arXiv:2304.10424v1 [cs.LO] 20 Apr 2023

Mathlib 中的恩格尔定理

Oliver Nash

英国伦敦帝国理工学院数学系。

贡献作者：o.nash@imperial.ac.uk;

摘要

我们讨论 Lean 的 Mathlib 库中的李代数理论。以幂零性为主题，我们概述了恩格尔定理的计算机形式化及其在根空间理论中的应用。我们强调，所有论证都适用于系数取自任意交换环的情形。

关键词：Lean、证明助手、形式数学、李代数、幂零性、恩格尔定理、根空间

MSC 分类：17B30，68V15，68V20

1 引言

在先前的工作中，[6]，我们介绍了 Lean 的 Mathlib 库中李代数的形式化工作 [8]。[6] 的目标是高层次地概述 Mathlib 中李理论的发展现状，而本文旨在利用李理论的一个特定方面（幂零性），展示 Mathlib 最重要的两大优点：普适性与统一性。例如，我们将看到，Mathlib 中的恩格尔定理统一了非形式文献中出现的该结果的各种版本，同时所需假设更弱，所得结论更强。

本文也借此机会介绍自 [6]以来 Mathlib 李代数理论的一些新增内容。具体而言，自 [6]以来，Mathlib 的李理论已从约 6,000 行扩展至约 7,500 行。最重要的新增内容是恩格尔定理及其推论（4）的证明，该推论刻画了嘉当子代数。

我们简要概述一些关键背景，并请读者参阅相关参考文献以了解进一步的讨论。Lean 是一种开源的依赖类型函数式编程语言和证明助手。其主要开发者是 Leonardo de Moura

由微软研究院开发。它采用了与 Coq 类似的类型论作为其逻辑基础，参见例如 [2]。

Mathlib [8] 是一个使用 Lean 编写的形式数学开源协作库，汇集了大量协作者。截至2022年6月，该库包含约90万行代码，并持续稳步增长，涵盖了大量当代本科及研究生阶段的数学内容。

李代数是一类重要的代数，广泛应用于数学和物理学的各个领域。对于几何学家而言，李代数是无穷小对称性的一种抽象，它们在数学的各个领域中都有重要应用，从数论到微分几何，无处不在。李代数对于理解 20th 世纪物理学的许多内容也至关重要，尤其是粒子物理学中的标准模型。此外，半单李代数及其表示的优美分类也使其本身成为一个值得独立研究的对象。

如 [6], Mathlib 包含大量李代数理论。其基础是一对类型类，可用于声明类型 L 具有在[1] 交换环 R上的李代数结构[2]。为使非专业人士了解这一点，我们强调李环不要求是结合的，因此并非通常意义上的环。Mathlib 中的形式化定义如下 [src]:

```
类李_环（L： 类型 v）
    扩展 add_comm_groupL，具有_括号 L L :=(add_lie : ∀ (x y z : L), x + y,z = x,z + y,z ) (lie_add : ∀ (x y z : L), x,y + z = x,y + x,z ) (lie_self : ∀ (x : L), x,x = 0) (leibniz_lie : ∀ (x y z : L), x, y,z = x,y ,z + y, x,z )

类 李_代数(R： 类型 u) (L : 类型 v)[交换_环 R] [李_环 L] 扩展 模 R L :=(李_标量乘法:  ∀ (t : R) (x y : L), x,t • y = t • x,y )
```

我们强调，除了要求系数 R 构成一个交换环之外，不对它们作任何假设。形式化数学的实践者都熟悉尽可能合理地采用一般性定义的价值。当然，如果还希望相应地使定理具有一般性，通常就需要采用新的论证方法。本文的一个重点在于，这种额外的努力可能会带来意想不到的益处。

<escape></escape>我们的案例研究是恩格尔定理，事实证明，该定理对任意交换环都成立 <escape></escape> R <escape></escape>，并且适用于李模中幂零性的一种推广。正如我们将看到的，将幂零性从代数推广到模尤其方便，因为它统一了文献中出现的恩格尔定理的各种版本。此外，我们还得到了一个稍强一些的结果；这在实际应用中很有用，我们将在第 <escape></escape>5<escape></escape> 节中给出一个关于根空间的例子。

[1]也就是说，系数取自。[2]具有非平凡乘积的结合的李环很少见，而且相当乏味。

2 李模

给定一个李代数 L，Mathlib 对李模的定义[3] M （关于 L ）为 [src]:

```
类李_环 g_模 (L : Type v) (M : Type w)
  [李_环 L] [加法_交换_群M] 扩展，具有_括号 L M :=(加法_李: ∀(x y : L) (m : M), x+y,m = x,m + y,m ) (李_加法: ∀(x : L) (m n : M), x,m+n = x,m + x,n ) (莱布尼茨_李: ∀ (x y : L) (m : M), x, y, m = x, y , m + y, x, m )
```

```
类 lie_module (R : Type u) (L : Type v) (M : Type w)[交换_环 R] [李_环 L] [李_代数 R L][加法_交换_群 M] [模 R M] [李_环_模 L M] :=(smul_lie : ∀ (t : R) (x : L) (m : M), t • x, m = t • x, m ) (lie_smul : ∀ (t : R) (x : L) (m : M), x, t • m = t • x, m )
```

注意，我们将李代数 L 的元素 x 对李模 M 的元素m 的作用记作 $[x, m]$。这样，在将李代数视为自身上的模时，就可以使用统一的记号。

L 对 M 的作用诱导出一个自然映射:

$$\begin{aligned} \phi : L &\to \mathrm{End}(M) \\ x &\mapsto \phi_x, \end{aligned}$$

定义为:

$$\phi_x = [x, m].$$

在 Mathlib 中，这个是 [源代码]:

```
定义 李_模到_自同态: L →ₗ[R] R-模.End R M := 
{ to_fun    := λ x,
  { to_fun    := λ m, ⁅x, m⁆,
    -- etc.
    } }
```

<escape>任意李代数都作用于其自身[4] ，而在这一特殊情形下，当 $M = L$ 时，映射 ϕ 称为伴随作用，记作 [src]: </escape>

$$\begin{aligned} \mathrm{ad} : L &\to \mathrm{End}(L) \\ x &\mapsto \mathrm{ad}_x . \end{aligned}$$

3 幂零性

幂零性是代数中的一个重要概念，其应用范围之广，可能超出人们从定义中天真预期的程度。在李代数的情形中，幂零李代数的表示理论既格外简单，也格外

[3]李模 M 也称为李代数 L 的 *representation* 。说M 是 L 的模或 L上的模，意思相同。[4]也就是说，它是自身上的模。

重要，因为半单李代数最好理解为某些幂零子代数的表示，也就是嘉当子代数[5]。

3.1 理想运算与幂零李模

给定李代数 M 的一个李模 L，回顾（[6] 第 3 节），对于任意理想 $I \subseteq L$和李子模 $N \subseteq M$，我们可以构造一个新的李子模 [src]:

$$[I, N] \subseteq M.$$

它是 M 中包含所有形如 $[x, m]$ 的元素（对所有 $x \in I$ 和 $m \in N$）的最小李子模。

直观地说，李模 M 的下中心列是由 M 中的李子模构成的序列，递归定义如下：

$$C_0 M = M,$$
$$C_{k+1} M = [L, C_k M].$$

Mathlib 中对应的定义为 [src]:

```
定义 lcs (k : ℕ) : lie_子模 R L M → lie_子模R L M :=(λ N, ( ⊤ : lie_理想
R L), N )⁅[k]⁆
```

```
定义 下_中心_列（k : ℕ）: 李_子模 R L M :=( ⊤ : 李_子模 R L M).lcs k
```

另请参阅 [6] 第 3 节的最后一段。

下中心列之所以重要，是因为它提供了一种方便的方式来定义幂零性 [源]:

```
类 是_幂零的: 命题 :=
(幂零的 : ∃ k, 下_中心_列 R L M k = ⊥)
```

展开定义，非正式地说，李模 M 是幂零的，当且仅当存在一个自然数 k，使得对于任意的 $x_1, x_2, \ldots, x_k$ 属于 L，以及任意的 m 属于 M:

$$[x_1, [x_2, \ldots, [x_k, m] \cdots]] = 0. \tag{1}$$

我们将需要幂零李模的以下性质：如果 M 非平凡，那么它包含一个非零元素 m_0，使得：

$$[x, m_0] = 0 \quad \text{for all } x \text{ in } L. \tag{2}$$

事实上，人们会选择一个最小的 k，使其满足（1），并取任意一个具有以下形式的非零元素：

$$m_0 = [x_2, [x_3, \ldots, [x_k, m] \cdots]].$$

[5]半单李代数的大部分理论尚未形式化。若能依照例如 [7]，将这部分内容加入 Mathlib，将是一项值得投入的工作。

该结果在 Mathlib 中显示为 [src]:

```
引理 非平凡_极大_平凡_的_是_幂零的[非平凡 M] [是_幂零的 R L M] : 非平凡 $ 极大_平凡_子模 R L M : =
```

连同 [源]:

```
引理 属于_最大_平凡_子模 (m₀ : M) : m₀ ∈ 最大_平凡_子模R L M ↔ ∀ (x : L), x, m₀ = 0 : =
                                                    [       ]
```

3.2 幂零作用

一个元素 a 结合的[6] 环 A 称为幂零的，如果存在一个自然数 k 使得:

$$a^k = 0.$$

给定李代数 L的李模 M，环 $A = \mathrm{End}(M)$ 中元素的这一幂零性概念在恩格尔定理中起着核心作用:

定义。我们称李代数 L 在李模 M 上幂零地作用，若自然映射的像:

$$\begin{aligned} \phi : L &\to \mathrm{End}(M) \\ x &\mapsto \phi_x, \end{aligned}$$

只包含幂零元。

一个简单但重要的观察是，若 M 是幂零李模，则 L幂零地作用。事实上，给定任意 x 属于 L，取常值序列:

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_k = x,$$

方程 (1) 对任意 m都可写为 $\phi_x^k(m) = 0$，因此:

$$\phi_x^k = 0.$$

在 Mathlib 中，这条陈述写作 [src]:

```
引理 nilpotent_endo_of_nilpotent_module [is_nilpotent R L M] :
  ∃ (k : ℕ), ∀ (x : L), (to_李代数同态 R L M x)^k = 0 : =
```

恩格尔定理的一个推论[7] 指出，当 L 作为 R-模是诺特的时，逆命题也成立。更准确地说:

$$\forall x, \exists k, \phi_x^k = 0 \iff \exists k, \forall x, \phi_x^k = 0.$$

---

[6]顺便提一下，这个概念可以推广到非结合环，而且关系 $[x, x] = 0$ 意味着李代数的所有元素 x 都是幂零的（取 $k = 2$）。这一事实在一定程度上解释了幂零性在李理论中的重要地位。[7]恩格尔定理更强，因为它适用于任意的 $x_1, x_2, \ldots, x_k$，而不只是常值序列：$x_1 = x_2 = \cdots = x_k = x$。

4 恩格尔定理

我们的目标是概述以下命题的证明：
定理（恩格尔定理）。设 M 是系数取自交换环 R 的李代数 L 上的李模。假设 L 是一个诺特的 R- 模。那么，M 是幂零的，当且仅当 L 在 M 上幂零作用。

Mathlib 中的表述为 [src]:

```
引理 is_幂零的_当且仅当_forall [is_noetherian R L] : lie_
module.is_nilpotentR L M ↔∀ x, is_幂零的 $ to_endomorphismR L
M x : =
```

这应与传统版本进行比较，例如 Serre [7]（I.4，定理 1、2、2'）、Bourbaki [1]（I，4.2，定理 1、推论 1、3）、Fulton、Harris，[4]（9.2，定理 9.9，习题 9.10）。为明确起见，我们给出这样一个表述。定理（恩格尔定理，传统版本）。

(a). 设 L 是一个系数取自某个域的有限维李代数。那么，L 是幂零的，当且仅当它在自身上的作用是幂零的。(b). 设 M 是一个非平凡的有限维向量空间，并假设 $L \subseteq \mathrm{End}(M)$ 是一个由幂零元构成的李子代数。那么存在一个非零元素 m_0 属于 M，使得：

$$[x, m_0] = 0 \quad for\ all\ x\ in\ L.$$

取 $M = L$ 在我们的版本中，可以得到传统表述中的（a）部分。正如在方程（2）的讨论中所解释的，传统表述中的（b）部分也可以直接作为我们版本的一个推论。因此，我们将传统版本中的（a）和（b）两部分统一为一个结果。要求更强的性质，即 M 也是幂零的，这也使证明变得更加简单，因为在证明的关键步骤中，我们可以得到一个更强的归纳假设。

4.1 Engel型李代数

引入一些术语会比较方便。 y.
定义。我们称李代数 L 为 Engel 型的，如果任意一个 L 以幂零方式作用于其上的李模 M 都是幂零的。

Mathlib 中的定义是[8] [源代码]:

```
def lie_代数.is_engelian : 命题 :=∀ (M : Type u₄) [加_交换_群
M], by exactI ∀[模 R M] [lie_环_模L M], by exactI ∀[lie_
模 R L M], by exactI ∀(h : ∀ x, is_幂零的 $ to_
endomorphism R L M x), lie_模.is_幂零的 R L M
```

事实上，这暴露了 Lean 3 的一个不够完善之处：对类型类进行量化时，除了显式提及本可推断出的类型类之外，还需要使用"by exactI ∀ pattern"。

[8]出现的 universe u_4 并不重要，只是反映了 Mathlib 标准的 universe 多态性。Lean 可以自动处理这种多态性，因此可以（也很可能应该）将 u_4 `Type*` 替换为 `Type` .

（例如加法交换群、模等）。人们更希望直接写成 ∀(M : Type u$_4$), [lie module R L M], 而不是上面出现的三行内容。Mathlib 迁移到 Lean 4 后，这种情况很可能会有所改善。

使用这一新语言，恩格尔定理的非平凡部分表明，诺特的李代数都是恩格尔李代数：[源代码]

```
引理 是_恩格尔的_的_是_诺特的 [是_诺特的 R L] : 李_代数.是_恩格尔的 R
L := _
```

4.2 转到 End(M) 中的像

现在固定一个诺特的李代数 L 以及一个受其作用的李模 M，该李模上的作用是幂零的。证明的第一步是注意到我们可以用其像替换 L：

$$L' = \operatorname{range}\phi \subseteq \operatorname{End}(M),$$

在自然映射下：

$$\phi : L \to \operatorname{End}(M).$$

相关的形式化陈述是 [源代码]:

```
引理 是_幂零的_像_到_自同态_当且仅当: 是_幂零的 R (to_
endomorphismR L M).range M  ↔是_幂零的 R L M := _
```

这个证明本质上是同义反复，但这一观察很重要，而且该引理是 Lean 类型类机制运行良好的一个范例。

用户无需进行任何操作，Lean 就能识别出 (to endomorphism R L M).range，也就是 L'，是一个李代数，并且 M 自然是一个作用于 L' 上的李模。这一切都是通过在其他地方注册的类型类实例实现的，与恩格尔定理没有直接关联。

从 L 到 L' 的过渡很有用，因为有以下引理 [源代码]:

```
引理 lie_algebra.is_nilpotent_ad_of_is_nilpotent {A :
Type v} [交换_环 R] [环 A] [代数 R A]{L' : lie_子代数
R A} {x : L'} (h : is_幂零的 (x : A)) : is_幂零的 $ lie_
algebra.ad R L' x :=
```

(注意，结合代数 A 自然也可以视为李代数 [src] 这就是我们可以写作 lie subalgebra R A 的原因。另请参见 [6] 第 5 节。) 该证明由二项式定理直接得出。取 $A = \operatorname{End}(M)$ 后，该引理表明 L' 在自身上幂零作用。

4.3 主要论证

我们引入集合：

$$s = \{K \subseteq L' \mid K \text{ is an Engelian Lie subalgebra}\},$$

在 Mathlib 中写作 [src]:

```
let s := { K : lie_subalgebra R L' | is_engelian R K },
```

我们的目标是证明 s 包含 L'，将其视为自身的李子代数。这是李子代数完备格中的顶元素 $\top$。

由于 s 非空（它包含平凡李子代数），且 L' 是诺特的，s 因此包含一个极大元素。所以我们只需证明，若 s 中的元素是一个真子代数，它就不可能是极大的。换言之，我们必须证明 Mathlib 证明 [src]中出现的以下断言：

```
have : ∀ (K ∈ s), K ≠ ⊤ → ∃ (K' ∈ s), K < K',
```

因此，设 K 是一个真 Engel 李子代数，并考虑李模 L'/K上的 K。由于 L' 在自身上幂零作用， $K \subseteq L'$ 在 L' 上幂零作用，因此在 L'/K上也幂零作用。由于 K 是 Engel 的， L'/K 是幂零的，因此由（2），存在$x \in L' - K$ 使得：

$$[K, x] \subseteq K. \tag{3}$$

最后，设：

$$K' = \{\lambda x + \mu k \mid k \in K; \lambda, \mu \in R\}.$$

利用（3），并回想 $[x, x] = 0$，我们得到：

- K, 是 L, 的李子代数,
- K, 严格包含 K,
- K 是 K, 中的一个理想。

要完成论证，我们只需证明 K' 是 Engel 的。因此，固定一个李模 M'，其定义在 K'上，且 K'在其上的作用是幂零的。我们必须证明 M,是幂零的。为此，我们应用以下引理（其证明只需简单归纳）[src]:

```
引理 lcs_le_lcs_of_is_nilpotent_span_sup_eq_top {I : lie_ideal R
L} {x : L} (hxI : (R ● x) ⊔ I = ⊤) {n i j : ℕ} (hxn : (to_
endomorphism R L M' x)^n = 0) (hIM : lower_central_seriesR
L M' i ≤ I.lcs M' j) : lower_central_series R L M' (i + n) ≤
I.lcs M' (j + 1) :=
```

其中 K和 K'分别扮演 I和 L 的角色。

我们看到，如果 M' 作为 K 上的李模的下中心列达到零，那么它作为 K' 上的李模的下中心列也必然达到零。因此，K 上的幂零性（因为 K 是 Engel 李代数而成立）确保了 K' 上的幂零性，正如所要求的那样。

5 零根空间

如 [6] 第 11 节所述，Mathlib 包含关于权空间和根空间的定义及基本结果。为了推进这一理论，恩格尔定理被添加到 Mathlib 中。概述这一应用或许会有所启发。

给定一个幂零的李子代数 $H \subseteq L$，零根空间发挥着特殊的作用。在 Mathlib 中，它表示为 `root space H (0 : H → R)` [src]；非正式地说，它是：

$$L^0 = \{x \mid \exists k, \forall y \in H, \mathrm{ad}_y^k(x) = 0\} \subseteq L.$$

任意根空间都是一个 H-子模 L 但零根空间具有更强的性质；它是一个李子代数 [src]:

```
定义 零_根_子代数 : 李_子代数 R L :=
{lie_属于' : = ..., .....（根_空间 H 0 : 子模 R L） }
```

始终有 $H \subseteq L^0$，并且很容易看出，如果 $H = L^0$，那么 H 是一个嘉当子代数。当 L 是诺特的时，恩格尔定理表明，反过来也成立：

$$H = L^0 \iff H \text{ is a Cartan subalgebra.} \tag{4}$$

文献中似乎只有在系数所在的域为域时，才给出了这一结果的证明。此外，文献中的论证无法使用，因为它们通过维数进行归纳，而对于一般系数，维数这个概念并不存在。幸运的是，借助我们版本的恩格尔定理，证明几乎是显而易见的。

下面是 Mathlib 中（4）的陈述 [src]:

```
引理 零_根_子代数_等于_当且仅当_是_嘉当 [是_诺特的 R L]: 零_根_子代数 R L H = H
↔ H.is_嘉当_子代数 : =
```

关键在于，如果 L 是诺特的，那么 H 在 L^0 上幂零作用，因此根据恩格尔定理，L^0 作为 H上的李模是幂零的。Mathlib 实际上包含以下稍微更一般的结果，它适用于任意诺特李模 M[src]:

```
实例 [李_代数.是_幂零R L][是_诺特的 R L] [是_诺特的 R
M] : 是_幂零 R L $ 权_空间 M (0 : L → R) : =
```

一旦我们知道 L^0 在 H 上是幂零的，Cartan 子代数的自正规化性质便保证 H 不可能是一个真子模，因此结论立即成立。

6 结论

在赞颂一般性与统一性的优点之后，我们应当强调，从某种意义上说，它们是同一事物的两个方面。例如，这里讨论的根空间理论依赖于 Mathlib 的特征空间理论。Mathlib 的泛函分析库也使用了同样的特征空间理论 [3]。之所以能够做到这一点，仅仅是因为特征空间理论是在相当一般的框架下发展起来的（早于二者中的任何一个

（该应用已存在）。因此我们可以发挥协同效应：任何由特征空间理论的使用者之一添加的引理，都会自动提供给另一位使用者。

尽管我们将恩格尔定理所需的有限性条件表述为要求 L 作为一个 R 模是诺特的，但论证实际上只需要更弱的条件，即 L 的李子代数格具有极大性[9]。

我们的恩格尔定理版本似乎尚未见诸文献。一个值得注意的相近成果是 Zorn 的一篇早期论文 [10]，其中证明了李环的这一结果（但未涉及其李模）。另一篇有趣的论文是 Jacobson [5]。作为我们定理的替代形式：

$$L' \subseteq \mathrm{End}(M),$$

他证明了他所称的 Φ-子环的恩格尔定理：

$$\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{U}.$$

一方面，Jacobson 的结果更为一般，因为 Φ-子环的类将结合环的李子环作为一种特殊情形包含在内。另一方面，该结果的普遍性较弱，因为他得到这一结果的前提是：包围环 $\mathfrak{U}$ 的理想格满足一个限制性强得多的极小性条件，而我们只要求 L' 的子代数格满足一个极大性条件。

最后，我们应该提到，存在一种重要的情形，在其中李环的 Engel 型结果发挥着核心作用。例如，参见 Zel'manov 的突破性成果 [9]。

致谢

我感谢帝国理工学院的 Kevin Buzzard，他的前沿研究卓越基金资助了这项工作。我也感谢匿名审稿人提出的许多有益意见。我声明，本文完全由署名作者独立完成，且我与此处讨论的任何工作均不存在利益冲突。所有代码均可在开源 *Mathlib* 仓库的*master*分支中找到，文中各处均提供了链接。

参考文献

[1] 尼古拉·布尔巴基。《李群与李代数》第 1–3 章。《数学原典》（柏林）。施普林格出版社，柏林、纽约，1998 年。法文译本；重印自 1989 年英文译本。

[2] Mario Carneiro。《Lean 的类型论》，2019 年。硕士论文。

[3] 弗´雷德´里克·杜皮伊（Frédéric Dupuis）、Robert Y. Lewis 和 Heather Macbeth。《使用半线性映射形式化泛函分析》。载于第 13 届国际交互式定理证明会议（ITP 2022），2022 年 8 月 7 日至 10 日，海法，俄勒冈州，以色列，2022 年。

[9]也就是说，任意非空的李子代数集合都包含一个极大元。

[4] William Fulton 和 Joe Harris。《表示论》，数学研究生教材第 129 卷。施普林格出版社，纽约州纽约市，1991 年。数学读物丛书中的入门课程。[5] Nathan Jacobson。《Engel 定理的一种推广》。巴黎科学院院报，234：579–581，1952 年。[6] Oliver Nash。《形式化李代数》。载于第 11 届 ACM SIGPLAN 国际认证程序与证明会议论文集（CPP 2022），第 239–250 页，美国纽约州纽约市，2022 年。计算机协会。[7] Jean-Pierre Serre。《复半单李代数》。施普林格出版社，纽约州纽约市，1987 年。由 G. A. Jones 从法文翻译。[8] mathlib 社区。《Lean 数学库》。载于第 9 届 ACM SIGPLAN 国际认证程序与证明会议论文集（CPP 2020），美国路易斯安那州新奥尔良，2020 年 1 月 20–21 日，第 367–381 页，2020 年。[9] E. I. Zel’manov。《奇数指数群的受限 Burnside 问题的解》。苏联科学院数学系列学报，54(1)：42–59，221，1990 年。[10] Max Zorn。《关于 Engel 定理》。美国数学学会通报，43(6)：401–404，1937 年。