基于三角形构型 B 样条的 Kirchhoff-Love 壳表示与分析

Zhihao Wang[a, b], Juan Cao[a, b, *], Xiaodong Wei[c], Zhonggui Chen[d], Hugo Casquero[e], Yongjie Jessica Zhang[f]

[a]厦门大学数学科学学院，中国福建省厦门市，邮编 *361005*[b]厦门大学福建省数学建模与高性能科学计算重点实验室，中国福建省厦门市，邮编 *361005*[c]上海交通大学密西根大学-上海交通大学联合学院，中国上海[d]厦门大学信息科学与技术学院，中国福建省厦门市，邮编 *361005*[e]密歇根大学迪尔伯恩分校机械工程系，美国密歇根州迪尔伯恩市 *Evergreen* 路 *4901* 号，邮编 *MI 48128-1491*[f]卡内基梅隆大学机械工程系，美国宾夕法尼亚州匹兹堡市，邮编 *PA15213*

arXiv:2304.10362v1 [cs.CE] 20 Apr 2023

摘要

本文介绍了在等几何分析（IGA）框架下，应用三角形配置B样条（TCB样条）表示和分析Kirchhoff-Love壳体。Kirchhoff-Love壳体公式要求基函数具有全局C^1连续性。基于非均匀有理B样条（NURBS）的等几何分析已广泛用于开发Kirchhoff-Love壳体单元。然而，复杂几何的壳体不可避免地需要多个曲面片和裁剪技术，而如何以高连续性拼接曲面片仍是一项挑战。另一方面，TCB样条具有非结构化特性，可适用于一般多边形区域，支持局部细化，并能灵活地以C^1连续性对复杂几何建模，因此天然适用于具有复杂几何的Kirchhoff-Love壳体公式。为此，我们提出使用TCB样条作为几何表示和解近似的基函数。我们将该方法应用于线性和非线性壳体基准问题，验证了其准确性和稳健性。此外，我们还通过对采用单个TCB样条曲面片表示的管道交汇处和前保险杠进行几何非线性Kirchhoff-Love壳体仿真，进一步展示了该方法在壳体分析中的适用性。

关键词：
TCB样条；等几何分析；Kirchhoff-Love壳体；壳体分析

1. 引言

壳体结构在土木工程、汽车工程和航空航天工程等领域的应用无处不在，这都归因于其优异的承载性能 [1]。因此，过去几十年来，壳体结构的分析一直备受关注 [2]。Kirchhoff-Love（KL） [3, 4] 理论和 Reissner-Mindlin（RM） [5, 6, 7]理论分别是薄壳分析和厚壳分析中应用最广泛的公式。KL 公式要求使用具有全局C^1 连续性的形函数，这限制了传统拉格朗日形函数的应用。即使采用高阶多项式，要使任意形状的单元达到C^1 连续性也颇具挑战。

近年来，等几何分析已成为分析壳体结构的一种流行方法。许多工程分析对象都可以理想化为光滑曲面，并可通过非均匀有理B样条精确表示。Kirchhoff–Love壳理论也可以使用相同的NURBS基函数进行离散，从而得到几何精确离散公式。然而，在分析具有复杂几何的壳体时，基于NURBS的等几何分析存在一些局限。这些困难主要源于非均匀有理B样条固有的张量积特性。例如，具有复杂几何的壳体通常需要裁剪或采用多片描述。裁剪曲面片通常没有独立的表示】【。

*通讯作者电子邮箱： juancao@xmu.edu.cn (Juan Cao)

以便交给分析人员。多片壳体也无法直接进行分析，因为片连接处的高阶连续性无法自动保持，而且不同曲面片具有不同的参数化。尤其是在裁剪曲面的情况下，多片通常通过间隙和重叠 [8], 连接，这不符合C^0连续性要求，无法用于壳体分析。从分析的角度来看，NURBS 的张量积结构效率低下，这是由全局细化操作导致的。为减少逼近误差并降低自由度，高精度且高效的仿真需要采用局部细化。

为解决这些局限性，研究人员提出了多种方法，以增强分析方法的适应性，使其能够处理存在几何缺陷的模型，包括间隙、重叠、裁剪边界和非协调多片 [9, 10]。另一方面，许多研究致力于从源头上规避这些问题。采用不同的曲面描述方法，例如 T样条 [11, 12], 、细分曲面（SubD） [13], 和有理三角形 B´ézier 样条（rTBS） [14] ，对具有复杂结构的壳体进行重新建模，以避免几何缺陷。然而，这些方法的成功在很大程度上取决于用于描述形状的基函数的逼近特性。例如，T样条和细分曲面在表示复杂几何时，都会遇到内部奇异点问题。对于 rTBS，若要维持特定的连续性要求，将多个曲面片拼接在一起以形成复杂拓扑并非易事。

近年来，所谓的三角形配置B样条（TCB样条）已被引入等几何分析（IGA）领域，以提高IGA的鲁棒性并拓宽分析的应用范围 [15, 16, 17]。TCB样条曲面可以定义在一般的多边形域上。次数为k 的TCB样条曲面几乎处处自然具有C^{k-1}连续性，但在凹顶点附近的一小片区域内除外，该区域具有C^1连续性。与传统的基于四边形的样条相比，TCB样条显著提高了拓扑的复杂程度，并使IGA能够处理复杂几何。它还支持灵活的局部自适应细化，而不会引入不必要的传播。TCB样条优异的理论性质，以及其在IGA中的复杂几何建模和无优化参数化方面取得的成功 [16] ，进一步激励我们探索其在复杂壳体建模与分析中的应用。

本文采用TCB样条进行Kirchhoff–Love壳建模，并构建了用于复杂壳体分析的等几何框架。首先，将给定的多面片、带裁剪的CAD壳体中面离散为三维三角网格，然后投影到二维平面上，形成平面三角网格。接着，在由平面三角网格导出的二维多边形区域上构造光滑且水密的TCB样条曲面，并将其拟合到三维三角网格。由此，我们的方法无需在参数域 [16]内设置奇异点，即可用单个TCB样条片成功逼近一个与具有有限个孔洞的开圆盘拓扑等价的光滑曲面。所得TCB样条曲面天然满足Kirchhoff–Love理论的C^1连续性要求。最后，我们基于等几何概念对所得壳体进行分析。数值分析结果验证了基于TCB的壳体分析框架的准确性和有效性。

本文其余部分安排如下。第2节简要回顾基于等几何概念的KL壳体分析。第3节介绍TCB样条的定义，包括单纯形样条和三角形构型。第4节阐述曲线坐标下几何线性和非线性的Kirchhoff–Love壳理论。第5节介绍基于TCB样条的壳体拟合方法。第6节通过一系列线性问题和非线性问题展示本框架的求解能力。本节还考察了两种具有复杂几何的壳体，包括管道接头和前保险杠模型。第7节总结全文并展望未来工作。

2. 相关工作

自第一种壳理论提出以来 [18], , 人们开展了大量研究来分析壳体结构。本节仅讨论基于等几何概念的先进复杂壳体分析方法。这些方法大致可分为三类：多片耦合方法、浸入边界方法和重新参数化方法。

多片耦合方法。 复杂工程结构的基础几何通常由多个曲面片组成，这些曲面片通常在其界面处不协调。为了利用等几何分析（IGA）分析非协调多片壳体结构，研究人员提出了多种多曲面片耦合技术。主要类别包括罚函数方法 [2, 19], 拉格朗日乘子法 [20, 21, 22] 以及Nitsche方法 [23, 24]。罚函数

这些方法具有吸引力，因为它们简单高效，且不会引入额外的自由度。罚函数方法的主要挑战在于找到合适的罚因子，以确保解的准确性并避免数值问题。拉格朗日乘子法不会引入罚因子，但通常会导致鞍点问题，因此要求拉格朗日乘子空间满足 inf-sup 稳定性。虽然 Nitsche 方法既不需要经验参数，也不需要额外的自由度，但它们依赖于相应的变分公式，而该公式不易实现 [25, 26]。对于所有多片耦合方法，界面积分的计算都会显著增加计算复杂度 [27]。

浸入边界方法。 裁剪是计算机辅助几何设计（CAGD）中最基本的操作之一，可用于构建复杂几何。然而，由于裁剪操作无法在 CAGD 领域中精确实现，它也是设计与分析之间互操作性的最严重障碍之一 [28]。已有多种方法致力于解决将裁剪几何纳入分析的问题；参见综述论文 [28]。大多数关于裁剪几何等几何分析的出版物采用浸入边界方法或其他名称的类似方法，例如有限单元法（FCM） [29, 30]和嵌入域方法 [31]。这些方法将裁剪模型嵌入简单的背景网格中，同时由裁剪曲线确定感兴趣的区域。浸入方法已成功应用于各种裁剪壳体分析框架，并展现出强大的应用能力。 [32, 33] 研究了浸入边界方法中的边界条件弱施加，随后将其应用于几何非线性耦合Kirchhoff–Love壳 [34], 、壳屈曲分析 [35] 以及非线性多片分析中的膜锁死问题 [24]。当背景网格与物理域相交所得的切割单元包含较小的体积分数时，浸入边界方法容易出现严重的病态性和稳定性问题。这些问题阻碍了所得方程组的求解，因此需要从计算角度采取额外措施来解决稳健性问题 [36]。

重新参数化方法。 重新参数化方法旨在利用其他曲面表示，将存在缺陷问题的裁剪几何体或多曲面片几何体重新构建为适用于分析的新表示形式，从而解决模型的不足。例如，在 [9, 10]中，将裁剪壳体模型重新建模为一组具有水密性、特征感知能力和边界协调性的 NURBS 曲面片。为了支持局部细化，采用 PHT 样条 [37], 、T样条 [11] 和截断层次 B 样条 [38, 39, 40] 来表示具有简单结构的壳体。此外，考虑到设计与分析两方面的能力，通过允许同一面内存在多个奇异点，开发了适用于分析的非结构化 T 样条（ AST 样条），并将其应用于具有任意拓扑的壳体建模 [41, 42, 43]。然而，为了定义基函数并实现奇异点周围所需的光滑性，需要进行一些特殊处理 [44, 45, 46]。细分模型在复杂形状建模方面也具有很大的灵活性，并已被用于重新建模不受规则网格结构限制的壳体。重新建模后的细分曲面不存在间隙，但仍包含奇异点。在 [14], 中，采用 rTBS 对具有复杂拓扑的 KL 壳进行分析。尽管 rTBS 具有高效的局部网格细化能力，但仍必须对相邻单元施加线性连续性约束。

所谓的TCB样条是一种新型建模工具，可用于表示具有复杂几何和拓扑结构的模型 [15, 16]。它们具有诸多优点，例如能够适用于一般多边形域、具备自动光滑性，以及支持无需传播的局部细化，因此适合作为壳体分析的基函数。本文采用TCB样条对具有复杂几何的Kirchhoff–Love壳进行重新建模和分析，以展现其在工业应用中的潜力。

3. TCB样条

在我们的壳体分析框架中，复杂壳体几何由定义在一般多边形域上的TCB样条进行建模。本节首先简要回顾定义TCB样条的两个要素，即单纯形样条和三角形构型。然后介绍TCB样条的构造方法。最后，请读者参阅 [47, 48, 15, 49, 16], 了解TCB样条的详细介绍。

3.1. 单纯形样条

一个 \(k\) 次单纯形样条由一组点 $kV = \{\boldsymbol{t}_1, \boldsymbol{t}_2, \cdots, \boldsymbol{t}_{k+3}\} \subset \mathbb{R}^2$ 定义，其中每个点 $\boldsymbol{t}_i \in V$ 在样条定义中称为节点。我们用 Area($\{\boldsymbol{t}_{i,1}, \boldsymbol{t}_{i,2}, \boldsymbol{t}_{i,3}\}$) 表示.....的有向面积。

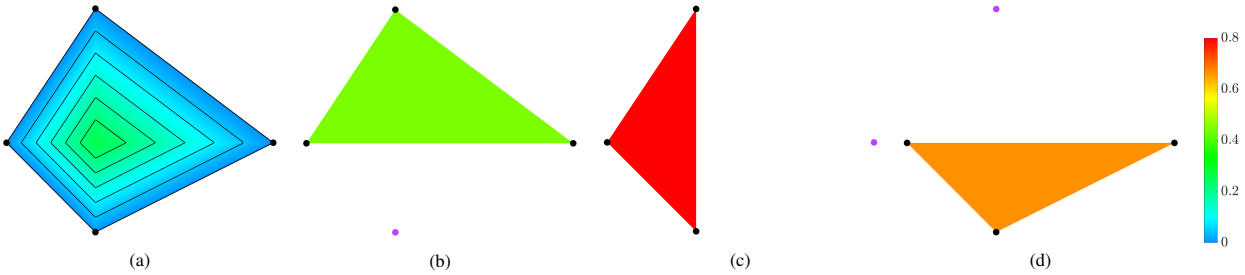


图1：一次单纯形样条的递归求值。(a) 中的一次单纯形样条由 (b-d) 中的三个零次单纯形样条计算得到，其中实心黑点表示用于定义单纯形样条的节点。单纯形样条的数值采用颜色编码，色条顶部和底部的红色和蓝色分别表示最大值和最小值。

由这三个点 $\{\boldsymbol{t}_{i,1}, \boldsymbol{t}_{i,2}, \boldsymbol{t}_{i,3}\}$ 构成的有向三角形。假设节点集合 V 是非退化的，即至少存在三个节点 $\{\boldsymbol{t}_{i,1}, \boldsymbol{t}_{i,2}, \boldsymbol{t}_{i,3}\} \subset V$，其有向面积非零，则与由 $k+3$ 个非退化节点组成的集合 V 相关联的 k 次单纯形样条是一个分段多项式，可以递归地定义为以下三个 k 次单纯形样条的线性组合 [50]:

$$M(\boldsymbol{t}|V) = \sum_{j=1}^{3} \zeta_j(\boldsymbol{t}|\hat{V}) M(\boldsymbol{t}|V \setminus \{\boldsymbol{t}_{i,j}\}), \quad \boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^2, \tag{1}$$

其中，$\hat{V} = \{\boldsymbol{t}_{i,1}, \boldsymbol{t}_{i,2}, \boldsymbol{t}_{i,3}\} \subseteq V$ 是任意一个非退化集合，且 $\{\zeta_j(\boldsymbol{t}|\hat{V})\}$ 是 $\boldsymbol{t}$ 相对于三角形 $\hat{V}$ 的重心坐标，作为

$$(\zeta_1(\boldsymbol{t}|\hat{V}), \zeta_2(\boldsymbol{t}|\hat{V}), \zeta_3(\boldsymbol{t}|\hat{V})) = \left(\frac{\text{Area}(\{\boldsymbol{t}, \boldsymbol{t}_{i,2}, \boldsymbol{t}_{i,3}\})}{\text{Area}(\{\boldsymbol{t}_{i,1}, \boldsymbol{t}_{i,2}, \boldsymbol{t}_{i,3}\})}, \frac{\text{Area}(\{\boldsymbol{t}_{i,1}, \boldsymbol{t}, \boldsymbol{t}_{i,3}\})}{\text{Area}(\{\boldsymbol{t}_{i,1}, \boldsymbol{t}_{i,2}, \boldsymbol{t}_{i,3}\})}, \frac{\text{Area}(\{\boldsymbol{t}_{i,1}, \boldsymbol{t}_{i,2}, \boldsymbol{t}\})}{\text{Area}(\{\boldsymbol{t}_{i,1}, \boldsymbol{t}_{i,2}, \boldsymbol{t}_{i,3}\})} \right).$$

对于 $k = 0$,

$$M(\boldsymbol{t}|V) = \begin{cases} 0 & \boldsymbol{t} \notin [V), \\ \frac{1}{|\text{Area}(V)|} & \boldsymbol{t} \in [V), \end{cases}$$

其中，$[V)$ 是 V [51] 的半开凸包。图 1 展示了一次单纯形样条的求值示例。单纯形样条具有若干性质，这些性质对本文背景下的应用十分重要 [52,53]:

- 非负性：$M(\boldsymbol{t}|V) \geq 0$ 对任意 $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^2$ 均成立。
- 局部支撑：如果 $\boldsymbol{t}$ 不属于 V 的凸包，那么 $M(\boldsymbol{t}|V) = 0$。
- 连续性：对于次数为 k 的单纯形样条 $M(\boldsymbol{t}|V)$，若 V 中不存在三点共线的节点，则 $M(\boldsymbol{t}|V)$ 是 C_{k-1} 连续的。否则，若 V 中有 n $(3 \leq n \leq k+3)$ 个节点共线，则 $M(\boldsymbol{t}|V)$ 在这些共线节点所形成的直线上 C_{k+1-n} 连续。

3.2. 三角形配置

节点集 A 的 k 次配置是指 A 的一个子集，其大小为 $k+3$。一个 k 次单纯形样条可以与一个 k 次配置相关联。为了在有限节点集 A 上定义 k 次单纯形样条空间，我们首先需要获得 A 的一个 k 次配置族。过去已经提出了许多定义不同配置族的方法 [54, 47, 49]。本文中，我们的样条空间基于所谓的三角形配置（简称 t-配置）来定义 [49]。一个 k 次 t-配置由一对满足以下条件的子集（T, I）组成：$\#T = 3$, $\#I = k$, 且 T, $I \subset A$, 其中“#”表示集合的大小。为便于讨论，我们还用 T 表示以子集 T 的三个元素为顶点的逆时针定向三角形。用 Γ_k 表示 k 次 t-配置族。我们采用所谓的链接三角剖分过程（LTP）来构造有效的 t-配置族 [47, 49]。

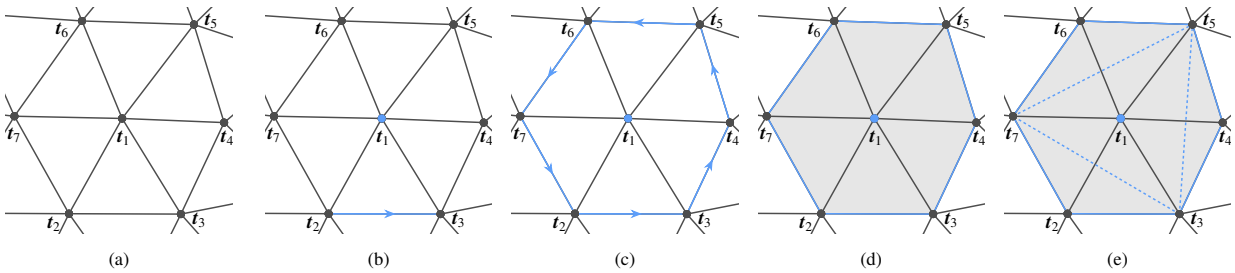


图2：t-配置中的基本记号。(a) 给定一个节点集和一个初始三角剖分，对应于一族零度 t-配置{({t1, t2, t3}, ∅)、({t1, t3, t4}, ∅)、 ⋯}；(b) 由零度 t-配置({t1, t2, t3}, ∅)得到的一个顶点 {t1} = {t1} ∪ ∅（实心蓝点）和一条边 $\overrightarrow{t_2t_3}$（蓝色箭头）；(c) 对应于同一顶点 {t1}的不同零度 t-配置的边；(d) 以灰色阴影标示的闭简单多边形 P{t1} = {t2, t3, t4, t5, t6, t7}；(e) 多边形 P{t1}的约束三角剖分，以蓝色虚线标示，由此得到四个一度 t-配置 {({t2, t3, t7}, {t1})、({t3, t4, t5}, {t1})、({t3, t5, t7}, {t1})、({t5, t6, t7}, {t1})}。

算法1： 链接三角剖分过程

输入： 一族次数为k 的 t-配置 Γ_k。
输出： 一族 k 次 + 1 t-配置 Γ_{k+1}。
$\Gamma_{k+1} \leftarrow \emptyset$;
对于每个顶点 $\mathcal{V} \in V(\Gamma_k)$**执行**
  计算由 $\mathcal{V}$ 得到的简单闭多边形 $P_{\mathcal{V}}$；
  如果$P_{\mathcal{V}}$ 是非退化的**那么**
    对$P_{\mathcal{V}}$计算约束三角剖分；
    对于 三角剖分中的每个三角形 T^* **执行**
      $\Gamma_{k+1} \leftarrow \Gamma_{k+1} \bigcup (T^*, \mathcal{V})$;
    end
  end
end

注意，给定节点集 A 的任意三角剖分 $\mathcal{T}$ 都对应一个零度 t-配置族 Γ_0；参见图 2(a)。我们将 $\mathcal{T}$ 称为给定节点集的节点网格。随后，LTP 从任意三角剖分开始，递归地计算更高次数的 t-配置族。这里我们介绍计算更高次数 t-配置所需的概念和必要的符号，并请读者参阅 [47, 49] 以了解更多细节。对于一个 k 次 t-配置（T,I）以及任意 $\boldsymbol{v} \in T$,

- {顶点} 与 I 的并集，即 {顶点} ∪ I，称为 t-config 的一个顶点；见图 2(b)。
- T 的与$\boldsymbol{v}$相对的有向边，记作$_{\boldsymbol{v}}T$，称为 t-config 的边；见图 . 2(b).

注意，t-配置的顶点和边是成对出现的，不同的 t-配置可能具有公共顶点。令$V(\Gamma_k)$表示 Γ_k中所有度为k 的 t-配置的顶点集合。对于每个顶点 $\mathcal{V} \in V(\Gamma_k)$，不同度为$k$ 的 t-配置中与之对应的边构成一个闭合或开放的简单线段多边形，这些线段彼此不相交 [49]；见图2(c)。可以使用文献 [16]中的方法进一步闭合开放多边形。我们将由顶点 $\mathcal{V} \in V(\Gamma_k)$导出的简单闭多边形记为$P_{\mathcal{V}}$；见图2(d)。如果$P_{\mathcal{V}}$ 不是退化的，则对其进行约束三角剖分；见图2(e)。随后，三角剖分中的每个三角形T^*都会生成一个度为$k+1$的 t-配置（$T^*, \mathcal{V}$）。LTP的伪代码如算法1所示。图2展示了度为1的 t-配置的生成过程。在整个LTP过程中，每个步骤采用不同的三角剖分方法，会产生不同的 t-配置族。本文默认采用德劳内三角剖分方法来获得LTP中的初始三角剖分和多边形划分。

*3.3. TCB*样条基函数和曲面

设 Ω_0 为 $\mathbb{R}^2$ 中的一个多边形域；见图 3(a)。为了在 Ω_0，上定义 TCB样条基函数和曲面，我们需要在该域上布置一组节点。作为初始化步骤，我们首先生成一个均匀分布的

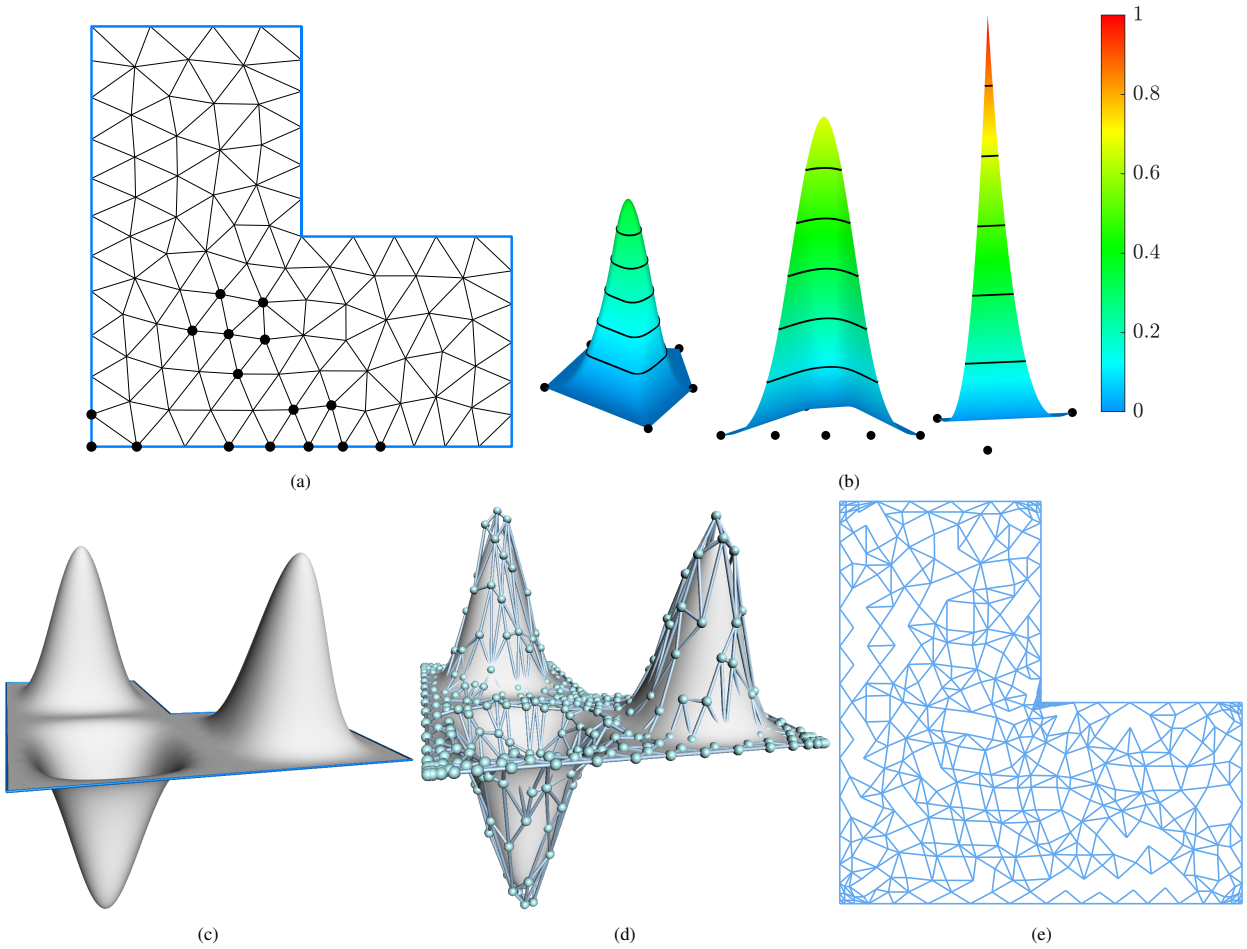


图 3：三次 TCB 样条曲面。(a) 节点集的初始三角剖分，蓝线标出了多边形边界；(b) 从左至右：分别定义在内部、边界和顶点处的三次 TCB 样条基函数；(c) 和 (d) 分别展示三次 TCB 样条曲面及其控制网；(e) 由 Greville 点生成的网格。

使用质心 Voronoi 镶嵌（CVT）方法在 Ω_0 上放置节点 [55], , 与 [16]中的做法相同。我们可以通过 Lloyd松弛计算 CVT：迭代地将每个种子点移动到相应单元的质心 [55]。此外，在 Ω_0 的角点处插入 k 个节点，以维持 TCB样条基函数的单位分解。还可以根据曲面拟合误差和位移幅值对该节点集进行进一步的局部细化。节点细化的讨论留待第5节 5.4。我们可以使用上述 LTP 过程计算节点集的 k 次三角形配置族 $\Gamma_k = \{(T,I)\}$。记 $\mathcal{I}_k$ 为 Γ_k 中所有不同第二节点子集I 的集合，记$X_I \subset \Gamma_k$ 为具有相同节点集I的 t-配置集合，即$\mathcal{I}_k = \{I|(T,I) \in \Gamma_k\}$，$X_I = \{(T,\hat{I})|\hat{I} = I, (T,\hat{I}) \in \Gamma_k\}$。那么，与节点子集$I$ 相关联的 k 次 TCB样条定义为单纯形样条的线性组合，如下所示。

$$B_I(\boldsymbol{t}) = \sum_{(T,I)\in X_I} \text{Area}(T) M(\boldsymbol{t}|T \cup I) \quad \text{with} \quad \boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^2.$$

图 3(b) 分别展示了 Ω_0，的内部、边界和顶点处的 TCB样条基函数示例。TCB样条基函数具有许多与传统 B 样条相同的优良性质。具体而言，TCB样条基函数具有对壳体表示与分析至关重要的性质，例如非负性、单位分解、局部支撑、多项式再现性和自动光滑性（即，在一组非退化节点上定义的 k 次 TCB样条具有C^{k-1} 连续性）。

TCB样条曲面定义为

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{t}) = \sum_{I \in \bar{\mathcal{I}}_k} B_I(\boldsymbol{t}) \boldsymbol{c}_I, \boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^2, \tag{2}$$

其中，$\boldsymbol{c}_I$ 称为与 TCB 样条基函数 $B_I(\boldsymbol{t})$ 相关联的控制点。节点子集 I 的平均值，记为 I，称为函数 B_I [56] 的 Greville 位置。TCB 样条基函数或其 Greville 位置与控制点之间存在一一对应关系。与通常具有四边形网格控制网的传统张量积样条不同，TCB 样条具有由一般拓扑构成的混合网格控制网 [56, 47, 48]。图 3(c& d) 分别展示了一个三次 TCB 样条曲面及其控制网的简单示例。为了更好地说明控制网的拓扑结构，将控制网的连接关系应用于二维域中对应的 Greville 位置；参见图 3(e)。设 $\mathcal{I}^b{}_k$ 是 $\mathcal{I}_k$ 的一个子集，其对应的 Greville 位置 $\bar{}I$ 位于域边界上，即 $\mathcal{I}^b{}_k = \{I | I \in \mathcal{I}_k, \bar{}I \in \partial\Omega_0\}$。那么，式 (2) 中次数为 k 的 TCB 样条曲面在参数域边界上的限制，就是经过两个端点控制点 [16]的经典 k 次钳位 B 样条曲线:

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{t})|_{\partial\Omega_0} = \sum_{I \in \mathcal{I}_k^b} B_I(\boldsymbol{t}) \boldsymbol{c}_I, \boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^2.$$

次数为k 的 TCB样条曲面在除凹角附近以外的区域几乎处处具有C^{k-1}连续性，而在凹角附近可能仅具有 C^0 连续性 [15]。为确保全局C^1 连续性，需要进行特殊处理。按照方法 [15], , 我们控制参数域凹角附近 LTP 中三角剖分的拓扑，使相应角点处 TCB样条基函数的C^0 连续性限制在单条节点线上。然后，将每个凹角处的所有C^0 基函数合并为一个C^1 基函数。在后续的曲面重建和壳体分析中使用这些局部合并后的基函数，以实现全局C^1 连续性。

4. Kirchhoff-Love 薄壳理论

基于等几何概念的壳理论详尽介绍见 [57, 58, 42]。在 Kirchhoff–Love壳理论中，以下假设成立:

(a) 壳体 c 截面在任何变形后都保持在一条直线上，并且仍与中面垂直 on.

(b) 忽略横向法向应力。

条件 (a) 表明，厚度方向的线性应变分布和横向剪切应变均被忽略 [4]。因此，壳体结构的运动学可由其中面及厚度描述。

4.1. 薄壳力学

为便于后续描述，“ˆ”和“ · ”分别表示未变形几何体和变形几何体中的量。考虑一个厚度为t的壳模型，其中面$\boldsymbol{r}(\xi^1, \xi^2)$由坐标 ξ^1 和 ξ^2参数化。那么，参考几何中的任意材料点$\hat{}\boldsymbol{p}(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$均可表示为

$$\hat{\boldsymbol{p}}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) = \hat{\boldsymbol{r}}(\xi^1, \xi^2) + \xi^3 \hat{\boldsymbol{a}}_3(\xi^1, \xi^2), \quad -0.5t \leq \xi^3 \leq 0.5t, \tag{3}$$

其中，$\hat{}\boldsymbol{a}_3$ 是中面上点$\hat{}\boldsymbol{r}(\xi^1, \xi^2)$的法向量。同样，变形几何中的任意材料点$\boldsymbol{p}(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$均可表示为

$$\boldsymbol{p}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) = \boldsymbol{r}(\xi^1, \xi^2) + \xi^3 \boldsymbol{a}_3(\xi^1, \xi^2), \quad -0.5t \leq \xi^3 \leq 0.5t. \tag{4}$$

因此，我们可以得到中面中一个材料点的位移，如下所示

$$\boldsymbol{u}(\xi^1, \xi^2) = \boldsymbol{r}(\xi^1, \xi^2) - \hat{\boldsymbol{r}}(\xi^1, \xi^2). \tag{5}$$

下文中，假设希腊指标 α、β 的取值范围为 $\{1,2\}$。未变形和变形几何体的中面的切向量可表示为

$$\hat{\boldsymbol{a}}_\alpha = \frac{\partial \hat{\boldsymbol{r}}(\xi^1,\xi^2)}{\partial \xi^\alpha} \quad \text{and} \quad \boldsymbol{a}_\alpha = \frac{\partial \boldsymbol{r}(\xi^1,\xi^2)}{\partial \xi^\alpha}, \tag{6}$$

分别地。在假设条件 (a) 下，未变形和变形几何体的中面的单位法向量可表示为

$$\hat{\boldsymbol{a}}_3 = \frac{\hat{\boldsymbol{a}}_1 \times \hat{\boldsymbol{a}}_2}{\|\hat{\boldsymbol{a}}_1 \times \hat{\boldsymbol{a}}_2\|} \quad \text{and} \quad \boldsymbol{a}_3 = \frac{\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2}{\|\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2\|}, \tag{7}$$

分别地。未变形和变形几何体的协变基向量分别定义为 $(\hat{\boldsymbol{a}}_1,\hat{\boldsymbol{a}}_2,\hat{\boldsymbol{a}}_3)$ 和 $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)$。此外，协变度量系数通过以下方式计算：

$$\hat{a}_{\alpha\beta} = \hat{\boldsymbol{a}}_\alpha \cdot \hat{\boldsymbol{a}}_\beta, \quad a_{\alpha\beta} = \boldsymbol{a}_\alpha \cdot \boldsymbol{a}_\beta, \tag{8}$$

其中，圆点符号表示两个向量的内积。通过求协变度量系数的逆，可以将逆变度量系数表示为

$$[\hat{a}^{\alpha\beta}] = [\hat{a}_{\alpha\beta}]^{-1}, \quad [a^{\alpha\beta}] = [a^{\alpha\beta}]^{-1}. \tag{9}$$

格林-拉格朗日应变张量的系数表示为

$$E_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta} + \xi^3 \kappa_{\alpha\beta}, \tag{10}$$

其中，协变膜应变系数 $\varepsilon_{\alpha\beta}$ 和曲率变化系数 $\kappa_{\alpha\beta}$ 分别为

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{a_{\alpha\beta} - \hat{a}_{\alpha\beta}}{2} \quad \text{and} \quad \kappa_{\alpha\beta} = \frac{\partial \hat{\boldsymbol{a}}_\alpha}{\partial \xi^\beta} \cdot \hat{\boldsymbol{a}}_3 - \frac{\partial \boldsymbol{a}_\alpha}{\partial \xi^\beta} \cdot \boldsymbol{a}_3,$$

分别。

为简洁起见，我们按照 [58] 中的方法重新表述所有应力相关变量。具体而言，采用沃伊特记号 [59] 表示的膜应力 $\boldsymbol{n}$、弯曲应力 $\boldsymbol{m}$、膜应变 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 和曲率变化 $\boldsymbol{\kappa}$ 如下：

$$\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} n^{11} \\ n^{22} \\ n^{12} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{m} = \begin{bmatrix} m^{11} \\ m^{22} \\ m^{12} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon^{11} \\ \varepsilon^{22} \\ 2\varepsilon^{12} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\kappa} = \begin{bmatrix} \kappa^{11} \\ \kappa^{22} \\ 2\kappa^{12} \end{bmatrix}. \tag{11}$$

此外，膜应力和弯曲应力通过 [60] 计算。

$$\boldsymbol{n} = t\boldsymbol{C}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{m} = \frac{t^3}{12}\boldsymbol{C}\boldsymbol{\kappa}. \tag{12}$$

with

$$\boldsymbol{C} = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} (\hat{a}^{11})^2 & \nu\hat{a}^{11}\hat{a}^{22} + (1-\nu)(\hat{a}^{12})^2 & \hat{a}^{11}\hat{a}^{12} \\ \vdots & (\hat{a}^{22})^2 & \hat{a}^{22}\hat{a}^{12} \\ & \cdots & [(1-\nu)\hat{a}^{11}\hat{a}^{22} + (1+\nu)(\hat{a}^{12})^2]/2 \end{bmatrix}, \tag{13}$$

其中，E 为杨氏模量，ν 为泊松比。

令 δ 表示变分算子。那么，$\delta\boldsymbol{\varepsilon}$、$\delta\boldsymbol{\kappa}$ 和 $\delta\boldsymbol{u}$ 分别表示虚膜应变、虚曲率变化和虚位移。分别用 W_{int} 和 W_{ext} 表示内功和外功。根据虚功原理，[61],内虚功 δW_{int} 等于外虚功 δW_{ext}。

$$\delta W_{int} = \int_{\hat{A}} (\boldsymbol{n} \cdot \delta\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{m} \cdot \delta\boldsymbol{\kappa}) \, \mathrm{d}\hat{A} = \delta W_{ext} = \int_{\hat{A}} \boldsymbol{f} \cdot \delta\boldsymbol{u} \, \mathrm{d}\hat{A}, \tag{14}$$

其中 $\mathrm{d}\hat{A} = \|\hat{\boldsymbol{a}}_1 \times \hat{\boldsymbol{a}}_2\| \mathrm{d}\xi^1 \mathrm{d}\xi^2$，$\boldsymbol{f}$ 为外载荷。

4.2. 等几何离散化

假设中面由 TCB样条表示，其基函数为n 个 $\{B_i(\xi^1,\xi^2)\}$，$i = 1,\cdots, n$。位移场由同一组基函数定义如下：

$$\boldsymbol{u}(\xi_1,\xi_2) = \sum_{i=1}^{n} B_i(\xi^1,\xi^2)\boldsymbol{u}_i, \tag{15}$$

其中 $\boldsymbol{u}_i = (u_{3i-2},u_{3i-1},u_{3i}) \in R^3$ 是与基函数$B_i(\xi^1,\xi^2)$相关联的位移场控制变量。由于每个$\boldsymbol{u}_i$ 包含三个分量，自由度的数量是基函数数量的三倍。

对于非线性变形，残余力向量 $\boldsymbol{R} = [R_r]$ 计算如下

$$R_r = \frac{\partial W_{ext}}{\partial u_r} - \frac{\partial W_{int}}{\partial u_r} = \int_{\hat{A}} \boldsymbol{f}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial u_r}\,\mathrm{d}\hat{A} - \int_{\hat{A}}\left(\boldsymbol{n}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial u_r} + \boldsymbol{m}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{\kappa}}{\partial u_r}\right)\mathrm{d}\hat{A}, \quad 1\le r\le 3n. \tag{16}$$

在本文中，我们考虑与位移无关的载荷。在这种情况下，我们有

$$\frac{\partial^2 W_{ext}}{\partial u_r \partial u_s} = \int_{\hat{A}} \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial u_s}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial u_r}\,\mathrm{d}\hat{A} = 0, \quad 1\le r,s\le 3n,$$

刚度矩阵 $\boldsymbol{K} = [K_{r,s}]$可计算为

$$K_{rs} = \frac{\partial^2 W_{int}}{\partial u_r \partial u_s} - \frac{\partial^2 W_{ext}}{\partial u_r \partial u_s} = \int_{\hat{A}} \frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial u_s}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial u_r} + \boldsymbol{n}\cdot\frac{\partial^2 \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial u_r \partial u_s} + \frac{\partial \boldsymbol{m}}{\partial u_s}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{\kappa}}{\partial u_r} + \boldsymbol{m}\cdot\frac{\partial^2 \boldsymbol{\kappa}}{\partial u_r \partial u_s}\,\mathrm{d}\hat{A}. \tag{17}$$

线性化系统表示为

$$\boldsymbol{K}\Delta\boldsymbol{u} = \boldsymbol{R}, \tag{18}$$

其中，增量位移向量 $\Delta\boldsymbol{u}$中的位移通过迭代更新。

对于小变形问题，采用几何线性分析 [4]较为方便。在这种情况下，假定实际几何与参考几何相同，残余力向量 $\boldsymbol{R}^{lin} = [R_r^{lin}]$ 和刚度矩阵 $\boldsymbol{K}^{lin} = [K_r^{lin},_s]$ 的各元素可简化为

$$R_r^{lin} = \int_{\hat{A}} \boldsymbol{f}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial u_r}\,\mathrm{d}\hat{A} \quad \text{and} \quad K_{rs}^{lin} = \int_{\hat{A}} \frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial u_s}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial u_r} + \frac{\partial \boldsymbol{m}}{\partial u_s}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{\kappa}}{\partial u_r}\,\mathrm{d}\hat{A}, \quad 1\le r,s\le 3n, \tag{19}$$

res分别。与 [37], 应变类似，可由位移的线性形式如下得到 s:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{M}_i(\xi^1,\xi^2)\boldsymbol{u}_i, \quad \boldsymbol{\kappa} = \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{D}_i(\xi^1,\xi^2)\boldsymbol{u}_i, \tag{20}$$

其中，膜矩阵 $\boldsymbol{M}_i$ 和弯曲矩阵 $\boldsymbol{D}_i$ 为

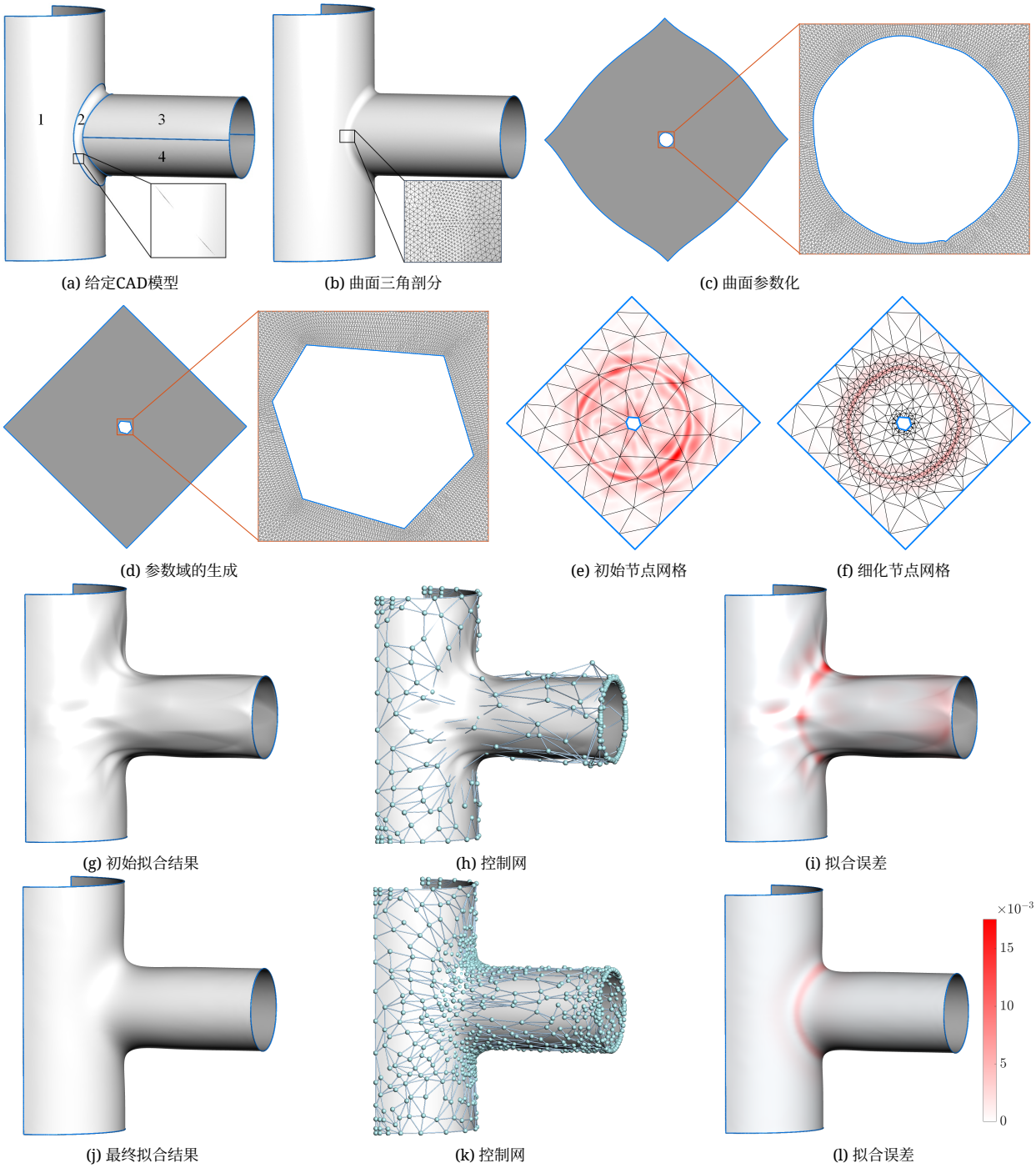
$$\boldsymbol{M}_i = [B_{i,1}\hat{\boldsymbol{a}}_1, \quad B_{i,2}\hat{\boldsymbol{a}}_2, \quad B_{i,2}\hat{\boldsymbol{a}}_1 + B_{i,1}\hat{\boldsymbol{a}}_2]^T, \quad \boldsymbol{D}_i = [\boldsymbol{b}^i_{m11}, \quad \boldsymbol{b}^i_{m22}, \quad 2\boldsymbol{b}^i_{m12}]^T, \tag{21}$$

其中$B_{i,\alpha} = {}_{B_i(\xi^1,\xi^2)\ \xi^\alpha}$ 以及

$$\boldsymbol{b}^i_{m\alpha\beta} = \frac{1}{\|\hat{\boldsymbol{a}}_1\times\hat{\boldsymbol{a}}_2\|}\left[\frac{\partial \hat{\boldsymbol{a}}_\alpha}{\partial\xi^\beta}\cdot\hat{\boldsymbol{a}}_3\frac{\partial B_i}{\partial\xi^1}(\hat{\boldsymbol{a}}_2\times\hat{\boldsymbol{a}}_3) + \frac{\partial B_i}{\partial\xi^2}(\hat{\boldsymbol{a}}_3\times\hat{\boldsymbol{a}}_1) - \frac{\partial B_i}{\partial\xi^1}\left(\hat{\boldsymbol{a}}_2\times\frac{\partial \hat{\boldsymbol{a}}_\alpha}{\partial\xi^\beta}\right) - \frac{\partial B_i}{\partial\xi^2}\left(\frac{\partial \hat{\boldsymbol{a}}_\alpha}{\partial\xi^\beta}\times\hat{\boldsymbol{a}}_1\right)\right] - \frac{\partial^2 B_i}{\partial\xi^{\alpha\beta}}\hat{\boldsymbol{a}}_3. \tag{22}$$

将式（12）和式（20）代入式（19），可得全局线性变形方程

$$\boldsymbol{K}^{lin}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{R}^{lin}. \tag{23}$$



(a) 给定CAD模型 (b) 曲面三角剖分 (c) 曲面参数化

(d) 参数域的生成 (e) 初始节点网格 (f) 细化节点网格

(g) 初始拟合结果 (h) 控制网 (i) 拟合误差

(j) 最终拟合结果 (k) 控制网 (l) 拟合误差

图4：拟合流程。(a)中给出了具有四个裁剪曲面片的模型（边界以蓝色标记），曲面片之间存在间隙；(b)为三角剖分结果；(c)为将(b)中的曲面网格映射到平面网格的结果；(d)为通过简化(c)中的边界并将网格映射到参数域后得到的参数域边界（以蓝色线段标记）；由均匀分布的节点生成的单个曲面片且无间隙的拟合结果，包括以TCB样条表示的拟合结果(g)、控制网(h)和拟合误差(i)，对应于(e)中的三角剖分结果和归一化拟合误差分布；由细化节点生成的最终拟合结果，包括以TCB样条表示的拟合结果(j)、控制网(k)和拟合误差(l)，对应于(f)中的三角剖分结果和归一化拟合误差分布。

5. 基于 TCB 样条的重新参数化

在本节中，我们采用基于TCB样条的线性最小二乘拟合方法，对由多个（经过裁剪的）非均匀有理B样条曲面片组成的薄壳中面进行重建。重建后的曲面是一个单一的TCB样条曲面，在整个曲面上至少具有C^1连续性，因此适用于KL壳体分析。我们将首先概述拟合算法，然后详细介绍各个步骤。

5.1. 算法概述

样条曲面拟合是计算机图形学和计算机辅助设计等众多应用领域中的一项基础问题。在我们的应用中，我们试图寻找一个能够良好逼近输入壳体模型中面的 TCB 样条曲面。在初始输入中，中面可能由多个存在不理想间隙和重叠的裁剪 NURBS 曲面片组成。我们假设，如果不考虑曲面片之间的间隙和重叠，则该中面在拓扑上等价于一个具有有限个孔洞的圆盘；参见图 4 (a) 中由四个裁剪 NURBS 曲面片组成的管道接头模型。我们的输出是一个单个曲面片，具有水密性、相容性和全局C^1连续性的 TCB 样条曲面，可直接用于分析。

作为预处理，如果面片界面之间存在间隙或重叠，则使用 CADfix [62] 等商业软件修复输入中面。随后使用 Gmsh 软件 [63]将修复后的曲面转换为有效且相容的三角网格 $\mathcal{M}_0$；三角网格示例见图 4(b)。最后，在该三角网格上执行我们的曲面拟合，其顶点从输入中面采样得到。

传统的基于样条的曲面拟合从估计参数开始，即确定网格上各顶点的参数值。此过程也称为网格参数化。具体而言，三角网格 $\mathcal{M}_0$ 被映射到指定的参数域，使得每个顶点 $\boldsymbol{x}_i \in \mathcal{M}_0$ 都与二维参数域中的一个参数点 $\boldsymbol{p}_i$ 相关联。预先指定的参数域通常为正方形 [38, 64, 48]。随后，在参数域上放置一组节点，以计算一组样条基函数。设$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{t})$为根据式（2）定义在这些节点上的重构 TCB样条曲面。然后，我们使用欧几里得距离 $e_i = \|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{S}(\boldsymbol{p}_i)\|$（称为$\boldsymbol{x}_i$的拟合误差）来衡量重构结果与输入网格之间的距离。随后，可以通过以下线性最小二乘意义下最小化三角网格与样条曲面之间的拟合误差，求得控制点 $\{\boldsymbol{c}_j\}$：

$$\min_{\boldsymbol{c}_j} \sum_{\boldsymbol{x}_i \in \mathcal{M}_0} e_i = \min_{\boldsymbol{c}_j} \sum_{\boldsymbol{x}_i \in \mathcal{M}_0} \| \boldsymbol{x}_i - \sum_j B_j(\boldsymbol{p}_i)\boldsymbol{c}_j \|. \tag{24}$$

我们的拟合方法遵循上述传统的三步流程，即参数化、节点布置和最小二乘最小化。

对于样条拟合，参数化至少需要满足双射条件。此外，参数化还应具有较低的角度与面积畸变，这对于后续步骤中的高质量拟合可能至关重要 [64]。然而，在本文的应用场景中，由给定中面离散化得到的三角网格在形状上可能并非天然的四边形。为了避免参数化过程中产生较大的角度与面积畸变，对于这些复杂模型，人工指定参数域可能颇具挑战性。值得注意的是，TCB样条能够适用于一般的多边形域。得益于TCB样条的这一灵活性，自然可以考虑对三角网格进行自由边界参数化 [65], ，在不约束二维参数域整体形状的情况下，使映射的局部几何畸变最小化；参见图4(c)。我们可以将自由边界参数化所形成的二维多边形区域作为TCB样条定义的参数域。然而，这种直接的方法会在后续的节点布置阶段沿碎片化的边界引入冗余节点，从而导致过拟合。因此，我们进一步简化多边形区域，以减少边的数量，并相应地更新参数化，同时尽可能保留参数域的形状；参见图4(d)。第5.2节将详细介绍参数化和参数域生成的具体过程。

节点分布对于恢复三角网格的底层形状也至关重要。不合理的节点分布可能导致重建曲面的形状与输入显著不同。由于通常无法预先得知恢复底层形状需要多少个节点，我们采用由拟合误差驱动的节点布置策略来增加节点数量、调整节点分布，并迭代求解线性最小二乘问题，从而逐步提升重建质量。我们首先均匀布置节点。

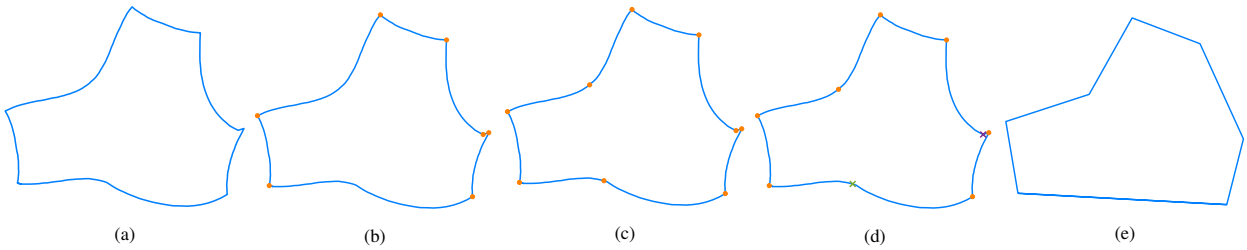


图 5：参数域生成的一个简单示例。(a) $\mathcal{M}_1$，包含由 173 个顶点组成的单个边界；(b) 角点（橙色实心圆点）；(c) 通过步骤 2 选出的更多角点；(d) 分别通过步骤 3（绿色叉号标记）和步骤 4（紫色叉号标记）选出的冗余角点；(e) 最终包含 7 个角点的参数域。

在生成的多边形域上构造 TCB样条基函数。每个基函数都可以关联一个控制点。然后，我们通过求解上述线性最小二乘问题来优化控制点的位置；基于均匀分布节点得到的拟合曲面见图 4(e、g-i)。曲面拟合的细节见第5节第 5.3 节。随后，在拟合误差较大的区域添加更多节点。自适应节点布置算法详见第 5.4 节。通过在细化后的节点上求解线性最小二乘拟合问题，我们获得了质量更高的重建结果。我们重复进行自适应节点细化和曲面拟合，直到达到所需的迭代次数，或拟合误差小于预设阈值。图 4 展示了算法流程的概述。

5.2. 网格参数化

传统的样条拟合方法会在预先指定的简单域上计算参数化。相比之下，我们将三角网格参数化到一个适配给定网格的一般多边形域上。该参数化是双射的，且自然具有较低的角度与面积畸变。我们的方法包含三个步骤：自由边界参数化、参数域生成和重新参数化。

自由边界参数化 网格参数化的质量对样条拟合至关重要。例如，如果网格参数化不是双射的，则得到的拟合曲面将发生折叠。网格参数化中的较大畸变会使后续的节点分布更加困难，也难以恢复输入曲面的几何细节。大多数网格参数化方法通过最小化角度偏差、面积偏差或两者某种组合来计算畸变 [65]。关于三角网格参数化的全面综述，请参阅 [66]。对边界施加约束会减少最小化过程中的自由度，从而导致参数化产生不必要的额外畸变。自由边界参数化方法不将边界限制为某种指定形状。通过允许优化过程调整边界，这些方法能够更有效地减少畸变。本文采用单纯复形增广框架（简称 SCAF）方法 [67], , 该方法已被证明能够高效地为复杂模型获得双射且低畸变的参数化结果。随后，将三角网格 $\mathcal{M}_0$ 展平为二维离散网格，记为 $\mathcal{M}_1$；见图 4(c)。在不存在歧义的情况下，我们也使用 $\mathcal{M}_1$ 表示平面三角网格 $\mathcal{M}_1$所覆盖的域。此外，我们将从 $\mathcal{M}_0$ 到 $\mathcal{M}_1$ 的映射称为 ϕ_0。

参数域生成。与传统 B 样条曲面类似，为了保证基函数的单位分解性质，对于 k 次 TCB样条，必须在参数域边界的每条边上至少放置 k 个节点 [15]。直接将二维域 $\mathcal{M}_1$ 作为参数域，会在边界上引入过多冗余节点。因此，控制点的数量将远远多于边界顶点的数量，从而导致曲面拟合过程中出现过拟合。为避免过拟合，我们生成一个多边形参数域 Ω，其形状与二维域 $\mathcal{M}_1$相似，但边界上的顶点数量要少得多。不失一般性，我们假设二维域 $\mathcal{M}_1$ 由单一边界 Q 所围成，该边界由 n + 1 个按逆时针顺序排列的顶点 $Q = \{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$ 定义。我们将折线 $q_i, q_{i+1}, \cdots, q_{j-1}, q_j$ 称为边界线段 $[q_i, q_j]$。下标按模 n + 1 运算解释，即顶点 q_{n+1} 对应于顶点 q_0。我们将每条线段 q_iq_{i+1} 上的离散曲率变化定义为 $\kappa_i = \frac{1}{2}\|q_iq_{i+1}\|(|\kappa(q_i)| + |\kappa(q_{i+1})|)$，其中 $|\kappa(q_i)| = \frac{2\theta_i}{\|q_{i-1}q_i\| + \|q_iq_{i+1}\|}$ 表示 q_i 处离散曲率的绝对值，而 $\theta_i = |\pi - \angle q_{i-1}q_iq_{i+1}|$ 表示边界 Q 在 q_i [68]处的无符号转角。累积曲率变化

边界线段 $[\boldsymbol{q}_i$ 的 $\boldsymbol{q}_j]$ 定义为 $\kappa[\boldsymbol{q}_i, \boldsymbol{q}_j] = \sum_{j\,k=i}\kappa_k$。接下来，我们通过以下四个步骤选取少量顶点作为 Ω 的角点：

步骤 1. 对于$\boldsymbol{Q}$的每个顶点$\boldsymbol{q}_i$，若 $\theta_i > \delta_1$，则将$\boldsymbol{q}_i$ 纳入 Ω 的角点列表；见图 5(b)。

步骤 2. 对于步骤 1 选出的每对相邻角点$\boldsymbol{q}_i$和$\boldsymbol{q}_j$。若 $\kappa[\boldsymbol{q}_i、\boldsymbol{q}_j] < \gamma$，则不再将$\boldsymbol{q}_i$与$\boldsymbol{q}_j$之间的其他顶点选作角点。否则，将$\boldsymbol{q}_i$与$\boldsymbol{q}_j$之间使$|\kappa[\boldsymbol{q}_i、\boldsymbol{q}_s] - \kappa[\boldsymbol{q}_s、\boldsymbol{q}_j]|$最小的顶点$\boldsymbol{q}_s$纳入 Ω 的角点列表。随后递归处理两条新的边界线段 $[\boldsymbol{q}_i、\boldsymbol{q}_s]$和 $[\boldsymbol{q}_s、\boldsymbol{q}_j]$；见图 5(c)。

步骤 3. 对于步骤 2 得到的每对相邻角点$\boldsymbol{q}_i$和$\boldsymbol{q}_j$，若边界线段 $[\boldsymbol{q}_i、\boldsymbol{q}_j]$包含的顶点少于$m$ 个，且 θ_s 是 α_i 与 α_j之间的较小夹角，则从角点列表中移除$\boldsymbol{p}_s$；见图 5(d)。

步骤 4。对于步骤 3 得到的每三个连续角点 $\boldsymbol{p}_i、\boldsymbol{p}_j$ 和$\boldsymbol{p}_k$，如果$\boldsymbol{p}_i、\boldsymbol{p}_j$ 和$\boldsymbol{p}_k$ 近似共线，即 $|\pi - \angle\boldsymbol{p}_i\boldsymbol{p}_j\boldsymbol{p}_k| < \delta_2$，则从角点列表中移除$\boldsymbol{p}_j$；参见图 5(d)。

直观而言，在步骤 1 中，选择转角较大的顶点作为参数域 Ω 的角点。步骤 1 中选取的两个连续角点所形成的边界线段可能存在轻微振荡。在步骤 2 中，根据离散曲率分布，将更多域边界上的顶点纳入角点，以便更好地保留 $\mathcal{M}_1$ 的形状。步骤 3–4 则移除不会影响参数域形状的冗余角点。我们使用四个由用户指定的参数 δ_1、γ、m 和 δ_2 来控制参数域的生成。在我们的应用中，减少参数域中的角点数量并避免曲面拟合过程中出现冗余节点是理想的选择。在所有实验中，我们均采用参数 $\delta_1 = 10°$、$\gamma = \pi/2$、$m = 3$ 和 $\delta_2 = 5°$，由此生成的参数域 Ω 能够以较少的顶点很好地逼近原始域 $\mathcal{M}_1$；见图 5(e)。

重新参数化。现在，我们构造一个从 $\mathcal{M}_1$ 到 Ω 的双射映射 ϕ_1。从三维网格 $\mathcal{M}_0$ 到二维参数域 Ω 的参数化可以通过 ϕ_0 和 ϕ_1的复合来计算。为了保证 $\mathcal{M}_1$ 与 Ω 之间存在双射映射，我们首先必须确保 $\mathcal{M}_1$ 的边界与 Ω 的边界之间存在双射映射。为此，使用弦长参数化方法 [69]，将 Ω 的两个相邻角点 $\boldsymbol{q}_i$和 $\boldsymbol{q}_j$之间的 $\mathcal{M}_1$边界顶点映射到线段 $\boldsymbol{q}_i\boldsymbol{q}_j$上。然后，按照 [16]中的方法，使用均值映射 [70], 将 $\mathcal{M}_1$ 的内部顶点映射到 Ω 的内部；见图 4(c)。已有研究证明，当源多边形和目标多边形足够接近时，均值映射是双射的。在本文的研究背景下，$\mathcal{M}_1$ 与 Ω 的形状几乎相同；因此，$\mathcal{M}_1$ 与 Ω 之间的均值映射 ϕ_1 接近恒等映射，而恒等映射是双射映射，且畸变较小。尽管无法保证 ϕ_1 是双射映射，但在数值实验中，我们从未发现参数化过程中出现重叠。如果在任何情况下，参数化 ϕ_1 的部分区域发生重叠，我们可以按照 [16] 中的方法，在 Ω 和 $\mathcal{M}_1$ 之间构造足够多的中间域，并依次将一个中间域映射到另一个中间域，从而在数值上获得双射复合映射。

5.3. 线性最小二乘曲面拟合

给定参数域后，在定义 TCB样条基函数之前，我们需要放置一组节点。一般来说，节点分布应根据几何进行调整，以实现更紧凑的曲面表示 [48]。然而，在基于样条的拟合中，目前没有有效且直观的方法来构造节点分布。为求简便，我们首先按照第 3.3 节所述，在 Ω 上生成一组均匀分布的节点；初始均匀间距节点分布的示例见图 4(e)。关于节点细化的讨论将留到第5.4节。

给定参数域和节点集后，我们使用第 3.2 节中的 LTP 生成次数为k 的 t-config 族，并定义次数为k 的 TCB样条基函数。在大多数拟合过程中，通常通过按最小二乘意义最小化式 (24) 所示的拟合误差，一次性计算样条的所有控制点。相比之下，为了更好地捕捉模型的边界特征，我们先进行边界曲线拟合，然后在固定边界控制点的条件下完成整个曲面拟合。

$\mathcal{M}_0$ 的顶点集合是边界顶点 $\mathcal{M}_0^B$ 集合与内部顶点 $\mathcal{M}_0^I$集合的并集。然后，通过最小化以下线性最小二乘能量，我们得到边界控制点$\boldsymbol{c}_I^B$，其中$I \in \mathcal{I}^b{}_k$。

$$E_B(\{\boldsymbol{c}_I^B | I \in \mathcal{I}_k^b\}) = \sum_{\boldsymbol{x}_i \in \mathcal{M}_0^B} \| \boldsymbol{x}_i - \sum_{I \in \mathcal{I}_k^b} B_I(\boldsymbol{p}_i)\boldsymbol{c}_I \|, \tag{25}$$

其中，$\boldsymbol{p}_i$ 是$\boldsymbol{x}_i$的参数点，$\mathcal{I}^b{}_k \subset \mathcal{I}_k$ 在参数域边界上具有所有节点。接下来，我们考虑内部控制点的计算。曲面拟合中的一个常见问题是，得到的曲面可能会出现不必要的波动。通过在计算内部控制点的线性最小二乘能量中增加一个额外的公平项，可以对重建曲面进行平滑处理。在此，我们采用常用的薄板能量泛函作为公平项：

$$E_{fair}(\boldsymbol{S}) = \int \|\boldsymbol{S}''(\boldsymbol{t})\|^2 d\boldsymbol{t}. \tag{26}$$

因此，我们通过求解以下加权线性最小二乘问题来计算 TCB样条曲面的内部控制点：

$$E_I(\{\boldsymbol{c}_I^I | I \in \mathcal{I}_k \setminus \mathcal{I}_k^b\}) = \sum_{\boldsymbol{x}_i \in \mathcal{M}_0^I} w_i \| \boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{S}(\boldsymbol{p}_i) \| + \lambda E_{fair}(\boldsymbol{S}),$$

其中，w_i 是$\boldsymbol{x}_i$的点拟合权重，$\boldsymbol{p}_i$ 是$\boldsymbol{x}_i$的参数值，λ 是公平权重。较大的 λ 会提高逼近曲面的公平性，同时也会增大拟合误差。在所有示例中，公平权重均设为 $\lambda = 0.01$。在初始拟合迭代中，我们为所有顶点设置相同的点拟合权重，即$w_i = 1$。我们首先为所有顶点赋予相同的点拟合权重，其中$w_i = 1$，直到曲面拟合过程达到所需的迭代次数，或最大拟合误差小于预设阈值。然而，使用均匀权重时，过渡区域中的拟合误差（例如图 4(a) 中的区域 2）可能明显高于其他区域。为使过渡区域的结果更平滑，并进一步减小其余区域的拟合误差，我们通过设置非均匀权重增加一步拟合迭代。具体而言，如果对应点$\boldsymbol{x}_i$ 位于过渡区域之外，且其拟合误差在非过渡区域的点中位列最高的 5%，则将$w_i = 1$设为 000。

5.4. 自适应节点细化

在我们的方法中，拟合阶段通过节点细化来提高重建曲面的质量，分析阶段则通过节点细化来增加自由度。在曲面拟合阶段，节点细化由拟合误差分布自适应控制。令 $\mathcal{T}_s$ 表示第s次拟合迭代的节点网格，其中$s = 1$表示初始拟合迭代。在初始拟合步骤中，节点网格 $\mathcal{T}_1$ 只是一个均匀分布的三角网格。每次拟合步骤后，我们可以测量每个顶点$\boldsymbol{x}_j$的拟合误差e_j。根据第s次拟合迭代得到的拟合误差，节点网格 $\mathcal{T}_s$按照以下四个步骤自适应细化为 $\mathcal{T}_{s+1}$：

步骤 1. 计算节点网格 $\mathcal{T}_s$ 中每个面T_s的拟合误差$\rho_{s,i}$，计算方式为$\rho_{s,i} = |\text{Area}|(T_{s,i})\bar{\rho}_{s,i}$，其中 Area($T_{s,i}$) 是三角形$T_s$的面积，$\bar{\rho}_{s,i}$ 是参数点位于T_s内的顶点拟合误差的平均值。

步骤 2。 收集三角形 $T_{s,\,i}$ 误差为 $\rho_{s,\,i} > \alpha^\star$ 最大值为 $_i$ $\{\rho_{s,i}\}$的外心，并记为 V^s。在我们的实验中，我们通过经验将常数 $\alpha^\star$ 选为 $\alpha^\star = 0.1$。

步骤 3. $\mathcal{T}_{s+1}$ 通过将V^s 中的点插入节点网格 $\mathcal{T}_s$ 获得，其中将 Voronoi 单元与参数域边界相交的新添加节点投影到相应的边界上。

步骤 4. 通过固定 $\mathcal{T}_s$ 中已有的节点，并采用两步 Lloyd松弛调整新添加的节点，进一步对 $\mathcal{T}_{s+1}$ 的顶点分布进行微调，其中域边界上的节点被限制为沿边界移动。

随后，我们可以在细化后的节点集上求解拟合问题，从而获得质量更高的重建结果。我们重复进行节点网格细化和曲面拟合，直至达到所需的迭代次数，或最大拟合误差低于预先设定的阈值。还值得指出的是，由于 TCB样条基具有局部支撑性质，为提高计算效率，我们在每次拟合迭代中只需更新涉及新添加节点的 TCB样条基计算。图 4(e-f) 分别展示了初始节点网格和细化后的网格，可以看到，在拟合误差较大的区域，三角形得到了局部细化。

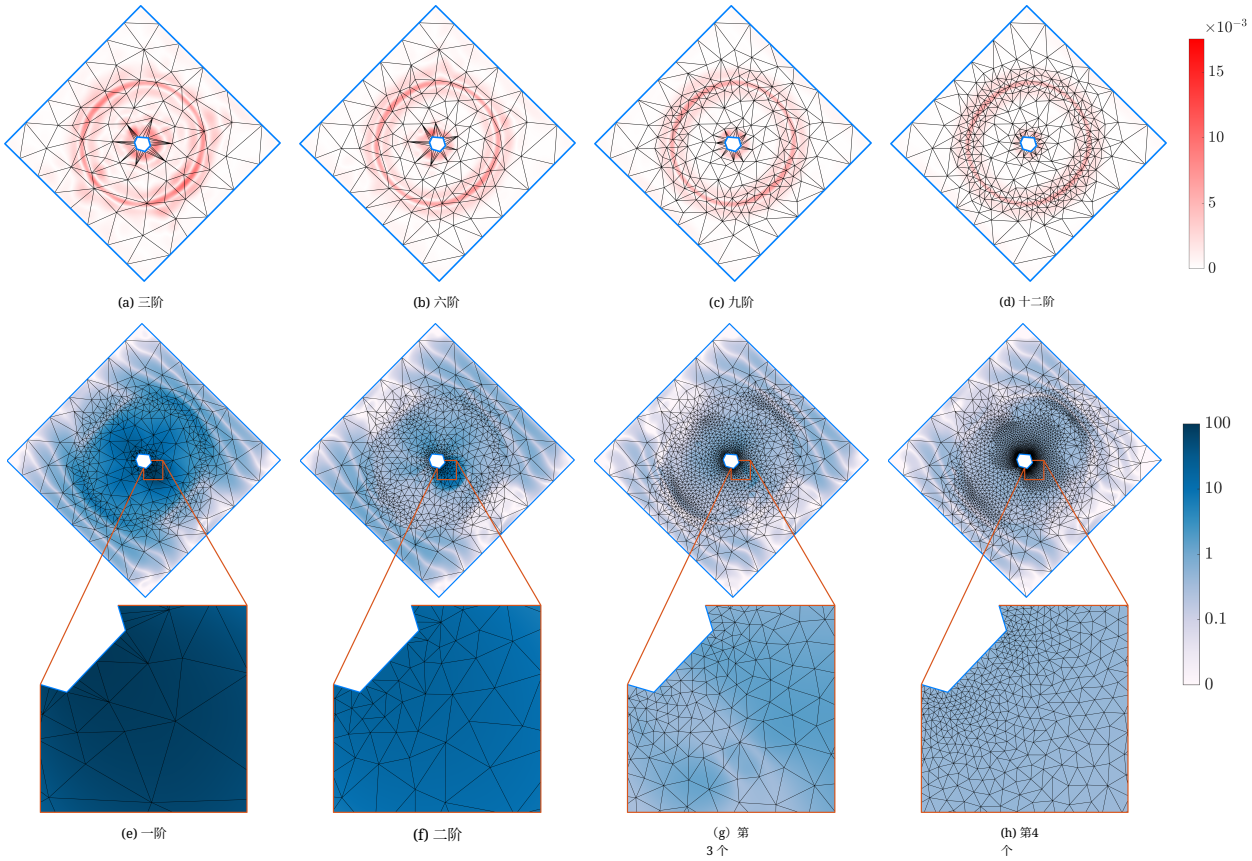


图 6：管道交汇处的节点细化过程。拟合阶段在第 (a) 3、(b) 6、(c) 9 和 (d) 12 个网格细化步骤时的节点分布及以颜色编码的归一化拟合误差；(e-g) 分析阶段在各细化步骤中的节点分布及以颜色编码的位移误差。在 (e-g) 中，色条采用非线性映射，以便更好地表示微小的位移误差变化。

如图 4(g-l) 所示，细化后的节点网格上的重建几何体质量显著提高。此外，图 6(a-d) 展示了选定的中间迭代步骤中的节点网格。

在壳体分析阶段，节点网格的细化方式与曲面拟合阶段类似。由于通常未知给定模型的精确位移，因此将足够精细的节点网格上获得的结果作为“精确解”。因此，我们针对三角网格的每个顶点d_j，测量其位移$\boldsymbol{x}_j$相对于壳体精确位移的误差。根据上述四个步骤，利用第s次分析迭代得到的位移误差，对节点网格$\mathcal{T}_s$进行自适应细化，使其达到$\mathcal{T}_{s+1}$，其中步骤 1–2 略作修改如下：

步骤 1*. 对于节点网格$\mathcal{T}_s$的每个面$T_{s,i}$，计算参数点位于$T_{s,i}$中的顶点的平均位移误差和最大位移误差，并分别记为$\bar{\delta}_{s,i}$和$\hat{\delta}_{s,i}$。

步骤 2*. 找出$\mathcal{T}_s$中的三角形，其中每个三角形的平均位移误差$\bar{\delta}_{s,i} > \eta_1 \min_j \bar{\delta}_{s,j} + (1-\eta_1)\max_j \bar{\delta}_{s,j}$或最大位移误差$\hat{\delta}_{s,i} > \eta_2 \min_j \hat{\delta}_{s,j} + (1-\eta_2)\max_j \hat{\delta}_{s,j}$其中$\eta_1$和$\eta_2$是用于调整不同问题中细化自适应性的参数。$V^s$表示所选三角形外心的集合。

再次通过局部更新包含新添加节点的 TCB 样条，并求解采用均匀权重的加权线性最小二乘问题，使几何表示在细化后的节点网格上进行更新，从而拟合第5.3节中获得的曲面。如果最大位移误差小于预设容差，或者迭代次数达到.....

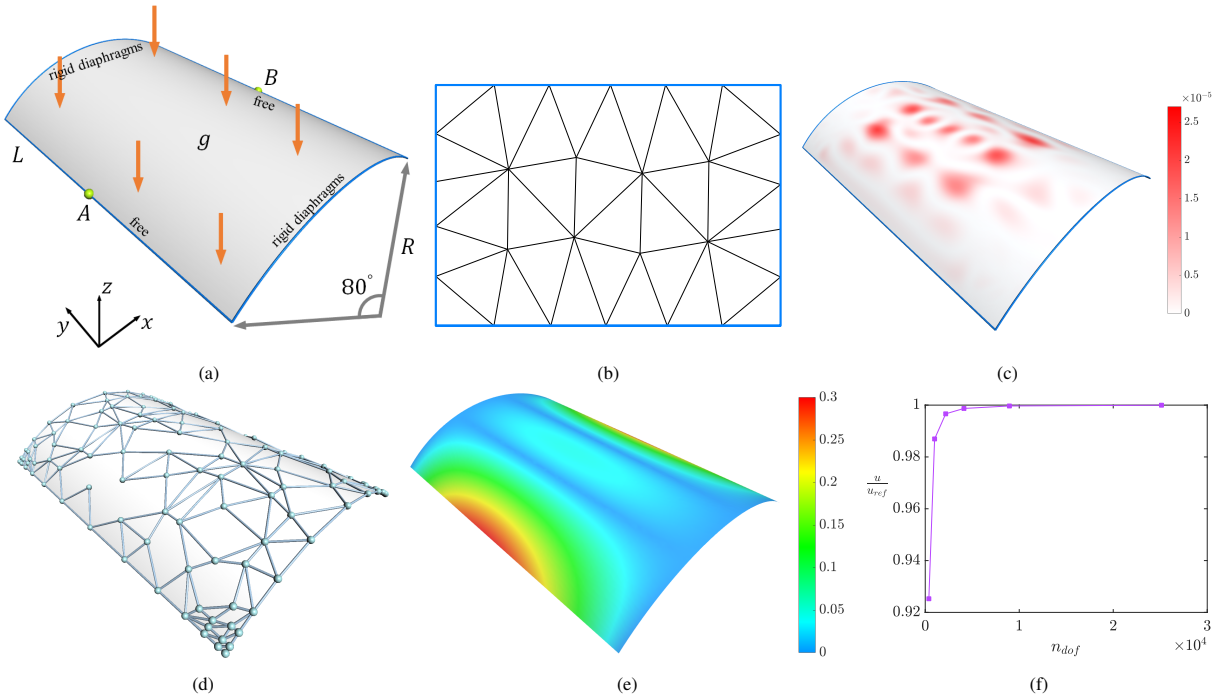


图 7：Scordelis-Lo屋顶。(a) Scordelis-Lo屋顶的几何；(b-d) 拟合结果的节点网格、拟合误差和控制网；(e) 最终分析的位移幅值；以及 (f) 归一化位移的收敛情况。

超过指定步数后，分析阶段的节点网格细化即告终止。图6(e-h)展示了自适应节点细化过程中管道交汇处参数域上的节点网格及以颜色编码的位移误差，分析问题的定义见第6.2.1节。

注 1. 如 *[71]* 所述，针对等几何分析实现自动自适应细化通常颇具挑战性。此处，我们仅给出一种直接的细化方法来求解壳体问题，以展示 *TCB*样条在自适应细化方面的灵活性。未来，我们期望将更复杂的自适应细化方法 *[72]*，（例如基于位移梯度信息或后验误差估计的技术）纳入我们的方法中。

6. 数值算例

本节将应用所提出的框架求解包含线性变形和非线性变形的薄壳问题。随后，通过两个由多个裁剪 NURBS 曲面片组成的几何非线性 KL 壳，进一步展示基于 TCB 样条的表示与分析框架的性能和灵活性。在所有示例中，我们均使用三次 TCB 样条基函数进行建模和分析。请注意，沿节点线对整个参数域进行三角剖分后，每个三角形单元上的 TCB 样条都是多项式 [15]。对每个单元应用三角形单点积分公式进行曲面拟合中的积分，从而精确计算三次多项式二阶导数的积分值。对于分析中的积分，我们在每个单元上使用 25 点积分公式 [73]，以实现对有理多项式积分的最高 10 次精度近似。为增强拟合结果的可视化效果，我们在所有示例中均采用归一化拟合误差。具体而言，对于 $\mathcal{M}_0$ 中的每个顶点$\boldsymbol{x}_i$，其归一化拟合误差记为 $\tilde{e}_i = e_i/d$，其中e_i 表示顶点$\boldsymbol{x}_i$的拟合误差，而d 表示包围中面的包围盒的对角线长度。这种归一化方式考虑了所分析曲面的尺寸，使不同模型之间的拟合误差比较更有意义。

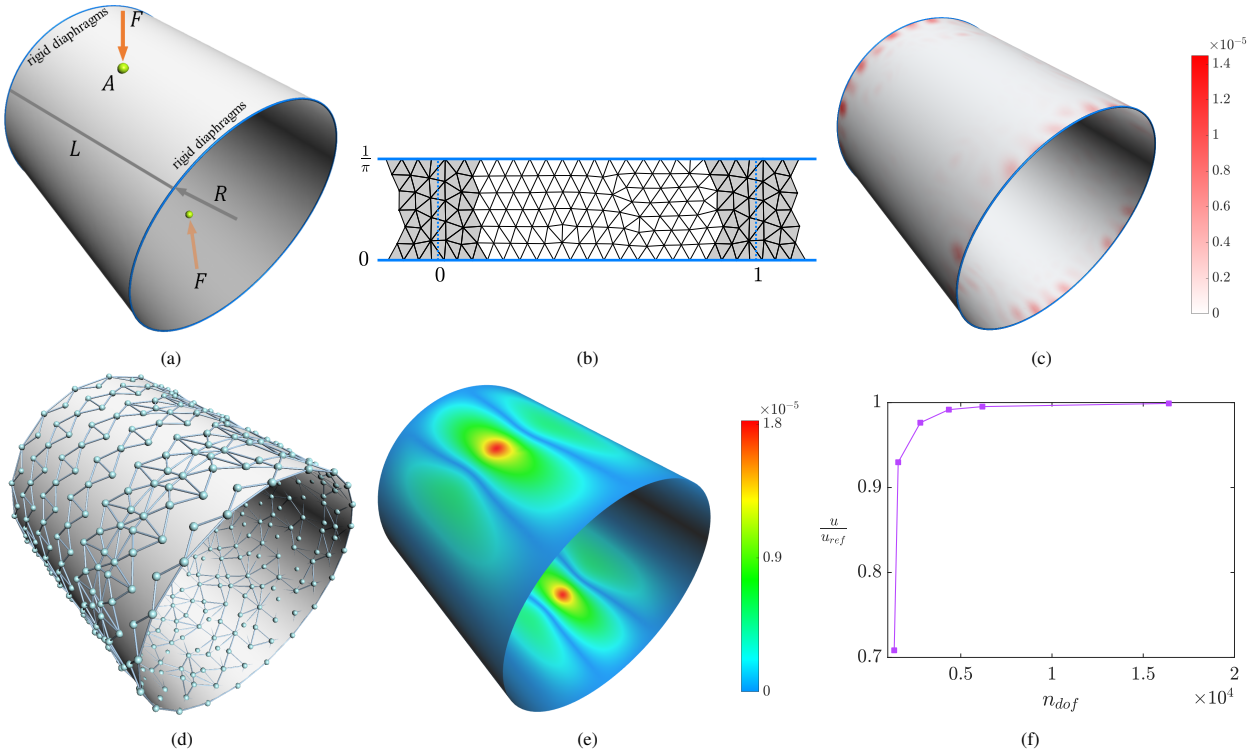


图8：受压圆柱壳。(a) 受压圆柱壳的几何；(b-d) 拟合结果的节点网格、拟合误差和控制网；(e) 最终分析得到的位移幅值；(f) 归一化位移的收敛情况。

6.1. 线性问题

为检验框架在复杂应变状态下的精度，我们首先将其应用于两个几何线性问题，即 Scordelis-Lo屋顶和带隔板的受压圆柱壳。所有问题中的位移都很小，因此采用几何线性计算。请注意，这些问题中的壳体形状相对简单，且参数域自然。为简化起见，我们在手动指定的参数域上将这些形状重新建模为单个 TCB 样条曲面片，不考虑形状对称性。

*6.1.1. Scordelis-Lo*屋顶

Scordelis-Lo屋顶是一段圆柱壳，两端由刚性隔板支撑，并承受单位面积均匀重力载荷$g = 90.0$ N；见图7(a)。几何参数为半径$R = 25.0$ mm、长度$L = 50.0$ mm、厚度$t = 0.25$ m。材料属性为泊松比 $\nu = 0.0$和杨氏模量$E = 4.32 \times 10^8$ N/mm^2。中点（即图7(a)中的A 和B）竖向位移的参考值$u_{ref} = 0.3006$见文献 [4, 37]。

由于屋顶模型为四边形且形状简单，我们可以将其展开为一个矩形区域。为重新建模这一几何形状，我们首先在矩形区域上定义TCB样条基函数。图7(b-d)展示了重新建模后屋顶的均匀分布节点网格、归一化拟合误差和控制网。正如我们所见，对于这个简单的示例，无需自适应细化便已获得良好的拟合结果。因此，在分析阶段，我们直接根据图7(b)中的节点网格进行自适应细化。在自适应细化中，我们将参数设为 $\eta_1 = 0.8$和 $\eta_2 = 0.8$。经过数次节点细化迭代后，我们得到收敛结果，图7(e)以颜色编码显示了竖向位移。此外，点A 处的竖向位移收敛至参考值$u_{ref} = 0.3006$；图7(f)绘出了归一化位移随自由度数量（n^{dof}）的变化曲线。

6.1.2. 受压圆柱壳

在壳体障碍测试的第二个问题——受压圆柱壳中，圆柱壳两端由刚性隔板支撑，并在中部承受一对方向相反的径向点载荷$F = 1.0$ N；见图8(a)。其几何参数为半径$R = 300.0$ mm、长度$L = 600.0$ mm和厚度$t = 3.0$ mm。材料属性为泊松比 $\nu = 0.3$和杨氏模量$E = 3.0 \times 10^6$ N/mm^2。参考解$u_{ref} = 1.8248 \times 10^{-5}$ 表示集中点载荷 [74]作用下的径向位移；见图8(a)中的点A 。

我们可以自然地将圆柱模型展开并缩放至矩形区域 $\Omega = [0, 1] \times [0, 1/\pi]$。为了表示圆柱模型，我们在 Ω 上定义一个周期性 TCB样条曲面：通过在周期接口（即左右边界）重复节点及其对应的 LTP 来构造该曲面。节点网格示例如图 8(b) 所示，其中 LTP 中重复的初始三角形以灰色填充。基于周期性节点，重建的 TCB样条曲面具有重复的控制点，且拟合误差很小，见图 8(c&d)。在分析阶段进行自适应细化时，通过设置 $\eta_1 = 0.4$ 和 $\eta_2 = 0.6$ 来细化节点网格。经过数次节点细化迭代后，我们得到收敛结果，如图 8(e) 所示，其中径向位移以颜色编码方式显示。归一化径向位移随细化迭代中的自由度数量变化的收敛曲线如图 8(f) 所示，收敛解在点 A 处为 1.8245×10^{-5} ，略小于参考值 u^{ref}。

6.2. 非线性问题

6.2.1. 管道交汇处

在本例中，我们考虑由四个裁剪片组成的管道接头模型，如图 4(a) 所示。通过引入两个价为 6 的额外奇异点，已成功地使用单片 AST样条曲面表示了一个形状相似的模型。这里，我们使用单片 TCB样条曲面表示该模型，该曲面定义在一个中间带有六边形孔的四边形多边形区域上，且在参数域内部未引入任何奇异点；参见图 4(d&l)。

我们考虑该模型受到向下载荷 $F = 0.3$ N 的作用，如图 9(a) 所示，模型的外边界受到支撑，其中载荷区域以绿色标记。其参数设置如下：厚度$t = 0.04$ mm，泊松比 $\nu = 0.25$，以及杨氏模量 $E = 2.1 \times 10^5$ N/mm^2。模型在拟合阶段和分析阶段所选迭代过程中的自适应节点网格分别如图 6(a-d) 和图 6(e-h) 所示。模型的位移幅值分别通过图 9(b) 和图 9(c) 中的颜色编码直观表示。在此示例中，我们设置 $\eta_1 = 0.85$ 和 $\eta_2 = 0.85$，并在非线性分析过程中施加 50 个相等的载荷步。图 9(a) 中点 A 处的载荷与位移幅值之间的载荷-挠度曲线绘制于图 9(d) 中，表明结果已收敛。为实现收敛，我们的方法采用了 32, 280 个自由度，而 ASTS-3 [42] 采用了 52, 836 个自由度。需要注意的是，与 [42] 相比，几何模型和载荷区域存在细微差异，这可能导致我们结果的收敛图略有变化；参见图 9(d)。

6.2.2. 前保险杠

为展示我们的方法在实际场景中的通用性和适用性，我们在图 10(a) 中展示了一个汽车前保险杠结构。原始模型由 42 个曲面片组成，包括 14 个双变量五次 NURBS 曲面片和 28 个双变量三次 NURBS 曲面片，共有 5,314 个控制点。我们考虑该模型承受分布载荷 $F = 0.25$ N，并在左右两侧简支，如图 10(b) 所示。参数定义为厚度 $t = 1.5$ mm、泊松比 $\nu = 0.25$，以及杨氏模量 $E = 1.6 \times 10^6$ N/mm^2。

构造了一个带有三个孔洞的多边形域，作为 TCB样条的参数域，见图 10(c)。经过自适应细化后，我们得到一个拟合节点网格的 TCB样条曲面，如图 10(c) 所示。图 10(d-f) 分别展示了拟合曲面、归一化拟合误差和控制网。自适应细化在分析阶段进行，参数为 $\eta_1 = 0.9$ 和 $\eta_2 = 0.9$。施加一个分为 50 个相等载荷步的分布载荷。所得变形几何及其以颜色编码的位移幅值如图 10(g) 所示。此外，我们测量了每个细化节点网格下图 10(b) 中点 A 处的位移幅值。可以观察到，随着节点网格细化，载荷-挠度曲线趋于收敛。

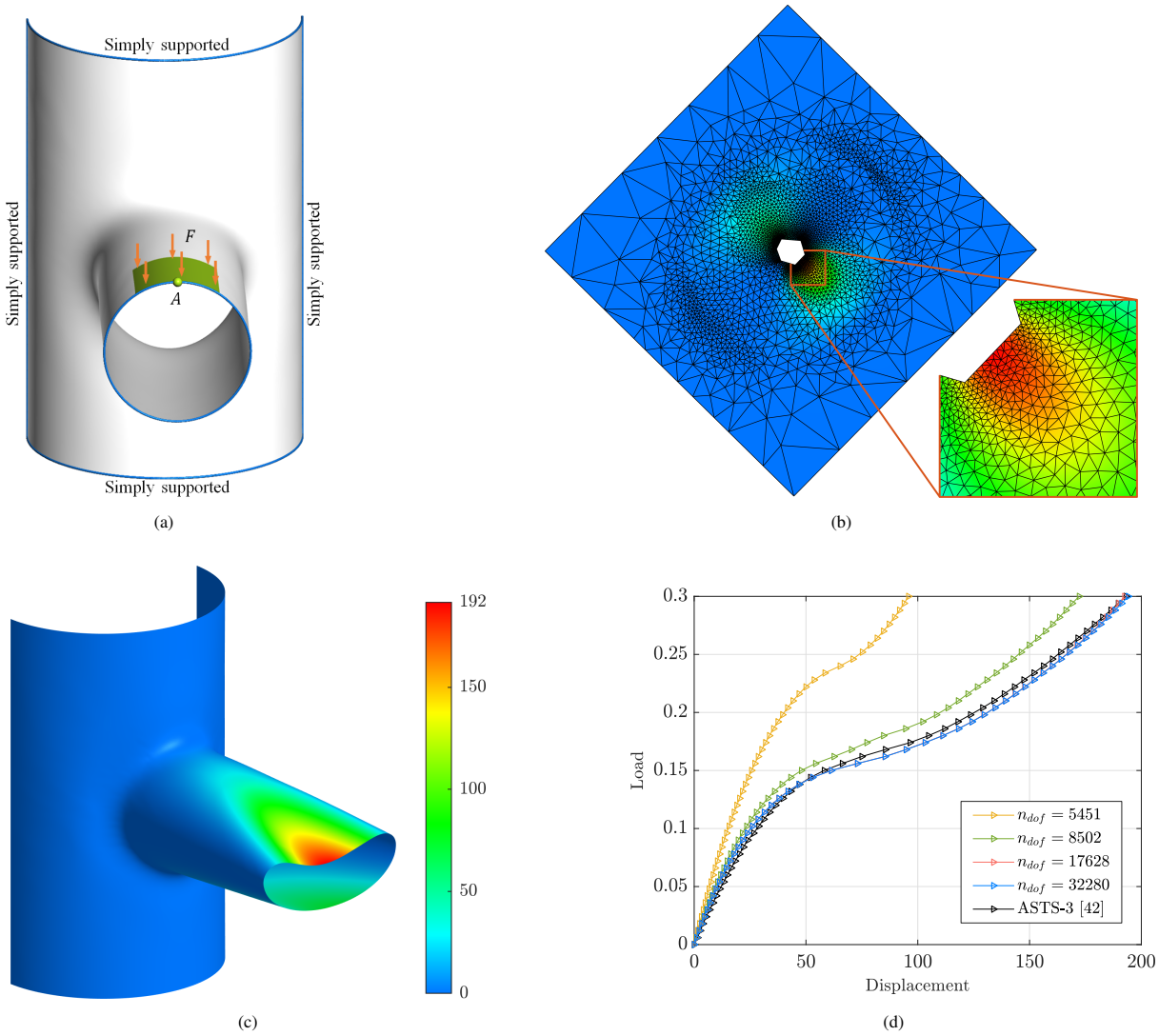
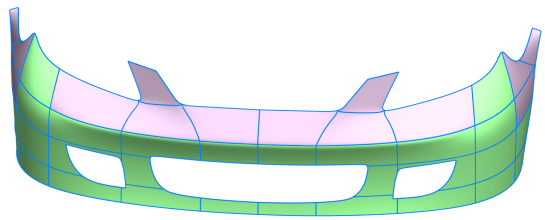


图9：管道交汇壳。(a) 管道交汇处的几何；(b) 和 (c) 分别为最终分析所用的节点网格，以及对应的变形几何（位移幅值以颜色编码）；(d) 载荷-挠度曲线。

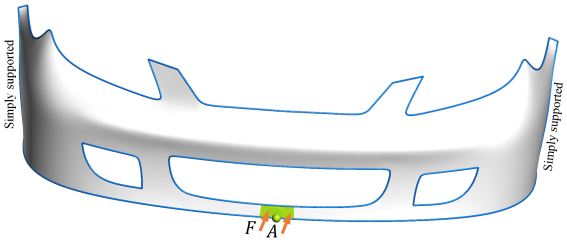
7. 结论

本文在等几何分析框架下，采用TCB样条提出了一种表示和分析复杂几何Kirchhoff–Love壳的新方法。输入的CAD模型可能由多个裁剪NURBS曲面片组成，本文使用线性最小二乘拟合方法将其重新建模为单个TCB样条曲面。TCB样条灵活的局部细化能力使分析更加高效。通过求解若干基准问题（包括线性变形和非线性变形），验证了所提方法的可行性和准确性。此外，通过对管道交汇处和前保险杠进行几何非线性KL壳仿真，进一步展示了所提方法在壳体分析中的适用性。

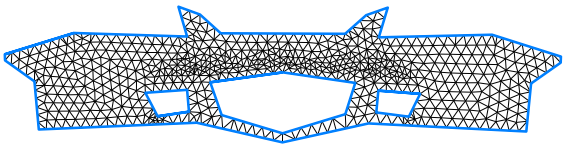
我们当前方案的一个局限是，仅关注在拓扑上与带有限个孔洞的开圆盘同胚的光滑中面。实际应用中的壳体其中面可能具有更一般的拓扑，并且局部包含连续阶数各异的几何特征。因此，我们希望该框架能够处理形状更为一般的壳体。改进方案的一个必要步骤，是将基于TCB样条的拟合方法推广到拓扑和特征更复杂的模型。理论上，



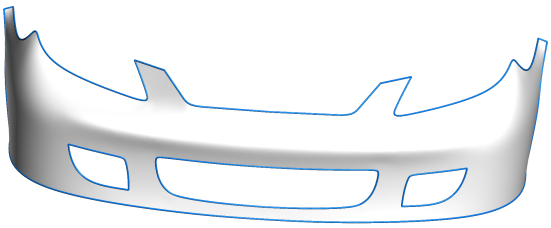
(a)



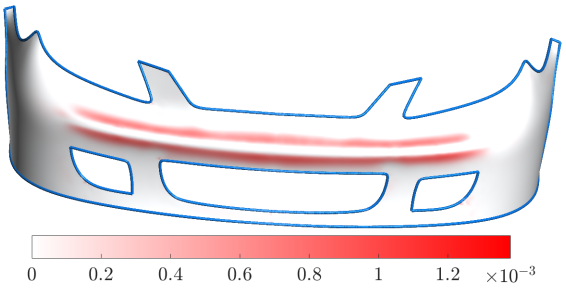
（b）问题几何



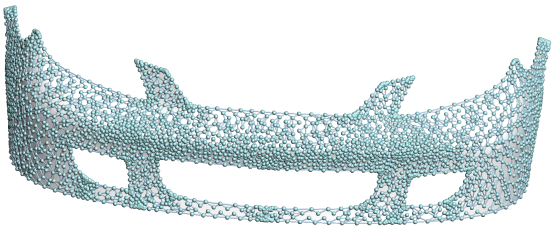
(c)



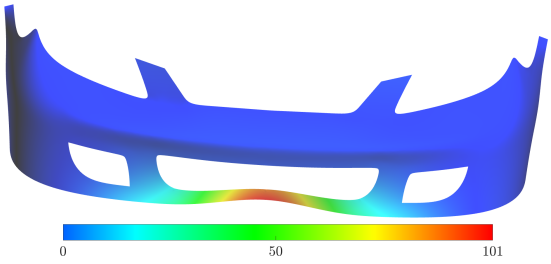
(d)



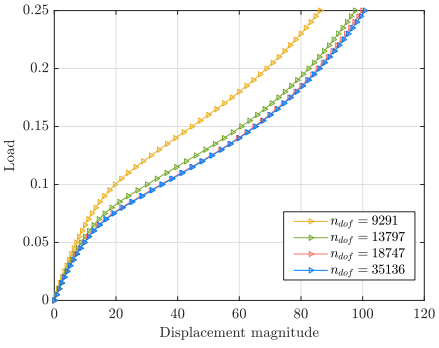
(e)



(f)



(g)



(h)

图10：前保险杠壳体。(a) 给定的 CAD 模型，共有 42 个曲面片，包括 14 个双变量五次 NURBS 曲面片（标记为粉色）和 28 个双变量三次 NURBS 曲面片（标记为绿色），以及 5314 个控制点；(b) 前保险杠的几何、边界条件和施加的分布载荷；(c-f) 最终拟合结果的节点网格、重建曲面、拟合误差和控制网；(g) 最终分析得到的变形几何，位移幅值以颜色编码显示；(h) 载荷-挠度曲线。

在技术上可行，但在实际应用中颇具挑战，因此仍需进一步研究。此外，为了简化处理，我们在重新建模中面时未考虑模型的对称性。通过调整节点的布置方式和控制点更新方法，使重新建模后的形状具有严格的几何对称性，也是一项值得研究的工作。

致谢

Juan Cao 的研究得到国家自然科学基金（编号：62272402）、厦门市青年创新基金（编号：3502Z20206029）和中央高校基本科研业务费专项资金（编号：20720220037）的资助。Zhonggui Chen 的研究得到国家自然科学基金（编号：61972327）和福建省自然科学基金（编号：2022J01001）的资助。Xi- aodong Wei 的研究部分得到国家自然科学基金（编号：12202269）的资助。我们感谢 Angran Li 博士为比较研究提供管道交汇处数据。

参考文献

[1] M. Bischoff, K.-U. Bletzinger, W. A. Wall, E. Ramm，薄壁结构的模型与有限元，载于：《计算力学百科全书》，John Wiley & Sons, Ltd，2004，第3章。[2] J. Kiendl, Y. Bazilevs, M.-C. Hsu, R. W¨uchner, K.-U. Bletzinger，多曲面片Kirchhoff–Love壳体结构等几何分析的弯曲带方法，《计算机方法：应用力学与工程》199 (37-40) (2010) 2403–2416。[3] D. Chapelle, K.-J. Bathe，壳体结构有限元分析的基本考量，《计算机与结构》66 (1) (1998) 19–36。[4] J. Kiendl, K.-U. Bletzinger, J. Linhard, R. W¨uchner，采用Kirchhoff–Love单元的等几何壳体分析，《计算机方法：应用力学与工程》198 (49-52) (2009) 3902–3914。[5] J. Simo, D. Fox, M. Rifai，关于应力合力几何精确壳体模型。第二部分：线性理论；计算方面，《计算机方法：应用力学与工程》73 (1) (1989) 53–92。[6] J. C. Simo, D. D. Fox, M. S. Rifai，关于应力合力几何精确壳体模型。第三部分：非线性理论的计算方面，《计算机方法：应用力学与工程》79 (1) (1990) 21–70。[7] D. Benson, Y. Bazilevs, M.-C. Hsu, T. Hughes，等几何壳体分析：Reissner–Mindlin壳体，《计算机方法：应用力学与工程》199 (5-8) (2010) 276–289。[8] T. W. Sederberg, G. T. Finnigan, X. Li, H. Lin, H. Ipson，水密裁剪NURBS，《ACM图形学汇刊（TOG）》27 (3) (2008) 1–8。[9] R. R. Hiemstra, K. M. Shepherd, M. J. Johnson, L. Quan, T. J. Hughes，迈向未裁剪NURBS：利用框架场引导的全局参数化，对裁剪B-rep几何进行CAD嵌入式重新参数化，《计算机方法：应用力学与工程》369 (2020) 113227。[10] K. M. Shepherd, X. D. Gu, T. J. Hughes，采用带度量优化的Ricci流对裁剪样条进行特征感知重建，《计算机方法：应用力学与工程》(2022) 115555。[11] Y. Bazilevs, V. M. Calo, J. A. Cottrell, J. A. Evans, T. J. R. Hughes, S. Lipton, M. A. Scott, T. W. Sederberg，使用T样条的等几何分析，《计算机方法：应用力学与工程》199 (5) (2010) 229–263。[12] H. Casquero, L. Liu, Y. Zhang, A. Reali, J. Kiendl, H. Gomez，用于完全非线性Kirchhoff–Love壳体等几何分析的任意次数T样条，《计算机辅助设计》82 (2017) 140–153。[13] K. Bandara, F. Cirak，采用多分辨率细分曲面的壳体结构等几何形状优化，《计算机辅助设计》95 (2018) 62–71。[14] M. Zareh, X. Qian，基于三角形等几何分析的Kirchhoff–Love壳体公式，《计算机方法：应用力学与工程》347 (2019) 853–873。[15] J. Cao, Z. Chen, X. Wei, Y. J. Zhang，基于三角形构型上的双变量单纯形样条的有限元框架，《计算机方法：应用力学与工程》357 (2019) 112598。[16] Z. Wang, J. Cao, X. Wei, Y. J. Zhang，具有高质量参数化的TCB样条等几何分析方法，《计算机方法：应用力学与工程》393 (2022) 114771。[17] H. Zhu, J. Cao, Y. Xiao, Z. Chen, Z. Zhong, Y. J. Zhang，基于TCB样条的图像矢量化，《ACM图形学汇刊（TOG）》41 (3) (2022) 1–17。[18] G. Kirchhoff，¨关于弹性薄板的平衡与运动，《纯粹与应用数学杂志（克雷尔杂志）》1850 (40) (1850) 51–88。[19] N. Liu, E. L. Johnson, M. R. Rajanna, J. Lua, N. Phan, M.-C. Hsu，混合等几何Kirchhoff–Love壳体与连续体壳体，《计算机方法：应用力学与工程》385 (2021) 114005。[20] E. Brivadis, A. Buffa, B. Wohlmuth, L. Wunderlich，等几何摩擦方法，《计算机方法：应用力学与工程》284 (2015) 292–319。[21] D. Kamensky, J. A. Evans, M.-C. Hsu, Y. Bazilevs，浸入式等几何流体–薄结构相互作用分析中界面拉格朗日乘子的基于投影的稳定化及其在心脏瓣膜建模中的应用，《计算机与应用数学》74 (9) (2017) 2068–2088。[22] D. Miao, Z. Zou, M. A. Scott, M. J. Borden, D. C. Thomas，等几何Bezier对偶摩擦：Kirchhoff–Love壳体问题，《计算机方法：应用力学与工程》382 (2021) 113873。

[23] M. Ruess, D. Schillinger, A. I. Oezcan, E. Rank，非匹配和裁剪多片几何的等几何分析中的弱耦合，《计算机方法：应用力学与工程》269 (2014) 46–71。[24] Y. Guo, Z. Zou, M. Ruess，非线性弹性框架下混合薄壳的等几何多片分析，《计算机方法：应用力学与工程》380 (2021) 113771。[25] A. Apostolatos, R. Schmidt, R. W¨uchner, K.-U. Bletzinger，一种 Nitsche 型公式及等几何分析中最常见域分解方法的比较，《国际工程数值方法杂志》97 (7) (2014) 473–504。[26] L. Coradello, J. Kiendl, A. Buffa，通过投影超罚方法耦合非协调裁剪等几何 Kirchhoff–Love 壳，《计算机方法：应用力学与工程》387 (2021) 114187。[27] Q. Hu, D. Baroli, S. Rao，大变形下多片实体壳的等几何分析，《力学学报》37 (5) (2021) 844–860。[28] B. Marussig, T. J. Hughes，等几何分析中的裁剪综述：挑战、数据交换与仿真方面，《计算工程方法档案》25 (4) (2018) 1059–1127。[29] D. Schillinger, L. Dede, M. A. Scott, J. A. Evans, M. J. Borden, E. Rank, T. J. Hughes，一种基于 NURBS 自适应层次细化、浸入边界方法和 T 样条 CAD 曲面的设计贯穿分析方法，《计算机方法：应用力学与工程》249 (2012) 116–150。[30] E. Rank, M. Ruess, S. Kollmannsberger, D. Schillinger, A. D¨uster，几何建模、等几何分析与有限单元法，《计算机方法：应用力学与工程》249 (2012) 104–115。[31] L. Coradello, D. DAngella, M. Carraturo, J. Kiendl, S. Kollmannsberger, E. Rank, A. Reali，裁剪壳的层次细化等几何分析，《计算力学》66 (2) (2020) 431–447。[32] M. Ruess, D. Schillinger, Y. Bazilevs, V. Varduhn, E. Rank，基于有限单元法，对嵌入 NURBS 和裁剪 NURBS 几何弱施加本质边界条件，《国际工程数值方法杂志》95 (10) (2013) 811–846。[33] A. Buffa, R. Puppi, R. V´azquez，裁剪几何上等几何方法的最小稳定化过程，《SIAM 数值分析杂志》58 (5) (2020) 2711–2735。[34] Y. Guo, J. Heller, T. J. Hughes, M. Ruess, D. Schillinger，基于 STEP 交换格式的有限变形裁剪薄壳变分一致等几何分析，《计算机方法：应用力学与工程》336 (2018) 39–79。[35] Y. Guo, H. Do, M. Ruess，薄壳的等几何稳定性分析：从简单几何到工程模型，《国际工程数值方法杂志》118 (8) (2019) 433–458。[36] F. de Prenter, C. V. Verhoosel, E. van Brummelen, J. Evans, C. Messe, J. Benzaken, K. Maute，浸入有限元方法和浸入等几何分析的多重网格求解器，《计算力学》65 (3) (2020) 807–838。[37] N. Nguyen-Thanh, J. Kiendl, H. Nguyen-Xuan, R. W¨uchner, K.-U. Bletzinger, Y. Bazilevs, T. Rabczuk，使用 PHT 样条的无旋转等几何薄壳分析，《计算机方法：应用力学与工程》200 (47-48) (2011) 3410–3424。[38] G. Kiss, C. Giannelli, U. Zore, B. J¨uttler, D. Großmann, J. Barner，使用截断层次 B 样条自适应重建 CAD 模型，《图形模型》76 (5) (2014) 273–288。[39] H. Atri, S. Shojaee，薄壳结构等几何分析中的截断层次 B 样条，《钢与复合结构》，国际期刊 26 (2) (2018) 171–182。[40] X. Wei, Y. Zhang, L. Liu, T. J. Hughes，截断 T 样条：基础与方法，《计算机方法：应用力学与工程》316 (2017) 349–372。[41] L. Liu, Y. J. Zhang, X. Wei，应用于裁剪 NURBS 曲面重新参数化的加权 T 样条，《计算机方法：应用力学与工程》295 (2015) 108–126。[42] H. Casquero, X. Wei, D. Toshniwal, A. Li, T. J. Hughes, J. Kiendl, Y. J. Zhang，使用适用于分析的非结构化 T 样条无缝集成设计与 Kirchhoff–Love 壳分析，《计算机方法：应用力学与工程》360 (2020) 112765。[43] X. Wei, X. Li, K. Qian, T. J. Hughes, Y. J. Zhang, H. Casquero，适用于分析的非结构化 T 样条：每个面上含多个奇异点，《计算机方法：应用力学与工程》391 (2022) 114494。[44] Y. Lai, Y. J. Zhang, L. Liu, X. Wei, E. Fang, J. Lua，将 CAD 与 Abaqus 集成：面向工业应用的实用等几何分析软件平台，《计算机与应用数学》74 (7) (2017) 1648–1660。[45] D. Toshniwal, H. Speleers, T. J. Hughes，非结构化四边形网格上的光滑三次样条空间，特别关注奇异点：几何设计与等几何分析的考量，《计算机方法：应用力学与工程》327 (2017) 411–458。[46] Z. Wen, M. S. Faruque, X. Li, X. Wei, H. Casquero，使用具有任意非结构化四边形布局的 G 样条曲面进行等几何分析，《计算机方法：应用力学与工程》408 (2023) 115965。[47] Y. Liu, J. Snoeyink，通过推广高阶 Voronoi 图构造二次与三次 B 样条，载于：第二十三届年度计算几何研讨会论文集，2007，第 150–157 页。[48] Y. Zhang, J. Cao, Z. Chen, X. Zeng，使用特征敏感构形上的单纯形样条进行曲面重建，《计算机辅助几何设计》 50 (2017) 14–28。[49] D. Schmitt，来自凸构形的二元 B 样条，《计算机与系统科学杂志》120 (2021) 42–61。[50] C. A. Micchelli，R^k中的 Kergin 插值的构造方法：多元 B 样条与拉格朗日插值，《落基山数学杂志》(1980) 485–497。[51] M. Franssen，DMS 样条的求值，硕士论文，埃因霍温理工大学 (1995)。[52] H. Prautzsch, W. Boehm, M. Paluszny，单纯形样条，载于：《B´ezier 与 B 样条技术》，第 6 卷，Springer，2002，第 18 章，第 259–268 页。[53] C. A. Micchelli，关于一种计算多元 B 样条的数值高效方法，载于：《多元逼近理论》，Springer，1979，第 211–248 页。[54] M. Neamtu，单变量样条在高维中的自然推广是什么？，载于：《曲线与曲面的数学方法》，美国范德堡大学，2001，第 355–392 页。[55] Q. Du, V. Faber, M. Gunzburger，质心 Voronoi 镶嵌：应用与算法，《SIAM 评论》41 (4) (1999) 637–676。

[56] Y. Liu，Delaunay 三角剖分及高阶三角剖分的计算及其在样条中的应用（博士学位论文），北卡罗来纳大学教堂山分校（2007）。[57] J. Kiendl，壳体结构的等几何分析与形状优化设计（博士学位论文），慕尼黑工业大学（ 2011 ）。[58] J. Kiendl，M.-C. Hsu，M. C. Wu，A. Reali，适用于一般超弹性材料的等几何 Kirchhoff–Love 壳体公式，《计算机方法：应用力学与工程》291（2015）280–303。[59] W. Voigt，晶体物理学教材：（不包括晶体光学），第34卷，BG Teubner，1910。[60] W. Li，N. Nguyen-Thanh，K. Zhou，基于等几何分析与无网格耦合方法的薄壳结构几何非线性分析，《计算机方法：应用力学与工程》336（2018）111–134。[61] W. Wunderlich，W. D. Pilkey，结构力学：变分与计算方法，第2版，CRC出版社，2003。[62] I. Transcendata，Cadfix 网站，https://www.iti-global.com/cadfix。[63] C. Geuzaine，J.-F. Remacle，Gmsh：一种具有内置前处理和后处理功能的三维有限元网格生成器，《国际工程数值方法杂志》79（11）（2009）1309–1331。[64] Y. Zhang，J. Cao，Z. Chen，X. Li，X.-M. Zeng，基于节点位置优化的 B 样条曲面拟合，《计算机与图形学》58（2016）73–83。[65] J. Smith，S. Schaefer，具有自由边界的双射参数化，《ACM 图形学汇刊》34（4）（2015）1–9。[66] X.-M. Fu，J.-P. Su，Z.-Y. Zhao，Q. Fang，C. Ye，L. Liu，无反演几何映射构造：综述，《计算视觉媒体》7（3）（2021）289–318。[67] Z. Jiang，S. Schaefer，D. Panozzo，用于双射映射的单纯复形增广框架，《ACM 图形学汇刊》36（6）（2017）。[68] E. Grinspun，A. Secord，离散微分几何导论：平面曲线的几何学，载于：2008年 ACM SIGGRAPH 亚洲会议课程，2008年，第1–4页。[69] G. E. Farin，G. Farin，CAGD 曲线与曲面：实用指南，Morgan Kaufmann，2002。[70] T. Schneider，K. Hormann，M. S. Floater，双射复合均值映射，载于：第十一届 Eurographics/ACM SIGGRAPH 几何处理研讨会论文集，德国戈斯拉尔，2013年，第137–146页。[71] Z.-j. Wu，Z.-d. Huang，Q.-h. Liu，B.-q. Zuo，等几何分析中自适应层次细化的局部求解方法，《计算机方法：应用力学与工程》283（2015）1467–1492。[72] L. Coradello，P. Antolin，R. V´azquez，A. Buffa，基于层次方法的二维裁剪域自适应等几何分析，《计算机方法：应用力学与工程》364（2020）112925。[73] D. Dunavant，适用于三角形的高阶高效对称高斯求积公式，《国际工程数值方法杂志》21（6）（1985）1129–1148。[74] T. Belytschko，H. Stolarski，W. K. Liu，N. Carpenter，J. S. Ong，用于壳体有限元中膜锁定和剪切锁定的应力投影，《计算机方法：应用力学与工程》51（1–3）（1985）221–258。