{\mathsf{tm}}, E^{\mathsf{tm}}\}$-胞腔（$\Sigma, \Pi_{\mathsf{rep}}$）-CwF $\mathcal{T}$，其中我们回顾一下，映射 $\{I^{\mathsf{ty}}, I^{\mathsf{ty}_{\mathsf{rep}}}, I^{\mathsf{tm}}, E^{\mathsf{tm}}\}$ 是通过一个类型、可表示类型、项或项等式对（$\Sigma, \Pi_{\mathsf{rep}}$）-CwF 进行的泛扩张：

$$
\begin{aligned}
I^{\mathsf{ty}} &: \mathsf{Free}_{\Sigma,\Pi_{\mathsf{rep}}}(\boldsymbol{\Gamma} \vdash) \to \mathsf{Free}_{\Sigma,\Pi_{\mathsf{rep}}}(\boldsymbol{\Gamma} \vdash \boldsymbol{A}\ \mathsf{type}),\\
I^{\mathsf{ty}_{\mathsf{rep}}} &: \mathsf{Free}_{\Sigma,\Pi_{\mathsf{rep}}}(\boldsymbol{\Gamma} \vdash) \to \mathsf{Free}_{\Sigma,\Pi_{\mathsf{rep}}}(\boldsymbol{\Gamma} \vdash \boldsymbol{A}\ \mathsf{type}_{\mathsf{rep}}),\\
I^{\mathsf{tm}} &: \mathsf{Free}_{\Sigma,\Pi_{\mathsf{rep}}}(\boldsymbol{\Gamma} \vdash \boldsymbol{A}\ \mathsf{type}) \to \mathsf{Free}_{\Sigma,\Pi_{\mathsf{rep}}}(\boldsymbol{\Gamma} \vdash \boldsymbol{a} : \boldsymbol{A}),\\
E^{\mathsf{tm}} &: \mathsf{Free}_{\Sigma,\Pi_{\mathsf{rep}}}(\boldsymbol{\Gamma} \vdash \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} : \boldsymbol{A}) \to \mathsf{Free}_{\Sigma,\Pi_{\mathsf{rep}}}(\boldsymbol{\Gamma} \vdash \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}).
\end{aligned}
$$

⌟

SOGAT 之间的态射是 $(\Sigma,\ \Pi_{\mathsf{rep}})$-上下文范畴的态射。

SOGAT 的胞腔表示由种类、可表示分类、运算以及运算间的方程组成，分别对应于四个映射 I^{ty}, $I^{\mathsf{ty}_{\mathsf{rep}}}$, I^{tm}, E^{tm}。

无方程 SOGAT 是一种实际上在 $\{I^{\mathsf{ty}}, I^{\mathsf{ty}_{\mathsf{rep}}}, I^{\mathsf{tm}}\}$-胞腔化的**上下文范畴**$_{\Sigma,\ \Pi_{\mathsf{rep}}}$ 中的 SOGAT。无方程 SOGAT 是**上下文范畴**$_{\Sigma,\ \Pi_{\mathsf{rep}}}$ 中的余纤维对象，因此在某些情况下，它们的性质优于一般的 SOGAT。在考虑 SOGAT 的方程扩张时，源 SOGAT 通常是无方程 SOGAT。

对于预层范畴 **预层**($\mathcal{T}$)、**预层**($\mathcal{T}_1$) 等中的 SOGAT $\mathcal{T}$、 $\mathcal{T}_1$、 $\mathcal{T}_2^3$ 等所对应的内部 $(\Sigma,\ \Pi_{\mathsf{rep}})$-族，我们将其分别记作 $\mathbb{T}$、 $\mathbb{T}_1$、 $\mathbb{T}_2^3$ 等。

我们使用**粗体红色**字体来表示 SOGAT 的种类和运算，主要是为了将它们与 $(\Sigma, \Pi_{\mathsf{rep}})$-上下文范畴的类型论结构区分开来。

例 4.2. 范畴的 GAT $\mathcal{T}_{\mathbf{Cat}}$ 由以下签名给出：

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{Ob} : \mathbb{T}_{\mathbf{Cat}}\\
&\mathbf{Hom} : \mathbf{Ob} \to \mathbf{Ob} \to \mathbb{T}_{\mathbf{Cat}}\\
&\mathbf{EqHom} : \forall x\ y \to \mathbf{Hom}(x,y) \to \mathbf{Hom}(x,y) \to \mathbb{T}_{\mathbf{Cat}}\\
&\mathbf{id} : \forall x \to \mathbf{Hom}(x,x)\\
&\mathbf{comp} : \forall x\ y\ z \to \mathbf{Hom}(x,y) \to \mathbf{Hom}(y,z) \to \mathbf{Hom}(x,z)\\
&f \circ g \triangleq \mathbf{comp}(g,f)\\
&\mathbf{refl} : \forall x\ y\ \to (f : \mathbf{Hom}(x,y)) \to \mathbf{EqHom}(f,f)\\
&\mathbf{id} \circ f = f
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&f \circ \mathbf{id} = f \\
&(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h) \\
&\forall x\ y\ f\ g \to (p, q : \mathbf{EqHom}(f, g)) \to p = q \\
&\mathbf{EqHom}(f, g) \to f = g
\end{aligned}
$$

的部分方程 $\mathcal{T}_{\mathbf{Cat}}$ 可以替换为以种类 **等式同态**(f, g)为目标的运算。不过，有些方程无法避免，即 **等式同态** 的命题性以及反射规则 **等式同态**$(f, g) \to f = g$。

范畴理论的一种替代方案是 E-范畴理论 [Acz95, Pal17]，该理论不包含方程。E-范畴本质上是一个以集合胚为富化结构的范畴，即任意两个对象之间都具有一个态射集合胚，不同之处在于，范畴律是通过集合胚的关系来表达的。

示例 **4.3.** $\mathcal{T}_{E\text{-}\mathbf{Cat}}$ 范畴的广义代数理论由以下签名给出：

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{Ob} : \mathbb{T}_{E\text{-}\mathbf{Cat}} \\
&\mathbf{Hom} : \mathbf{Ob} \to \mathbf{Ob} \to \mathbb{T}_{E\text{-}\mathbf{Cat}} \\
&\mathbf{EqHom} : \forall x\ y \to \mathbf{Hom}(x, y) \to \mathbf{Hom}(x, y) \to \mathbb{T}_{E\text{-}\mathbf{Cat}} \\
&\mathbf{id} : \mathbf{Hom}(x, x) \\
&\mathbf{comp} : \mathbf{Hom}(x, y) \to \mathbf{Hom}(y, z) \to \mathbf{Hom}(x, z) \\
&f \circ g \triangleq \mathbf{comp}(g, f) \\
&\mathbf{refl} : (f : \mathbf{Hom}(x, y)) \to \mathbf{EqHom}(f, f) \\
&\mathbf{sym} : \mathbf{EqHom}(f, g) \to \mathbf{EqHom}(g, f) \\
&\mathbf{trans} : \mathbf{EqHom}(f, g) \to \mathbf{EqHom}(g, h) \to \mathbf{EqHom}(f, h) \\
&\mathbf{assoc} : \mathbf{EqHom}(f \circ (g \circ h), (f \circ g) \circ h) \\
&\mathbf{idl} : \mathbf{EqHom}(\mathbf{id} \circ f, f) \\
&\mathbf{idr} : \mathbf{EqHom}(f \circ \mathbf{id}, f) \\
&\mathbf{cong}\text{-}\circ : \mathbf{EqHom}(f, h) \to \mathbf{EqHom}(g, i) \to \mathbf{EqHom}(f \circ g, h \circ i)
\end{aligned}
$$

广义代数理论 $\mathcal{T}_{\mathbf{Cat}}$ 与通过方程对 $\mathcal{T}_{E\text{-}\mathbf{Cat}}$ 进行扩展所得的理论同构。

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{EqHom}(f, g) \to f = g, \\
&(p : \mathbf{EqHom}(f, g)) \to p = \mathbf{refl}.
\end{aligned}
$$

例 4.4. </style}广义代数理论 $\mathcal{T}_{\mathbf{MonCat}}$ （弱）幺半范畴是由以下运算扩展 $\mathcal{T}_{\mathbf{Cat}}$ 而得：

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{I} : \textbf{对象}, \\
&\_ \otimes \_ : \textbf{对象} \to \textbf{对象} \to \textbf{对象}, \\
&\_ \otimes \_ : \mathbf{Hom}(x,\ x') \to \mathbf{Hom}(y,\ y') \to \mathbf{Hom}(x \otimes y,\ x' \otimes y'), \\
&\alpha : x \otimes (y \otimes z) \cong (x \otimes y) \otimes z, \\
&\lambda : x \otimes I \cong x, \\
&\rho : I \otimes x \cong x,
\end{aligned}
$$

以及方程（或返回 等式同态的运算），用于表达 $\otimes$的函子性、 α的自然性、 λ 以及 ρ，还有五边形与三角形相干性定律。」

例 4.5. 严格幺半范畴的广义代数理论 $\mathcal{T}_{\mathbf{StrMonCat}}$ 是对 $\mathcal{T}_{\mathbf{MonCat}}$ 的扩展，并满足以下方程：

$$x \otimes (y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z, \qquad \alpha_{x,y,z} = \mathsf{id},$$

$$x \otimes I = x, \qquad \lambda_x = \mathsf{id}, \qquad I \otimes x = x, \qquad \rho_x = \mathsf{id}.$$

例 4.6. 弱恒等类型的 SOGAT $\mathcal{T}_{\mathsf{Id}}$ 由以下签名规定：

$$\begin{aligned}
&\mathbf{Ty} : \mathbb{T}_{\mathsf{Id}},\\
&\mathbf{Tm} : \mathbf{Ty} \to (\mathbb{T}_{\mathsf{Id}})_{\mathsf{rep}},\\
&\mathbf{Id} : (A : \mathbf{Ty})(x : \mathbf{Tm}(A))(y : \mathbf{Tm}(A)) \to \mathbf{Ty},\\
&\mathbf{refl} : (A : \mathbf{Ty})(x : \mathbf{Tm}(A)) \to \mathbf{Tm}(\mathbf{Id}(A, x, x)),\\
&\mathbf{J} : (A : \mathbf{Ty})(x : \mathbf{Tm}(A))(P : (y : \mathbf{Tm}(A))(p : \mathbf{Tm}(\mathbf{Id}(A, x, y))) \to \mathbf{Ty})\\
&\quad (d : \mathbf{Tm}(P(x, \mathbf{refl})))(y : \mathbf{Tm}(A))(p : \mathbf{Tm}(\mathbf{Id}(A, x, y))) \to \mathbf{Tm}(P(y, p)),\\
&\mathbf{J}_\beta : (A : \mathbf{Ty})(x : \mathbf{Tm}(A))(P : (y : \mathbf{Tm}(A))(p : \mathbf{Tm}(\mathbf{Id}(A, x, y))) \to \mathbf{Ty})\\
&\quad (d : \mathbf{Tm}(P(x, \mathbf{refl}))) \to \mathbf{Tm}(\mathbf{Id}(P(x, \mathsf{refl}), \mathbf{J}(A, x, P, d, x, \mathbf{refl}), d)).
\end{aligned}$$

注意， $\mathcal{T}_{\mathsf{Id}}$ 是一个无方程 SOGAT。」

例 4.7. 严格恒等类型的 SOGAT $\mathcal{T}_{\mathsf{Id}_s}$ 是对 $\mathcal{T}_{\mathsf{Id}}$ 的扩展，增加了方程

$$\mathbf{J}(A, x, P, d, x, \mathbf{refl}) = \mathbf{refl}, \qquad \mathbf{J}_\beta = \mathbf{refl}.$$

」

4.2. **SOGAT 类型的结构。** 由于 SOGAT 是不含类型或可表示类型之间方程的 $(\Sigma, \Pi_{\mathsf{rep}})$-上下文范畴，其类型具有简单的范式：它们是由 $(\Sigma, \Pi_{\mathsf{rep}})$-上下文范畴的运算对生成类型自由闭合所得。

有一个生成类型集合 $\mathsf{GenTy}_{\mathcal{T}}$，可从 $\mathcal{T}$ 的胞腔表示中读出。例如， $\mathcal{T}_{\mathbf{Cat}}$ 的生成类型为 ($\vdash$ Ob type)、(x, y : Ob $\vdash$Hom(x, y) type) 和 (x, y : Ob f, g : Hom$(x, y) \vdash$ EqHom(f, g) type)。

类似地，还有一个生成可表示类型集合 $\mathsf{GenRepTy}_{\mathcal{T}}$，并且 $\mathsf{GenRepTy}_{\mathcal{T}} \hookrightarrow$ 包含于$\mathsf{GenTy}_{\mathcal{T}}$。

一个**基本类型** $\mathcal{T}$ 是形如$(\Gamma \vdash \mathbf{S}(\sigma)$ 类型)的类型，其中 $\sigma : \Gamma \to \partial\mathbf{S}$ 对应某个生成类型 $(\partial\mathbf{S} \vdash \mathbf{S}) \in \mathsf{GenTy}_{\mathcal{T}}$。 **基本可表示类型**的定义类似。基本不可表示类型是指其生成类型属于$(\mathsf{GenTy}_{\mathcal{T}} \backslash \mathsf{GenRepTy}_{\mathcal{T}})$的基本类型。

命题 4.8. $\mathcal{T}$ 中的任何类型或可表示类型，都可以由基本的不可表示类型和基本的可表示类型，以及运算**1**-、 Σ-、Π_{rep} 和从可表示类型到类型的包含映射唯一地构造出来。

□

4.3. **函子语义**。

定义 4.9。 $\mathcal{T}$在一个（Σ, Π_{rep}）-上下文范畴 $\mathcal{C}$中的一个**内模型** 是一个（Σ, Π_{rep}）-上下文范畴态射

$$\mathbb{C} : \mathcal{T} \to \mathcal{C}.$$

」

我们通常写作 $X_{\mathcal{C}}$, $A_{\mathcal{C}}$, $a_{\mathcal{C}}$ 等，甚至只写 X, A, a 等，而不写 $\mathbb{C}(X)$, $\mathbb{C}(A)$, $\mathbb{C}(a)$ 等，以表示（$\Sigma, \Pi_{\mathsf{rep}}$）-CwF 态射 $\mathbb{C}$ 在对象、态射、类型和项上的应用。

根据 $\mathcal{T}$ 的泛性质， $\mathcal{C}$ 中的内模型由 $\mathcal{T}$ 的生成元的像唯一确定，也就是说，由签名 $\mathcal{T}$ 在 $\mathcal{C}$ 中的一个解释唯一确定。

定义 4.10。 $\mathcal{T}$的一个**模型** 由一个范畴 $\mathcal{C}$ （带有终对象）以及$\widehat{\ }$ $\mathcal{T}$在（$\Sigma, \Pi_{\mathsf{rep}}$）-上下文范畴 $\mathcal{C}$中的一个内模型组成，也就是说，一个（$\Sigma, \Pi_{\mathsf{rep}}$）-CwF 态射$\widehat{\ }\mathbb{C}$: $\mathcal{T} \to \mathcal{C}$。 」

例 4.11. SOGAT $\mathcal{T}_{\mathsf{Id}}$ 的弱恒等类型的一个模型恰好是一个配备了弱恒等类型的上下文范畴。

然而，SOGAT $\mathcal{T}_{\mathbf{Cat}}$ 的模型并不是范畴，而是由以下元素组成的对：$(\mathcal{C}, \mathcal{D})$，其中 $\mathcal{C}$ 是基范畴， $\mathcal{D}$ 是 $\mathbf{Psh}(\mathcal{C})$ 中的内范畴。在第 4.4 节中，我们将定义上下文模型。在 $\mathcal{T}_{\mathbf{Cat}}$ 的情形下，我们可以得到范畴：$\mathcal{T}_{\mathbf{Cat}}$ 的上下文模型是满足 $\mathcal{C}$ 为终范畴 $1_{\mathbf{Cat}}$的模型 $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$。此时， $\mathcal{D}$ 是 $\mathbf{Psh}(1_{\mathbf{Cat}})$ 中的内范畴，即一个外范畴。」

给定一个 $\mathcal{C}$ 的模型 $\mathcal{T}$ 和一个闭合种类 $X \in \mathcal{T}$，我们将使用（$\Gamma \vdash x : X$） $\in \mathcal{C}$来表示 $x : X_{\mathcal{C}}(\Gamma)$。给定一个依赖种类（$X \vdash Y$ 类型） $\in \mathcal{T}$，我们将使用（$\Gamma \vdash y : Y(x)$） $\in \mathcal{C}$ 来表示 $y : Y_{\mathcal{C}}(\Gamma, x)$。我们也可以写作（$\gamma : \Gamma \vdash x(\gamma) : X$） $\in \mathcal{C}$和（$\gamma : \Gamma \vdash y(\gamma) : Y(x(\gamma))$） $\in \mathcal{C}$。

定义 4.12。 $\mathcal{T}$的模型的**弱态射** F 由一个函子 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$组成，满足：

- 函子 F 弱保终对象。
- 对于每个对象 $X \in \mathcal{T}$，我们都有一个变换
$$F_X : (\Gamma \in \mathcal{C}) \to X_{\mathcal{C}}(\Gamma) \to X_{\mathcal{D}}(F(\Gamma))$$
关于 Γ 的逆变自然性。
- 对于每个态射 $\alpha : X \to Y$，以下交换图交换。
$$\begin{array}{ccc} X_{\mathcal{C}}(\Gamma) & \xrightarrow{F_X} & X_{\mathcal{D}}(F(\Gamma)) \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha_{\mathcal{C}}(\Gamma)} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_{\mathcal{D}}(F(\Gamma))} \\ Y_{\mathcal{C}}(\Gamma) & \xrightarrow{F_Y} & Y_{\mathcal{D}}(F(\Gamma)) \end{array}$$
- 注意，对于每个对象 $X \in \mathcal{T}$和类型（$X \vdash A$ 类型） $\in \mathcal{T}$，我们都能得到一个变换。
$$F_A : (\Gamma \in \mathcal{C}) \to (x : X_{\mathcal{C}}(\Gamma)) \to A_{\mathcal{C}}(x) \to A_{\mathcal{D}}(F_X(x))$$
在 Γ 中逆变自然，由方程 $F_{X.A}(x, a) = (F_X(x)\ F_A(x, a))$ 唯一确定。
- 上下文扩展是弱保持的：对于每个对象 $X \in \mathcal{T}$、可表示类型（$X \vdash A$ $\mathsf{type}_{\mathsf{rep}}$） $\in \mathcal{T}$、对象 $\Gamma \in \mathcal{C}$ 和元素 $x : X_{\mathcal{C}}(\Gamma)$，比较映射
$$\langle F(\boldsymbol{p}), F_A(\boldsymbol{q}) \rangle : F(\Gamma.A_{\mathcal{C}}[x]) \to F(\Gamma).A_{\mathcal{D}}[F_X(x)]$$
是一个同构。

A morp　若严格保留终对象和上下文扩展，则称该同构为**严格的**。

」

我们有一个由模型、弱态射和 2-胞腔构成的 (2,1)-范畴，以及一个由模型和严格态射构成的 1-范畴$\mathbf{Mod}_{\mathcal{T}}$。我们将只使用 1-范畴 $\mathbf{Mod}_{\mathcal{T}}$。范畴$\mathbf{Mod}_{\mathcal{T}}$是局部有限可呈的；特别地，我们有一个初始模型 $\mathbf{0}_{\mathcal{T}}$，以及更一般的自由生成模型。

4.4. 上下文化和平凡纤维化。 与我们对上下文范畴（CwF）的平凡纤维化和上下文化的定义类似，我们可以利用模型范畴上的分解系统，为任意 SOGAT 的模型定义这些概念。

我们定义一个集合 $I = \{I^{\mathbf{S}} \mid \mathbf{S} \in \mathsf{GenTy}_{\mathcal{T}}\}$ 中的映射$\mathbf{Mod}_{\mathcal{T}}$，其中

$$I^{\mathbf{S}} : \mathsf{Free}_{\mathcal{T}}(\boldsymbol{\Gamma} \vdash \boldsymbol{\sigma} : \partial\mathbf{S}) \to \mathsf{Free}_{\mathcal{T}}(\boldsymbol{\Gamma} \vdash \boldsymbol{x} : \mathbf{S}(\boldsymbol{\sigma}))$$

是一个模型通过种类 $\mathbf{S}$ 中的一个元素所作的泛扩张。

我们将 $E = \{E^{\mathbf{S}} \mid \mathbf{S} \in \mathsf{GenTy}_{\mathcal{T}}\}$ 记作 I 中映射的余对角映射集合。

$$E^{\mathbf{S}} : \mathsf{Free}_{\mathcal{T}}(\boldsymbol{\Gamma} \vdash \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} : \mathbf{S}(\boldsymbol{\sigma})) \to \mathsf{Free}_{\mathcal{T}}(\boldsymbol{\Gamma} \vdash \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y})$$

是泛扩张：模型通过在种类 $\mathbf{S}$ 的元素之间添加一个新方程而形成的扩张。

定义 4.13. 态射 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 在 $\mathbf{Mod}_{\mathcal{T}}$ 中是一个分裂平凡纤维化，当且仅当对于每个生成类型 $\mathsf{S} \in \mathsf{GenTy}_{\mathcal{T}}$，$F$ 在 S 的元素上的作用都是分裂满射：对于每个对象 $\Gamma \in \mathcal{C}$、边界 $(\gamma : \Gamma \vdash \sigma(\gamma) : \partial\mathsf{S}) \in \mathcal{C}$ 以及元素 $(\gamma : F(\Gamma) \vdash x(\gamma) : \mathsf{S}(F(\sigma)(\gamma))) \in \mathcal{D}$，都存在一个提升元素 $(\gamma : \Gamma \vdash x_0(\gamma) : \mathsf{S}(\sigma(\gamma))) \in \mathcal{C}$，使得$F(x_0) = x$。」

平凡纤维化是由 I 生成的弱分解系统中的右类映射。左类中的映射称为 **余纤维化**。

此外，还有非分裂平凡纤维化这一概念。

定义 4.14。 态射 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 在 $\mathbf{Mod}_{\mathcal{T}}$ 中是 **非分裂平凡纤维化**，如果对于每个生成类型 $\mathbf{S} \in \mathsf{GenTy}_{\mathcal{T}}$，$F$ 在 $\mathbf{S}$ 的元素上的作用都是非分裂满射。」

最后，上下文化通过上下文同构这一概念来刻画 .

定义 4.15。 态射 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 在 $\mathbf{Mod}_{\mathcal{T}}$中是 **上下文同构**，如果对于每个生成类型 $\mathbf{S} \in \mathsf{GenTy}_{\mathcal{T}}$，$F$ 在 $\mathbf{S}$ 的元素上的作用都是双射。」

上下文同构是由 I 生成的正交分解系统中的右类映射，或者等价地说，是由 $I \cup E$ 生成的弱分解系统中的右类映射。

任意态射 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 都存在唯一的（在同构意义下）分解 $\mathcal{C} \to \mathrm{cxlim}(F) \to \mathcal{D}$，其中 $\mathcal{C} \to \mathrm{cxlim}(F)$ 是一个 $(I \cup E)$-余纤维化，而 $\mathrm{cxlim}(F) \to \mathcal{D}$是一个上下文同构。模型 $\mathrm{cxlim}(F)$ 称为 F的**上下文像**。

模型 $\mathcal{C}$ 的**上下文核**$\mathrm{cxl}(\mathcal{C})$ 是唯一态射$\mathbf{0}_{\mathcal{T}} \to \mathcal{C}$的上下文像。根据定义，映射 $\mathrm{cxl}(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$ 是一个上下文同构。当映射 $\mathrm{cxl}(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$ 在$\mathbf{Mod}_{\mathcal{T}}$中也是一个同构时，我们称 $\mathcal{C}$ 是**上下文的**。

猜想 4.16。 存在一个函子

$$\mathbf{0}_{\mathcal{T}}[-] : \mathcal{T}^{\mathsf{op}} \to \mathbf{Mod}_{\mathcal{T}}^{\mathsf{cxl}}.$$

它是忠实满函子，其本质像由 $\mathcal{T}$ 的有限 I-胞腔模型组成。」

4.5. **同伦关系**。SOGAT 上的同伦关系数据赋予 SOGAT 的每个种类一种恒等或相同性的概念，其弱于定义相等。它并不预设这些关系具有良好的性质，例如，它们甚至可能不满足对称性和传递性。同伦关系的良好性质由外部单值性的概念编码。

定义 4.17。在一个**SOGAT 上的同伦关系** $\mathcal{T}$ 由以下数据组成：对于每个生成类型 $\mathbf{S}$，在其元素上给出一个自反的类型值关系：

$$\begin{aligned} &\_ \sim_{\mathbf{S}(\_)} \_ : (\sigma : \partial\mathbf{S})(x, y : \mathbf{S}(\sigma)) \to \mathbb{T}, \\ &\mathsf{hrefl}_{\mathbf{S}(\_)} : (\sigma : \partial\mathbf{S})(x : \mathbf{S}(\sigma)) \to x \sim_{\mathbf{S}(\sigma)} x. \end{aligned}$$ ⌟

我们使用hrefl 表示常值同伦，以便将其与其他关系的自反性见证区分开来，例如 $\mathbf{refl}$ 在 $\mathcal{T}_{\mathcal{T}}$中，或 refl 在一个 $(\Sigma、\ \Pi_{\mathsf{rep}}、\ \mathsf{Id})$-上下文范畴。

例 4.18. $\mathcal{T}_{E\text{-}\mathbf{Cat}}$ 范畴的 E-范畴理论配备了以下同伦关系：

$$\begin{aligned} &(x \sim_{\mathbf{Ob}} y) \triangleq (x \cong y), \\ &\mathsf{hrefl}_{\mathbf{Ob}}(x) \triangleq \mathbf{id}, \\ &(f \sim_{\mathbf{Hom}(x,y)} g) \triangleq \mathbf{EqHom}(f, g), \\ &\mathsf{hrefl}_{\mathbf{Hom}(x,y)}(f) \triangleq \mathbf{refl}(f), \\ &(p \sim_{\mathbf{EqHom}(f,g)} q) \triangleq \mathbf{1} \\ &\mathsf{hrefl}_{\mathbf{EqHom}(f,g)}(p) \triangleq \star, \end{aligned}$$

其中，$(x \cong y)$ 是 x 和 y 之间同构的种类。

$$\begin{aligned} (x \cong y) \triangleq (f : \mathbf{Hom}(x, y)) \times (g : \mathbf{Hom}(y, x)) \\ \times \mathbf{EqHom}(f \circ g, \mathbf{id}) \times \mathbf{EqHom}(g \circ f, \mathbf{id}). \end{aligned}$$

理论 $\mathcal{T}_{\mathbf{Cat}}$、$\mathcal{T}_{\mathbf{MonCat}}$ 和 $\mathcal{T}_{\mathbf{StrMonCat}}$（可视为 $\mathcal{T}_{E\text{-}\mathbf{Cat}}$ 的扩展）都配备了相同的同伦关系。 ⌟

例 4.19. 弱恒等类型的理论 $\mathcal{T}_{\mathsf{Id}}$ 配备了以下同伦关系：

$$\begin{aligned} &(A \sim_{\mathbf{Ty}} B) \triangleq (A \simeq B), \\ &\mathsf{hrefl}_{\mathbf{Ty}}(A) \triangleq \mathbf{Id}_A, \\ &(x \sim_{\mathbf{Tm}(A)} y) \triangleq \mathbf{Tm}(\mathbf{Id}_A(x, y)), \\ &\mathsf{hrefl}_{\mathbf{Tm}(A)}(x) \triangleq \mathbf{refl}(x). \end{aligned}$$

其中，$(x \simeq y)$ 是 A 与 B 之间的等价种类。等价被定义为双向均具有函数性的类型值关系：

$$\begin{aligned} (A \simeq B) \triangleq (R : A \to B \to \mathbf{Ty}) \\ \times ((a : A) \to \mathrm{isContr}((b : B) \times R(a, b)) \\ \times ((b : B) \to \mathrm{isContr}((a : A) \times R(a, b)). \end{aligned}$$

请注意，$(b\colon B)\times R(a,b)$ 和 $(a\colon A)\times R(a,b)$ 在缺少 Σ-类型时并非类型（$\mathbf{Ty}$ 的元素），而是长度为 2 的望远镜。利用第 3 节的结果，可以为望远镜定义可缩性。

在这种情形下，由恒等类型 $\mathbf{Id}_A$ 所指定的关系就是恒等等价。

同伦关系的数据足以为 $\mathbf{Mod}_{\mathcal{T}}$ 赋予弱等价、平凡余纤维化和纤维化的概念。结合先前定义的（余纤维化，平凡纤维化）弱分解系统，范畴 $\mathbf{Mod}_{\mathcal{T}}$ 具备模型范畴的所有数据，但仍可能不满足其公理。

定义 4.20。 态射 $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 的模型 $\mathcal{T}$ 是一个 **弱等价**，当且仅当它对每个生成类型 $\mathbf{S}\in\mathsf{GenTy}_{\mathcal{T}}$ 满足以下弱提升性质：
弱提升： 对于每个对象 $\Gamma\in\mathcal{C}$，边界 $(\gamma:\ \Gamma\vdash\sigma(\gamma):\ \partial\mathbf{S})\in\mathcal{C}$ 和项 $(\gamma:\ F(\Gamma)\vdash x(\gamma):\mathbf{S}(F(\sigma)(\gamma)))\in\mathcal{D}$，存在一个提升项

$$(\gamma:\Gamma\vdash x_0(\gamma):\mathbf{S}(\sigma(\gamma)))\in\mathcal{C}$$

以及一个同伦

$$(\gamma:F(\Gamma)\vdash p(\gamma):F(x_0)(\gamma)\sim_{\mathbf{S}(F(\sigma)(\gamma))}x(\gamma))\in\mathcal{D}.$$

与平凡纤维化一样，我们实际上有两种弱等价的概念：分裂弱等价附带每个提升问题的弱提升数据，而非分裂弱等价则只假定提升存在。

例 4.21. 在视为 $\mathcal{T}_{\mathbf{Cat}}$ 的上下文模型的范畴中，弱等价是指在对象、态射以及态射之间的等式上本质满的函子，也就是说，在对象上本质满且忠实满的函子。$\mathcal{T}_{\mathbf{MonCat}}$ 和 $\mathcal{T}_{\mathbf{StrMonCat}}$ 中的弱等价相同。

$\mathcal{T}_{\mathsf{Id}}$ 中的弱等价是指 CwF 态射 $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$，它们在类型和项上本质满，即满足以下两个弱提升条件：
弱类型提升： 对于每个 $\Gamma\in\mathcal{C}$ 和 $(F(\Gamma)\vdash A\ \text{类型})\in\mathcal{D}$，都存在某个 $(\Gamma\vdash A_0\ \text{类型})\in\mathcal{C}$ 以及一个等价 $\alpha:F(A_0)\simeq A$ 在 $\mathcal{D}$ 中。
弱项提升： 对于每个 $(\Gamma\vdash A\text{类型})\in\mathcal{C}$ 以及 $(F(\Gamma)\vdash a:\ F(A))\in\mathcal{D}$，存在某个 $(\Gamma\vdash a_0:\ A)\in\mathcal{C}$ 以及一个恒等 $p:\ F(a_0)\simeq_{F(A)}a$ 于 $\mathcal{D}$ 中。

定义 4.22. 一个模型 $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 的态射 $\mathcal{T}$ 是一个**纤维化**，如果对于每个生成种类 $\mathbf{S}\in\mathsf{GenTy}_{\mathcal{T}}$：
路径提升：对于每个对象 $\Gamma\in\mathcal{C}$、边界 $(\gamma:\ \Gamma\vdash\sigma(\gamma):\ \partial\mathsf{S})\in\mathcal{C}$、项 $(\gamma:\ F(\Gamma)\vdash x(\gamma)\ y(\gamma):\mathsf{S}(F(\sigma)(\gamma)))\in\mathcal{D}$ 以及同伦 $(\gamma:\ F(\Gamma)\vdash p(\gamma):\ F(x)(\gamma)\sim_{\mathbf{S}(F(\sigma)(\gamma))}y(\gamma))\in\mathcal{D}$，存在一个提升后的同伦

$$(\gamma:\Gamma\vdash p_0(\gamma):x(\gamma)\sim_{\mathbf{S}(\sigma(\gamma))}y_0(\gamma))\in\mathcal{C}$$

使得 $F(y_0)=y$ 且 $F(p_0)=p$。

这些纤维化可以称为右纤维化，因为它们的提升性质只涉及左端点固定的同伦。我们也可以考虑左纤维化的概念。

<escape>纤维化是由以下内容生成的弱分解系统的映射右类 $J=\{J^{\mathbf{S}}\mid\mathbf{S}\in\mathsf{GenTy}_{\mathcal{T}}\}$，其中
</escape>

$$J^{\mathbf{S}}:\mathsf{Free}_{\mathcal{T}}(\boldsymbol{\Gamma}\vdash\boldsymbol{x}:\mathbf{S}(\boldsymbol{\sigma}))\to\mathsf{Free}_{\mathcal{T}}(\boldsymbol{\Gamma}\vdash\boldsymbol{p}:\boldsymbol{x}\sim_{\mathbf{S}(\boldsymbol{\sigma})}\boldsymbol{y}).$$

左类中的映射称为**平凡余纤维化**。

例4.23. 将范畴视为 $\mathcal{T}_{\mathbf{Cat}}$ 的上下文模型时，其中的纤维化是等纤维化：函子 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 使得对于 $\mathcal{D}$中的每个同构 $g : F(x) \cong y$，都存在一个同构 $g_0 : x \cong y_0$，使得 $F(y_0) = y$ 且 $F(g_0) = g$。

$\mathcal{T}_{\mathsf{Id}}$ 模型中的纤维化是满足等价和恒等提升性质的 CwF 态射。」

在没有进一步假设的情况下，这些映射类可能不满足模型结构的公理（参见猜想4.29）。本文不需要用到所有公理，但需要弱等价满足二取三性质的某些方向。

定义4.24. 我们称 $\mathcal{T}$ 上的同伦关系是 **传递的**，如果对于每个生成类型 $\mathbf{S} \in \mathsf{GenTy}_{\mathcal{T}}$，我们都能推导出

$$\forall \sigma\ x\ y\ z \to (x \sim_{\mathbf{S}(\sigma)} y) \to (y \sim_{\mathbf{S}(\sigma)} z) \to (x \sim_{\mathbf{S}(\sigma)} z)$$

在 $\mathcal{T}$ 中。」

引理4.25。 设 $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D} \xrightarrow{G} \mathcal{E}$ 为一对可复合的态射。若 G 和 $G \circ F$均为弱等价，则 F 也是弱等价。

证明。令 S 为 $\mathcal{T}$ 的一个生成类型，并取 $(\gamma : \Gamma \vdash \sigma(\gamma) : \partial\mathsf{S}) \in \mathcal{C}$ 和 $(\gamma : F(\Gamma) \vdash a(\gamma) : \mathsf{S}(F(\sigma)(\gamma))) \in \mathcal{D}$。由于 $G \circ F$ 是弱等价，我们可以找到一个提升 $(\gamma : \Gamma \vdash a_0(\gamma) : \mathsf{S}(\sigma(\gamma))) \in \mathcal{C}$，以及一个同伦 $(\gamma : G(F(\Gamma)) \vdash p(\gamma) : G(F(a_0))(\gamma) \sim_{\mathsf{S}} G(a)(\gamma)) \in \mathcal{E}$。由于 G 是弱等价，我们可以找到同伦 p 的一个提升 $(\gamma : F(\Gamma) \vdash p_0(\gamma) : F(a_0)(\gamma) \sim_{\mathsf{S}} a(\gamma))$。于是 p_0 证明了 a_0 是 a 的一个弱提升。□

引理4.26。 设 $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D} \xrightarrow{G} \mathcal{E}$ 是一对可复合的态射。假设 $\mathcal{T}$ 的同伦关系具有传递性。若 G 和 F 都是弱等价，则 $G \circ F$ 也是弱等价。

证明。设 S 是 $\mathcal{T}$ 的一个生成类型，并取 $(\gamma : \Gamma \vdash \sigma(\gamma) : \partial\mathsf{S}) \in \mathcal{C}$ 和 $(\gamma : G(F(\Gamma)) \vdash a(\gamma) : \mathsf{S}(G(F(\sigma))(\gamma))) \in \mathcal{E}$。由于 G 是弱等价，我们可以找到一个提升 $(\gamma : F(\Gamma) \vdash a_0(\gamma) : \mathsf{S}(F(\sigma)(\gamma))) \in \mathcal{D}$，以及一个同伦 $(\gamma : G(F(\Gamma)) \vdash p_0(\gamma) : G(a_0)(\gamma) \sim_{\mathsf{S}} a(\gamma)) \in \mathcal{E}$。由于 F 是弱等价，我们可以找到一个提升 $(\gamma : \Gamma \vdash a_1(\gamma) : \mathsf{S}(\sigma(\gamma))) \in \mathcal{C}$，以及一个同伦 $(\gamma : F(\Gamma) \vdash p_1(\gamma) : F(a_0)(\gamma) \sim_{\mathsf{S}} a_0(\gamma)) \in \mathcal{D}$。由传递性可得一个同伦 $(\gamma : G(F(\Gamma)) \vdash G(p_0)(\gamma) \cdot p_1(\gamma) : G(F(a_1))(\gamma) \sim_{\mathsf{S}} a(\gamma)) \in \mathcal{E}$。这证明 a_1 是 a 沿 $G \circ F$ 的一个弱提升。□

4.6.**外部单值性**。因此，外部单值性的概念刻画了 SOGAT 上同伦关系的良好性质。

这里，$(\Sigma,\ \Pi_{\mathsf{rep}},\ \mathsf{Id}_{\mathsf{ws}})$-上下文范畴是配备了满足函数外延性的弱稳定恒等类型的$(\Sigma,\ \Pi_{\mathsf{rep}})$-上下文范畴。我们尚未定义弱稳定恒等类型，但它们仅在此定义中用到，而此定义仅用于定义外部单值性的概念。

<escape>**定义 4.27。** 设 $\mathcal{C}$ 为一个 $(\Sigma, \Pi_{\mathsf{rep}}, \mathsf{Id}_{\mathsf{ws}})$-上下文范畴（CwF），其配备了一个 $\mathcal{T}$ 的内模型，即一个 $(\Sigma, \Pi_{\mathsf{rep}})$-CwF 态射 $\mathcal{T} \to \mathcal{C}$。我们称 $\mathcal{C}$ 为 **饱和的**（或者称该内模型是 **单值的**），如果对于每个生成类型 $\mathbf{S}$，依赖类型</escape>

$$(y : \mathbf{S}(\sigma)) \times (p : x \sim_{\mathbf{S}(\sigma)} y)$$

在上下文 $(\sigma : \partial\mathbf{S}\ \ x : \mathbf{S}(\sigma))$上是可缩的。」

注意，上述定义对于 $(\Sigma,\ \Pi_{\mathsf{rep}},\ \mathrm{Id})$-上下文范畴也有意义。

定义 4.28。我们称 $\mathcal{T}$ 满足 **外部单值性**，如果 $\mathcal{T}$ 可以配备弱稳定的恒等类型，并且这些恒等类型满足函数外延性和饱和。」

请注意，以下猜想出自 [Boc22]。

猜想4.29。一个 SOGAT $\mathcal{T}$ 满足外部单值性，当且仅当范畴$\mathbf{Mod}_{\mathcal{T}}^{\cong}$配备了先前定义的余纤维化、弱等价和纤维化类后，是一个左半模型范畴。」

例 4.30。关于例4.18中定义的同伦关系，范畴、幺半范畴和严格幺半范畴的理论 $\mathcal{T}_{\mathbf{Cat}}$、$\mathcal{T}_{\mathbf{MonCat}}$ 和 $\mathcal{T}_{\mathbf{StrMonCat}}$ 均满足外部单值性。

事实上，$\mathcal{T}_{\mathbf{Cat}}$ 满足外部单值性，这一点已在 [Boc22]中证明。使用该论文中介绍的方法，要证明 $\mathcal{T}_{\mathbf{MonCat}}$ 和 $\mathcal{T}_{\mathbf{StrMonCat}}$ 满足外部单值性，只需进一步证明 $\mathcal{T}_{\mathbf{MonCat}}$和 $\mathbf{StrMonCat}$ 的附加运算以保持恒等的方式保持同构。这只需对$\mathbf{I}$ 和 $\otimes$进行检查；对$\mathbf{I}$ 而言显然成立，对 $\otimes$而言则由双函子性得出。」

例 4.31. 弱恒等类型的理论 $\mathcal{T}_{\mathsf{Id}}$ 满足例 4.19 中同伦关系的外部单值性。」

5. 等式扩展与保守性

5.1. **方程扩张**。现在我们定义 SOGAT 的方程扩张的概念。设 $\mathcal{T}$ 是一个配备了同伦关系的 SOGAT。

$\mathcal{T}$的方程扩张是指 SOGAT 的一种扩张 $\mathcal{T} \to \mathcal{T}_E$，其中 E 是 $\mathcal{T}$中的一族同伦。在 $\mathcal{T}_E$中，E 中的所有同伦都变为定义等式。这里，$\mathcal{T}$中的一个同伦是一个元组 $(\mathsf{S}\ \Gamma, \sigma, x, y, p)$，其中 $\mathsf{S} \in \mathrm{GenTy}_{\mathcal{T}}$ 是一个生成类型，并且 $(\gamma :\ \Gamma \vdash p(\gamma) :\ x(\gamma) \sim^{\mathsf{S}(\sigma(\gamma))} y(\gamma)) \in \mathcal{T}$是 Γ上的 x 与 y 之间的一个同伦。

定义 5.1. 设 E 是 $\mathcal{T}$ 的一族同伦；E 的元素称为 **标记的**。

$\mathcal{T}$的 **方程扩张** 是 SOGAT $\mathcal{T}_E$，其定义为通过方程 $(\gamma :\ \Gamma \vdash x = y)$ 和$(\gamma :\ \Gamma \vdash p(\gamma) = \mathrm{refl}^{\mathsf{S}(\sigma(\gamma))}(x(\gamma)))$ 对 $\mathcal{T}$ 进行扩张，其中每个标记同伦 $(\gamma :\ \Gamma \vdash p(\gamma) : x(\gamma) \sim^{\mathsf{S}(\sigma(\gamma))} y(\gamma)) \in E$。」

以下是一些一阶广义代数理论的方程扩张示例。

示例 5.2。
(1) 扩张 $\mathcal{T}_{E\text{-}\mathbf{Cat}} \to \mathcal{T}_{\mathbf{Cat}}$ 是通过标记 $p :\ \mathrm{EqHom}(f, g)$，在上下文 $(x, y : \mathrm{Ob}\ \ f, g : \mathrm{Hom}(x, y)\ \ p : \mathrm{EqHom}(f, g))$ 上得到的方程扩张。(2) 扩张 $\mathcal{T}_{\mathbf{MonCat}} \to \mathcal{T}_{\mathbf{StrMonCat}}$ 是通过在 $\mathcal{T}_{\mathbf{MonCat}}$ 中标记结合子和单位约束得到的方程扩张。(3) 我们还可以考虑扩张 $\mathcal{T}_{E\text{-}\mathbf{Cat}} \to (\mathcal{T}_{E\text{-}\mathbf{Cat}})_E$，它仅通过标记单位律和结合律得到。对于某些应用而言，这种扩张的行为可能优于 $\mathcal{T}_{\mathbf{Cat}}$。事实上，$(\mathcal{T}_{E\text{-}\mathbf{Cat}})_E$ 具有可判定的相等性，而 $\mathcal{T}_{\mathbf{Cat}}$ 则不具有（例如，可以通过归约到群的字问题的不可判定性来证明这一点）。」

我们给出一些类型理论的等式扩展示例，这些扩展是通过标记类型等价族以及项之间的恒等得到的。

例 5.3。

(1) 对于从弱计算规则扩展到严格计算规则的情况，我们会标记应当严格化的计算规则。例如，在恒等类型的情况下，我们标记上下文 (A, x, P, d) 上的识别族 $\mathsf{J}^{\beta}(P, d) : \mathrm{Id}(\mathsf{J}_{A,x}(P, d, \mathrm{refl})\ d)$。

(2) 考虑从归纳自然数扩展到带有严格结合加法的自然数时，我们分两步进行。首先，我们通过添加来扩展基理论 $\mathcal{T}_0$ 。

$$\mathsf{plus} : \mathbf{N} \to \mathbf{N} \to \mathbf{N}$$

作为一个新的 原始操作，以及它所满足的一些等式，例如

$$\mathsf{plus}_0 : \forall x \to \mathsf{plus}(0, x) \simeq x,$$
$$\mathsf{plus}_1 : \forall x \to \mathsf{plus}(x, 0) \simeq x,$$
$$\mathsf{plus}_2 : \forall x\ y\ z \to \mathsf{plus}(\mathsf{plus}(x, y)), z) \simeq \mathsf{plus}(x, \mathsf{plus}(y, z)).$$

plus 运算与通常通过归纳定义的加法同伦等价，但并不严格相等。因此，弱类型论 $\mathcal{T}$ 就是这个扩展后的理论。由于 $\mathcal{T}$ 可以看作是通过添加可缩类型中的新元素对 $\mathcal{T}_0$ 所作的扩张，它应当是 $\mathcal{T}_0$ 的保守扩张（见猜想 5.6）。

第二步，我们考虑对 $\mathcal{T}$进行方程扩张，方法是标记恒等式 $\mathsf{plus}_{0'}$、$\mathsf{plus}_{1'}$、$\mathsf{plus}_{2'}$ 等。因此，扩展后的理论 $\mathcal{T}_E$ 包含严格等式 $\mathsf{plus}(0, x) \equiv x$、$\mathsf{plus}(x,0) \equiv x$、$\mathsf{plus}(\mathsf{plus}(x, y)\ z) \equiv \mathsf{plus}(x,\mathsf{plus}(y, z))$ 等。它还包含严格等式 $\mathsf{plus}_0 \equiv \mathrm{refl}$、$\mathsf{plus}_1 \equiv \mathrm{refl}$、$\mathsf{plus}_2 \equiv \mathrm{refl}$ 等。

（3）类似地，我们可以考虑通过路径上的复合运算扩展类型论，并要求该运算严格满足 1-群胚的定律。我们从用新元素扩展基理论$\mathcal{T}_0$ 开始。

$$\mathsf{trans} : (x \simeq y) \to (y \simeq z) \to (x \simeq z),$$
$$\mathsf{inv} : (x \simeq y) \to (y \simeq x),$$
$$\mathsf{idl} : \mathsf{trans}(\mathrm{refl}, p) \simeq p,$$
$$\mathsf{inv\text{-}refl} : \mathsf{inv}(\mathrm{refl}) \simeq \mathrm{refl},$$
$$\mathsf{idr} : \mathsf{trans}(p, \mathrm{refl}) \simeq p,$$
$$\mathsf{assoc} : \mathsf{trans}(\mathsf{trans}(p, q), r) \simeq \mathsf{trans}(p, \mathsf{trans}(q, r)),$$
$$\mathsf{inv\text{-}l} : \mathsf{trans}(\mathsf{inv}(p), p) \simeq \mathrm{refl},$$
$$\mathsf{inv\text{-}r} : \mathsf{trans}(p, \mathsf{inv}(p)) \simeq \mathrm{refl},$$

以及一些高维识别，它们是确保这是通过新增元素扩张可缩种类所必需的。我们可以将 idl 和 inv-refl 视为借助 Id 类型的泛性质来规定 trans 和 inv 的识别，因此我们还需要额外的识别来规定 idr、assoc、inv-l 和 inv-r：

$$- : \mathsf{idr}(\mathrm{refl}) \simeq \mathsf{idl}(\mathrm{refl}),$$
$$- : \mathsf{assoc}(p, q, \mathrm{refl}) \simeq \ldots,$$
$$- : \mathsf{inv\text{-}l}(\mathrm{refl}) \simeq \ldots,$$
$$- : \mathsf{inv\text{-}r}(\mathrm{refl}) \simeq \ldots,$$

其中，右端应为这些定律的通常证明。

我们得到一个理论 $\mathcal{T}$，它应当是 $\mathcal{T}_0$ 的保守扩张。

其次，我们考虑通过标记恒等（如 idl、inv-refl 等）以及额外的高维恒等所获得的 $\mathcal{T}$ 的方程扩张。

(4)要考虑用一个新的严格命题宇宙扩展类型论，我们同样会执行两个步骤。第一步，我们引入一个新的常量类型 SProp，以及一个将SProp $\simeq$ HProp与命题类型 HProp联系起来的等价。我们将相关的传输函数记作F : SProp $\to$ HProp。

其次，我们标记这一族恒等。

$$(A : \mathsf{SProp})(a, b : F(A)) \to \mathsf{Id}(a, b).$$

在所得的严格类型理论中，获得 SProp 的闭元素的唯一方式是使用等价 F 的逆，将 HProp 中的元素替换为 SProp 中的元素。

注意，将恒等族标记的方程扩张

$$(A : \mathsf{HProp})(a, b : A) \to \mathsf{Id}(a, b)$$

在没有 UIP 的情况下并不是保守扩张。事实上，正如 [GCST19],中所述，如果所有命题都是严格命题，那么 UIP 成立。

（5）到目前为止，我们只标记了项之间的恒等。我们还可以标记类型之间的等价。

例如，设 $\mathcal{T}$ 是一个具有弱塔斯基宇宙且对恒等类型封闭的类型论。这意味着，$\mathcal{T}$ 通过以下内容扩张了 $\mathcal{T}_{\mathsf{Id}}$:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{U} : \mathsf{Ty},\\
&\mathsf{El} : \mathcal{U} \to \mathsf{Ty},\\
&\widehat{\mathsf{Id}} : (A : \mathcal{U}) \to \mathsf{El}(A) \to \mathsf{El}(A) \to \mathcal{U},\\
&\alpha : \forall A\ x\ y \to \mathsf{El}(\widehat{\mathsf{Id}}(A, x, y)) \simeq \mathsf{Id}(\mathsf{El}(A), x, y).
\end{aligned}$$

然后，我们在上下文（A，x，y）上标记等价 α。所得理论 $\mathcal{T}_E$随后具有一个严格的塔斯基宇宙。

注意，我们假设在 α 的规范以及 $\mathcal{T}$在例 4.19 中的同伦关系规范中使用了相同的等价定义（例如关系等价）。

如果 α 而是一个半伴随等价族，我们就需要像前面的例子那样分两步构造这个扩张。第一步，我们添加一个新的关系等价族 α'，以及 α 和 α' 之间的同伦。第二步，我们考虑将这些等价 α' 标记后得到的方程扩张。

(6) 最后一个例子是，我们也可以标记泛型上下文 (A : Ty x : A, y : A, p : Id(x, y)) 上的通用恒等 p。相应的严格类型理论便包含等式反射规则。等价地，也可以标记任意上下文上的所有恒等。」

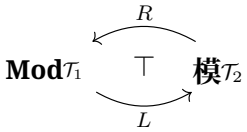
5.2. **Morita 等价**。 现在我们定义 SO-GAT 之间 Morita 等价的概念。一般而言，当两个理论具有等价的模型范畴时，我们称它们是 Morita 等价的。因此，配备了同伦关系的两个 SOGAT，在它们具有等价的 ∞-模型范畴时，应当是 Morita 等价的（前提是这些 ∞-范畴

存在）。Isaev [Isa18b] 定义了类型理论之间的 Morita 等价概念，并证明两个理论 Morita 等价，当且仅当它们的模型范畴 Quillen 等价（前提是模型范畴上的模型结构或半模型结构存在）。我们在分类（Σ，Π_{rep}）-CwF 的层面给出了一个更简单的定义。

令 $\mathcal{T}_1 \to \mathcal{T}_2$ 是 SOGAT 的一个态射，其中 $\mathcal{T}_1$ 配备了同伦关系。

定义 5.4. 我们称态射 $\mathcal{T}_1 \to \mathcal{T}_2$ 为（可分裂/不可分裂）Morita 等价，若映射 $\mathcal{T}_1 \to \mathcal{T}_2$ 在 $\mathbf{Mod}_{\mathcal{T}_1}$ 中是一个（可分裂/不可分裂）弱等价。」

我们有一个伴随，连接范畴 $\mathbf{Mod}_{\mathcal{T}_1}$ 和 $\mathbf{Mod}_{\mathcal{T}_2}$，它们分别是 $\mathcal{T}_1$ 和 $\mathcal{T}_2$ 的模型范畴。



当 $\mathcal{T}_2$ 是 $\mathcal{T}_1$的方程扩张时，右伴随 R 是遗忘函子，它遗忘模型满足 $\mathcal{T}_2$的附加方程这一事实。

我们有以下关于 Morita 等价的刻画。条件 (1) 是 Isaev 对 Morita 等价的定义 [Isa18b]。完整证明留待后续工作，但应当可以沿用猜想4.29证明中的相同思路和方法得出。

猜想 5.5. 假设 $\mathcal{T}_1$ 满足外部单值性。那么以下条件等价：

(1) 对于每个余纤维化模型 $\mathcal{C}$ of $\mathcal{T}_1$，单位 $\eta_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to R(L(\mathcal{C}))$ 在$\mathbf{Mod}_{\mathcal{T}_1}$中是弱等价。(2) 对于 $\mathcal{T}_1$ 的每个自由生成模型 $\mathcal{C}$，单位 $\eta_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to R(L(\mathcal{C}))$ 在 $\mathbf{Mod}_{\mathcal{T}_1}$中是弱等价。(3) 对于 $\mathcal{T}_1$ 的每个有限生成模型 $\mathcal{C}$，单位 $\eta_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to R(L(\mathcal{C}))$ 在 $\mathbf{Mod}_{\mathcal{T}_1}$ 中是弱等价。(4) SOGAT 态射 $\mathcal{T}_1 \to \mathcal{T}_2$ 是 Morita 等价。

证明思路。需要 $\mathcal{T}_1$ 满足外部单值性，以确保 $\mathbf{Mod}_{\mathcal{T}_1}$ 中的弱等价满足某些闭包条件（例如二取三性质的某些方向以及对收缩的闭包）。

(1) 与 (2) 等价，是因为每个余纤维模型都是自由生成模型的收缩。

(2) 与 (3) 等价，是因为每个 I-胞腔模型都是有限生成模型的滤过余极限（因为 $\mathcal{T}$ 是有限理论）。

(3) 与 (4) 等价，依据猜想 4.16。 □

5.3. **通过可缩类型进行扩张**。在我们的方程扩张示例中，我们经常考虑扩张的复合 $\mathcal{T}_0 \to \mathcal{T} \to \mathcal{T}_E$，其中 $\mathcal{T} \to \mathcal{T}_E$ 是方程扩张，而 $\mathcal{T}_0 \to \mathcal{T}$ 是通过添加可缩类型的新元素对 $\mathcal{T}_0$ 进行的扩张。

本文主要关注扩张 $\mathcal{T} \to \mathcal{T}_E$ 的保守性，但我们还需要一种方法来证明 $\mathcal{T}_0 \to \mathcal{T}$ 是保守扩张。一般来说，我们需要证明以下猜想。

猜想 5.6. 设 $\mathcal{T}$ 是一个满足外部单值性的余纤维化 SOGAT。设（$\Gamma \vdash Y$ 类型）$\in \mathcal{T}$ 是 $\mathcal{T}$ 的一个种类，且该种类是可缩的（相对于由外部单值性导出的弱稳定恒等类型）。那么，扩张 $\mathcal{T} \to \mathcal{T}[\gamma : \Gamma \vdash \boldsymbol{y}(\gamma) : Y(\gamma)]$ 是 Morita 等价，并且 $\mathcal{T}[\gamma : \Gamma \vdash \boldsymbol{y}(\gamma) : Y(\gamma)]$ 也满足外部单值性（具有与 $\mathcal{T}$ 相同的同伦关系）。」

证明猜想 5.6 或其任何特例都需要更多工具（包括猜想 4.29），因此我们将证明留待未来工作。

使用以下事实，证明猜想 5.6 在 闭可缩种类情形下的特殊情况应该并不困难：$\mathcal{T}[\boldsymbol{y} : Y]$ 与上下文切片（$\mathcal{T} /\!\!/ 1_{\mathcal{T}}.Y$）同构，也就是说，它是切片模型（$\mathcal{T}/1_{\mathcal{T}}.Y$）在 **上下文范畴**$_{\Sigma,\Pi_{\mathsf{rep}}}$ 中的上下文核。

一般情形更为复杂。不过，如果我们考虑 (Σ, Π_{rep}, Id)-上下文范畴，而不是具有外部单值性的 SOGAT（它们是 (Σ, Π_{rep}, Id$_{ws}$)-上下文范畴），那么类似的结果可由猜想4.29推出，只需将其应用于分类 (Σ, Π_{rep}, Id)-上下文范畴的 SOGAT $\mathcal{T}_{\Sigma,\ \Pi_{\mathsf{rep}},\ \mathsf{Id}}$。这意味着，猜想5.6应可由一个相干定理推出，该定理提供了一种将 (Σ, Π_{rep}, Id$_{ws}$)-上下文范畴严格化为 (Σ, Π_{rep}, Id)-上下文范畴的方法。这种严格化可能仅适用于满足某种余纤维化条件的 (Σ, Π_{rep}, Id$_{ws}$)-上下文范畴，例如在**上下文范畴**$_{\Sigma,\ \Pi_{\mathsf{rep}}}$中是余纤维化的。

6. 部分饱和

本节介绍关于一族 E同伦的部分饱和 ($\Sigma, \Pi_{\mathsf{rep}}$,Id)-CwF，以及这样的初始 CwF $\mathcal{T}^{\infty}_{\widehat{E}}$。本文的主定理将方程扩张 $\mathcal{T} \to \mathcal{T}_E$ 的保守性归结为 $\mathcal{T}^{\infty}_{\widehat{E}}$的性质。

6.1. **定义**。 设 $\mathcal{C}$ 是一个配备了 ($\Sigma, \Pi_{\mathsf{rep}}$,Id)-CwF，且具有 $\mathcal{T}$的内模型。对于每个生成类型 $\mathsf{S} \in \mathsf{GenTy}_{\mathcal{T}}$，我们都有一个比较映射，从外部恒等（$\simeq$）到同伦（$\sim$），其定义是将外部自反性 refl 映射到常值同伦hrefl。

$$\mathsf{id\text{-}to\text{-}hpty}_{\mathsf{S}} : (x \simeq_{\mathsf{S}(\sigma)} y) \to (x \sim_{\mathsf{S}(\sigma)} y),$$
$$\mathsf{id\text{-}to\text{-}hpty}_{\mathsf{S}}(\mathsf{refl}) \simeq \mathsf{hrefl}_{\mathsf{S}}.$$

CwF $\mathcal{C}$ 按照定义 4.27 的意义是饱和的，当且仅当对每个生成类型，这些映射都是等价。因此，当一族同伦上的 id-to-hpty$_{\mathsf{S}}$ 限制都为等价时，我们称 $\mathcal{C}$ 关于这族同伦是部分饱和的。

定义 6.1。 设 $\mathcal{C}$ 是一个 (Σ, Π_{rep}, Id)-上下文范畴，配备了 $\mathcal{T}$ 的内模型，即一个 (Σ, Π_{rep})-上下文范畴态射 $\mathcal{T} \to \mathcal{C}$。我们称 $\mathcal{C}$ 关于 E 是**部分饱和的**，若对每个同伦 ($\gamma : \Gamma \vdash p(\gamma) : x(\gamma) \sim_{\mathsf{S}(\sigma)} y(\gamma)) \in E$，以下可缩性条件成立：

$$\gamma : \Gamma \vdash \mathrm{isContr}((q : x(\gamma) \simeq_{\mathsf{S}(\sigma)} y(\gamma)) \times (\mathsf{id\text{-}to\text{-}hpty}_{\mathsf{S}}(q(\gamma)) \simeq p(\gamma))).$$

在这种情况下，我们有以下收缩中心：

$$\gamma : \Gamma \vdash \widehat{p}(\gamma) : x(\gamma) \simeq_{\mathsf{S}(\sigma)} y(\gamma),$$
$$\gamma : \Gamma \vdash \widetilde{p}(\gamma) : \mathsf{id\text{-}to\text{-}hpty}_{\mathsf{S}}(\widehat{p}(\gamma)) \simeq p(\gamma).$$

」

特别地，$\mathcal{C}$ 当且仅当它相对于所有泛同伦都是部分饱和的时，才是饱和的：

$$\{(\sigma : \partial\mathbf{S}, x : \mathbf{S}(\sigma), y : \mathbf{S}(\sigma), p : x \sim_{\mathbf{S}(\sigma)} y \vdash p : x \sim_{\mathbf{S}(\sigma)} y) \mid \mathbf{S} \in \mathsf{GenTy}_{\mathcal{T}}\},$$

或者等价地，对于所有同伦而言。

我们将 $\mathcal{T}^{\infty}_{\widehat{E}}$写作配备有内模型 $\mathcal{T}$、且相对于 E部分饱和的 $(\Sigma, \Pi_{\mathsf{rep}}, \mathrm{Id})$-CwF 中的始对象。上标 $-^{\infty}$ 表示，除去关于 $(\Sigma, \Pi_{\mathsf{rep}}, \mathrm{Id})$-CwF 与可表示映射 ∞-范畴之间的猜想对应关系，$\mathcal{T}^{\infty}_{\widehat{E}}$在本质上是一个 ∞-范畴。下标 $^{-\widehat{E}}$ 表示 $\mathcal{T}^{\infty}_{\widehat{E}}$包含 E中每个带标记同伦的提升。

我们将 $\mathcal{T}^{1}_{E}$记作配备了 $\mathcal{T}_E$ 的内模型的 $(\Sigma, \Pi_{\mathsf{rep}}, \mathrm{Eq})$-上下文范畴中的始对象。上标 $-^1$ 现在表示 $\mathcal{T}^{1}_{E}$ 在本质上是一个可表示映射 1-范畴。请注意，$\mathcal{T}^{1}_{E}$ 可视为配备了 $\mathcal{T}$ 的内模型的 $(\Sigma, \Pi_{\mathsf{rep}}, \mathrm{Id})$-上下文范畴。于是，相对于 E，它是饱和的，因为 E 的方程在 $\mathcal{T}_E$中按定义成立。因此，根据 $\mathcal{T}^{\infty}_{\widehat{E}}$的泛性质，我们有一个态射 $\mathcal{T}^{\infty}_{\widehat{E}} \to \mathcal{T}^{1}_{E}$，使得下面的方块交换：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T} & \longrightarrow & \mathcal{T}_E \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{T}^{\infty}_{\widehat{E}} & \longrightarrow & \mathcal{T}^{1}_{E} \end{array}.$$

6.2. 垂直映射的性质。 现在我们讨论上图中两个垂直映射的性质。

在某些假设下，这两个态射应当被视为嵌入；在范畴或 ∞-范畴层面，它们分别对应忠实满函子或 ∞-函子。

命题 6.2。 *该 $(\Sigma, \Pi_{\mathsf{rep}})$-CwF 态射 $\mathcal{T}_E \to \mathcal{T}^{1}_{E}$ 在项上是双射。* □

我们省略证明；它可由相当标准的粘合构造或逻辑关系解释推出，与 [GS20]的适定性证明，或 [Kov22]对双层类型论保守性的完整证明非常相似。从更偏句法的角度来看，这是一个典范性证明，其中项 $(F(\Gamma) \vdash a : F(A)) \in \mathcal{T}^{1}_{E}$的典范形式是一个项 $(\Gamma \vdash a_0 : A) \in \mathcal{T}_E$，满足 $F(a_0) = a$。

或者，我们不需要使用 $\mathcal{T}^{1}_{E}$，因为本文中我们从未需要用到它的泛性质$\widehat{\ }$。我们可以改用预层范畴 $\mathcal{T}_E$，它是一个 $(\Sigma, \Pi_{\mathsf{rep}}, \mathrm{Eq})$-CwF。Yoneda 嵌入 $\mathbb{y} : \mathcal{T}_E \to \mathcal{T}_E$ 是 $(\Sigma, \Pi_{\mathsf{rep}})$-CwFs 的一个伪态射，这意味着终对象、上下文扩展和类型构造子仅在同构意义下得到保留。$\mathbb{y}$ 对项的作用是双射。利用 $\mathcal{T}_E$ 是 $\{I^{\mathsf{ty}}, I^{\mathsf{ty}_{\mathsf{rep}}}, I^{\mathsf{tm}}, E^{\mathsf{tm}}\}$-$\widehat{\ }$ 胞腔的这一事实，我们可以用一个严格态射 $y : \mathcal{T}_E \to \mathcal{T}_E$ 以及一个自然同构 $\alpha : y \cong \mathbb{y}$ 来替代 Yoneda 嵌入。非正式地说，$\mathcal{T}_E$ 的上下文和类型在一个 $(\Sigma, \Pi_{\mathsf{rep}})$-CwF 的运算下自由封闭，因此我们可以通过对它们进行归纳，重新定义 y 在上下文和类型上的作用。形式上，我们构造 Yoneda 嵌入的同构粘合 $\mathcal{G}(\mathbb{y})$，赋予其一个 $(\Sigma, \Pi_{\mathsf{rep}})$-CwF 的结构，并证明投影 $\mathcal{G}(\mathbb{y}) \to \mathcal{T}_E$ 关于 $\{I^{\mathsf{ty}}, I^{\mathsf{ty}_{\mathsf{rep}}}, I^{\mathsf{tm}}, E^{\mathsf{tm}}\}$ 具有右提升性质。随后，我们得到一个截面 $\mathcal{T}_E \to \mathcal{G}(\mathbb{y})$，它可以分解为 y 和 α。

我们仅猜想另一个垂直映射也有类似的结果。

猜想 6.3。 如果 $\mathcal{T}$ 满足外部单值性，且在**上下文范畴**$_{\Sigma,\ \Pi_{\mathsf{rep}}}$中是余纤维化的，那么 $\mathcal{T} \to \mathcal{T}^{\infty}_{\widehat{E}}$是$\mathbf{Mod}_{\mathcal{T}}$中的弱等价。」

这一猜想在第 9 节中有更详细的讨论。

6.3. **在保守性方面的应用**。现在我们来说明如何利用部分饱和模型$\mathcal{T}^{\infty}_{\widehat{E}}$来证明 $\mathcal{T} \to \mathcal{T}_E$ 是 Morita 等价。其思路是将 $\mathcal{T}^{\infty}_{\widehat{E}}$视为 $\mathcal{T}$ 上的 ∞同余（尽管我们并未正式定义 ∞同余）。

普通同余由项 $\mathcal{T}$ 上的等价关系构成。等价地，同余是从集合值模型到集合型值模型的嵌入。类似地，a∞-同余应当是从集合值模型到空间值模型的嵌入，或取值于 ∞-群胚的模型。

在此，我们采用这样的观点： ∞-群胚是带有恒等类型的类型论模型中的一个类型： ∞-群胚的点是该类型的项，而高阶态射则是迭代恒等类型的项。所有高阶复合运算均可由恒等类型消去子导出。 $\mathcal{T}^{\infty}_{\widehat{E}}$的恒等类型赋予其项 ∞-群胚的结构。这些 ∞-群胚的高阶结构由 E中所有同伦的提升自由生成。

给定一个 1-同余，自然可以考虑其商。为了证明扩展 $\mathcal{T} \to \mathcal{T}_E$ 的保守性，我们希望考虑 $\mathcal{T}^{\infty}_{\widehat{E}}$ 的商。为确保商的存在，我们需要假设 ∞-同余 $\mathcal{T}^{\infty}_{\widehat{E}}$实际上可以限制为一个 1-同余。

我们首先需要定义 0-截断（Σ，Id）-上下文范畴的概念。

定义 6.4。 如果对于 $\mathcal{C}$ 中的每个自恒等（$\gamma : \Gamma \vdash p(\gamma) :\ x(\gamma) \simeq_{A(\gamma)} x(\gamma)$），（仅仅）存在 $\mathcal{C}$ 中的一个恒等（$\gamma :\ \Gamma \vdash \mathsf{uip}_p(\gamma) :\ p(\gamma) \simeq \mathsf{refl}$），则称（$\Sigma$，Id）-上下文范畴 $\mathcal{C}$ 是（仅仅）0-截断的。」

定义 6.5。若一个（Σ，Id）-上下文范畴 $\mathcal{C}$ 相对于函子$F :\ \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ （仅）是 0-截断的，则对于 $\mathcal{C}$ 中的每个自恒等（$\gamma :\ F(\Gamma) \vdash p(\gamma) :\ x(\gamma) \simeq_{A(\gamma)} x(\gamma)$），在 $\mathcal{C}$ 中（仅）存在一个恒等（$\gamma :\ F(\Gamma) \vdash \mathsf{uip}_p(\gamma) :\ p(\gamma) \simeq \mathsf{refl}$）。」

Ou主要结果将在第 8 节中证明，内容如下： g:

定理 6.6。若 $\mathcal{T} \to \mathcal{T}^{\infty}_{\widehat{E}}$ 在 $\mathbf{Mod}_{\mathcal{T}}$ 中是弱等价，且 $\mathcal{T}^{\infty}_{\widehat{E}}$ 相对于 $\mathcal{T} \to \mathcal{T}^{\infty}_{\widehat{E}}$ 仅是0-截断的，则 $\mathcal{T} \to \mathcal{T}_E$ 是 *Morita* 等价。

如果 $\mathcal{T}^{\infty}_{\widehat{E}} \to \mathcal{T}^{1}_{E}$ 在 $\mathrm{Mod}_{\mathcal{T}}$ 中是弱等价，我们就可以利用弱等价的三取二性质得出结论。然而，由于存在不属于 $\mathcal{T} \to \mathcal{T}^{\infty}_{\widehat{E}}$ 的像的上下文，例如 $\Gamma \triangleq (\sigma :\ \partial \mathsf{S}\ \ x : \mathsf{S}(\sigma)\ \ p : x \simeq_{\mathsf{S}(\sigma)} x)$，$\mathcal{T}^{\infty}_{\widehat{E}} \to \mathcal{T}^{1}_{E}$ 在 $\mathrm{Mod}_{\mathcal{T}}$ 中几乎从来不是弱等价。事实上，$\mathsf{id\text{-}to\text{-}hpty}\mathsf{s}(p) \sim \mathsf{hrefl}$ 在 $\mathcal{T}^{1}_{E}$ 中是可证的，但通常无法在 $\mathcal{T}^{\infty}_{\widehat{E}}$ 中证明。不过，$\mathcal{T}^{\infty}_{\widehat{E}} \to \mathcal{T}^{1}_{E}$ 无需是完全的弱等价，只要它满足的弱提升条件仅涉及 $\mathcal{T} \to \mathcal{T}^{\infty}_{\widehat{E}}$ 的像中的上下文即可。

我们需要一种方法来避免那些不在 $\mathcal{T} \to \mathcal{T}^{\infty}_{\widehat{E}}$ 的像中的上下文。为此，我们在 **上下文范畴**$_{\Sigma,\Pi_{\mathsf{rep}}}$ 中对 $\mathcal{T} \to \mathcal{T}_{\widehat{E}}$ 进行分解：先是一个 $\{I^{\mathsf{tm}}, E^{\mathsf{tm}}\}$-余纤维化$\mathcal{T} \to \mathcal{T}_{\widehat{E}}$，随后是一个 $\{I^{\mathsf{tm}}, E^{\mathsf{tm}}\}$-纤维化 $\mathcal{T}_{\widehat{E}} \to \mathcal{T}^{\infty}_{\widehat{E}}$。这里， $\{I^{\mathsf{tm}}, E^{\mathsf{tm}}\}$-纤维化是由 I^{tm} 生成的正交分解系统中的映射右类，也就是说，其对项的作用是双射的。

构造 6.7。 $(\Sigma, \Pi_{\mathsf{rep}})$-上下文范畴 $\mathcal{T}_{\widehat{E}}$是适配于某个分解的 $(\Sigma, \Pi_{\mathsf{rep}})$-上下文范畴，且在同构意义下唯一。

$$\mathcal{T} \to \mathcal{T}_{\widehat{E}} \to \mathcal{T}_{\widehat{E}}^{\infty}$$

其中 $\mathcal{T} \to \mathcal{T}_{\widehat{E}}$是一个 $\{I^{\mathsf{tm}}, E^{\mathsf{tm}}\}$-余纤维化， $\mathcal{T}_{\widehat{E}}^{\infty}$是一个 $\{I^{\mathsf{tm}}, E^{\mathsf{tm}}\}$-纤维化。 」

CwF $\mathcal{T}_{\widehat{E}}$ 因此扮演着 $\mathcal{T} \to \mathcal{T}_{\widehat{E}}^{\infty}$的像的角色。它也可以被识别为由不包含任何恒等类型的上下文和类型张成的 $\mathcal{T}_{\widehat{E}}^{\infty}$的子上下文范畴（因为它们是由 $(\Sigma, \Pi_{\mathsf{rep}})$-CwF 的类型构造子自由生成的）。

下标 $^{-}{}_{\widehat{E}}$ 仍然表示， $\mathcal{T}_{\widehat{E}}$包含了 E中所有标记同伦的提升，或者更准确地说，包含了这些提升上的所有传输和高维传输。上标 $-^{\infty}$ 的缺失表明， $\mathcal{T}_{\widehat{E}}$ 不再能被视为一个 ∞-范畴。

引理 6.8。 映射 $\mathcal{T} \to \mathcal{T}_{\widehat{E}}$是一个 $\{I^{\mathsf{ty}}, E^{\mathsf{ty}}, I^{\mathsf{ty}_{\mathsf{rep}}}, E^{\mathsf{ty}_{\mathsf{rep}}}, I^{\mathsf{tm}}, E^{\mathsf{tm}}\}$-余纤维化　$n.$

证明。 根据定义，映射 $\mathcal{T} \to \mathcal{T}_{\widehat{E}}$是一个 $\{I^{\mathsf{tm}}, E^{\mathsf{tm}}\}$-余纤维化，并且

$$\{I^{\mathsf{tm}}, E^{\mathsf{tm}}\} \subseteq \{I^{\mathsf{ty}}, E^{\mathsf{ty}}, I^{\mathsf{ty}_{\mathsf{rep}}}, E^{\mathsf{ty}_{\mathsf{rep}}}, I^{\mathsf{tm}}, E^{\mathsf{tm}}\}.$$ □

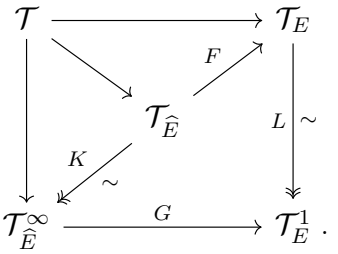
引理 6.9。 映射 $\mathcal{T}_{\widehat{E}} \to \mathcal{T}_{\widehat{E}}^{\infty}$是 $\mathbf{Mod}_{\mathcal{T}}$中的上下文同构。

证明。 由于该映射在**上下文范畴**$_{\Sigma\text{中}\Pi_{\mathsf{rep}}}$的项上是双射，因此特别地，它在任意种类的元素上都是双射，即为上下文同构。 □

引理 6.10。 如果 $\mathcal{T} \to \mathcal{T}_{\widehat{E}}^{\infty}$是$\mathbf{Mod}_{\mathcal{T}}$中的弱等价，那么 $\mathcal{T} \to \mathcal{T}_{\widehat{E}}$ 也是$\mathbf{Mod}_{\mathcal{T}}$中的弱等价。

证明。 根据三取二性质，由于根据引理 6.9， $\mathcal{T}_{\widehat{E}} \to \mathcal{T}_{\widehat{E}}^{\infty}$是$\mathbf{Mod}_{\mathcal{T}}$中的弱等价。因此，三取二性质在$\mathbf{Mod}_{\mathcal{T}}$中的这一方向已在引理4.25中得到证明。 □

$\{I^{\mathsf{ty}}, E^{\mathsf{ty}}, I^{\mathsf{ty}_{\mathsf{rep}}}, E^{\mathsf{ty}_{\mathsf{rep}}}, I^{\mathsf{tm}}, E^{\mathsf{tm}}\}$余纤维化 $\mathcal{T} \to \mathcal{T}_{\widehat{E}}$相对于上下文同构 $\mathcal{T}_E \to \mathcal{T}_E^1$的提升性质给出了一个 $(\Sigma,\ \Pi_{\mathsf{rep}})$-上下文范畴的态射 $\mathcal{T}_{\widehat{E}} \to \mathcal{T}_E$。以下图表交换：



本文其余部分将发展一些工具，用于证明：只要 $\mathcal{T}_{\widehat{E}}^{\infty}$相对于 $\mathcal{T} \to \mathcal{T}_{\widehat{E}}^{\infty}$仅为 0-截断，$\mathcal{T}_{\widehat{E}} \to \mathcal{T}_E$ 就是非分裂平凡纤维化。

7. 一阶广义代数理论模型的商

本节讨论（一阶）广义代数理论模型上的同余，以及这类同余的商。本文只需要将其应用于 $(\Sigma,\ \Pi_{\mathsf{rep}})$-上下文范畴的广义代数理论，但全面介绍更为简便。

对于普通代数理论，同余和商的性质都很好。同余只需由每个种类上的等价关系组成，并且这些等价关系保持所有运算。

在该理论中，模型的商通过对每个种类分别按照指定的等价关系取商来计算。

对于广义代数理论，情况更为复杂，因为其中存在依赖种类。我们仍然有同余的一般概念，但商不再能按种类逐一计算。换言之，商嵌入不一定是平凡纤维化。

例如，我们可以考虑范畴 $a \overset{f}{\rightarrow} b \qquad c \overset{g}{\rightarrow} d$ 对识别 b 和 c 的同余取商。在商中，可以复合 f 和 g，但原范畴中并不存在与它们的复合相对应的态射。商嵌入函子不是满的。

不过，只要在同余的定义中加入额外的纤维化条件，就可以逐点计算商。任何“纤维化的”同余的商嵌入都是非分裂平凡纤维化。此外，每个非分裂平凡纤维化都可（在同构意义下）表示为某个纤维化同余的商。

7.1. GAT 的函子语义。 我们先简要回顾一下 $\mathbf{CwF}_\Sigma$ 中 GAT 的函子语义，采用与第 4 节中所发展的 SOGAT 语义相同的风格。

定义 7.1。一个广义代数理论（GAT）是一个 $\{I^{\mathsf{ty}}, I^{\mathsf{tm}}, E^{\mathsf{tm}}\}$-胞腔Σ-CwF。」

任何不含可表示分类的 SOGAT 也是一个 GAT（这可以通过对该 SOGAT 的 $\{I^{\mathsf{ty}}, I^{\mathsf{tm}}, E^{\mathsf{tm}}\}$-胞腔表示进行归纳来证明）。这包括范畴的 GAT（例 4.2）、幺半范畴的 GAT（例 4.4）等。

例 7.2。 CwF 的 GAT $\mathcal{T}_{\mathbf{CwF}}$ 通过增加两个新种类扩展了范畴的 GAT

$$\begin{aligned}
&\mathbf{Ty} : \mathbf{Ob} \to \mathbb{T}_{\mathbf{CwF}},\\
&\mathbf{Tm} : (\Gamma : \mathbf{Ob}) \to \mathbf{Ty}(\Gamma) \to \mathbb{T}_{\mathbf{CwF}},
\end{aligned}$$

六个运算

$$\begin{aligned}
&_[_] : \mathbf{Ty}(\Gamma) \to \mathbf{Hom}(\Delta, \Gamma) \to \mathbf{Ty}(\Delta),\\
&_[_] : \mathbf{Tm}(\Gamma, A) \to (\gamma : \mathbf{Hom}(\Delta, \Gamma)) \to \mathbf{Ty}(\Delta, A[\gamma]),\\
&_._ : (\Gamma : \mathbf{Ob}) \to \mathbf{Ty}(\Gamma) \to \mathbf{Ob},\\
&\boldsymbol{p} : \mathbf{Hom}(\Gamma.A, \Gamma),\\
&\boldsymbol{q} : \mathbf{Tm}(\Gamma.A, A[\boldsymbol{p}]),\\
&\langle _, _ \rangle : (\gamma : \mathbf{Hom}(\Delta, \Gamma)) \to \mathbf{Tm}(\Delta, A[\gamma]) \to \mathbf{Hom}(\Delta, \Gamma.A)
\end{aligned}$$

以及一些表达这些运算的函子性和自然性的方程。

类似地，存在一个关于（Σ，Π_{rep}）-上下文范畴的广义代数理论 $\mathcal{T}_{\mathbf{CwF}_{\Sigma,\ \Pi_{\mathsf{rep}}}}$，它通过新增一个可表示类型的种类、一个针对可表示类型的替换运算、一个对应于（Σ，Π_{rep}）-上下文范畴中每个类型论运算的运算，以及表达这些运算的函子性和自然性的方程来扩展 $\mathcal{T}_{\mathbf{CwF}}$。」

我们现在在本节的大部分内容中固定一个广义代数理论（GAT）$\mathcal{T}$。$\mathcal{T}$的一个闭合种类是一个对象 $X \in \mathcal{T}$（或等价地，一个闭合类型）。$\mathcal{T}$的一个依赖种类是一个类型（$X \vdash Y$类型）$\in \mathcal{T}$。

定义 7.3。 $\mathcal{T}$ 的模型是一个 Σ-CwF 态射 $\mathcal{T} \to$**集合**。两个模型 $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$: $\mathcal{T} \to$ **集合** 之间的态射是一个自然变换 $\mathcal{M} \Rightarrow \mathcal{N}$。」

给定闭合种类 $X \in \mathcal{T}$ 和态射 F： $\mathcal{M} \to \mathcal{N}$，该分量

$$F_X : \mathcal{M}_X \to \mathcal{N}_X$$

自然变换在种类 X 的元素上的作用是 F。

对于任意依赖种类（$X \vdash Y$类型） $\in \mathcal{T}$和态射 F： $\mathcal{M} \to \mathcal{N}$，都存在一个作用

$$F_Y : \mathcal{M}_Y(x) \to \mathcal{N}_Y(F_X(x))$$

F 在 Y的元素上的，且由以下事实唯一确定：

$$F_{X.Y} : \mathcal{M}_{X.Y} \to \mathcal{N}_{X.Y}$$

应将 $(x,\ y)$ 映射到 $(F_X(x)\ F_Y(y))$。

定义 7.4。 若态射 $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ 属于 $\mathbf{Mod}_{\mathcal{T}}$，则称其为**平凡纤维化**，如果对每个依赖种类（$X \vdash Y$类型） $\in \mathcal{T}$，映射

$$F_Y : \mathcal{M}_Y(x) \to \mathcal{N}_Y(F_X(x))$$

是满射。」

与先前对弱等价和平凡纤维化的定义一样，平凡纤维化实际上有两种概念：分裂平凡纤维化和非分裂平凡纤维化。

注 7.5。 将定义 7.4 中的平凡纤维化应用于 CwF 的广义代数理论 $\mathcal{T}_{\mathbf{CwF}}$ 时，它与定义 2.11 中的平凡纤维化并不完全相同；后者可称为局部平凡纤维化。事实上，定义 7.4 还包含针对上下文和代换的额外提升条件。所幸，任何平凡纤维化都是局部平凡纤维化，而这正是我们构造所需的方向。」

~ ~7.2. **同余**。 给定集合 X 上的等价关系 X，我们用 $(x_1 \sim x_2) \in X$ 表示 x_1 和 x_2。对于依赖等价关系，我们也使用相同的记法。

~ ~ ~给定 X 上的依赖等价关系 Y，写作 $(y_1 \sim y_2) \in Y$ 意味着假定 ~$(x_1 \sim x_2) \in X$（当 y_1：$Y(x_1)$ 且 y_2：$Y(x_2)$ 时）。

集合胚的 Σ-CwF **集合胚** 是一个基于集合胚范畴的 CwF，其中类型是依赖（或显示）集合胚，即带有依赖等价关系的集合族。

定义 7.6. 模型 $\mathcal{M}$ ： $\mathcal{T}$ $\to$ **集合** 上的**同余** 是一个 Σ-CwF 态射

~ ~ ~$\mathcal{M}$ ： $\mathcal{T} \to$ **集合胚**，使得 $U \circ \mathcal{M} = \mathcal{M}$。」

~ ~ ~给定一个同余 $\mathcal{M}$ 和一个闭合种类 $X \in \mathcal{T}$，我们在 $\mathcal{M}_X$ 上有一个等价关系 $\mathcal{M}_X$。对于一个依赖种类（$X \vdash Y$类型） $\in \mathcal{T}$，我们在 $\mathcal{M}_X$ 上有一个依赖等价关系~ ~ ~$\mathcal{M}_Y$。给定 $\mathcal{T}$ 中任意一个态射或项， $\mathcal{M}$ 对态射和项的作用意味着 $\mathcal{M}$ 的相应运算保持（依赖）等价关系。

给定两个同余 $\mathcal{M}_X \subseteq \mathcal{M}_X$ 和 $\mathcal{M}$ 在闭合种类或依赖种类 X 的关系时。

定义 7.7. 态射 $F\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ 模型的**核** 是一个同余 $\ker_F\colon \mathcal{T} \to$**集合胚**，定义在 $\mathcal{M}$ 上，定义如下：

$$((x_1 \sim x_2) \in \ker_F(X)) \overset{\triangle}{\iff} F(x_1) = F(x_2)$$

对于任意闭合种类 $X \in \mathcal{T}$ 以及

$$((y_1 \sim y_2) \in \ker_F(Y)) \overset{\triangle}{\iff} F(y_1) = F(y_2)$$

对于任意依赖种类（$X \vdash Y$ 类型）$\in \mathcal{T}$。」

「**定义 7.8**。同余 $\mathcal{M}$ 的一个**商**是一个模型 $\mathbf{Q}$ 以及一个态射 $\mathbf{q}\colon \mathcal{M} \to \mathbf{Q}$，使得 $\mathcal{M} \subseteq$ 核$\mathfrak{q}$，并满足以下泛性质：对于每个~其他态射 $F\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$，使得 $\mathcal{M} \subseteq$ 核$_F$，存在唯一态射 $F\colon \mathbf{Q} \to \mathcal{N}$~，使得 $F \circ \mathbf{q} = F$。」

引理 7.9。同余的商总是存在。

证明。商可以表示为一个余等化子，而 $\mathcal{T}$ 的模型范畴是余完备的。

□

7.3. **纤维化同余关系与商**。

~**定义 7.10**。在等价关系 X 上的依赖等价关系 Y 是~**纤维化的**，当且仅当它满足以下提升条件：对于每个 $(x_1 \sim x_2) \in X$ 和 $y_1\colon Y(x_1)$，~仅存在某个 $y_2\colon Y(x_2)$，使得 $(y_1 \sim y_2) \in Y$。」

我们可以将 **集合胚** 的类型限制为纤维化的依赖等价关系。由此可得一个定义在同一基范畴上的子 CwF **集合胚**$_{\mathsf{fib}} \subseteq$**集合胚**。

「**定义 7.11**。同余 $\mathcal{M}\colon \mathcal{T} \to$ **集合胚** 是**纤维化的**，当且仅当它经由包含映射分解，即对于每个依赖种类 $(X \vdash Y$ 类型$) \in \mathcal{T}$，其~依赖等价关系 $\mathcal{M}_Y$ 是纤维化的。」

引理 7.12。商函子 Q :**集合胚**$_{\mathsf{fib}} \to$ **集合** 可扩展为一个 Σ-*CwF* 态射。

证明。我们必须证明 Q 保持上下文扩展。这归结为以下事实：当余跨图中的至少一个映射是集合胚纤维化时，Q 保持拉回方块。

取 **集合胚** 中的一个拉回方块。

$$\begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow p \\ A & \xrightarrow{f} & X \end{array},$$

其中 $Y \twoheadrightarrow X$ 是一个集合胚纤维化。我们将 $[-]$ 记作到集合胚的商中的包含映射。我们的目标是证明典范映射 $Q(B) \to Q(A) \times_{Q(X)} Q(Y)$ 是一个同构。

我们利用商的泛性质定义逆 $Q(A) \times_{Q(X)} Q(Y) \to Q(B)$。取 $Q(A) \times_{Q(X)} Q(Y)$ 中的一对 $([a], [y])$。我们有 $[f(a)] = [p(y)],$，即集合胚 X 中的 $f(a) \sim p(y)$。由于 $p\colon Y \twoheadrightarrow X$ 是一个纤维化，我们可以找到 $y' \in Y$，使得 $p(y) = f(a)$ 和 $y' \sim y$。我们将这对 $([a], [y])$ 发送到 $Q(B)$ 的元素 $[(a, y')]$。可以证明

该元素不依赖于 a、y 和 y' 的选择，因此这个候选逆定义良好。

然后很容易证明，所定义的映射是一个逆映射。 □

引理 7.13。给定一个纤维化同余 $\mathcal{M}$，模型 $\mathbf{Q}(\mathcal{M}) \triangleq (Q \circ \mathcal{M}) : \mathcal{T} \to$ **集合胚** 是 $\mathcal{M}$的商。商嵌入 $\mathbf{q} : \mathcal{M} \Rightarrow \mathbf{Q}(\mathcal{M})$ 是自然变换$\mathcal{M} \cdot q$，其中 $q : U \Rightarrow Q$ 是将集合胚的底层集合映射到其商的自然变换。

证明。设 $\mathcal{N}$为 $\mathcal{T}$的任意模型，并给定一个态射 $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$，使得 $\mathcal{M} \subseteq \ker_F$。

我们定义一个自然变换 $F : \mathbf{Q}(\mathcal{M}) \Rightarrow \mathcal{N}$。

对于任意闭合种类 $X \in \mathcal{T}$，我们定义 $F_X : \{v4(\mathcal{M}_X) \to \mathcal{N}_X$ 利用 $Q(\mathcal{M}_X)$的泛性质，作为 $F_X : \mathcal{M}_X \to \mathcal{N}_X$的唯一提升。

对于任意态射 $f : X \to Y$，该交换图的交换性

$$\begin{array}{ccc} Q(\widetilde{\mathcal{M}}_X) & \xrightarrow{Q(\widetilde{\mathcal{M}}_f)} & Q(\widetilde{\mathcal{M}}_Y) \\ \downarrow{\scriptstyle \widetilde{F}_X} & & \downarrow{\scriptstyle \widetilde{F}_Y} \\ \widetilde{\mathcal{N}}_X & \xrightarrow{\mathcal{N}_f} & \widetilde{\mathcal{N}}_Y \end{array}$$

由商 $Q(\mathcal{M}_X)$ 的泛性质得出。

...F.的唯一性的提升，源于每个分量作为 F_X 的提升的唯一性 F_X。

□

推论 7.14。若 $\mathcal{M}$ 是纤维化同余，则 $\mathbf{q} : \mathcal{M} \to \mathbf{Q}(\mathcal{M})$ 是 $\mathbf{Mod}_{\mathcal{T}}$ 中的非分裂平凡纤维化。

证明。根据引理 7.13，$\mathbf{q}$ 的所有分量都是商嵌入，而它们都是非分裂满射。

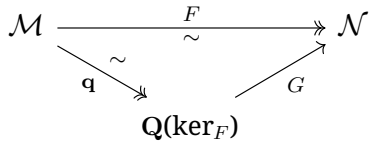
□

引理 7.15。若 $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ 是 $\mathbf{Mod}_{\mathcal{T}}$ 中的非分裂平凡纤维化，则 $\ker_F$ 是纤维化同余，且 $\mathcal{N}$ 是 $\ker_F$的商。

证明。我们先证明 $\ker_F$ 的纤维化性。

设 $(X \vdash Y$类型$) \in \mathcal{T}$是 $\mathcal{T}$的一个依赖种类。取 $x_1, x_2 : \mathcal{M}_X$，使得$F(x_1) = F(x_2)$，且 $y_1 : \mathcal{M}_Y(x_1)$。则 $F(y_1) : \mathcal{N}_Y(F(x_2))$。由于 F是平凡纤维化，存在一个提升 $y_2 : \mathcal{M}_Y(x_2)$，使得 $F(y_2) = F(y_2)$。这恰好证明了 $\ker_F$是纤维化的。

现在，我们可以构造商 \(\style id='1'>Q(\ker\{v3\})\)（也可以称为 \(\{v4\}\) 的余像），并且我们知道商嵌入是一个非分裂平凡纤维化。映射 \(\{v5\}\) 可以通过该商嵌入进行分解。



由于 F 是非分裂平凡纤维化，G 也是非分裂平凡纤维化，并且在每个种类上都是满射。要证明 G 是同构，只需证明 G 在每个种类上都是单射。

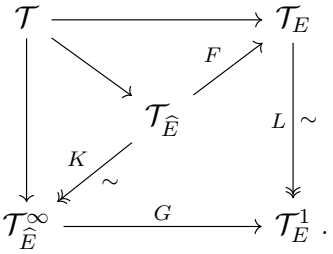
设 $(X \vdash Y$类型$) \in \mathcal{T}$是一个依赖种类。取 $x : \mathrm{Q}(\ker_F)_X$以及 $y_1, y_2 : \mathrm{Q}(\ker_F)_Y(x)$，使得 $G(y_1) = G(y_2)$。由于 $\mathfrak{q}$ 是非分裂平凡纤维化，存在提升 $x' : \mathcal{M}_X$以及 $y_1', y_2' : \mathcal{M}_Y(x')$，它们分别是 x, y_1和 y_2的提升。于是我们有 $F(y_1') = F(y_2')$，即 $(y_1' \sim y_2') \in \ker_F$。因此，$\mathfrak{q}(y_1') = \mathfrak{q}(y_2')$，也就是说 $y_1 = y_2$。

这证明了 G 在每个种类上的作用都是单射。因此，G 是一个同构，而 $\mathcal{N}$ 是$\ker_F$的一个商。

□

8. 平凡纤维化作为商嵌入的收缩

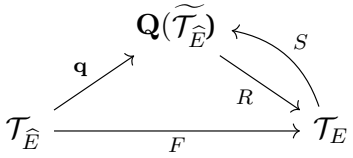
固定一个配备了同伦关系的 SOGAT $\mathcal{T}$，以及一个方程扩张 $\mathcal{T} \to \mathcal{T}_E$。回顾第 6 节，我们有如下交换图表，位于 **上下文范畴**$_{\Sigma,\ \Pi_{\mathsf{rep}}}$：



本节的目标是证明以下定理：

定理 8.1。设 $\mathcal{T}$是具有同伦关系的 *SOGAT*，并设 E 是 $\mathcal{T}$的一组同伦。如果 $\mathcal{T}^{\infty}_{\widehat{E}}$相对于 $K :\ \mathcal{T} \to \mathcal{T}^{\infty}_{\widehat{E}}$仅为0截断的，那么 $F :\ \mathcal{T}_{\widehat{E}} \to \mathcal{T}_E$ 是$\mathbf{CwF}_{\Sigma,\ \Pi_{\mathsf{rep}}}$中的平凡纤维化。

我们沿用 Hofmann 关于内涵类型论相对于内涵类型论的保守性证明的结构。我们将在 $\mathbf{CwF}_{\Sigma,\Pi_{\mathsf{rep}}}$ 中构造$\sim\mathcal{T}_{\widehat{E}}$的一个商 $\mathbf{Q}(\mathcal{T}_{\widehat{E}})$，其中由一个纤维化同余 $\mathcal{T}_{\widehat{E}}$给出，并证明映射 $\mathcal{T}_{\widehat{E}} \to \mathcal{T}_E$成为$\mathbf{Q}(\mathcal{T}_{\widehat{E}})$的商嵌入 $\mathfrak{q} : \mathcal{T}_{\widehat{E}} \to$ 的一个收缩。由非分裂平凡纤维化在收缩下封闭，即可得到这些结果。



8.1. 等价与依赖等价。为证明这一点，我们需要考察 $\mathcal{T}^{\infty}_{\widehat{E}}$ 的上下文和类型上的一些等价。最方便的做法是使用关系等价，也称为一一对应。类型 A 和 B 之间的关系等价，是一种类型值关系，它在两个方向上都是函数性的。采用这一术语的优点是，容易证明标准类型结构（$\mathbf{1}$、Σ 和 Π）保持等价。

令 $\mathbb{C}$ 为一个配备了 Σ-类型和弱恒等类型的族。

定义 8.2. 令 $A_1, A_2 : \mathbb{C}$ 为两个类型。一个**等价** $\alpha : A_1 \simeq A_2$ 是一个类型值关系

$$\alpha : A_1 \to A_2 \to \mathbb{C}$$

满足以下两个可缩性条件

$$(a_1 : A_1) \to \mathrm{isContr}((a_2 : A_2) \times \alpha(a_1, a_2)),$$
$$(a_2 : A_2) \to \mathrm{isContr}((a_1 : A_1) \times \alpha(a_1, a_2)).$$ ⌟

$\alpha(a_1,\ a_2)$ 的元素将称为 a_1 和 a_2 之间的恒等。

定义 8.3. 设 $B_1 : A_1 \to \mathbb{C}$ 和 $B_2 : A_2 \to \mathbb{C}$ 为两个依赖类型。给定一个等价 $\alpha : A_1 \simeq A_2$，其上的一个**依赖等价** $\beta : B_1 \simeq_\alpha B_2$ 是一个族

$$\beta : \forall a_1\ a_2 \to \alpha(a_1, a_2) \to B_1(a_1) \simeq B_2(a_2)$$

等价的。 ⌟

定义 8.4。设 $\alpha_1, \alpha_2 : A_1 \simeq A_2$ 是两个平行等价。**同伦** $H : \alpha_1 \simeq \alpha_2$ 是 α_1 与 α_2 之间的一个族

$$H : \forall a_1\ a_2 \to \alpha_1(a_1, a_2) \simeq \alpha_2(a_1, a_2)$$

等价。 ⌟

定义 8.5。设 $\beta_1 : B_1 \simeq_{\alpha_1} B_2$ 和 $\beta_2 : B_1 \simeq_{\alpha_2} B_2$ 是两个平行依赖等价，且 $H : \alpha_1 \simeq \alpha_2$ 是 α_1 与 α_2 之间的一个同伦。β_1 与 β_2 之间的一个**依赖同伦**G 是一个族

$$G : \forall a_1\ a_2\ (a_{e1} : \alpha_1(a_1, a_2))\ (a_{e2} : \alpha_2(a_1, a_2))\ (a_{ee} : H(a_{e1}, a_{e2}))$$
$$\to \forall b_1\ b_2 \to \beta_1(a_{e1}, b_1, b_2) \simeq \beta_2(a_{e2}, b_1, b_2)$$

等价。 ⌟

这些概念配备了各种复合运算，包括恒等等价、逆等价等。

8.2. **纤维化同余的构造**。现在我们假设 $\mathcal{T}^\infty_{\widehat{E}}$ 相对于 $K : \mathcal{T} \to \mathcal{T}^\infty_{\widehat{E}}$ 仅为 0-截断的。

我们想要构造 $\mathcal{T}_{\widehat{E}}$ 的一个纤维化同余商。当 $\mathcal{T}_{\widehat{E}}$ 中的项之间在 $\mathcal{T}^\infty_{\widehat{E}}$ 中存在恒等时，这个同余应将它们识别；当 $\mathcal{T}_{\widehat{E}}$ 中的类型在 $\mathcal{T}^\infty_{\widehat{E}}$ 中等价时，也应将它们识别。由于相对于 K，$\mathcal{T}^\infty_{\widehat{E}}$ 是 0-截断的，因此选择哪种恒等并不重要。然而，$\mathcal{T}^\infty_{\widehat{E}}$ 中可能存在多个平行等价。因此，我们需要考虑一类受限的等价，它们由沿恒等的传输构成。这类似于 Hofmann 保守性证明 [Hof95] 中所用的命题同构的部分族 $\mathrm{co}_{\Gamma,\ \Delta}$ 和 $\mathrm{ty}_{\Gamma,\ \Delta,\ \sigma,\ \tau}$。

构造 8.6。 我们通过对 $\mathcal{T}_{\widehat{E}}$ 的上下文和类型的结构进行归纳，定义以下集合值关系和等价族。

$$
\begin{aligned}
&(\approx) : \mathcal{T}_{\widehat{E}} \to \mathcal{T}_{\widehat{E}} \to \mathrm{Set},\\
&(\approx) : (\Gamma_1 \approx \Gamma_2) \to \mathcal{T}_{\widehat{E}}.\mathsf{Ty} \to \mathcal{T}_{\widehat{E}}.\mathsf{Ty} \to \mathrm{Set},\\
&(\approx)^{\mathsf{rep}} : (\Gamma_1 \approx \Gamma_2) \to \mathcal{T}_{\widehat{E}}.\mathsf{Ty}_{\mathsf{rep}} \to \mathcal{T}_{\widehat{E}}.\mathsf{Ty}_{\mathsf{rep}} \to \mathrm{Set},\\
&\alpha : (\Gamma_1 \approx \Gamma_2) \to (K(\Gamma_1) \simeq K(\Gamma_2)),\\
&\beta : (p : \Gamma_1 \approx \Gamma_2) \to (A \approx_p B) \to (K(A) \simeq_{\alpha_p} K(B)),\\
&\beta^{\mathsf{rep}} : (p : \Gamma_1 \approx \Gamma_2) \to (A \approx_p^{\mathsf{rep}} B) \to (K(A) \simeq_{\alpha_p} K(B)).
\end{aligned}
$$

空上下文： 我们提出 $(\diamond \approx \diamond) \triangleq \{\star\}$。给定 $p : \diamond \approx \diamond$，我们令 α_p 为恒等等价，也就是说

$$\alpha_p(\_,\_) \triangleq \mathbf{1}.$$

上下文扩展： 我们规定 $((\Gamma_1.A_1) \approx (\Gamma_2.A_2)) \triangleq (p : \Gamma_1 \approx \Gamma_2) \times (q : A_1 \approx_p A_2)$。给定 $(p, q) : (\Gamma_1.A_1) \approx (\Gamma_2.A_2)$，我们令 $\alpha_{(p,q)}$ 为通过将等价 α_p 和 β_q 提升到扩展上下文而得到的等价，即

$$\alpha_{(p,q)}((\gamma_1, a_1), (\gamma_2, a_2)) \triangleq (\gamma_e : \alpha_p(\gamma_1, \gamma_2)) \times (a_e : \beta_q(\gamma_e, a_1, a_2)).$$

基本类型： 我们令 $(\mathbf{S}(\sigma_1) \approx_p \mathbf{S}(\sigma_2))$ 为 $K(\sigma_1)$ 和$K(\sigma_2)$ 之间关于等价 α_p的识别集合，也就是说，$(\mathbf{S}(\sigma_1) \approx_p \mathbf{S}(\sigma_2))$ 是一个元素

$$(\gamma_1 : K(\Gamma_1), \gamma_2 : K(\Gamma_2), \gamma_e : \alpha_p(\gamma_1, \gamma_2) \vdash q(\gamma_e) : K(\sigma_1)(\gamma_1) \simeq_{\partial \mathbf{S}} K(\sigma_2)(\gamma_2)) \in \mathcal{T}^{\infty}_{\widehat{E}}$$

给定这样的恒等 q，我们令 β_q 为通过沿 q传输定义的依赖等价，即

$$\beta_q(\gamma_e, a_1, a_2) \triangleq \mathsf{transport}_{\mathbf{S}(-)}(a_1, q(\gamma_e)) \simeq_{\mathbf{S}(K(\sigma_2)(\gamma_2))} a_2.$$

1-类型： 我们设 $(\mathbf{1} \approx_p \mathbf{1}) \triangleq \{\star\}$。给定 $q : \mathbf{1} \approx_p \mathbf{1}$，我们令 β_q 为恒等等价，也就是说

$$\beta_q(\gamma_e, \_, \_) \triangleq \mathbf{1}.$$

Σ-类型： 我们设 $(\Sigma(A_1, B_1) \approx_p \Sigma(A_2, B_2)) \triangleq (q_A : A_1 \approx_p A_2) \times (q_B : B_1 \approx_{p,\, q_A} B_2)$。给定 $q : \Sigma(A_1, B_1) \approx_p \Sigma(A_2, B_2)$，我们令 β_q 为将等价 β_{q_A} 和 β_{q_B} 提升到 Σ-类型所得到的等价，即

$$\beta_q(\gamma_e, (a_1, a_2), (b_1, b_2)) \triangleq (a_e : \beta_{q_A}(\gamma_e, a_1, a_2)) \times (b_e : \beta_{q_B}((\gamma_e, a_e), b_1, b_2)).$$

Π_{rep}-类型： 我们设 $(\Pi_{\mathsf{rep}}(A_1, B_1) \approx_p \Pi_{\mathsf{rep}}(A_2, B_2)) \triangleq (q_A : A_1 \approx_p^{\mathsf{rep}} A_2) \times (q_B : B_1 \approx_{p,\, q_A} B_2)$。给定 $q : \Pi_{\mathsf{rep}}(A_1, B_1) \approx_p \Pi_{\mathsf{rep}}(A_2, B_2)$，我们令 $\beta_p(q)$ 为将等价 β_{q_A} 和 β_{q_B} 提升到 Π_{rep}-类型所得到的等价，即

$$\beta_q(\gamma_e, f_1, f_2) \triangleq (a_1 : A_1(\gamma_1)) \; ((a_2, a_e) := \overrightarrow{\beta_{q_A}}(a_1)) \to \beta_{q_B}((\gamma_e, a_e), f_1(a_1), f_2(a_2)).$$

这里的 $a_2 : K(A_2)(\gamma_2)$ 和 $a_e : \beta_{q_A}(\gamma_e, a_1, a_2)$ 是通过沿等价 β_{q_A} 传输 a_1 定义的。不能改为对 (a_2, a_e) 进行量化，因为$a_e : \beta_{q_A}(a_1, a_2)$，但假设 $\beta_{q_A}(a_1, a_2)$ 是可表示的。

可表示类型： 关系 $\approx^{\mathsf{rep}}$ 和函数 β^{rep} 的定义与$\approx$ 和 β类似。给定两个可表示类型 A 和 B，我们定义 $A \approx_p B \triangleq A \approx_p^{\mathsf{rep}} B$。给定$q : A \approx_p B$，我们定义 $\beta_q \triangleq \beta_q^{\mathsf{rep}}$。

其余情况：在其他任何情况下，也就是说，当两个上下文或类型的形状不同时，它们不受关系 $\approx$关联，即我们定义

$$(A \approx B) \triangleq \emptyset.$$ 」

我们将对上下文的结构和 $\mathcal{T}_{\widehat{E}}$ 的类型进行归纳，并在多个证明中使用。在这些证明中，我们都将基本类型（形式为$\mathbf{S}(\sigma)$）视为归纳的基例，将其他所有情况视为归纳步骤。

现在我们证明关系（$\approx$）在同伦意义下是自反的、传递的且对称的。

引理 8.7。对于每个 $\Gamma \in \mathcal{T}_{\widehat{E}}$，存在一个元素 $r_\Gamma : \Gamma \approx \Gamma$ 以及等价 $\alpha_{r_\Gamma} : K(\Gamma) \simeq K(\Gamma)$ 与恒等等价之间的同伦。

对于每个$(\Gamma \vdash A \text{ 类型}) \in \mathcal{T}_{\widehat{E}}$，都存在一个元素 $r_A : A \approx_{r_\Gamma} A$，以及一个从依赖等价 $\beta_{r_A} : K(A) \simeq_{\alpha_{r_\Gamma}} K(A)$ 到恒等等价的同伦。

类似的陈述对于可表示类型也成立。

证明。通过对 Γ 和 A的结构进行相互归纳。在每种情况下，我们都必须使用以下事实：α 或 β 的相应构造保持恒等等价。 □

我们可以在单个步骤中证明对称性和传递性。

引理 *8.8.* 对于任意 $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 : \mathcal{T}_{\widehat{E}}$ 以及元素 $p_1 : \Gamma_1 \approx \Gamma_2$ 和 $p_2 : \Gamma_3 \approx \Gamma_2$，存在一个元素 $t(p_1, p_2) : \Gamma_1 \approx \Gamma_3$，以及一个同伦，连接 $\alpha(t(p_1, p_2)) : K(\Gamma_1) \simeq K(\Gamma_3)$ 与复合等价 $\alpha(p_1) \cdot \alpha(p_2)^{-1}$。

给定类型（$\Gamma_1 \vdash A_1$ 类型）$\in \mathcal{T}$、（$\Gamma_2 \vdash A_2$ 类型）$\in \mathcal{T}$和（$\Gamma_3 \vdash A_3$ 类型）$\in \mathcal{T}$，以及元素 $q_1 : A_1 \approx_{p_1} A_2$ 和 $q_2 : A_3 \approx_{p_2} A_2$，存在元素 $t(q_1, q_2) : A_1 \approx_{t(p_1,p_2)} A_3$以及 $\beta(t(q_1, q_2))$ 与复合等价 $\beta(q_1) \cdot \beta(q_2)^{-1}$之间的同伦。

类似的陈述对可表示类型也成立。

证明。对上下文和类型的结构进行相互归纳。在每种情况下，我们都必须使用以下事实：α 或 β 的相应构造保持逆等价和等价的复合。

□

p 的对称性：$\Gamma \approx \Delta$ 随后可以恢复为 $t(r_\Gamma, p)$；而 p 的传递性：$\Gamma \approx \Delta$和 $q : \Delta \approx \Theta$可以重构为 $t(p, t(r_\Delta, q))$。

引理 8.9。给定两个元素 $p_1, p_2 : \Gamma_1 \approx \Gamma_2$，在等价 α_{p_1} 和 α_{p_2}之间仅存在一个同伦。

给定两个元素 $q_1 : A_1 \approx_{p_1} A_2$ 和 $q_2 : A_1 \approx_{p_2} A_2$，在等价 α_{p_1} 和 α_{p_2} 之间仅存在一个同伦h，并且在同伦 h上，β_{q_1} 和 β_{q_2}之间存在一个依赖同伦。

证明。对上下文和类型的结构进行归纳。在基例（$\mathbf{S}(\sigma_1) \approx \mathbf{S}(\sigma_2)$）中，我们使用如下事实：$\mathcal{I}_{\widehat{E}}^{\infty}$相对于0截断 K。其他情况下，我们使用如下事实：这些 **1**-、 Σ- 和 Π_{rep}-类型构造子在等价之间的同伦上有作用。

□

然后，我们可以考虑通过对 $(\approx)$ 进行命题截断而得到的等价关系 $(\sim)$。上述引理大致表明，α 是从集合胚 $(\mathsf{Ob}^{\mathcal{T}_{\widehat{E}}}, \sim)$ 到 $\mathcal{T}_{\widehat{E}}^{\infty}$ 的对象及等价的同伦类所构成的 1-群胚的一个 1-群胚态射的函子作用；对于 β 和 β^{rep}，也有类似的结论。

我们还需要以下附加引理。

引理 8.10。给定元素 p_1、p_2：$\Gamma_1 \approx \Gamma_2$ 和 q：$A_1 \approx_{p_1} A_2$，以及 α_{p_1} 与 α_{p_2} 之间的同伦 h，我们可以构造一个 $A_1 \approx_{p_2} A_2$ 的元素。

证明。通过对 A_1 和 A_2的结构进行归纳。

在基例中，q：$\mathbf{S}(\sigma_1) \approx_{p_1} \mathbf{S}(\sigma_2)$，即

$$(\gamma_1 : K(\Gamma_1), \gamma_2 : K(\Gamma_2), \gamma_e : \alpha_{p_1}(\gamma_1, \gamma_2) \vdash q(\gamma_e) : K(\sigma_1)(\gamma_1) \simeq_{\partial \mathbf{S}} K(\sigma_2)(\gamma_2)) \in \mathcal{T}_{\widehat{E}}^{\infty}.$$

通过沿着 α_{p_1} 和 α_{p_2} 之间的同伦进行传输，我们可以构造

$$(\gamma_1 : K(\Gamma_1), \gamma_2 : K(\Gamma_2), \gamma_e : \alpha_{p_2}(\gamma_1, \gamma_2) \vdash q'(\gamma_e) : K(\sigma_1)(\gamma_1) \simeq_{\partial \mathbf{S}} K(\sigma_2)(\gamma_2)) \in \mathcal{T}_{\widehat{E}}^{\infty},$$

它是 $\mathbf{S}(\sigma_1) \approx_{p_2} \mathbf{S}(\sigma_2)$中的一个元素。

在其他情况下，我们利用 $\mathbf{1}$、Σ 和 Π_{rep} 类型构造子对等价之间的同伦具有作用这一事实。□

引理 8.11。给定 p：$\Gamma_1 \approx \Gamma_2$ 和 $(\Gamma_1 \vdash A_1 \text{ 类型}) \in \mathcal{T}_{\widehat{E}}$，我们构造一个类型 A_2 和一个元素 q：$A_1 \approx_p A_2$。

证明。对 A_1 的结构进行归纳。

在基例中，$A_1(\gamma_2) = \mathsf{S}(\sigma_1(\gamma_1))$，其中 $(\Gamma_1 \vdash \sigma_1(\gamma_1) : \partial\mathsf{S})$。将 $K(\sigma_1)$ 沿 α_p 传输后，我们可以找到 $(\gamma_2 : K(\Gamma_2) \vdash \sigma_2(\gamma_2) : \partial\mathsf{S})$，并且

$$(\gamma_1 : K(\Gamma_1), \gamma_2 : K(\Gamma_2), \gamma_e : \alpha_p(\gamma_1, \gamma_2) \vdash \sigma_e(\gamma_e) : K(\sigma_1)(\gamma_1) \simeq_{\partial \mathbf{S}} \sigma_2(\gamma_2).$$

接着我们令 $A_2(\gamma_2) \triangleq \mathbf{S}(K^{-1}(\sigma_2)(\gamma_2))$，并且我们有 σ_e：$A_1 \approx_p A_2$。

递归情形是直接的。□

引理 8.12。取两个类型 $(\Delta_1 \vdash A_1 \text{类型})$、$(\Delta_2 \vdash A_2 \text{类型}) \in \mathcal{T}_{\widehat{E}}$ 以及两个态射f_1：$\Gamma_1 \to \Delta_1$ 和 f_2：$\Gamma_2 \to \Delta_2$。给定元素 p_Γ：$\Gamma_1 \approx \Gamma_2$、$p_\Delta$：$\Delta_1 \approx \Delta_2$ 以及q：$A_1 \approx_{p_\Delta} A_2$ 和一个恒等

$$(\gamma_1 : K(\Gamma_1), \gamma_2 : K(\Gamma_2), \gamma_e : \alpha_{p_\Gamma}(\gamma_1, \gamma_2) \vdash r(\gamma_e) : \alpha_{p_\Delta}(K(f_1)(\gamma_1), K(f_2)(\gamma_2))) \in \mathcal{T}_{\widehat{E}}^{\infty},$$

我们可以构造一个元素 $q[r]$：$A_1[f_1] \approx_{p_\Gamma} A_2[f_2]$，以及 $\alpha_{q[r]}$ 与等价 $\alpha_q[r]$：$K(A_1[f]) \simeq K(A_2[f])$ 之间的同伦。

证明。通过对类型 A_1 和 A_2的结构进行归纳。

在基例中，我们有

$$(\delta_1 : K(\Delta_1), \delta_2 : K(\Delta_2), \delta_e : \alpha_p(\delta_1, \delta_2) \vdash q(\delta_e) : K(\sigma_1)(\delta_1) \simeq_{\partial \mathbf{S}} K(\sigma_2)(\delta_2)) \in \mathcal{T}_{\widehat{E}}^{\infty},$$

并且我们可以直接设为 $q[r](\gamma_e) \triangleq q(r(\gamma_e))$. 因此显然，$\alpha_{q[r]}$ 和 $\alpha_q[r]$ 是同伦的。递归情形利用了类型构造子 Σ 和 Π_{rep} 保持等价之间的同伦这一事实。□

现在我们将证明，这些等价关系可以组合成一个关于 $\mathcal{T}_{\widehat{E}}$ 的纤维化同余。我们首先定义这些等价关系，随后将在第二步证明 $(\Sigma, \Pi_{\mathsf{rep}})$-上下文范畴运算得以保持。

构造 8.13. 我们定义 CwF $\mathcal{T}_{\widehat{E}}$ 的对象、态射、类型和项上的等价关系及依赖等价关系的数据 $\mathcal{T}_{\widehat{E}}$。

<escape>• </escape>给定 <escape> Γ_1</escape>，<escape> $\Gamma_2 \in \mathcal{T}_{\widehat{E}}$</escape>，我们有（<escape>$\Gamma_1 \sim \Gamma_2$</escape>）<escape> $\in \mathcal{T}_{\widehat{E}}$</escape>，只要存在 <escape> p</escape>：<escape> $\Gamma_1 \approx \Gamma_2$</escape>。<escape>⌣</escape>

• 给定 $(\Gamma_1 \vdash A_1 \text{类型})$，$(\Gamma_2 \vdash A_2 \text{类型}) \in \mathcal{T}_{\widehat{E}}$，只要存在$p$：$\Gamma_1 \approx \Gamma_2$ 和 q：$A_1 \approx_p A_2$，我们就有 $(A_1 \sim A_2) \in \mathcal{T}_{\widehat{E}}$。可表示类型之间的关系也以类似方式定义。

• 给定 $(\Gamma_1 \vdash a_1 : A_1)$，$(\Gamma_2 \vdash a_2 : A_2) \in \mathcal{T}_{\widehat{E}}$，我们有 $(a_1 \sim a_2) \in \widetilde{\mathcal{T}_{\widehat{E}}}$，只要存在$p : \Gamma_1 \approx \Gamma_2$、$q : A_1 \approx_p A_2$ 以及一个恒等即可

$$(\gamma_1 : K(\Gamma_1)\ \gamma_2 : K(\Gamma_2)\ \gamma_e : \alpha_p(\gamma_1,\ \gamma_2) \vdash r(\gamma_e) : \beta_q(\gamma_e,\ K(a_1)(\gamma_1)\ K(a_2)(\gamma_2))) \in \mathcal{T}^{\infty}_{\widehat{E}}.$$

• 给定 $f_1 : \Gamma_1 \to \Delta_1$ 和 $f_2 : \Gamma_2 \to \Delta_2$，如果仅存在 $p : \Gamma_1 \approx \Gamma_2$、$q : \widetilde{\Delta_1} \approx \Delta_2$ 以及一个恒等式，则有 $(f_1 \sim f_2) \in \mathcal{T}_{\widehat{E}}$。

$$(\gamma_1 : K(\Gamma_1), \gamma_2 : K(\Gamma_2), \gamma_e : \alpha_p(\gamma_1, \gamma_2) \vdash r(\gamma_e) : \alpha_q(K(f_1)(\gamma_1), K(f_2)(\gamma_2))) \in \mathcal{T}^{\infty}_{\widehat{E}}.$$

这些关系的自反性、对称性和传递性由引理 8.7 和引理 8.8 得出。

$\widetilde{\ }$引理 8.14. *$\mathcal{T}_{\widehat{E}}$ 的依赖等价关系是纤维化的。*

证明。 类型上关系的纤维性由引理 8.11 得出。项和态射上关系的纤维性通过沿等价 α_p、β_q 和α_q进行传输得到证明，此外还利用了 K 在项上的作用是双射这一事实。 □

引理 8.15. *取 $p : \Gamma_1 \approx \Gamma_2$和类型 $(\Gamma_1 \vdash A_1$类型$)$, $(\Gamma_2 \vdash A_2$类型$) \in \mathcal{T}_{\widehat{E}}$. 那么$\widetilde{\ }(A_1 \sim A_2) \in \mathcal{T}_{\widehat{E}}$ 当且仅当仅存在一个元素 $q : A_1 \approx_p A_2$。*

证明。逆向蕴含是显然的。正向蕴含由引理 8.10 得出。 □

引理 8.16. *取元素 $p : \Gamma_1 \approx \Gamma_2$ 和 $q : A_1 \approx_p A_2$ 以及项 $(\Gamma_1 \vdash a_1 : A_1)$,$(\Gamma_2 \vdash_{\sim} a_2 : A_2) \in \mathcal{T}_{\widehat{E}}$. 那么$(a_1 \sim a_2) \in \mathcal{T}_{\widehat{E}}$ 当且仅当存在一个恒等。*

$$(\gamma_1 : K(\Gamma_1), \gamma_2 : K(\Gamma_2), \gamma_e : \alpha_p(\gamma_1, \gamma_2) \vdash r(\gamma_e) : \beta_q(K(a_1)(\gamma_1), K(a_2)(\gamma_2))) \in \mathcal{T}^{\infty}_{\widehat{E}}.$$

证明。 反向蕴含显然成立。对于正向蕴含，我们可以找到 $p_a : \Gamma_1 \approx \Gamma_2$ 和 $q_a : A_1 \approx_{p_a} A_2$ 以及一个恒等

$$(\gamma_1 : K(\Gamma_1), \gamma_2 : K(\Gamma_2), \gamma_e : \alpha_{p_a}(\gamma_1, \gamma_2) \vdash r_a(\gamma_e) : \beta_{q_a}(K(a_1)(\gamma_1), K(a_2)(\gamma_2))) \in \mathcal{T}^{\infty}_{\widehat{E}}$$

根据引理 8.9，我们在 α_p 与 α_{p_a} 之间以及 β_q 与 β_{q_a}之间有同伦。沿这些同伦进行传输，我们得到

$$(\gamma_1 : K(\Gamma_1)\ \gamma_2 : K(\Gamma_2)\ \gamma_e : \alpha_p(\gamma_1,\ \gamma_2) \vdash r_a(\gamma_e) : \beta_q(K(a_1)(\gamma_1)\ K(a_2)(\gamma_2))) \in \mathcal{T}^{\infty}_{\widehat{E}},$$

如所需。 □

引理 8.17。 *取元素 $p : \Gamma_1 \approx \Gamma_2$ 和 $q : \Delta_1 \approx_p \Delta_2$ 以及态射 $f_1 : \Gamma_1 \to \Delta_1$ $\widetilde{\ }$和 $f_2 : \Gamma_2 \to \Delta_2$。那么$(f_1 \sim f_2) \in \mathcal{T}_{\widehat{E}}$ 当且仅当仅存在一个恒等*

$$(\gamma_1 : K(\Gamma_1)\ \gamma_2 : K(\Gamma_2)\ \gamma_e : \alpha_p(\gamma_1,\ \gamma_2) \vdash r(\gamma_e) : \alpha_q(K(f_1)(\gamma_1)\ K(f_2)(\gamma_2))) \in \mathcal{T}^{\infty}_{\widehat{E}}.$$

证明。 与引理 8.16 类似。 □

还需证明这些关系在所有 $(\Sigma,\ \Pi_{\mathsf{rep}})$-上下文范畴运算下保持不变。

$\widetilde{\ }$引理 8.18。 *$\mathcal{T}_{\widehat{E}}$的关系构成了 $(\Sigma, \Pi_{\mathsf{rep}})$-上下文范畴 $\mathcal{T}_{\widehat{E}}$ 上的纤维化同余。*

证明。 我们证明所有运算都得以保留。由于 $(\Sigma,\ \Pi_{\mathsf{rep}})$-CwF 理论中的运算数量众多，证明相当冗长。不过，所有情形都相当直接。主要思路是使用引理 8.15、引理 8.16 和引理 8.17，以确保不会得到 $\Gamma_1 \approx \Gamma_2$ 或 $A_1 \approx_p A_2$ 的不同元素。在涉及替换的规则中还需要用到引理 8.12。

恒等态射： 取 $p : \Gamma_1 \approx \Gamma_2$。那么在上下文 $(\gamma_1 : K(\Gamma_1)\ \gamma_2 : K(\Gamma_2)\ \gamma_e : \alpha_p(\gamma_1, \gamma_2))$ 上，恒等

$$(\gamma_e : \alpha_p(K(\mathsf{id})(\gamma_1), K(\mathsf{id})(\gamma_2)))$$

证明了 $\mathsf{id}_{\Gamma_1} \sim \mathsf{id}_{\Gamma_2}$ 这一事实。

态射的复合： 取态射 $f_1 : \Gamma_1 \to \Delta_1$、$g_1 : \Delta_1 \to \Theta_1$、$f_2 : \Gamma_2 \to \Delta_2$ 和 $g_2 : \Delta_2 \to \Theta_2$，使得 $f_1 \sim f_2$ 和 $g_1 \sim g_2$。根据引理 8.17，我们可以找到元素 $p_f : \Gamma_1 \approx \Gamma_2$、$q_f : \Delta_1 \approx \Delta_2$ 和 $q_g : \Theta_1 \approx \Theta_2$，以及识别

$$(\gamma_1 : K(\Gamma_1), \gamma_2 : K(\Gamma_2), \gamma_e : \alpha_{p_f}(\gamma_1, \gamma_2) \vdash r_f(\gamma_e) : \alpha_{q_f}(K(f_1)(\gamma_1), K(f_2)(\gamma_2))) \in \mathcal{T}^{\infty}_{\widehat{E}}$$

and

$$(\delta_1 : K(\Delta_1), \delta_2 : K(\Delta_2), \delta_e : \alpha_{q_f}(\delta_1, \delta_2) \vdash r_g(\delta_e) : \alpha_{q_g}(K(g_1)(\delta_1), K(g_2)(\delta_2))) \in \mathcal{T}^{\infty}_{\widehat{E}}.$$

于是，在上下文 $(\gamma_1 : K(\Gamma_1)\ \gamma_2 : K(\Gamma_2)\ \gamma_e : \alpha_{p_f}(\gamma_1, \gamma_2))$ 上，我们有一个恒等

$$(r_g(r_f(\gamma_e)) : \alpha_{q_g}(K(g_1 \circ f_1)(\gamma_1)), K(g_2 \circ f_2)(\gamma_2)) \in \mathcal{T}^{\infty}_{\widehat{E}},$$

这证明了 $(g_1 \circ f_1) \sim (g_2 \circ g_2)$。

项上的函子作用： 与态射的复合类似，只是改用引理 8.16。

类型上的函子作用： 取态射 $f_1 : \Gamma_1 \to \Delta_1$ 和 $f_2 : \Gamma_2 \to \Delta_2$ 以及类型 $(\Delta_1 \vdash A_1\ \mathsf{type})$ 和 $(\Delta_2 \vdash A_2\ \mathsf{type})$，使得 $f_1 \sim f_2$ 和 $A_1 \sim A_2$。

利用引理 8.15，我们可以找到元素 $p_f : \Gamma_1 \approx \Gamma_2$, $q_f : \Delta_1 \approx \Delta_2$ 和 $q_A : A_1 \approx_{q_f} A_2$，以及一个恒等

$$(\gamma_1 : K(\Gamma_1), \gamma_2 : K(\Gamma_2), \gamma_e : \alpha_{p_f}(\gamma_1, \gamma_2) \vdash r_f(\gamma_e) : \alpha_{q_f}(K(f_1)(\gamma_1), K(f_2)(\gamma_2))) \in \mathcal{T}^{\infty}_{\widehat{E}}.$$

然后利用引理 8.12 得出结论。

可表示类型上的函子作用： 与类型上的函子作用类似。

上下文扩展： 设 $(\Gamma_1 \vdash A_1$ 类型$)$，$(\Gamma_2 \vdash A_2$ 类型$) \in \mathcal{T}^{\infty}_{\widehat{E}}$ 是两个类型，使得 $A_1 \sim A_2$。W

我们可以 find $p : \Gamma_1 \approx \Gamma_2$ and $q : A_1 \approx_p A_2$. Then $(p, q) : (\Gamma_1.A_1) \approx (\Gamma_2.A_2)$.

Su替换扩张： 设（$\Delta_1 \vdash A_1$ 类型）、（$\Delta_2 \vdash A_2$ 类型）$\in \mathcal{T}^{\infty}_{\widehat{E}}$ 是两个类型，使得 $A_1 \sim A_2$；设 $f_1 : \Gamma_1 \to \Delta_1$ 和 $f_2 : \Gamma_2 \to \Delta_2$ 是两个态射，使得 $f_1 \sim f_2$；再设（$\Gamma_1 \vdash a_1 : A_1[f_1]$）和（$\Gamma_2 \vdash a_2 : A_2[f_2]$）是两个项，使得 $a_1 \sim a_2$。

我们可以找到元素 $p_A : \Delta_1 \approx \Delta_2$、$q_A : A_1 \approx_{p_A} A_2$、$p_f : \Gamma_1 \approx \Gamma_2$、$q_f : \Delta_1 \approx \Delta_2$，以及恒等

$$(\gamma_1 : K(\Gamma_1), \gamma_2 : K(\Gamma_2), \gamma_e : \alpha_{p_f}(\gamma_1, \gamma_2) \vdash r_f(\gamma_e) : \alpha_{q_f}(K(f_1)(\gamma_1), K(f_2)(\gamma_2))) \in \mathcal{T}^{\infty}_{\widehat{E}}.$$

根据引理 8.12，我们有 $q_A[r_f] : A_1[f_1] \approx_{p_f} A_2[f_2]$，以及 $\beta_{q_A[r_f]}$ 与 $\beta_{q_A}[r_f]$ 之间的同伦。

接着，利用引理 8.16，我们可以找到

$$(\gamma_1 : K(\Gamma_1), \gamma_2 : K(\Gamma_2), \gamma_e : \alpha_{p_f}(\gamma_1, \gamma_2) \vdash r_a(\gamma_e) : \beta_{q_A[r_f]}(K(a_1)(\gamma_1), K(a_2)(\gamma_2))) \in \mathcal{T}^{\infty}_{\widehat{E}}$$

The homotopy between $\beta_{q_A[r_f]}$ and $\beta_{q_A}[r_f]$ has an underlying transport function

$$(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_e : \alpha_{p_f}(\gamma_1, \gamma_2), a_1, a_2, a_e : \beta_{q_A[r_f]}(\gamma_e, a_1, a_2) \vdash h(\gamma_e, a_e) : q_A(r_f(\gamma_e), a_1, a_2)).$$

那么，这个恒等

$$((r_f(\gamma_e), h(\gamma_e, r_a(\gamma_e))) : \alpha_{p_A, q_A}(K(\langle f_1, a_1 \rangle)(\gamma_1), K(\langle f_2, a_2 \rangle)(\gamma_2))) \in \mathcal{T}^{\infty}_{\widehat{E}}$$

在上下文 $(\gamma_1 : K(\Gamma_1)\ \gamma_2 : K(\Gamma_2)\ \gamma_e : \alpha_{p_f}(\gamma_1, \gamma_2)$ 上见证了 $\langle f_1, a_1\rangle \sim \langle f_2, a_2\rangle$。

代换投影： 令 $f_1 : \Gamma_1 \to \Delta_1.A_1$ 和 $f_2 : \Gamma_2 \to \Delta_2.A_2$ 为两个满足 $f_1 \sim f_2$ 和 $A_1 \sim A_2$的态射。

根据引理 8.17，我们可以找到元素 $p_f : \Delta_1 \approx \Delta_2$, $p_A : \Gamma_1 \approx \Gamma_2$, $q_A : A_1 \approx_{p_A} A_2$以及一个恒等

$$(\gamma_1 : K(\Gamma_1)\ \gamma_2 : K(\Gamma_2)\ \gamma_e : \alpha_{p_f}(\gamma_1, \gamma_2) \vdash r_f(\gamma_e) : \alpha_{(p_A, q_A)}(K(f_1)(\gamma_1)\ K(f_2)(\gamma_2))) \in \mathcal{T}_{\widehat{E}}^{\infty}.$$

根据 $\alpha_{(p_A,q_A)}$的定义，我们可以将 r_f 分解为若干恒等

$$(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_e : \alpha_{p_f}(\gamma_1, \gamma_2) \vdash \pi_1(r_f)(\gamma_e) : \alpha_{p_A}(K(\pi_1(f_1))(\gamma_1)), K(\pi_1(f_2))(\gamma_2))) \in \mathcal{T}_E$$

并且

$$(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_e : \alpha_{p_f}(\gamma_1, \gamma_2) \vdash \pi_2(r_f)(\gamma_e) : \beta_{q_A}(\pi_1(r_f)(\gamma_e)\ K(\pi_2(f_1))(\gamma_1))\ K(\pi_2(f_2))(\gamma_2))) \in \mathcal{T}_{\widehat{E}}^{\infty}.$$

那么，$\pi_1(r_f)$证明了这样一个事实：$\pi_1(f_1) \sim \pi_1(f_2)$。

根据引理 8.12，我们有一个元素 $q_A[r_f] : A_1[\pi_1(r_f)] \approx_{p_f} A_2[\pi_2(r_f)]$，以及 $\beta_{q_A[r_f]}$与 $\beta_{q_A}[r_f]$之间的一个同伦。将此同伦上的传输视为等价后，$\pi_2(r_f)$证明了这样一个事实：$\pi_2(f_1) \sim \pi_2(f_2)$。

1-类型结构： 显然。注意，我们还需要考虑可表示类型上的 1-类型结构。

Σ-类型结构：

与上下文扩展类似，我们也需要考虑替换扩展和代换投影。我们还需要考虑可表示类型上的 Σ-类型结构。

Π_{rep}-类型结构：

类型构造子：设 $(\Gamma_1.A_1 \vdash B_1$ 类型)、$(\Gamma_2.A_2 \vdash B_2$ 类型) 是两个依赖类型，满足 $A_1 \sim A_2$ 和 $B_1 \sim B_2$。利用引理 8.15，我们可以找到 $p_A : \Gamma_1 \approx \Gamma_2$、$q_A : A_1 \approx^{\mathsf{rep}}_{p_A} A_2$ 和 $q_B : B_1 \approx_{(p_A,q_A)} B_2$。于是 $(q_A, q_B) : \Pi_{\mathsf{rep}}(A_1, B_1) \approx_{p_A} \Pi_{\mathsf{rep}}(A_2, B_2)$，如所需。应用：设 $(\Gamma_1 \vdash f_1 : \Pi_{\mathsf{rep}}(A_1, B_1))$、$(\Gamma_2 \vdash f_2 : \Pi_{\mathsf{rep}}(A_2, B_2))$ 是两个项，满足 $f_1 \sim f_2$；并设 $(\Gamma_1 \vdash a_1 : A_1)$、$(\Gamma_2 \vdash a_2 : A_2)$ 是两个项，满足 $a_1 \sim a_2$。如前所述，我们有 p_A、q_A 和 q_B。利用引理 8.16，我们可以找到恒等 $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_e : \alpha_{p_A}(\gamma_1, \gamma_2) \vdash r_f(\gamma_e) : \beta_{(q_A,q_B)}(\gamma_e, K(f_1)(\gamma_1)\ K(f_2)(\gamma_2))) \in \mathcal{T}_{\widehat{E}}^{\infty}$ 和 根据 $\beta_{(q_A,q_B)}$ 的定义，我们可以将 $r_f(\gamma_e)$ 应用于 $r_a(\gamma_e)$，从而得到一个恒等，见证 $\mathsf{app}(f_1, a_1) \sim \mathsf{app}(f_2, a_2)$。

$$(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_e : \alpha_{p_A}(\gamma_1, \gamma_2) \vdash r_a(\gamma_e) : \beta_{q_A}(\gamma_e, K(a_1)(\gamma_1), K(a_2)(\gamma_2))) \in \mathcal{T}_{\widehat{E}}^{\infty}.$$

$$\beta_{q_B}(\gamma_e, K(\mathsf{app}(f_1, a_1))(\gamma_1), K(\mathsf{app}(f_2, a_2))(\gamma_2))$$

λ 抽象： 设 $(\Gamma_1.A_1 \vdash b_1 : B_1)$,$(\Gamma_2.A_1 \vdash b_2 : B_2)$ 是两个项，使得 $b_1 \sim b_2$。和之前一样，我们有 p_A, q_A 和 q_B。根据引理 8.16，我们可以找到一个恒等

$$(r_b(\gamma_e, a_e) : \beta_{q_B}((\gamma_e, a_e), K(b_1)(\gamma_1, a_1), K(b_2)(\gamma_2, a_2))) \in \mathcal{T}_{\widehat{E}}^{\infty}$$

在上下文 $(\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_e : \alpha_{p_A}(\gamma_1,\ \gamma_2)\ a_1,\ a_2,\ a_e : \beta_{q_A}(a_1,\ a_2))$ 上。

By definition of $\beta_{(q_A,q_B)}$, we can construct an element

$$\mathsf{lam}(\lambda(a_1 : A_1)\ ((a_2, a_e) := \overrightarrow{\beta_{q_A}}(a_1)) \mapsto r_b(\gamma_e, a_e))$$
$$: \beta_{(q_A,q_B)}(\gamma_e, K(\mathsf{lam}(b_1))(\gamma_1), K(\mathsf{lam}(b_2)(\gamma_2)))$$

over the context $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_e : \alpha_{p_A}(\gamma_1, \gamma_2))$. Thus $\mathsf{lam}(b_1) \sim \mathsf{lam}^{(b_2)}$，视需要而定。 □

引理 8.19。给定 $p\colon \Gamma_1 \approx \Gamma_2$，我们有 $F(\Gamma_1) = F(\Gamma_2)$，且 $G(\alpha_p)$ 在 $\mathcal{T}_E^1$ 中与恒等等价同伦。

给定 $q\colon A_1 \approx_p A_2$，我们有 $F(A_1) = F(A_2)$，且 $G(\beta_p)$ 在 $\mathcal{T}_E^1$ 中与恒等等价同伦。

证明。对上下文和项的结构作相互归纳。

递归情形由以下事实可得：F 是一个 $(\Sigma, \Pi_{\mathsf{rep}})$-CwF 态射；$G$ 是一个$(\Sigma, \Pi_{\mathsf{rep}}, \mathsf{Id})$-态射；并且 α_p 和 β_q 的构造保持恒等等价。在基例中，我们有 $q : \mathbf{S}(\sigma_1) \approx_p \mathbf{S}(\sigma_2)$，即

$$(\gamma_1 : K(\Gamma_1), \gamma_2 : K(\Gamma_2), \gamma_e : \alpha_p(\gamma_1, \gamma_2) \vdash q(\gamma_e) : K(\sigma_1)(\gamma_1) \simeq_{\partial \mathbf{S}} K(\sigma_2)(\gamma_2)) \in \mathcal{T}_{\widehat{E}}^{\infty}.$$

应用 G 后，我们得到

$$(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_e : G(\alpha_p)(\gamma_1, \gamma_2) \vdash G(q)(\gamma_e) : G(K(\sigma_1))(\gamma_1) \simeq_{\partial \mathbf{S}} G(K(\sigma_2))(\gamma_2)) \in \mathcal{T}_E^1.$$

由归纳假设，$F(\Gamma_1) = F(\Gamma_2)$，且 α_p是恒等等价。我们还记得，$\mathcal{T}_E^1$ 满足等式反射。这意味着 $G(K(\sigma_1)) = G(K(\sigma_2))$，或者等价地，$L(F(\sigma_1)) = L(F(\sigma_2))$。由于 L 对项的作用是双射，我们有$F(\sigma_1) = F(\sigma_2)$。此外，由于 $G(\alpha_q)$ 是通过对一个相等性的传输定义的等价，因此它是恒等等价，正如所需。 □

引理 8.20。我们有 $\mathcal{T}_{\widehat{E}} \subseteq$ 核$_F$。

证明。我们证明每个种类对应关系的包含关系。

- 取 $(\Gamma_1 \sim \Gamma_2) \in \mathcal{T}_{\widehat{E}}$。我们有某个 $p\colon \Gamma_1 \approx \Gamma_2$。由引理 8.19，$F(\Gamma_1) = F(\Gamma_2)$，如所需。
- 取 $(A_1 \sim A_2) \in \mathcal{T}_{\widehat{E}}$。我们有某个 $q\colon A_1 \approx_p A_2$。根据引理 8.19，$F(A_1) = F(A_2)$，正如所需。
- 取 $(a_1 \sim a_2) \in \mathcal{T}_{\widehat{E}}$。我们有某个 $q\colon A_1 \approx_p A_2$ 以及一个恒等 $(\gamma_1 : K(\Gamma_1)\ \gamma_2 : K(\Gamma_2)\ \gamma_e : \alpha_p(\gamma_1, \gamma_2) \vdash r(\gamma_e) : \beta_q(K(a_1)(\gamma_1)\ K(a_2)(\gamma_2)))) \in \mathcal{T}_{\widehat{E}}^{\infty}$.

  根据引理 8.19，我们知道 $F(A_1) = F(A_2)$，并且 $G(\beta_q)$ 是 $\mathcal{T}_E^1$ 中的恒等等价。因此，$G(r)$ 证明了在 $\mathcal{T}_E^1$ 中 $G(K(a_1)) = G(K(a_2))$，或者等价地，$L(F(a_1)) = L(F(a_2))$。由于 L 对项的作用是双射，我们有 $F(a_1) = F(a_2)$，正如所需。
- 态射的情况与项的情况类似。 □

引理 8.21. 对于每个带标记的同伦

$$(\gamma : \Gamma \vdash h(\gamma) : x(\gamma) \sim_{\mathbf{S}(\sigma)} y(\gamma)) \in E,$$

我们有$(x \sim y) \in \mathcal{T}_{\widehat{E}}$

证明。取陈述中所述的标记同伦 h。

令 $p\colon \Gamma \approx \Gamma$ 以及 $q\colon \mathbf{S}(\sigma) \approx_p \mathbf{S}(\sigma)$ 为 r_Γ 以及 $r_{\mathbf{S}(\sigma)}$ 来自引理 8.7。

因此，只需构造一个类型为

$$\alpha_q(K(x)(\gamma_1), K(y)(\gamma_2))$$

在上下文 $(\gamma_1 : K(\Gamma)\ \gamma_2 : K(\Gamma)\ \alpha_p(\gamma_1, \gamma_2)$ 上。

由于 α_p 和 α_q 与恒等等价同伦等价，因此只需构造一个类型为

$$K(x)(\gamma) \simeq K(y)(\gamma)$$

在上下文（$\gamma : K(\Gamma)$）之上。

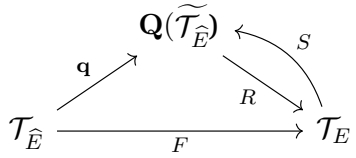
We can then pick the element $\widehat{h}(\gamma) : K(x)(\gamma) \simeq K(y)(\gamma)$. □

8.3. 主定理的证明。 现在我们可以证明定理 8.1。

$\widetilde{\ }$**定理 *8.1* 的证明。** 我们构造了一个纤维化同余 $\mathcal{T}_{\widehat{E}}$，它位于（$\Sigma$, Π_{rep}）-上下文范畴$\sim\mathcal{T}_{\widehat{E}}$上，并且可以考虑（$\Sigma$, Π_{rep}）-上下文范畴中的商 $\mathbf{Q}(\mathcal{T}_{\widehat{E}})$。

$\widetilde{\ }$根据推论 7.14，商嵌入 $\mathbf{q} : \mathcal{T}_{\widehat{E}} \to \mathbf{Q}(\mathcal{T}_{\widehat{E}})$ 是一个非分裂平凡纤维化。根据引理 8.20 和商的泛性质，映射 $F\colon \mathcal{T}_{\widehat{E}} \to \mathcal{T}_E$ 通过商嵌入因子化。我们得到一个映射 $R : \mathbf{Q}(\mathcal{T}_{\widehat{E}}) \to \mathcal{T}_E$。

根据引理命题 8.21 和 $\mathcal{T}_E$ 的泛性质，给出一个截面 $S\colon \mathcal{T}_E \to \mathbf{Q}($ $\widetilde{\mathcal{T}_{\widehat{E}}})$。



映射 F 因而是商嵌入 $\mathbf{q}$ 的截面。由于非分裂平凡纤维化在收缩下封闭，映射 F 是非分裂平凡纤维化。 □

我们的主定理可直接得出。

定理 *6.6* 的证明。 由引理 6.10 可知，映射 $\mathcal{T} \to \mathcal{T}_{\widehat{E}}$ 在 $\mathbf{Mod}_{\mathcal{T}}$ 中是弱等价。由定理 8.1 可知，映射 $\mathcal{T} \to \mathcal{T}_E$ 在 **上下文范畴**$_{\Sigma, \Pi_{\mathsf{rep}}}$ 中是非分裂平凡纤维化，因此在 $\mathbf{Mod}_{\mathcal{T}}$ 中是非分裂弱等价。它们的复合 $\mathcal{T} \to \mathcal{T}_E$ 因而也是 $\mathbf{Mod}_{\mathcal{T}}$ 中的非分裂弱等价。 □

9. 未来方向

9.1. 定理 8.1 的替代证明。定理 8.1 的证明与 Hofmann 关于外延类型论相对于内涵类型论的保守性的原始证明非常接近。我们将讨论获得定理 8.1 更简单证明的潜在方法。

局部宇宙。在 $\mathcal{T}^{\infty}_{\widehat{E}}$ 中存在足够多的宇宙时，我们可以用一种更简单的方式来定义同余 $\mathcal{T}_{\widehat{E}}$ 的关系。事实上，我们可以说，当仅存在 $p : \mathsf{code}(K(\Gamma)) \simeq_{\mathcal{U}} \mathsf{code}(K(\Delta))$ 时，$(\Gamma \sim \Delta) \in \mathcal{T}_{\widehat{E}}$，其中 $\mathsf{code}(\_)$ 给出宇宙中一个上下文或类型的编码。

在没有宇宙的情况下，我们可以尝试使用局部宇宙。$\mathcal{T}^{\infty}_{\widehat{E}}$中的局部宇宙是一个类型（$V \vdash E$ 类型）$\in \mathcal{T}^{\infty}_{\widehat{E}}$。通过对 $\mathcal{T}_{\widehat{E}}$的上下文和类型的形状进行归纳，我们可以为每个 $\Gamma \in \mathcal{T}_{\widehat{E}}$定义一个局部宇宙（$V_\Gamma$，$E_\Gamma$）以及一个元素（$\chi_\Gamma :\ V_\Gamma$）$\in \mathcal{T}^{\infty}_{\widehat{E}}$，使得$\sim K(\Gamma) = E_\Gamma[\chi_\Gamma]$。然后，当（$V_\Gamma$，$E_\Gamma$）=（$V_\Delta$，$E_\Delta$）且仅存在 $p : \chi_\Gamma \simeq_{V_\Gamma} \chi_\Delta$时，我们可以说（$\Gamma \sim \Delta$）$\in \mathcal{T}_{\widehat{E}}$。

遗憾的是，无法定义这些局部宇宙：我们需要 $\mathcal{T}^{\infty}_{\widehat{E}}$ 中任意的 Π-类型，但我们只有 Π_{rep}-类型。如果我们能将 $\mathcal{T}^{\infty}_{\widehat{E}}$ 保守地嵌入到一个 $(\Sigma,\ \Pi,\ \mathsf{Id})$-上下文范畴中，这种方法就可以适用。

高阶同余。另一种可能的简化方法，是在 **预层**$(\mathcal{T}_{\widehat{E}})$ 内部进行研究，而不是从外部进行。

考虑以下外部图表：

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{T} & \longrightarrow & \mathcal{T}_E \\
\downarrow & & \| \\
\mathcal{T}_{\widehat{E}} & \xrightarrow{F} & \mathcal{T}_E \\
\downarrow{\scriptstyle K} & & \downarrow{\scriptstyle L} \\
\mathcal{T}^{\infty}_{\widehat{E}} & \xrightarrow{G} & \mathcal{T}^{1}_{E}\ .
\end{array}$$

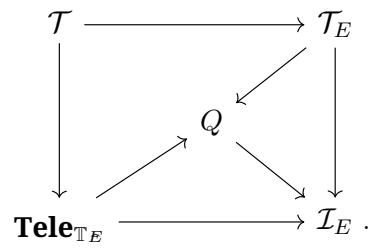
沿用 [BKS23], 的思路，可以在 **预层**$(\mathcal{T}_{\widehat{E}})$ 内部将此图表内化如下：

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{T} & \longrightarrow & \mathcal{T}_E \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathbf{Tele}_{\mathbb{T}_{\widehat{E}}} & \longrightarrow & \mathcal{I}_E \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{I}^{\infty}_{\widehat{E}} & \longrightarrow & \mathcal{I}^{1}_{E}\ .
\end{array}$$

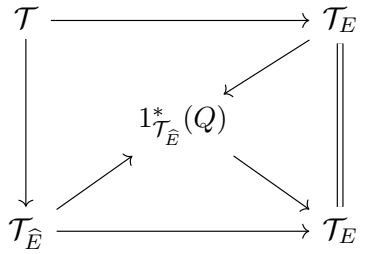
这里，$\mathbf{Tele}^{\mathbb{T}_{\widehat{E}}}$ 是一个内部的 $(\Sigma,\ \Pi_{\mathsf{rep}})$-上下文范畴，称为族 $\mathbb{T}_{\widehat{E}}$ 的望远镜式上下文化；其上下文是该族的望远镜。同样，$\mathcal{I}^{\infty}_{\widehat{E}}$、$\mathcal{I}_E$ 和 $\mathcal{I}^{1}_{E}$ 分别是 $\mathcal{T}_{\widehat{E}}$、$\mathcal{T}_E$ 和 $\mathcal{T}^{1}_{E}$ 的内化。利用 [BKS23], 中的限制运算，可将它们定义为 $\mathcal{I}^{\infty}_{\widehat{E}} \triangleq K^*(\mathbf{Tele}^{\mathbb{T}^{\infty}_{\widehat{E}}})$、$\mathcal{I}_E \triangleq F^*(\mathbf{Tele}^{\mathbb{T}_E})$ 和 $\mathcal{I}^{\infty}_{\widehat{E}} \triangleq K^*(G^*(\mathbf{Tele}^{\mathbb{T}^{1}_{E}}))$。$\mathcal{T}$ 和 $\mathcal{T}_E$ 的内部版本应当在 上为常量，即通过沿唯一函子 $\mathcal{T}_{\widehat{E}} \to 1_{\mathbf{Cat}}$ 对其外部对应项施加限制来定义。

因此，应该可以在 $\mathbb{T}_{\widehat{E}}$ 上定义一个“高阶同余”。这种方法的优点在于，高阶同余仅由类型和项上的等价关系构成，而不涉及上下文和代换；这样我们就可以避免当前证明中必须处理上下文和代换的部分。

这一高阶同余应当诱导出一个定义在 $(\Sigma, \Pi_{\mathsf{rep}})$-CwF $\mathbf{Tele}^{\mathbb{T}_{\widehat{E}}}$ 上的纤维化“一级”同余。随后，我们可以考虑这一纤维化同余的内部商；它包含在以下图表中。



通过将上述图表外部化，即沿函子 $1_{\mathcal{T}_{\widehat{E}}}\colon 1_{\mathbf{Cat}} \to \mathcal{T}_{\widehat{E}}$ 对其作限制，我们得到以下外部图表：



然后，我们就可以像之前那样得出结论，只需注意到 $\mathcal{T}_{\widehat{E}} \to \mathcal{T}_E$ 成为了商嵌入 $\mathcal{T}_{\widehat{E}} \to 1^*_{\mathcal{T}_{\widehat{E}}}(Q)$ 的一个收缩。

这一证明策略需要一些额外的工具，以便在预层拓扑斯的内语言中公理化模型、模型的态射及其性质。

9.2. **猜想**。 本文包含若干猜想（猜想 4.16、猜想4.29、猜想 5.5、猜想 5.6、猜想 6.3）。

前三个猜想（猜想 4.16、猜想4.29 和猜想 5.5）至少在经典逻辑框架下应该基本没有问题；作者已经起草了它们的证明。不过，要得到构造性证明可能相当困难。

与猜想 4.16 类似的结果对于代数理论和本质代数理论早已为人所知，而且可以将这些结果推广到一阶广义代数理论。对于 SOGAT，最简单的方法似乎是将其归约为一阶广义代数理论。事实上，SOGAT $\mathcal{T}$ 的底层Σ-上下文范畴是一个一阶广义代数理论，它刻画了 $\mathcal{T}$ 的上下文模型（参见 [Uem19，定理 7.30]）。

证明猜想4.29主要在于将 $\mathcal{T}$的弱稳定恒等类型与$\mathbf{Mod}^{\mathrm{cx}}_{\mathcal{T}}$关于忠实满函子 $\mathbf{0}_{\mathcal{T}}[-]\colon \mathcal{T}^{\mathsf{op}} \to \mathbf{Mod}^{\mathrm{cx}}_{\mathcal{T}}$的弱分解系统的性质联系起来。理论 $\mathcal{T}$是有限的，这解释了为什么只需考虑 $\mathcal{T}$ 的有限生成模型。

猜想5.5的证明已在第5.2节中概述。

猜想5.6应可由弱稳定恒等类型的严格化定理推出。第9.3节讨论了解决这些相干性问题的一种方法。

猜想 6.3 应可由黏合论证推出，这些论证与命题 6.2 的证明中所用的黏合论证非常相似。主要问题在于，很可能必须彩票平台注册

使用某个 ∞-拓扑斯的内语言，而在我们的设定中这种语言并不容易获得。第 9.3 节也讨论了一种可能的解决方案。

9.3. 相干性问题与 Yoneda 嵌入。 相干性问题源于使用 (Σ,Id)-或 $(\Sigma, \Pi_{\mathsf{rep}}$,Id)-CwF 来在理念上表示结构化的 ∞-范畴。特别是，外部单值性这一概念是通过弱稳定恒等类型来表达的。因此，为了依赖外部单值性，有两种选择：要么只使用弱稳定恒等类型，要么证明能够对弱稳定恒等类型进行严格化的相干定理。

Yoneda 嵌入是范畴论中最重要的构造之一。对于应用而言，能够在 $(\Sigma, \Pi_{\mathsf{rep}}$, Id)-CwF 层面访问 ∞-范畴 Yoneda 嵌入，似乎非常重要。如果 $\mathcal{C}$ 是一个余纤维化的 (Σ, Π_{rep},Id)-CwF，那么应该可以找到一个 HoTT 模型 $\mathcal{D}$（对应于 $\mathcal{C}$上的 ∞-预层）以及一个 $(\Sigma, \Pi_{\mathsf{rep}}$, Id)-CwF 态射 $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$，它在项上是本质满的（对应于全忠实 Yoneda 嵌入）。

我们希望，今后借助立方方法能够解决这两个问题，这得益于 HoTT 的立方模型是构造性的这一事实（使用适当的立方范畴）。若 $\mathcal{C}$ 是一个带有终对象的 1-范畴，那么范畴 $[\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$, **cSet**] （即立方预层范畴）就带有一个 HoTT 模型。事实上，我们可以在 **Psh**($\mathcal{C}$) 内部构造立方集模型。从外部看，这一内部构造对应于一个函子$\mathcal{C} \to \mathbf{Mod}^{\mathsf{op}}{}_{\mathsf{HoTT}}$。将此函子与 $1_{\mathcal{C}} : 1^{\mathsf{op}}{}_{\mathbf{Cat}} \to \mathcal{C}^{\mathsf{op}}$ 复合，我们便得到一个 HoTT 的外部模型；可以证明，其底层范畴是 $\mathcal{C}$ 上的立方预层范畴 $[\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$,**cSet**]。当 $\mathcal{C}$ 是一个 (Σ,Id)-上下文范畴或 $(\Sigma, \Pi_{\mathsf{rep}})$-上下文范畴时，我们希望将 $\mathcal{C}$ 与这个模型 $[\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$,**cSet**] 进行比较。此时，只需在 **Psh**($\mathcal{C}$) 内部，将由集合和 Reedy 纤维化类型构成的上下文范畴 $\mathsf{Set}_{\mathsf{rf}}$ 与立方集模型 cSet 进行比较即可。这个问题似乎是可行的（例如，可以借鉴双层类型论（2LTT）的思想，以及 2LTT 中 Reedy 纤维化图表的相关发展 [ACKS17]）。

9.4. 从规范化证明 0-截断性。 为了应用我们的方法，我们需要能够在具体例子中证明 $\mathcal{T}_{\widehat{E}}^{\infty}$ 的（相对）0-截断性。我们相信，可以通过将 $\mathcal{T}_E$ 的规范化证明提升到 $\mathcal{T}_{\widehat{E}}^{\infty}$ 来获得这类结果。这些规范化结果甚至应当能够直接证明 $\mathcal{T}_{\widehat{E}} \to \mathcal{T}_E$ 是一个分裂的 平凡纤维化，而无需经过任何商。

$\mathcal{T}_E$ 的严格规范化表明，$\mathcal{T}_E$ 的每个项都有唯一的范式。规范化通常是针对类型论的语法证明的，也就是针对初始模型$\mathbf{0}_{\mathcal{T}_E}$。证明 $\mathcal{T}_E$ 的规范化，相当于一次性证明所有 $\mathcal{T}_E$ 自由生成模型的规范化。对于大多数理论，证明 $\mathcal{T}_E$ 的规范化并不比证明 $\mathbf{0}_{\mathcal{T}_E}$的规范化更复杂。

对于 $\mathcal{T}_{\widehat{E}}^{\infty}$，同伦规范化应当表明，$\mathcal{T}_{\widehat{E}}^{\infty}$ 的每个项都具有一个可缩的范式空间（其上下文位于 $\mathcal{T} \to \mathcal{T}_{\widehat{E}}^{\infty}$ 的像中）。经过适当表述后，这足以得到 $\mathcal{T}_{\widehat{E}}^{\infty}$ 的 0-截断性。然而，证明 $\mathcal{T}_{\widehat{E}}^{\infty}$ 的同伦规范化要比证明严格规范化复杂得多。事实上，类型论的严格规范化证明利用集合值逻辑关系，而同伦规范化证明则应当使用空间值逻辑关系。

为此，我们基本上需要使用某些 ∞-范畴上的 ∞-预层，以及将同伦类型论解释到 ∞-拓扑斯中。但由于我们使用了 (Σ,Id)-CwFs 或 $(\Sigma, \Pi_{\mathsf{rep}}$,Id)-CwFs

与其他 ∞-范畴模型不同，我们无法直接使用同伦类型论到 ∞-拓扑斯中的已知解释。希望可以改用第 9.3 节中提到的立方方法。

我们注意到，Uemura 最近为 ∞-类型理论 [Uem22]的初始模型撰写了规范化和 0-截断性的证明。迄今为止，只考虑了一种仅包含 ∞类型的小型Π-类型理论，但这些方法应该也适用于其他 ∞-类型理论。直接将这些结果用于我们的目的似乎不太现实（尽管原则上是可行的，前提是对 $(\Sigma,\ \Pi_{\mathsf{rep}},\ \mathrm{Id})$-CwF 与$\infty$-类型理论（可表示映射 ∞-范畴）之间进行精确比较）。不过，能够为 ∞-类型理论得到 0-截断性结果这一事实表明，类似的方法也应该能导出我们所需的 0-截断性结果。

致谢

作者谨向 Thorsten Altenkirch、Martin Bidlingmaier、Paolo Capriotti、ThierryCoquand、SimonHuber、Ambrus Kaposi、András Kovács、NicolaiKraus、Chaitanya Leena Subramaniam、Christian Sattler 和 Bas Spitters 致谢，感谢他们对这项工作的关注和富有帮助的讨论。

参考文献

[ACC+17] Thorsten Altenkirch、Paolo Capriotti、Thierry Coquand、Nils Anders Danielsson、Simon Huber 和 Nicolai Kraus。带弱 J 的类型论。《证明与程序的类型》第 23 届国际会议，2017 年。 [ACKS17] Danil Annenkov、Paolo Capriotti、Nicolai Kraus 和 Christian Sattler。双层类型论及其应用。*CoRR*，abs/1705.03307，2017 年。 [Acz95] Peter Aczel。Galois：一个理论开发项目。1993 年都灵会议「逻辑框架中的数学表示」报告，1995 年。 [AMB13] Guillaume Allais、Conor McBride 和 Pierre Boutillier。中性项的新方程：一个经过形式化的可靠且完备的判定过程。载于 Stephanie Weirich 编，《2013 年 ACM SIGPLAN 依赖类型程序设计研讨会论文集（DTP@ICFP 2013）》，2013 年 9 月 24 日，美国马萨诸塞州波士顿，第 13–24 页。ACM，2013 年。 [AW09] Steve Awodey 和 Michael A. Warren。恒等类型的同伦论模型。《剑桥哲学学会数学学报》，146(1)：45–55，2009 年。 [Awo18] Steve Awodey。同伦类型论的自然模型。《计算机科学中的数学结构》，28(2)：241–286，2018 年。 [BKS23] Rafaël Bocquet、Ambrus Kaposi 和 Christian Sattler。对于类型论的元理论，内部 sconing 已足够。*CoRR*，abs/2302.05190，2023 年。 [Boc22] Rafaël Bocquet。二阶广义代数理论的外部单值性。*CoRR*，abs/2211.07487，2022 年。 [Bru16] Guillaume Brunerie。同伦类型论中的球面同伦群。*CoRR*，abs/1606.05916，2016 年。 [Bru18] Guillaume Brunerie。计算机生成的 smash 积幺半群结构证明。HoTTEST 电子研讨会，2018 年 11 月。 [CCD19] Simon Castellan、Pierre Clairambault 和 Peter Dybjer。带族范畴：单类型、简单类型与依赖类型。*CoRR*，abs/1904.00827，2019 年。 [CCHM17] Cyril Cohen、Thierry Coquand、Simon Huber 和 Anders Mörtberg。立方类型论：单值公理的一种构造性解释。*FLAP*，4(10)：3127–3170，2017 年。 [Gal14] Cesare Gallozzi。基于弱 Tarski 宇宙的构造性集合论，2014 年。 [Gar09] Richard Garner。类型论的二维模型。《计算机科学中的数学结构》，19(4)：687–736，2009 年。

[GCST19] Gaëtan Gilbert、Jesper Cockx、Matthieu Sozeau 和 Nicolas Tabareau。无需 K 的定义性证明无关性。《ACM 程序设计语言学报》，3(POPL)：3:1–3:28，2019 年。[GG08] Nicola Gambino 和 Richard Garner。恒等类型弱分解系统。《理论计算机科学》，409，2008 年 5 月。[GS20] Daniel Gratzer 和 Jonathan Sterling。依赖类型论的句法范畴：初步构想与充分性。CoRR，abs/2012.10783，2020 年。[Hof95] Martin Hofmann。等式反射相对于内涵类型论的保守性。载于 Stefano Berardi 和 Mario Coppo 编，《证明与程序的类型：TYPES'95 国际研讨会，意大利都灵，1995 年 6 月 5–8 日，精选论文》，第 1158 卷《计算机科学讲义》，第 153–164 页。施普林格，1995 年。[HS94] Martin Hofmann 和 Thomas Streicher。群胚模型否定恒等证明唯一性。载于《第九届年度计算机科学逻辑研讨会论文集》（LICS '94），法国巴黎，1994 年 7 月 4–7 日，第 208–212 页。IEEE计算机学会，1994 年。[Isa18a] Valery Isaev。类型论模型范畴上的模型结构。《计算机科学中的数学结构》，28(10)：1695–1722，2018 年。[Isa18b] Valery Isaev。代数依赖类型论之间的莫里田等价。CoRR，abs/1804.05045，2018 年。[Isa21] Valery Isaev。索引类型论。《计算机科学中的数学结构》，31 63，2021 1 3( ): – 。[JS91] André Joyal 和 Ross Street。张量演算的几何学 I。《数学进展》，88(1)：55–112，1991 年。[KL16] Chris Kapulkin 和 Peter Lumsdaine。类型论的同伦论。《数学进展》，337，2016 年 9 月。[KL21a] Chris Kapulkin 和 Peter Lumsdaine。单值基础的单纯形模型（根据 Voevodsky）。《欧洲数学会杂志》，23(6)：2071–2126，2021 年。[KL21b] Krzysztof Kapulkin 和 Peter LeFanu Lumsdaine。属性范畴中的同伦逆图。《纯粹与应用代数杂志》，225(4)：106563，2021 年。[Kov22] András Kovács。使用双层类型论进行分阶段编译。《ACM 程序设计语言学报》，6(ICFP)：540–569，2022 年。[KS17] Chris Kapulkin 和 Karol Szumiło。有限完备 $(\infty, 1)$-范畴的内语言。《数学选刊》，25，2017 年 9 月。[Lan63] Saunders Mac Lane。自然结合律与交换律。莱斯大学研究，1963 年。[Nor19] Paige Randall North。柯西完备范畴中的恒等类型与弱分解系统。《计算机科学中的数学结构》，29(9)：1411–1427，2019 年。[NU22] Hoang Kim Nguyen 和 Taichi Uemura。 ∞-类型论，2022 年。[Our05] Nicolas Oury。构造演算中的外延性。载于 Joe Hurd 和 Thomas F. Melham 编，《高阶逻辑定理证明：第 18 届国际会议（TPHOLs 2005），英国牛津，2005 年 8 月 22–25 日，论文集》，第 3603 卷《计算机科学讲义》，第 278–293 页。施普林格，2005 年。[Pal17] Erik Palmgren。构造性类型论中范畴对象的相等性。载于 Andreas Abel、Fredrik Nordvall Forsberg 和 Ambrus Kaposi 编，《证明与程序的类型》第 23 届国际会议（TYPES 2017），2017 年 5 月 29 日至 6 月 1 日，匈牙利布达佩斯，第 104 卷 LIPIcs，第 7:1–7:7 页。Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum für Informatik，2017 年。[Shu19] Michael Shulman。所有 $(\infty, 1)$-拓扑斯都具有严格单值宇宙。arXiv：代数拓扑，2019 年。[Uem19] Taichi Uemura。类型论语义的一般框架。CoRR，abs/1904 04097，2019 年。[Uem22] Taichi Uemura。 ∞-类型论的规范化与相干性。CoRR，abs/2212.11764，2022 年。[vdB18] Benno van den Berg。路径范畴与命题恒等类型。《ACM计算逻辑汇刊》，19(2)：15:1–15:32，2018 年。[WST19] Théo Winterhalter、Matthieu Sozeau 和 Nicolas Tabareau。从类型论中消除反射。载于 Assia Mahboubi 和 Magnus O. Myreen 编，《第八届 ACM SIGPLAN认证程序与证明国际会议论文集》（CPP 2019），葡萄牙卡斯凯什，2019 年 1 月 14–15 日，第 91–103 页。ACM，2019 年。

本作品采用知识共享署名许可协议授权。要查看该许可协议的副本，请访问 https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/，或致函知识共享，第二街171号，300室，旧金山，加利福尼亚州 94105，美国；或德国柏林10777艾森纳赫大街2号