arXiv:2304.10429v1 [math.AT] 20 Apr 2023

蕴涵组装体

´FELIX CASTRO、ALEXANDRE MIQUEL 和 KRZYSZTOF WORYTKIEWICZ

摘要。Miquel 最近发现的蕴涵代数是一种组合结构，统一了经典可实现性、直觉主义可实现性以及强迫。本文引入蕴涵组装体，将其定义为取值于底层蕴涵代数的分离子的集合。给定一个固定的蕴涵代数 $\mathscr{A}$，其上的蕴涵组装体构成一个范畴 $\mathrm{Asm}_{\mathscr{A}}$，其中态射为带追踪的集合论函数。我们证明，$\mathrm{Asm}_{\mathscr{A}}$ 是一个具有自然数对象的拟拓扑斯。

1. 引言

与逻辑工具体系的其他部分一样，用拓扑斯或具有类似特征的范畴来处理可实现性和强迫的结构方面，十分实用。可以说，直觉主义逻辑的层模型 [7]（作为构造性分析 [5] 的环境）在某种程度上是这一研究方向的先驱；对这一现象的进一步研究促成了有效拓扑斯 [11] 的发现。它是众多拓扑斯中的第一个，这些拓扑斯涵盖了直觉主义可实现性的各种概念 [31]。另一方面，层模型也是拓扑斯理论中的强迫版本的起点。尽管关于连续统假设 [20, 30] 或苏斯林假设 [2] 的拓扑斯理论独立性证明是在事后完成的，其他独立性证明则直接运用了拓扑斯理论技术[6, 9]。另一方面，经典可实现性的起源截然不同。人们发现，为 λ-演算加入控制算子，能够得到经典逻辑的证明项 [10]；这一发现引出了 Krivine机器的概念。该计算装置是经典可实现性[15] 及其拓扑斯理论对应物 [29] 的基础。

人们时常注意到，实现性与强迫展现出一些共同特征；然而，数十年来，为这两个看似毫不相似的主题建立统一基础一直未能实现。尽管如此，近年来，随着蕴涵代数的发现，这一局面发生了重大变化：蕴涵代数 [22], 被证明是提供缺失纽带的基本组合结构。蕴涵代数是一个完备格（$\mathscr{A}, 4$），配备一个蕴涵算子 $\to$（不一定是 Heyting 蕴涵算子）和一个称为分离子的子集 $\mathscr{S}$。其中元素具有双重含义：一方面可被视为（广义）实现子，另一方面也可被视为真值。蕴涵代数的片段（$\mathscr{A}, 4, \to$）称为蕴涵结构，它是一个 λ-演算的模型和 Curry风格类型系统，该演算带有取自 $\mathscr{A}$的常量，也可扩展为包含控制算子 call/cc。

序关系 4 可以被视为一种（子）类型关系，因此，证明某个类型成立的演绎等同于构造一个实现子。然而，仅凭这一基础设施，$\mathscr{A}$ 中的任何元素都可以被视为实现子；但鉴于 Curry–Howard对应，这显然并不可取。此时，分离子 $\mathscr{S}$便发挥作用：它是筛选出正确实现子的工具。蕴涵代数本质上是经典可实现性代数 [16], 的抽象版本，但其额外的抽象层次也使其能够涵盖直觉主义可实现性。此外，强迫也适用于这一框架。

利益冲突：作者声明不存在任何利益冲突。

由于蕴涵代数统一了（直觉主义与经典的）可实现性和强迫这些概念，因此，探讨它们如何转化为范畴逻辑是一个相当自然的问题。与直觉主义情形类似 [11],，蕴涵代数 $(\mathscr{A}, 4, \to, \mathscr{S})$ 可导出非标准谓词，即函数 $\phi : \mathrm{I} \to \mathscr{A}$。配备逐点蕴涵的 I 上非标准谓词集合 $\mathscr{A}_I$ 可导出一个预序 $\vdash_{\mathscr{S}[I]}$，定义如下

$$\phi \vdash_{\mathscr{S}[I]} \psi \quad \Leftrightarrow \quad \left(\bigwedge_{i \in I} \phi(i) \to \psi(i) \right) \in \mathscr{S}$$

该预序是 Heyting 的。随着指标集合 I 的变化，这些非标准谓词会自然地组织成一个三元组[25] 。一个极为重要的事实是，任何（基于集合的）三元组都等价于由某个蕴涵代数 [22] 构造出的三元组。将函子 集合范畴 [−] （俗称三元组到托扑斯的构造 [26]）应用于这样的蕴涵三元组，便可得到一个蕴涵托扑斯。分析这一构造后可知，蕴涵托扑斯的对象是带有 $\mathscr{A}$ 值非标准等号的集合；在底层蕴涵三元组的内部语言中，该等号具有对称性和传递性，但不一定具有自反性（缺乏自反性或许正是这一构造的要点）。我们称这样的集合为蕴涵集合。蕴涵集合之间的态射是在底层三元组内部语言中的函数关系。

蕴涵集合 X 上的非标准等号 $|- \approx -| : \mathrm{X} \times \mathrm{X} \to \mathscr{A}$ 在满足$|\mathrm{x} \approx \mathrm{x}| \in \mathscr{S}$（对所有 $\mathrm{x} \in \mathrm{X}$）时具有自反性。由于后一条件通常不成立，$\mathrm{E}_X(\mathrm{x}) := |\mathrm{x} \approx \mathrm{x}|$ 便充当存在谓词。我们称满足 $\mathrm{E}_X(\mathrm{x}) \notin \mathscr{S}$ 的元素 $\mathrm{x} \in \mathrm{X}$ 为幽灵元素。蕴涵托扑斯中包含一个蕴涵组装体的子范畴，其中的对象是没有幽灵元素的蕴涵集合。因此，蕴涵组装体之间的态射就是满足跟踪条件的普通集合论函数。也可以独立于蕴涵托扑斯，从头构造蕴涵组装体的范畴。该构造本身绝非显而易见：对象是形如 $(\mathrm{X}, \mathrm{E}_X)$ 的有序对，其中 X 是集合，$\mathrm{E}_X : \mathrm{X} \to \mathscr{S}$ 是存在谓词；态射 $\mathrm{f} : (\mathrm{X}, \mathrm{E}_X) \to (\mathrm{Y}, \mathrm{E}_Y)$ 则是满足跟踪条件的集合论函数 $\mathrm{f} : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$

$$\bigwedge_{x \in X} (\mathbf{E}_X(x) \to \mathbf{E}_Y(f(x))) \in \mathscr{S}$$

尽管如此，蕴涵组装体范畴从一开始就并非显而易见是一个拟拓扑斯。本文探讨这一问题，并证明它是一个带有自然数对象的拟拓扑斯；与相关完备化本质有关的引人入胜的问题 [27, 21] 则留待后续论文讨论。

第 2 节全面介绍蕴涵代数，第 3 节定义蕴涵组装体范畴，第 4 节详述其作为带有自然数对象的拟拓扑斯的结构，第 5 节则讨论由强迫型蕴涵代数构造的蕴涵拟拓扑斯这一特殊情形。

2. 蕴涵代数：入门介绍

2.1. 蕴涵结构。蕴涵代数的概念建立在蕴涵结构的概念之上，现在正是介绍它的时候。形式上，蕴涵结构是一个三元组（$\mathscr{A}, 4, \to$），其中（$\mathscr{A}, 4$）是一个完备格（其序关系 4 表示子类型关系），且 $\to$ 是定义在 $\mathscr{A}$ 上的二元运算（$\mathscr{A}$ 的蕴涵），满足

(1) If $a' \preccurlyeq a$ and $b \preccurlyeq b'$, then $(a \to b) \preccurlyeq (a' \to b')$ $\qquad (a, a', b, b' \in \mathscr{A})$

(2) $a \to \bigwedge_{b \in B} b = \bigwedge_{b \in B} (a \to b)$ $\qquad (a \in A, B \subseteq \mathscr{A})$

例 2.1。蕴涵结构有许多例子，主要来自强迫理论以及直觉主义和经典可实现性。例如：

(1) 每个完备 Heyting（或布尔）代数 $(\mathscr{A},4)$ 都是一个蕴涵结构，其蕴涵 $\to$ 由序关系 4 通过 Heyting 的伴随导出：

$$c \wedge a \preccurlyeq b \qquad \text{iff} \qquad c \preccurlyeq a \to b \qquad\qquad (a,b,c \in H)$$

(2) 如果 $(P,\cdot)$ 是一个（全）应用结构，那么由以下定义的三元组 $(\mathscr{A},4,\to)$

$$\begin{array}{rcll} \mathscr{A} & := & \mathfrak{P}(P) & \\ a \preccurlyeq b & :\equiv & a \subseteq b & (a,b \in \mathscr{A}) \\ a \to b & := & \{x \in P \,:\, \forall y \in q,\ x \cdot y \in b\} & \text{(Kleene's implication)} \end{array}$$

是一种蕴涵结构。

(3) 每个经典可实现性代数 [16]（在 [29] 中也称为抽象 Krivine 结构）同样会导出一个蕴涵结构，甚至是一个经典蕴涵代数 [22]。

$\mathscr{A}$ 中的元素作为真值。蕴涵结构 $\mathscr{A}$ 中的元素主要旨在根据某种（直觉主义或经典）逻辑语义表示“真值”。尽管蕴涵结构着重于蕴涵（由算子 $\to$ 建模）和全称量化（由任意交建模），但它们也通过标准的二阶编码提供了逻辑的所有标准联结词和量词：

$$\begin{array}{lrcl} \text{(Absurdity)} & \bot & := & \min \mathscr{A} \\ \text{(Triviality)} & \top & := & \max \mathscr{A} \\ \text{(Negation)} & \neg a & := & a \to \bot \\ \text{(Conjunction)} & a \sqcap b & := & \bigwedge\limits_{c \in \mathscr{A}} ((a \to b \to c) \to c) \\ \text{(Disjunction)} & a \sqcup b & := & \bigwedge\limits_{c \in \mathscr{A}} ((a \to c) \to (b \to c) \to c) \\ \text{(Universal quantification)} & \bigsqcap\limits_{i \in I} a_i & := & \bigwedge\limits_{i \in I} a_i \\ \text{(Existential quantification)} & \bigsqcup\limits_{i \in I} a_i & := & \bigwedge\limits_{c \in \mathscr{A}} \Big(\big(\bigwedge\limits_{i \in I} (a_i \to c) \big) \to c \Big) \end{array}$$

(对所有 a、$b \in \mathscr{A}$，$(a_i)_{i \in I} \in \mathscr{A}^I$)。

$\mathscr{A}$ 作为广义实现子的元素。然而，蕴涵结构的显著特点是，其元素也可以用于对证明建模——或者更准确地说：对实现子建模——借助对（纯）λ-演算的解释，该解释定义如下：

- 给定元素 a、$b \in \mathscr{A}$，我们将它们的应用 $ab \in \mathscr{A}$ 定义为：

$$ab := \bigwedge \{c \in \mathscr{A} : a \preccurlyeq (b \to c)\}.$$

- 给定任意函数 $f\colon \mathscr{A} \to \mathscr{A}$，我们将其抽象 $\lambda f \in \mathscr{A}$ 定义为：

$$\lambda f := \bigwedge_{a \in \mathscr{A}} (a \to f(a)).$$

事实 2.2（应用与抽象的性质）。对于所有元素 a、a'、b、b'、$c \in \mathscr{A}$，以及所有函数 f、$f'\colon \mathscr{A} \to \mathscr{A}$：

(1) 若 $a \mathbin{4} a'$ 且 $b \mathbin{4} b'$，则 $ab \mathbin{4} a'b'$ （应用具有单调性）

（2）如果 $f \mathbin{4} f'$（逐点），那么 $\lambda f \preccurlyeq \lambda f'$ （抽象是单调的）

(3) $(\lambda f)a \mathrel{4} f(a)$ （β-约简）
(4) $a \preccurlyeq \lambda f(x \mapsto ax)$ （η-展开）
（5）$ab \mathrel{4} c$ 当且仅当 $a \mathrel{4} (b \to c)$ （伴随）

得益于上述两个运算，我们可以将每个带参数[1]的闭合 λ-项 t 在 $\mathscr{A}$ 中解释为由下式定义的元素 $(t)^{\mathscr{A}} \in \mathscr{A}$：

$$\begin{aligned}(a)^{\mathscr{A}} &:= a\\ (tu)^{\mathscr{A}} &:= t^{\mathscr{A}} u^{\mathscr{A}}\\ (\lambda x.\, t)^{\mathscr{A}} &:= \lambda\big(a \mapsto (t[x := a])^{\mathscr{A}}\big)\end{aligned}$$

事实 2.3. 对所有带有 $\mathscr{A}$ 中参数的 λ-项 t，t′：

(1) 若 $t \twoheadrightarrow_\beta t'$，则 $(t)^{\mathscr{A}} \preccurlyeq (t')^{\mathscr{A}}$ *(β-reduction)*
(2) 若 $t \twoheadrightarrow_\eta t'$，则 $(t)^{\mathscr{A}} \succcurlyeq (t')^{\mathscr{A}}$ (η-归约)

请注意，解释函数 $t \mapsto (t)^{\mathscr{A}}$ 不一定是单射。例如，在 $\mathscr{A}$ 是完备 Heyting 代数的特殊情形下（例 2.1 (1)），容易验证应用会退化为交（即：对所有 $a、b \in \mathscr{A}$，$ab = a \wedge b$），并且所有纯 λ-项 t（不含参数）都被解释为顶真值：$(t)^{\mathscr{A}} = \top$。另一方面，当 $\mathscr{A}$ 是由一个非退化的（全）应用结构诱导，且该结构也是组合代数时（例 2.1 (2)），纯 λ-项（不含参数）的解释在 $\beta\eta$-范式上必定是单射。

序关系 $a \mathrel{4} b$ 的两面性。由前文可知，多态 λ-演算（例如 Curry 风格的系统 F，可能还扩展了有限交类型）中的项和类型都可以在任意蕴涵结构 $\mathscr{A}$ 中解释。在这种情况下，很容易验证：如果某个纯 λ-项 t 在上述类型系统中具有某个类型 U，那么无论蕴涵结构 $\mathscr{A}$ 如何，我们都有 $(t)^{\mathscr{A}} \preccurlyeq (U)^{\mathscr{A}}$。（从技术上说，这一结果是通过引入一种恰当的语义子类型关系来证明的，见 [22], § 2.5。）

上述观察表明，蕴涵结构（以及蕴涵代数）核心中的偏序关系 4 可以有不同的含义，具体取决于我们将其参数视为类型还是实现子。因此，$a \mathrel{4} b$ 实际上可以理解为：

- 若将 a 和 b 都视为类型，则 a 是 b 的子类型；
- 若将 a 视为实现子、将 b 视为类型，则 a 具有类型 b；
- 若将 a 和 b 都视为实现子，则 a 比 b 定义得更充分。

接下来，我们将频繁提及（语义）组合子 $K^{\mathscr{A}} = (\lambda xy.\, x)^{\mathscr{A}}$ 和 $S^{\mathscr{A}} = (\lambda xyz.\, xz(yz))^{\mathscr{A}}$，并注意到这两个组合子实际上分别与它们在 $\mathscr{A}$ 中的主类型相同，即：

事实 2.4（组合子 K 和 S）。在任意蕴涵结构 $\mathscr{A}$ 中，我们有

$$\mathbf{K}^{\mathscr{A}} = \bigwedge_{a,b\in\mathscr{A}} (a \to b \to a)$$

and

$$\mathbf{S}^{\mathscr{A}} = \bigwedge_{a,b,c\in\mathscr{A}} ((a \to b \to c) \to (a \to b) \to a \to c)$$

[1]回想一下，带有 $\mathscr{A}$ 中参数的 λ-项，是指纯 λ演算中的一个项，它可以包含取自集合 $\mathscr{A}$ 的（在计算上惰性的）常量。

控制算子“call/cc”的解释。上述对蕴涵结构 $\mathscr{A}$ 中的 λ-项的解释可扩展到算子 cc（“call/cc”，意为“调用当前延续”），前提是将后者与皮尔士定律等同起来：

$$(\mathsf{cc})^{\mathscr{A}} := \bigwedge_{a,b\in\mathscr{A}} (((a \to b) \to a) \to a) = \bigwedge_{a\in\mathscr{A}} ((\neg a \to a) \to a).$$

不过请注意，在大多数蕴涵结构中（通常是源自直觉主义可实现性的那些结构），上述定义会退化为 $\bot$。

2.2. 分离子与蕴涵代数。蕴涵结构并不自带固定的真值判定标准，用来说明 $\mathscr{A}$ 中哪些元素被视为真。从技术上讲，这种标准由一个分离子给出，即满足以下条件的子集 $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{A}$：

(1) If $a \in \mathscr{S}$ and $a \preccurlyeq b$, then $b \in \mathscr{S}$ （向上封闭）
(2) $\mathbf{K}^{\mathscr{A}} \in \mathscr{S}$ and $\mathbf{S}^{\mathscr{A}} \in \mathscr{S}$ (Hilbert axioms)
(3) If $a \to b \in \mathscr{S}$ and $a \in \mathscr{S}$, then $b \in \mathscr{S}$ (modus ponens)

记作 $\mathsf{K}^{\mathscr{A}} = (\lambda xy\,.\,x)^{\mathscr{A}}$ 和 $\mathsf{S}^{\mathscr{A}} = (\lambda xyz\,.\,xz(yz))^{\mathscr{A}}$。当 $\mathscr{S}$ 满足 $\bot \notin \mathscr{S}$ 时，分离子 $\mathscr{S}$ 是一致的（分别地，当满足 $\mathsf{cc}^{\mathscr{A}} \in \mathscr{S}$ 时是经典的）。蕴涵代数就是配备了一个分离子 $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{A}$ 的蕴涵结构 $(\mathscr{A}, 4, \to)$。当其底层分离子 $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{A}$ 具有相应性质时，蕴涵代数 $(\mathscr{A}, 4, \to, \mathscr{S})$ 也是一致的（分别地，经典的）。

分离子具有以下闭包性质：

事实 2.5. 对任意元素 a、b $\in \mathscr{A}$ 以及任意分离子 $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{A}$：
(1) 若 a $\in \mathscr{S}$ 且 b $\in \mathscr{S}$，则 ab $\in \mathscr{S}$ (2) 若 a $\in \mathscr{S}$ 且 b $\in \mathscr{S}$，
则 a $\times$ b $\in \mathscr{S}$ (3) 若 a $\in \mathscr{S}$ 或 b $\in \mathscr{S}$，则 a $+$ b $\in \mathscr{S}$ (4)
若 t 是一个参数取自 $\mathscr{S}$ 的闭合 λ-项，则 $(\mathsf{t})^{\mathscr{A}} \in \mathscr{S}$。

（最后一项直观地表达了，所有“证明”——可能包含 $\mathscr{S}$ 中的“公理”——都为“真”。）

在蕴涵结构 $\mathscr{A}$ 为完备 Heyting 代数的特殊情形下（例 2.1 (1)），可以证明分离子与滤子相同。然而，一般而言，分离子并非滤子，因为它们（通常）对二元交满足封闭性。

2.3. 蕴涵三元组。在任意蕴涵代数 $\mathscr{A} = (\mathscr{A}, 4, \to, \mathscr{S})$ 中，分离子 $\mathscr{S}$ 在集合范畴 $\mathscr{A}$ 上诱导出一种蕴涵预序，记作 a $\vdash_{\mathscr{S}}$ b，其定义如下：

$$a \vdash_{\mathscr{S}} b :\equiv (a \to b) \in \mathscr{S} \qquad (a, b \in \mathscr{A})$$

根据分离子的定义，可知预序集 $(\mathscr{A}, \vdash_{\mathscr{S}})$ 是一个预海廷代数（当分离子 $\mathscr{S}$ 是经典的时，它甚至是一个预布尔代数）。

更一般地，对于每个集合范畴 I，分离子 $\mathscr{S}$ 在由 I 索引的真值族集合 $\mathscr{A}_I$ 上诱导出一种蕴涵预序，记作 $\vdash_{\mathscr{S}[I]}$，其定义如下：

$$a \vdash_{\mathscr{S}[I]} b :\equiv \bigwedge_{i\in I} (a_i \to b_i) \in \mathscr{S} \qquad (a, b \in \mathscr{A}^I)$$

同样，预序集 $(\mathscr{A}_I, \vdash_{\mathscr{S}[I]})$ 是一个预海廷代数（或预布尔代数）。此外，可以证明 [22]：

定理 2.6（蕴涵三胞腔）。对于每个蕴涵代数 $\mathscr{A} = (\mathscr{A}, 4, \to, \mathscr{S})$，将每个集合 I 映射到预 Heyting 代数 $(\mathscr{A}_I, \mathscr{S}[I])$ 的对应关系是函子性的，并构成一个基于集合范畴的三胞腔，其含义见 Hyland、Johnstone 和 Pitts [12]。

如 [22], 所示，上述构造涵盖了迄今已知的所有三胞腔：强迫三胞腔（由完备 Heyting 代数诱导）、直觉主义可实现性三胞腔（由全组合代数乃至部分组合代数诱导，并采用某种完备化技巧），以及经典可实现性三胞腔（由抽象 Krivine 结构诱导）。

事实上，我们甚至可以证明 [23]：

定理 2.7（完备性）。每个基于集合范畴的 tripos（依照 Hyland、Johnstone 和 Pitts [12] 的定义）都同构于一个蕴涵 tripos。

3. 范畴 $\mathrm{Asm}_{\mathscr{A}}$ 的构造

从现在起，$\mathscr{A} = (\mathscr{A}, 4, \to, \mathscr{S})$ 表示一个给定的蕴涵代数。

3.1. 范畴 $\mathrm{Asm}_{\mathscr{A}}$ 的定义。由蕴涵代数 $\mathscr{A}$，我们如下定义集合范畴 $_{\mathscr{A}}$ 上组装的范畴 $\mathrm{Asm}\,\mathscr{A}$：

- $\mathrm{Asm}_{\mathscr{A}}$ 的对象是 $\mathscr{A}$ 上的组装，即：对 (X, E_X)，其中 X 是任意集合，称为 X 的载体；而函数 $E_X : X \to \mathscr{S}$ 称为 X 的存在谓词，它将每个元素 $x \in X$ 关联到一个真值 $E_X(x)$（属于分离子 $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{A}$），直观上为元素 x 在组装 X 中的存在提供“证明”。
- 给定两个组装 $X = (X, E_X)$ 和 $Y = (Y, E_Y)$，从 X 到 Y 的态射是满足以下跟踪条件的集合论函数 $f : X \to Y$：

$$\bigwedge_{x \in X} (\mathbf{E}_X(x) \to \mathbf{E}_Y(f(x))) \in \mathscr{S}.$$

注意，为了证明上述条件，只需（显然也必须）给出一个元素 $s_f \in \mathscr{S}$——我们称之为 f 的跟踪器——使得

$$s_f \preccurlyeq \bigwedge_{x \in X} (\mathbf{E}_X(x) \to \mathbf{E}_Y(f(x))).$$

（实践中，我们将大多数跟踪器写成如下形式的“证明”：$s_f := (t)^{\mathscr{A}}$，其中 t 是遵循 Curry–Howard对应构造的纯 λ-项。）

给定组装 X、Y、Z，以及分别由元素 s_f、$s_g \in \mathscr{S}$ 跟踪的态射 $f : X \to Y$ 和 $g : Y \to Z$，我们很容易验证

$$(\lambda x \,.\, s_g\,(s_f\, x))^{\mathscr{A}} \preccurlyeq \bigwedge_{x \in X} (\mathbf{E}_X(x) \to \mathbf{E}_Z((g \circ f)(x))),$$

因此，$g \circ f : X \to Z$ 也是一个态射。最后，我们有

$$(\lambda x \,.\, x)^{\mathscr{A}} \preccurlyeq \bigwedge_{x \in X} (\mathbf{E}_X(x) \to \mathbf{E}_X(\mathrm{id}_X(x))),$$

因此 $\mathrm{id}_X : X \to X$ 也是一个态射。这清楚地表明 $\mathrm{Asm}_{\mathscr{A}}$ 是一个范畴.

请记住，在组装范畴中，态射就是满足相应跟踪条件的集合论映射。因此，两个态射在范畴 $\mathrm{Asm}_{\mathscr{A}}$ 中相等，当且仅当它们作为集合论函数相等。

3.2. 伴随函子 $\Gamma : \mathrm{Asm}_{\mathscr{A}} \to \mathrm{Set}$ 和 $\Delta : \mathrm{Set} \to \mathrm{Asm}_{\mathscr{A}}$。$\mathscr{A}$ 上的组装范畴自然带有一个遗忘函子 $\Gamma : \mathrm{Asm}_{\mathscr{A}} \to \mathrm{Set}$，它将每个组装 X 映射到其载体 $\Gamma X := X$，并将每个态射 $f : X \to Y$ 映射为其自身，即集合论函数：$\Gamma f := f : X \to Y$。（因此，按照构造，函子 Γ 是忠实的。）

函子 $\Gamma : \mathrm{Asm}_{\mathscr{A}} \to$ 集合范畴 实际上是函子 $\Delta :$ 集合范畴 $\to \mathrm{Asm}_{\mathscr{A}}$ 的左伴随，该函子可定义如下：

• 对于每个集合范畴 X，我们将 ΔX 定义为一个组装，其载体为 $\Delta X := X$，且其存在谓词为常值函数 $E_{\Delta X} := (\mapsto \top)$，该函数将 X 的每个元素映射到真值 $\top \in \mathscr{S}$。

• 对于每个集合论映射 $f : X \to Y$，我们将态射 $\Delta f : \Delta X \to \Delta Y$ 定义为映射 f 本身，并注意到这样的映射由真值 $\top \in \mathscr{S}$ 跟踪。

根据构造，函子 $\Delta : \mathbf{Set} \to \mathbf{Asm}_{\mathscr{A}}$ 是忠实且本质满的。

命题 3.1。我们有伴随：$\mathbf{Asm}_{\mathscr{A}} \quad \bot \; \mathbf{Set} \xrightarrow{\Delta}$

证明。给定对象 $X \in \mathbf{Asm}_{\mathscr{A}}$ 和 $Y \in \mathbf{Set}$，只需注意每个集合论映射 $f : X \to \Delta Y$ 都由真值 $\top \in \mathscr{S}$ 跟踪，因此我们有

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Asm}_{\mathscr{A}}}(X, \Delta Y) \;=\; \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(\Gamma X, Y)\,. \qquad \square$$

由上述伴随可清楚看出，$\Gamma : \mathbf{Asm}_{\mathscr{A}} \to \mathbf{Set}$ 保持 $\mathbf{Asm}_{\mathscr{A}}$ 中实际存在的所有余极限，而 $\Delta : \mathbf{Set} \to \mathbf{Asm}_{\mathscr{A}}$ 保持 Set 中的所有极限。

3.3. 刻画单态射和满态射。

命题 3.2（$\mathbf{Asm}_{\mathscr{A}}$ 中的单态射与满态射）。在范畴 $\mathbf{Asm}_{\mathscr{A}}$ 中，箭头 $f : X \to Y$ 是单态射（分别是满态射），当且仅当它作为集合论映射是单射（分别是满射）。

证明。设 X 和 Y 为组装。由于每个态射 $f : X \to Y$ 也是一个集合论映射 $f : X \to Y$，显然，若 f 是单射（分别是满射），则它作为 $\mathbf{Asm}_{\mathscr{A}}$ 中的态射是单态射（分别是满态射）。现在证明反向蕴含:

• 假设 $f : X \to Y$ 是 $\mathbf{Asm}_{\mathscr{A}}$ 中的单态射。给定 $x1, x_2 \in X$，满足 $f(x1) = f(x2)\ (\in Y)$，我们要证明 $x_1 = x2$。为此，记 $1 = \{*\}$ 为 Set 的终对象，并考虑由 $h1, h2 : \Delta 1 \to X$ 定义的态射，其中 $h1(*) = x1$，$h2(*) = x2$。（映射 $h1, h2 : 1 \to X$ 分别由真值 $(\top \to EX(x1)) \in \mathscr{S}$ 和 $(\top \to EX(x2)) \in \mathscr{S}$ 追踪。）由于 $f(x1) = f(x2)$，可得 $f \circ h_1 = f \circ h2$，因此在 $\mathbf{Asm}_{\mathscr{A}}$ 中 $h_1 = h2$（因为 f 是单态射），从而 $x_1 = x2$。

• 假设 $f : X \to Y$ 是 $\mathbf{Asm}_{\mathscr{A}}$ 中的满态射。我们要证明 $f : X \to Y$ 是满射，这相当于证明 f 是 Set 中的满态射。为此，考虑一个集合 Z 及集合论映射 $h_1、h_2 : Y \to Z$，使得 $h_1 \circ f = h_2 \circ f$。利用等式 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(Y, Z) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Asm}_{\mathscr{A}}}(Y, \Delta Z)$（参见命题 3.1 的证明），我们注意到这些集合论映射也是 $\mathbf{Asm}_{\mathscr{A}}$ 中的态射 $h_1、h_2 : Y \to \Delta Z$，因此 $h_1 = h_2$ 在 $\mathbf{Asm}_{\mathscr{A}}$ 中成立（因为 f 是满态射），进而 $h_1 = h_2$ 在 Set 中成立。$\square$

然而，范畴 $\mathbf{Asm}_{\mathscr{A}}$ 一般而言并非平衡的，因为存在既是单态射又是满态射、却不是同构的态射。作为反例，考虑由[2]定义的两点组装 2

$$\begin{aligned}
\underline{\mathbf{2}} &:= \quad 2 \;=\; \{0, 1\} \\
\mathbf{E_2}(0) &:= (\lambda xy\,.\,x)^{\mathscr{A}} \;=\; \bigwedge_{a,b \in \mathscr{A}} (a \to b \to a) \;\in\; \mathscr{S} \\
\mathbf{E_2}(1) &:= (\lambda xy\,.\,y)^{\mathscr{A}} \;=\; \bigwedge_{a,b \in \mathscr{A}} (a \to b \to b) \;\in\; \mathscr{S}
\end{aligned}$$

[2]请读者验证，在范畴 $\mathbf{Asm}_{\mathscr{A}}$ 中，对象 2 是余积 $\mathbf{1} + \mathbf{1}$（即布尔值类型），其中 $\mathbf{1} := \Delta 1$ 是该范畴的终对象。

以及态射 $\mathsf{i}:\ \mathbf{2} \to \Delta 2$，其底层的集合论函数 $\mathsf{i}:\ 2 \to 2$ 是恒等函数（由 $\top \in \mathscr{S}$ 跟踪）。

命题 3.3。态射 $\mathsf{i}:\ \mathbf{2} \to \Delta 2$ 始终是单态射和满态射（与蕴涵代数 $\mathscr{A}$ 无关），但当且仅当分离子 $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{A}$ 是滤子时，它是同构。

证明。显然，态射 $\mathsf{i}:\ \mathbf{2} \to \Delta 2$，它在 $\mathrm{Asm}_{\mathscr{A}}$ 中既是单态射又是满态射（因为它在集合范畴中是双射），当且仅当逆集合函数 $\mathrm{id}_2:\ 2 \to 2$ 可作为类型为 $\Delta 2 \to \mathbf{2}$ 的态射由 $\mathrm{Asm}_{\mathscr{A}}$ 跟踪时，才是同构。为此，我们注意到

$$\bigwedge_{x\in 2}(\mathbf{E}_{\Delta 2}(x) \to \mathbf{E_2}(x)) \ =\ \top \to \bigwedge_{x\in 2} \mathbf{E_2}(x) \ =\ \top \to \pitchfork^{\mathscr{A}},$$

撰写 $\pitchfork^{\mathscr{A}} := \bigwedge_{a,\ b\in\mathscr{A}}(\mathsf{a} \to \mathsf{b} \to \mathsf{a} \wedge \mathsf{b}) \ = (\lambda \mathsf{xy}\,.\,\mathsf{x})^{\mathscr{A}} \wedge (\lambda \mathsf{xy}\,.\,\mathsf{y})^{\mathscr{A}}$ $\mathscr{A}$ [22, §3.7] 中的非确定性选择算子。我们最后观察到，

$$\begin{array}{lll} \bigwedge_{x\in 2}(\mathbf{E}_{\Delta 2}(x) \to \mathbf{E_2}(x)) \in \mathscr{S} & \text{iff} & \top \to \pitchfork^{\mathscr{A}} \in \mathscr{S} \\ & \text{iff} & \pitchfork^{\mathscr{A}} \in \mathscr{S} \\ & \text{iff} & \mathscr{S} \text{ is a filter (from [22, Prop. 3.27]).} \end{array}$$ □

备注 3.4. 回想一下，在蕴涵代数中，分离子一般不是滤子。一个典型的反例是由下式定义的（直觉主义上一致的）蕴涵代数：

- $\mathscr{A} := \mathrm{P}(\Lambda)$（表示 Λ 所有闭合 λ 项按 β 转换取等价类组成的集合）
- $\mathsf{a}\ 4\ \mathsf{b} :\equiv \mathsf{a} \subseteq \mathsf{b}$（$\lambda$项集合的包含关系）
- $\mathsf{a} \to \mathsf{b} := \{\mathsf{t} \in \Lambda \mid \forall \mathsf{u} \in \mathsf{a}, \mathsf{tu} \in \mathsf{b}\}$（克莱尼箭头）
- $\mathscr{S} := \{\mathsf{a} \in \mathscr{A} \mid \mathsf{a} \text{ 非空}\}$

要证明分离子 $\mathscr{S}$不是滤子，取 $\mathsf{a} := \{\lambda \mathsf{xy}\,.\,\mathsf{x}\} \in \mathscr{S}$和 $\mathsf{b} := \{\lambda \mathsf{xy}\,.\,\mathsf{y}\} \in \mathscr{S}$，并注意到 $\mathsf{a} \cap \mathsf{b} = \varnothing$（由丘奇-罗瑟性质可知），因此 $\mathsf{a} \cap \mathsf{b} \notin \mathscr{S}$。

4. 准托扑斯的结构

本节旨在证明，组装范畴 $\mathrm{Asm}_{\mathscr{A}}$ 是一个拟托扑斯，即：范畴 $\mathrm{Asm}_{\mathscr{A}}$ 具有所有有限极限（§ 4.1）和余极限（§ 4.2），是局部笛卡尔闭的（§ 4.3），并且具有强子对象分类器（§ 4.4）。此外，我们还将证明，这个拟托扑斯具有一个自然数对象（§ 4.5）。

4.1. 有限极限。我们先证明 $\mathrm{Asm}_{\mathscr{A}}$ 具有所有有限极限。

Pro位置 4.1. 组装 $1 := \Delta 1$（其中 $1 = \{*\}$）是 $\mathrm{Asm}_{\mathscr{A}}$ 的终对象 .

证明。事实上，对于每个组装 X，我们注意到

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Asm}_{\mathscr{A}}}(X, \Delta 1) \ =\ \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(\Gamma X, 1) \ =\ \{(_ \in \underline{X} \mapsto *)\}\,.$$ □

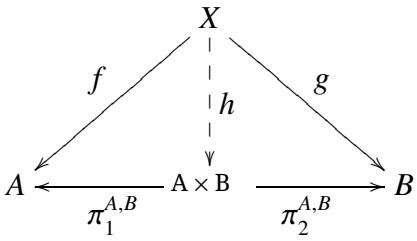
现在，给定组装 A 和 B，我们定义积组装 $\mathsf{A} \times \mathsf{B}$，如下：

- $\underline{A \times B} \ :=\ \underline{A} \times \underline{B}$;
- $\mathbf{E}_{A\times B}(a, b) \ :=\ \mathbf{E}_A(a) \sqcap \mathbf{E}_B(b)\ \ (\in \mathscr{S})\quad \text{for all } (a, b) \in \underline{A \times B}.$

我们很容易验证，集合论投影 $\pi^{A,\ B}_{,\ 1} : \mathsf{A} \times \mathsf{B} \to \mathsf{A}$ 和 $\pi^{A,\ B}_{,\ 2} : \mathsf{A} \times \mathsf{B} \to \mathsf{B}$ 实际上是 $\mathrm{Asm}_{\mathscr{A}}$ 中类型为 $\mathsf{A}\times\mathsf{B} \to \mathsf{A}$ 和 $\mathsf{A}\times\mathsf{B} \to \mathsf{B}$ 的态射（分别），因为它们分别由真值 $(\lambda \mathsf{z}\,.\,\mathsf{z}\ (\lambda \mathsf{xy}\,.\,\mathsf{x}))^{\mathscr{A}}$ 和 $(\lambda \mathsf{z}\,.\,\mathsf{z}\ (\lambda \mathsf{xy}\,.\,\mathsf{y}))^{\mathscr{A}} \in \mathscr{S}$ 跟踪。

命题 4.2（二元积）。对于任意组装 A 和 B，配备两个态射 $\pi^{A,\ B}_{,\ 1} : \mathsf{A} \times \mathsf{B} \to \mathsf{A}$ 和 $\pi^{A,\ B}_{,\ 2} : \mathsf{A} \times \mathsf{B} \to \mathsf{B}$ 的积组装 $\mathsf{A} \times \mathsf{B}$，是范畴 $\mathrm{Asm}_{\mathscr{A}}$ 中 A 和 B 的二元积。

证明。给定组装 X 以及态射 $f : X \to A$ 和 $g : X \to B$，我们要证明存在唯一的态射 $h : X \to A \times B$，使得 $\pi^{A,B}_1 \circ h = f$ 且 $\pi^{A,B}_2 \circ h = g$:



h 的存在性。考虑映射 $h : X \to A \times B$，其定义为对所有 $x \in X$，$h(x) := (f(x), g(x))$。设 s_f、$s_g \in \mathscr{S}$ 分别为态射 $f : X \to A$ 和 $g : X \to B$ 的跟踪器，我们注意到

$$(\lambda xz\,.\,z\,(s_f\,x)\,(s_g\,x))^{\mathscr{A}} \preccurlyeq \bigwedge_{x \in X} (\mathbf{E}_X(x) \to \mathbf{E}_{A\times B}(h(x)))\,,$$

这证明了h是类型$X \to A \times B$ 的态射。根据 h 的定义，显然有 $\pi^{A,B}_1 \circ h = f$以及 $\pi^{A,B}_2 \circ h = g$。

h 的唯一性。由等式 $\pi^{A,B}_1 \circ h = f$ 和 $\pi^{A,B}_2 \circ h = g$ 可明显得出。 □

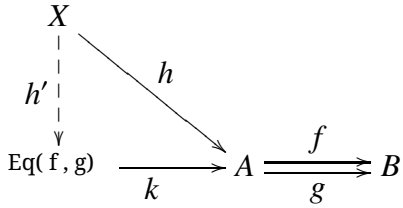
最后，给定范畴 $\mathrm{Asm}_{\mathscr{A}}$ 中的平行箭头 $f, g : A \to B$，我们定义一个新的组装 Eq(f , g)，如下:

- $\mathrm{Eq}(f, g) := \{a \in A \mid f(a) = g(a)\}$;
- $\mathbf{E}_{\mathrm{Eq}(f,g)}(a) := \mathbf{E}_A(a)$ $(\in \mathscr{S})$ for all $a \in \mathrm{Eq}(f, g)$.

我们还考虑单态射 $k : \mathrm{Eq}(f, g) \to A$，它由包含映射 $\mathrm{Eq}(f, g) \subseteq A$ 诱导，并由真值 $(\lambda x\,.\,x)^{\mathscr{A}} \in \mathscr{S}$ 跟踪。

命题 4.3（等化子）。对于 $\mathrm{Asm}_{\mathscr{A}}$ 中任意一对平行箭头 $f, g : A \to B$，组装 Eq(f , g) 连同箭头 $k : \mathrm{Eq}(f , g) \to A$ 是 $\mathrm{Asm}_{\mathscr{A}}$ 中 f 和 g 的等化子。

证明。给定一个组装 X 和一个态射 $h : X \to A$，使得 $f \circ h = g \circ h$，我们要证明存在唯一的态射 $h' : X \to \mathrm{Eq}(f , g)$，满足 $k \circ h' = h$:



h′ 的存在性。由于 $f \circ h = g \circ h$（在集合论意义下），因此 $\mathrm{Im}(h) \subseteq \mathrm{Eq}(f, g)$。于是我们可以定义 $h' : X \to \mathrm{Eq}(f, g)$，令对所有 $x \in X$，$h'(x) := h(x)$，并采用 $h : X \to A$ 的同一个跟踪器。根据构造，显然有 $k \circ h' = h$。

h′的唯一性。由等式 $k \circ h' = h$ 显然可得。 □

由命题 4.1、4.2 和 4.3，显然可知:

命题 4.4（有限极限）。范畴 $\mathrm{Asm}_{\mathscr{A}}$ 具有所有有限极限。

此外，从上述 $\mathrm{Asm}_{\mathscr{A}}$ 中的构造（这些构造基于 Set 中的等函构造）可以清楚看出，遗忘函子 $\Gamma : \mathrm{Asm}_{\mathscr{A}} \to \mathrm{Set}$ 保持终对象、二元积（及相应的投影）和等化子（及相应的包含映射）。因此:

命题 4.5（Γ 保持所有有限极限）。遗忘函子 $\Gamma : \mathrm{Asm}_{\mathscr{A}} \to \mathrm{Set}$ 保持 $\mathrm{Asm}_{\mathscr{A}}$ 中的所有有限极限。

4.2. 有限余极限。现在让我们证明 $\mathrm{Asm}_{\mathscr{A}}$ 具有所有有限余极限。

命题 4.6. 组装 $0 := \Delta\varnothing$ 是 $\mathrm{Asm}_{\mathscr{A}}$ 的始对象。

证明。事实上，对于每个组装 X，我们观察到，

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Asm}_{\mathscr{A}}}(\Delta\varnothing, X) \;=\; \{i_X\},$$

其中，i_X 是将 $\varnothing$ 包含到 X 中的包含映射（由 $\top \in \mathscr{S}$ 跟踪）。 □

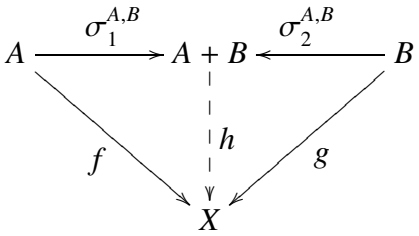
现在，给定组装 A 和 B，我们定义直和组装 $A + B$，令：

- $A + B := A \uplus B = (\{0\} \times A) \cup (\{1\} \times B)$;
- $E_{A\times B}(0, a) := (\lambda xy.\, x)^{\mathscr{A}} \sqcap E_A(a)$ ($\in \mathscr{S}$) 对所有 $a \in A$;
- $E_{A\times B}(1, b) := (\lambda xy.\, y)^{\mathscr{A}} \sqcap E_B(b)$ ($\in \mathscr{S}$) 对所有 $b \in B$.

我们很容易验证，余积注入 $\sigma^{A,B}_1 : A \to A + B$ 和 $\sigma^{A,B}_2 : B \to A + B$ 实际上分别是 $\mathrm{Asm}_{\mathscr{A}}$ 中类型为 $A \to A + B$ 和 $B \to A + B$ 的态射，因为它们分别由真值 $(\lambda x_0 z.\, z\ (\lambda xy.\, x)\ x_0)^{\mathscr{A}}$ 和 $(\lambda y_0 z.\, z\ (\lambda xy.\, y)\ y_0)^{\mathscr{A}} \in \mathscr{S}$ 追踪。

命题 4.7（二元余积）。对于所有组装 A 和 B，配备两个态射 $\sigma^{A,B}_1 : A \to A + B$ 和 $\sigma^{A,B}_2 : B \to A + B$ 的直和组装 $A + B$ 是范畴 $\mathrm{Asm}_{\mathscr{A}}$ 中 A 和 B 的二元余积。

证明。给定一个组装 X 和态射 $f : A \to X$ 与 $g : B \to X$，我们要证明存在唯一的态射 $h : A + B \to X$，使得 $h \circ \sigma^{A,B}_1 = f$ 且 $h \circ \sigma^{A,B}_2 = g$:



h 的存在性。考虑映射 $h : A + B \to X$，其定义为：对所有 $a \in A$，$h(0, a) := f(a)$；对所有 $b \in B$，$h(1, b) = g(b)$。设 s_f、$s_g \in \mathscr{S}$ 分别为态射 $f : A \to X$ 和 $g : B \to X$ 的跟踪器，我们注意到

$$(\lambda z.\, z\,(\lambda uv.\, u\,(s_f\, v)\,(s_g\, v)))^{\mathscr{A}} \;\preccurlyeq\; \bigwedge_{c \in A+B} (\mathbf{E}_{A+B}(c) \to \mathbf{E}_X(h(c))),$$

这证明了 h 是类型为 $A + B \to X$ 的态射。根据 h 的定义，显然 $h \circ \sigma^{A,B}_1 = f$ 且 $h \circ \sigma^{A,B}_2 = g$。

h 的唯一性。由等式 $h \circ \sigma^{A,B}_1 = f$ 和 $h \circ \sigma^{A,B}_2 = g$ 显而易见。 □

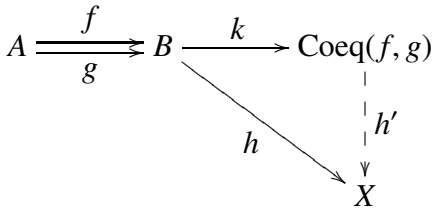
最后，对于平行箭头 $f, g : A \to B$（在范畴 $\mathrm{Asm}_{\mathscr{A}}$ 中），我们定义一个新的组装 $\mathrm{Coeq}(f, g)$，其定义如下：

- $\mathrm{Coeq}(f, g) := B/\sim$，其中 $\sim$ 是 B 上满足对所有 $a \in A$ 都有 $f(a) \sim g(a)$ 的最小等价关系。
- $E\mathrm{Coeq}(f,g)(c) := \exists_{b \in c}\, E_B(b) = \bigwedge_{v \in \mathscr{A}} \Big(\big(\bigwedge_{b} (c(E_B(b)) \to v) \big) \to v \Big)$ 对所有 $c \in \mathrm{Coeq}(f, g)$ 都成立。（给定一个等价类 $c \in B/\sim = \mathrm{Coeq}(f, g)$，并设某个 $b_0 \in c$ 对应的 $s_0 := E_B(b_0)$，我们注意到 $(\lambda z.\, z\ s_0)^{\mathscr{A}} \preccurlyeq \exists_{b \in c} E_B(b)$，这证明了 $\exists_{b \in c} E_B(b) \in \mathscr{S}$。）

我们还考虑由从 B 到 Coeq(f , g) = B/~ 的典范满射所诱导、并由真值 $(\lambda xz\,.\,zx)^{\mathscr{A}}$ 跟踪的满态射 k : B → Coeq(f, g)。

命题 4.8（余等化子）。对于 $\mathrm{Asm}_{\mathscr{A}}$ 中的任意平行箭头 f、g: A → B，配备箭头 k: B → Coeq(f , g) 的组装 Coeq(f , g) 是 $\mathrm{Asm}_{\mathscr{A}}$ 中 f 和 g 的余等化子。

证明。给定一个组装 X 以及一个态射 h: B → X，满足 h ∘ f = h ∘ g，我们要证明存在唯一的态射 h′: Coeq(f , g) → X，使得 h′ ∘ k = h:



h′ 的存在性。由于 h ∘ f = h ∘ g，对于所有满足 b ~ b′ 的 b、b′ ∈ B，都有 h(b) = h(b′)（根据等价关系 ~的定义）。因此，映射 h: B → X 可通过商 B/~ 分解为映射 h′ : B/~ → X，使得 h′ ∘ k = h。给定态射 h: B → X 的跟踪器 $s_h \in \mathscr{S}$，我们于是注意到

$$(\lambda z\,.\,z\,s_h)^{\mathscr{A}} \leqslant \bigwedge_{c \in B/\sim} (\mathbf{E}_{\mathrm{Coeq}(f,g)}(c) \to \mathbf{E}_X(h'(c)))\,,$$

这证明了 h′ 是一个类型为 Coeq(f , g) → X 的态射。

h′的唯一性。由等式 h′ ∘ k = h 显然可知。 □

由命题 4.6、4.7 和 4.8，显然有:

命题 4.9（有限余极限）。范畴 $\mathrm{Asm}_{\mathscr{A}}$ 具有所有有限余极限。

4.3. 局部笛卡尔闭范畴结构。

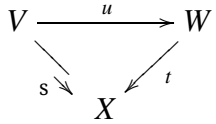
4.3.1. 局部笛卡尔闭范畴。我们先回顾一些关于局部笛卡尔闭范畴的基本事实，这类范畴通常称为 LCCC。

定义 4.10。设 $\mathbb{B}$ 是一个范畴。

1. 固定一个对象 X ∈ $\mathbb{B}$。$\mathbb{B}$ 在 X 上的切片范畴 $\mathbb{B}$/X（或者在上下文清楚时简称切片）以余域为 X 的 $\mathbb{B}$ 的态射为对象。一个态射

$$u : \begin{bmatrix} V \\ \downarrow s \\ X \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} W \\ \downarrow t \\ X \end{bmatrix}$$

是一个交换三角形

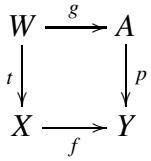


这种三角形的复合通过水平粘贴来实现。

2. $\mathbb{B}^{\to}$ 的箭头范畴，其对象是 $\mathbb{B}$ 的态射。一个态射

$$(g, f) : \begin{bmatrix} W \\ \downarrow t \\ X \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} A \\ \downarrow p \\ Y \end{bmatrix}$$

$\mathbb{B}^{\to}$ 中的态射是一个交换方块



在 $\mathbb{B}$ 中。复合由这些方块的水平粘贴给出。

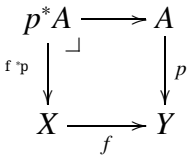
注 4.11。设 $\mathbb{B}$ 是一个范畴。

1. 显然存在函子 $\mathrm{cod}: \mathbb{B}^{\to} \to \mathbb{B}$，它将对象 $[t: W \to X]$ 映射到其余域 X，并将态射

$$(g, f): \begin{bmatrix} W \\ \downarrow t \\ X \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} A \\ \downarrow p \\ Y \end{bmatrix}$$

映射到其余域态射 f。

2. 如果 $\mathbb{B}$ 有拉回，则 cod 是一个 Grothendieck 纤维化，其纤维是对所有 $X \in \mathbb{C}$ 而言的切片范畴 $\mathbb{B}/X$。沿基底中的态射 $f: X \to Y$ $\mathbb{B}$ 对对象 $[p: A \to Y] \in \mathbb{B}/Y$ 进行重索引，由拉回给出



裂解对应于对拉回的选择。

定义 4.12. 令 $\mathbb{B}$ 为一个具有有限极限的范畴。

1. 若对所有对象 A，函子 $(-) \times A$ 都有一个右伴随 $A^{(-)}$，则称 $\mathbb{B}$ 为笛卡尔闭范畴（简称 CCC）。这个右伴随通常称为指数对象。

2. 若一个具有有限极限的范畴 $\mathbb{B}$ 的每个切片 $\mathbb{B}/X$ 都是笛卡尔闭范畴，并且 $\mathrm{cod}: \mathbb{B}^{\to} \to \mathbb{B}$ 中的重指标函子是笛卡尔闭的（保持二元积和指数对象），则称该范畴为局部笛卡尔闭范畴（简称 LCCC）。

定理 4.13. 令 $\mathbb{B}$ 为一个具有有限极限的范畴。以下条件等价：

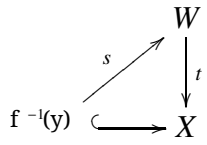
i. $\mathbb{B}$ 是一个局部笛卡尔闭范畴；ii. 对所有态射 $f: X \to Y$，函子 $f^*: \mathbb{B}/Y \to \mathbb{B}/X$ 有一个右伴随 $\prod_f: \mathbb{B}/X \to \mathbb{B}/Y$。

定理 4.13（或许不是该陈述的最一般形式）属于公认结论，例如参见 [8], [28] 或 [1]。

4.3.2. 集合范畴。设有一个集合论函数 $f: X \to Y$。现在我们将进行证明，说明函子 $f^*: \mathrm{Set}/Y \to \mathrm{Set}/X$ 具有一个右伴随。根据定理 4.13，这显然意味着 Set 是一个局部笛卡尔闭范畴；定理 4.13 本身在很大程度上无关紧要，因为这是一个众所周知的事实（事实上对任意托扑斯都成立）。之所以要详细给出证明，是因为随后我们将需要这些构造，以证明 $\mathrm{Asm}_{\mathscr{A}}$ 是一个局部笛卡尔闭范畴。我们并不声称这是原创工作，但确实未能找到关于所采用技术的确切出处。

定义 4.14. 设 $f: X \to Y$ 是一个映射，$y \in Y$ 是一个元素，我们称其为基点。对象 $[t: W \to X] \in \mathrm{Set}/X$ 在基点 $y \in Y$ 上的 f-截面，是一个映射 $s: f^{-1}(y) \to W$，满足 $t \circ s = \mathrm{id}$。

G给定 f : X → Y 和基点 y ∈ Y，$[t\colon W \twoheadrightarrow X]$ 的一个 f-截面 s 使交换图



交换。定义在某个基点上的 t 的 f-截面不必定义在整个 X 上；它是一个从 X 到 W 的偏映射。

记号。给定一个映射 f : X → Y 和一个对象 $[t\colon W \twoheadrightarrow X] \in$ Set/X，我们将记作 e

$$f \Subset t \quad := \quad \left\{(y, s) \mid y \in Y, s \in \mathbf{Set}(f^{-1}(y), W), t \circ s = \mathrm{id}\right\}$$

$[t\colon W \twoheadrightarrow X]$ 在所有基点上的 f-截面所成的集合，以及 bp : f St → Y 对第一投影的记法。

上述第一投影的奇特命名暗示，后者将一个定义在其基点上的偏 f-截面映射过去。

命题 4.15。类之间的映射

$$\prod_f : (\mathbf{Set}/X)_0 \quad \longrightarrow \quad (\mathbf{Set}/Y)_0$$

$$\begin{bmatrix} W \\ \downarrow t \\ X \end{bmatrix} \quad \mapsto \quad \begin{bmatrix} f \Subset t \\ \downarrow \mathrm{bp} \\ Y \end{bmatrix}$$

扩展为函子 $\prod_f$: Set/X → Set/Y，其对态射的作用由下式给出

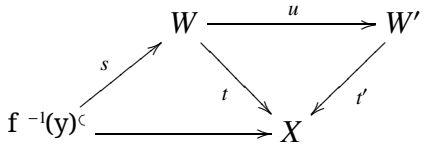
$$\prod_f (u) : \begin{bmatrix} f \Subset t \\ \downarrow \mathrm{bp} \\ Y \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad \begin{bmatrix} f \Subset t' \\ \downarrow \mathrm{bp} \\ Y \end{bmatrix}$$

$$(y, s) \quad \mapsto \quad (y, u \circ s)$$

证明。设

$$u : \begin{bmatrix} W \\ \downarrow t \\ X \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} W' \\ \downarrow t' \\ X \end{bmatrix}$$

为 Set/X 中的一个态射，且 s : f −1(y) → W 是 t 在基点 y ∈ Y 上的一个 f-截面。映射 u ∘ s : f −1(y) → W′ 是 t′ 在同一基点 y ∈ Y 上方的一个 f- 截面，因为交换图



可交换。因此我们有一个映射

$$\prod_f (u) : \begin{bmatrix} f \Subset t \\ \downarrow \mathrm{bp} \\ Y \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad \begin{bmatrix} f \Subset t' \\ \downarrow \mathrm{bp} \\ Y \end{bmatrix}$$

$$(y, s) \quad \mapsto \quad (y, u \circ s)$$

显然，上述内容构成了一个函子 $\prod_f$: 集合范畴/X → 集合范畴/Y。

□

引理 4.16. 假设 $f : X \to Y$，基点 $y \in Y$，且 $v : f^{-1}(y) \to p^{-1}(y)$。典范映射

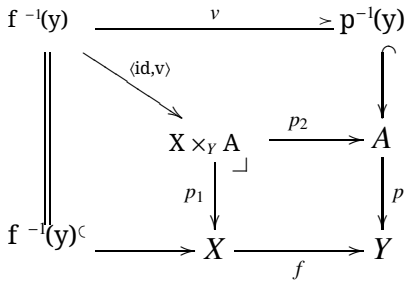
$$\langle \mathrm{id}, v\rangle : f^{-1}(y) \longrightarrow X \times_Y A$$

是 $p_1 : X \times_Y A \to X$ 在 y 上的 f-截面。

证明。假设 $x \in f^{-1}(y)$。我们有

$$\begin{aligned}(f \circ \mathrm{id})(x) &= y \\ &= (p \circ v)(x)\end{aligned}$$

因此，中的外层交换图



交换，因此 $\langle \mathrm{id}, v\rangle$ 是典范映射。 □

命题 4.17. 函子 $\prod_f : \mathrm{Set/X} \to \mathrm{Set/Y}$ 是重索引函子 $f^* : \mathrm{Set/Y} \to \mathrm{Set/X}$ 的右伴随。

证明。设 $[p:A \to Y] \in$ Set/Y，且有一个 $\in$A。令

$$\begin{aligned}k_a : f^{-1}(p(a)) &\longrightarrow p^{-1}(p(a)) \\ x &\mapsto a\end{aligned}$$

为常值映射。映射 $\langle \mathrm{id}, k_a\rangle : f^{-1}(p(a)) \to X \times_Y A$ 是 p(a) 上的 f-截面（参见引理 4.16），因此映射

$$\begin{aligned}\eta_p : A &\longrightarrow f\Sigma p \\ a &\mapsto (p(a), \langle \mathrm{id}, k_a\rangle)\end{aligned}$$

是良定义的。此外，它（显然）是一个态射。

$$\eta_p : \begin{bmatrix} A \\ \downarrow p \\ Y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} f\Sigma p \\ \downarrow \mathrm{bp} \\ Y \end{bmatrix}$$

在 Set/Y 中。假设 $[p:A \to Y] \in$ Set/Y。我们有

$$\begin{aligned}\left(\prod_f \circ f^*\right)\begin{bmatrix} A \\ \downarrow p \\ Y \end{bmatrix} &= \prod_f \begin{bmatrix} X\times_Y A \\ \downarrow p_1 \\ X \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} f\Sigma p_1 \\ \downarrow \mathrm{bp} \\ Y \end{bmatrix}\end{aligned}$$

并声称态射 η_p 是从 $[p:A \to Y]$ 到 $\prod_f$ 的泛态射。

设 $[q:B \to X] \in$ 集合范畴/Set 和

$$w : \begin{bmatrix} A \\ \downarrow p \\ Y \end{bmatrix} \longrightarrow \prod_f \begin{bmatrix} B \\ \downarrow q \\ X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f\Sigma q \\ \downarrow \mathrm{bp} \\ Y \end{bmatrix}$$

集合范畴/Y 中的一个态射。特别地，我们有

$$w(a) \;=\; (p(a), s_{w,a})$$

对于某个从基点 p(a) 出发的 q 的 f-截面 $s_{w,\,a}$。现在，(x, a) $\in$X $\times_Y$A 意味着 x $\in$f^{-1}(p(a))。令

$$\begin{aligned} \bar{w} : X \times_Y A &\longrightarrow B \\ (x, a) &\mapsto s_{w,a}(x) \end{aligned}$$

但 $s_{w,\,a}$是 $[q{:}B \twoheadrightarrow X]$,的一个 f-截面，因此 q $\circ s_{w,\,a} =$ id

$$\bar{w} : f^* \begin{bmatrix} A \\ \downarrow p \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \times_Y A \\ \downarrow p_1 \\ X \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} B \\ \downarrow q \\ X \end{bmatrix}$$

是 Set/X 中的一个态射。我们有如下映射

$$\begin{aligned} \prod_f(\bar{w}) : f \Subset p_1 &\longrightarrow f \Subset q \\ (y, s) &\mapsto (y, \bar{w} \circ s) \end{aligned}$$

这是一个态射

$$\prod_f(\bar{w}) : \begin{bmatrix} f \Subset p_1 \\ \downarrow \mathrm{bp} \\ Y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} f \Subset q \\ \downarrow \mathrm{bp} \\ Y \end{bmatrix}$$

在 Set/Y 中（参见命题 4.15），因此特别地

$$\begin{aligned} \left(\prod_f(\bar{w}) \circ \eta_p \right)(a) &= \prod_f(\bar{w})(p(a), \langle \mathrm{id}, k_a \rangle) \\ &= (p(a), \bar{w} \circ \langle \mathrm{id}, k_a \rangle) \end{aligned}$$

我们进一步有

$$\begin{aligned} (\bar{w} \circ \langle \mathrm{id}, k_a \rangle)(x) &= \bar{w}(x, k_a(x)) \\ &= \bar{w}(x, a) \\ &= s_{w,a}(x) \end{aligned}$$

对所有 x $\in$f $^{-1}$(p(a))，因此 w = $\prod_f($ $^{-}$w) $\circ \eta_p$。换言之，该交换图

$$\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} A \\ \downarrow p \\ Y \end{bmatrix} & \xrightarrow{\eta_p} & \left(\prod_f \circ f^* \right) \begin{bmatrix} A \\ \downarrow p \\ Y \end{bmatrix} \\ & \searrow^{w} & \Big\downarrow \prod_f(\bar{w}) \\ & & \prod_f \begin{bmatrix} B \\ \downarrow q \\ X \end{bmatrix} \end{array}$$

在 Set/Y 中可交换。很容易验证，$\prod_f($ $^{-}$w) 是满足此性质的唯一映射。

□

4.3.3. 存在性与跟踪。组装体本质上是带有附加结构的集合，而函子 $\Gamma : \mathrm{Asm}_{\mathscr{A}} \to \mathrm{Set}$ 创建并保持有限极限（参见第 3 节）。因此，我们证明 $\mathrm{Asm}_{\mathscr{A}}$ 是局部笛卡尔闭范畴的策略，就是为上述集合论构造添加实现子。为了重新获得其中一些构造，我们需要追溯相关证明。我们首先为 λ-演算引入一些便于人类阅读的记号，因为我们将系统地利用这样一个事实：任何带有参数 $\mathscr{S}$ 中参数的 λ-项都属于 $\mathscr{S}$ [22]。

记号。我们将系统地使用以下 λ-演算宏。

$$\begin{aligned} \upsilon \odot \sigma &:= \lambda x\,.\,\upsilon(\sigma x) \qquad x \notin \mathrm{FV}(\upsilon) \cup \mathrm{FV}(\sigma) \\ \langle \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\sigma} \rangle &:= \lambda s\,.\,s\theta\sigma \qquad s \notin \mathrm{FV}(\theta) \cup \mathrm{FV}(\sigma) \\ \boldsymbol{\pi_1} &:= \lambda z\,.\,z\,(\lambda xy\,.\,x) \\ \boldsymbol{\pi_2} &:= \lambda z\,.\,z\,(\lambda xy\,.\,y) \end{aligned}$$

注 4.18. 回忆一下，$\mathrm{Asm}_{\mathscr{A}}$ 有有限极限（参见第4.1节）。考虑这个拉回方块。

$$\begin{array}{ccc} X \times_Y A & \xrightarrow{p_2} & A \\ {\scriptstyle p_1}\downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle p} \\ X & \xrightarrow[f]{} & Y \end{array}$$

我们有

- $\mathrm{X} \times_Y \mathrm{A} = \mathrm{X} \times_Y \mathrm{A}$，其中 $\mathrm{E}_{X \times_Y A}(\mathrm{x}, \mathrm{a}) = \mathrm{E}_X(\mathrm{x}) \sqcap \mathrm{E}_A(\mathrm{a})$；
- 由 $(\boldsymbol{\pi_1})$ 跟踪的第一个投影 $\mathrm{p}_1 : \mathrm{X} \times_Y \mathrm{A} \to \mathrm{X}$；
- 第二个投影 $\mathrm{p}_2 : \mathrm{X} \times_Y \mathrm{A} \to$ 由 $(\boldsymbol{\pi_2})^{\mathscr{A}}$ 追踪。

假设 $\mathrm{u} : \mathrm{Z} \to \mathrm{X}$ 由 $\varphi \in \mathscr{S}$ 跟踪，且 $\mathrm{v} : \mathrm{Z} \to \mathrm{A}$ 由 $\psi \in \mathscr{S}$ 跟踪，并且 $\mathrm{p} \circ \mathrm{v} = \mathrm{f} \circ \mathrm{u}$。典范态射 $\langle \mathrm{u}, \mathrm{v} \rangle : \mathrm{Z} \to \mathrm{X} \times_Y \mathrm{A}$ 定义为

- $\langle u, v \rangle = \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle$；
- the tracker $(\lambda x.\langle \boldsymbol{\varphi x}, \boldsymbol{\psi x} \rangle)^{\mathscr{A}} = (\lambda x\,.\,z(\varphi x)(\psi x))^{\mathscr{A}}$.

$\mathrm{y} \in \mathrm{Y}$ 的纤维 $\mathrm{f}^{-1}(\mathrm{y})$ 可视为一个特例，其存在谓词为

$$\mathbf{E}_{f^{-1}(y)}(x) = \mathbf{E}_X(x) \sqcap \mathbf{E}_Y(y)$$

定义 4.19。设 $\mathrm{f} : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ 是 $\mathrm{Asm}_{\mathscr{A}}$，$[t : W \rightarrowtail x] \in \mathrm{Asm}_{\mathscr{A}}/\mathrm{X}$ 中的一个态射，且 $\mathrm{y} \in \mathrm{Y}$ 是一个基点。t 的一个 f-截面是一个态射 $\mathrm{s} \in \mathrm{Asm}_{\mathscr{A}}(\mathrm{f}^{-1}(\mathrm{y}), \mathrm{W})$，满足 $\mathrm{t} \circ \mathrm{s} = \mathrm{id}$。

因此，$\mathrm{Asm}_{\mathscr{A}}$ 中的一个 f-截面就是一个存在跟踪器的 f-截面，这并不令人意外。

记号。给定 $\mathrm{Asm}_{\mathscr{A}}$ 中的一个态射 $\mathrm{f} : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$，以及一个对象 $[t : W \rightarrowtail x] \in \mathrm{Asm}_{\mathscr{A}}/\mathrm{X}$，我们将滥用记号，写作

$$f \Subset t := \{(y, s) | y \in Y, s \in \mathbf{Asm}_{\mathscr{A}}(f^{-1}(y), W), t \circ s = \mathrm{id}\}$$

对于所有基点上的所有 f-截面的集合，以及 $\mathrm{bp} : \mathrm{f\,St} \to \mathrm{Y}$ 的第一投影。

引理 4.20. 设 $[t : W \rightarrowtail x] \in \mathrm{Asm}_{\mathscr{A}}/\mathrm{X}$。

1. fSt 是一个组装，其存在谓词定义为

$$\mathbf{E}_{f \Subset t} := \mathbf{E}_Y \sqcap \bigwedge_{x \in f^{-1}(y)} (\mathbf{E}_X(x) \to \mathbf{E}_W(s(x)))$$

2. $(\boldsymbol{\pi_1})^{\mathscr{A}}$是基点映射 bp : fSt $\to$ Y 的一个跟踪器。

证明。假设 (y, s) $\in$ fSt，其中 s 由 σ 跟踪。因此我们有

$$\sigma \;\preccurlyeq\; \bigwedge_{x\in f^{-1}(y)} (\mathbf{E}_X(x) \to \mathbf{E}_W(s(x)))$$

根据假设，故

$$(\langle \mathbf{E}_Y(y), \sigma\rangle)^{\mathscr{A}} \;\preccurlyeq\; \mathbf{E}_Y(y) \sqcap \bigwedge_{x\in f^{-1}(y)} (\mathbf{E}_X(x) \to \mathbf{E}_W(s(x)))$$

其中

$$(\langle \mathbf{E}_Y(y), \sigma\rangle)^{\mathscr{A}} \;=\; (\lambda z.z\, \mathbf{E}_Y(y)\, \sigma)^{\mathscr{A}}$$

故

$$\mathbf{E}_Y(y) \sqcap \bigwedge_{x\in f^{-1}(y)} (\mathbf{E}_X(x) \to \mathbf{E}_W(s(x))) \;\in\; \mathscr{S}$$

第二项显然成立（参见第4.1节）。 □

命题4.21。类的映射

$$\prod_f : (\mathbf{Asm}_{\mathscr{A}}/X)_0 \;\longrightarrow\; (\mathbf{Asm}_{\mathscr{A}}/Y)_0$$

$$\begin{bmatrix} W \\ \downarrow t \\ X \end{bmatrix} \;\mapsto\; \begin{bmatrix} f\mathrel{\Im} t \\ \downarrow \mathrm{bp} \\ Y \end{bmatrix}$$

可扩展为函子 $\prod_f$: $\mathrm{Asm}_{\mathscr{A}}$/X $\to$ $\mathrm{Asm}_{\mathscr{A}}$/Y，其在态射上的作用定义为

$$\prod_f(u) : \begin{bmatrix} f\mathrel{\Im} t \\ \downarrow \mathrm{bp} \\ Y \end{bmatrix} \;\longrightarrow\; \begin{bmatrix} f\mathrel{\Im} t' \\ \downarrow \mathrm{bp} \\ Y \end{bmatrix}$$

$$(y, s) \;\mapsto\; (y, u \circ s)$$

请注意，这里我们也复用了记号。

证明。$[\mathrm{bp}{:}f\mathrel{\Im}t \rightarrowtail Y] \in \mathrm{Asm}_{\mathscr{A}}$/X，而 $[\mathrm{bp}{:}f\mathrel{\Im}t' \rightarrowtail Y] \in \mathrm{Asm}_{\mathscr{A}}$/Y（参见引理 4.20）。此外，$\prod_f$ (u) 是函子在载体上的作用（参见命题4.21）。假设 υ 跟踪 u。因此我们有

$$(\lambda\langle \boldsymbol{\theta}, \sigma\rangle.\langle \boldsymbol{\theta}, \upsilon \odot \sigma\rangle)^{\mathscr{A}} \;\preccurlyeq\; \mathbf{E}_Y(y) \sqcap \bigwedge_{x\in f^{-1}(y)} (\mathbf{E}_X(x) \to \mathbf{E}_W(s(x)))$$

$$\to\; \mathbf{E}_Y(y) \sqcap \bigwedge_{x\in f^{-1}(y)} (\mathbf{E}_X(x) \to \mathbf{E}_W((u \circ s)(x)))$$

so

$(\lambda \mathrm{h}\boldsymbol{\theta}, \sigma \mathrm{i}.\mathrm{h}\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\upsilon} \odot \sigma \mathrm{i})^{\mathscr{A}}$ = $(\lambda \mathrm{w}.\lambda \mathrm{s.s}\ ((\lambda \mathrm{z}\ .\ \mathrm{z}\ (\lambda \mathrm{xy}\ .\ \mathrm{x}))\ (\mathrm{w}))\ (\lambda \mathrm{x}.\upsilon\ (((\lambda \mathrm{z}\ .\ \mathrm{z}\ (\lambda \mathrm{xy}\ .\ \mathrm{y}))\ (\mathrm{w}))\ \mathrm{x})))^{\mathscr{A}}$是 $\prod_f$(u) 的一个跟踪器。 □

推论1。设 f : X $\to$ Y 属于 $\mathrm{Asm}_{\mathscr{A}}$，y $\in$ Y 是一个基点，且 v : f^{-1}(y) $\to$ p^{-1}(y) 属于 $\mathrm{Asm}_{\mathscr{A}}$。配对映射

$$\langle \mathrm{id}, v\rangle : f^{-1}(y) \;\longrightarrow\; X \times_Y Y$$

是 $\mathrm{Asm}_{\mathscr{A}}$ 中 y 上 p_1 : X $\times_Y$ A $\to$ X 的一个 f-截面。

证明。考虑引理 4.16 的证明中的交换图，并将其视为 $\mathrm{Asm}_{\mathscr{A}}$ 中的交换图。在载体层面上的所有推理仍然有效，特别是 $\langle \mathrm{id}, \mathrm{v}\rangle$ 是载体映射 $\mathrm{p}_1 : \mathrm{X} \times_{\underline{Y}} \mathrm{A} \to \mathrm{X}$ 的一个 f-截面。但现在，所有对象都配备了存在谓词，而所有映射都是可追踪的（参见注 4.18）。□

推论 2. 函子 $\prod_f : \mathrm{Asm}_{\mathscr{A}}/\mathrm{X} \to \mathrm{Asm}_{\mathscr{A}}/\mathrm{Y}$ 是重索引函子 $\mathrm{f}^* : \mathrm{Asm}_{\mathscr{A}}/\mathrm{Y} \to \mathrm{Asm}_{\mathscr{A}}/\mathrm{X}$ 的右伴随。

证明。我们仿照命题 4.17 的证明，为相关映射赋予跟踪器。假设 $[p{:}A \to Y] \in \mathrm{Asm}_{\mathscr{A}}/\mathrm{Y}$，其中 p 由 ϖ 跟踪。假设 $\mathrm{a} \in \mathrm{A}$。映射

$$\begin{array}{rcl} \eta_p : A & \longrightarrow & f \mathbin{\Subset} p \\ a & \mapsto & (p(a), \langle \mathrm{id}, k_a \rangle) \end{array}$$

相对于 $\mathrm{Asm}_{\mathscr{A}}$ 是良定义的（参见推论1）。此外，我们还有

$$(\lambda s.\langle \boldsymbol{\varpi s}, \langle \boldsymbol{\lambda x.x}, \boldsymbol{\lambda x.s} \rangle\rangle)^{\mathscr{A}} \preccurlyeq \left(\mathbf{E}_A(a) \to \mathbf{E}_{f \Subset p}(p(a), \langle \mathrm{id}, k_a \rangle)\right)$$

so

$$(\lambda s.\langle \boldsymbol{\varpi s}, \langle \boldsymbol{\lambda x.x}, \boldsymbol{\lambda x.s} \rangle\rangle)^{\mathscr{A}} = (\lambda s\,.\,\lambda t\,.\,t(\varpi s)\,(\lambda xz\,.\,zxs))^{\mathscr{A}}$$

是 η_p 的一个跟踪器，因此 η_p 是 $\mathrm{Asm}_{\mathscr{A}}$ 中的一个态射。由此可得

$$\eta_p : \begin{bmatrix} A \\ \downarrow p \\ Y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} f \Subset p \\ \downarrow \mathrm{bp} \\ Y \end{bmatrix}$$

是 $\mathrm{Asm}_{\mathscr{A}}/\mathrm{Y}$ 中的一个态射，因为 bp 有一个跟踪器（参见引理 4.20.2），且相关载体三角形交换（参见命题 4.17）。

设 $[q{:}B \twoheadrightarrow X] \in \mathrm{Asm}_{\mathscr{A}}/\mathrm{X}$，其中 q 由 χ 跟踪。设

$$w : \begin{bmatrix} A \\ \downarrow p \\ Y \end{bmatrix} \longrightarrow \prod_f \begin{bmatrix} B \\ \downarrow q \\ X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \Subset q \\ \downarrow \mathrm{bp} \\ Y \end{bmatrix}$$

是 $\mathrm{Asm}_{\mathscr{A}}/\mathrm{Y}$ 中的一个态射，其中

$$w(a) = (p(a), s_{w,a})$$

对于某个 \(f\)-截面 \($s_{w,a}$\)（其中 \(s\) 是 \(q\) 在基点 \(p(a)\) 上的截面）。假设 ξ 跟踪 \(w\)。

回想一下，关于 η_p，载体上的典范映射为 $\prod_f(\bar{\mathrm{w}})$，其中

$$\begin{array}{rcl} \bar{w} : X \times_Y A & \longrightarrow & B \\ (x, a) & \mapsto & s_{w,a}(x) \end{array}$$

因此，要完成该证明，我们只需要一个 $\bar{\mathrm{w}}$ 的跟踪器，它的类型为

$$\bigwedge_{(x,a) \in X \times_Y A} \mathbf{E}_{X \times_Y A}(x, a) \to \mathbf{E}_B(\bar{w}(x, a))$$

假设 χ 实现了 $\mathrm{E}_X(\mathrm{x})$，且 α 实现了 $\mathrm{E}_A(\mathrm{a})$。那么 $\xi\alpha$ 实现了 $\mathrm{E}_{f \Subset q}(\mathrm{p(a)}, \mathrm{s}_{w,a})$，因此，根据 $\mathrm{E}_{f \Subset q}$ 的定义，$\boldsymbol{\pi_2}(\xi\alpha)$ 跟踪 $\mathrm{s}_{w,a}$。由此我们得到

$$\begin{array}{rcl} (\lambda\langle \boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\alpha}\rangle.\boldsymbol{\pi_2}(\xi\alpha)\chi)^{\mathscr{A}} & \preccurlyeq & \mathbf{E}_{X \times_Y A}(x, a) \to \mathbf{E}_B(s_{w,a}(x)) \\ & = & \mathbf{E}_{X \times_Y A}(x, a) \to \mathbf{E}_B(\bar{w}(x, a)) \end{array}$$

so

$$\begin{array}{rcl} (\lambda\langle \boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\alpha}\rangle.\boldsymbol{\pi_2}(\xi\alpha)\chi)^{\mathscr{A}} & = & (\lambda v.\boldsymbol{\pi_2}\,(\xi\,(\boldsymbol{\pi_2} v))\,(\boldsymbol{\pi_1} v))^{\mathscr{A}} \\ & = & (\lambda v.\,(\lambda z\,.\,z\,(\lambda xy\,.\,y))\,(\xi\,(v\,(\lambda z\,.\,z\,(\lambda xy\,.\,y))))\,((\lambda z\,.\,z\,(\lambda xy\,.\,x))\,v))^{\mathscr{A}} \end{array}$$

是用于 $\neg w$ 的跟踪器。 □

定理 4.22。$\mathrm{Asm}_{\mathscr{A}}$是一个局部笛卡尔闭范畴。

证明。由推论 2 和定理 4.13 得出。 □

4.4. 强子对象分类器。考虑组装 $\Omega := \Delta\mathcal{P}(1)$ 以及态射 $t: \mathbf{1} \to \Omega$，其中 $t(*) := 1$，由 $\top$ 跟踪。

为证明 Ω（配备 t）是强子对象分类器，我们注意到，$\mathrm{Asm}_{\mathscr{A}}$中的每个态射 $f: A \to B$（由 s_f 跟踪）都可以分解为一个满态射 $f: A \to \mathrm{Im}(f)$，再接一个单态射 $m_f: \mathrm{Im}(f) \to B$，其中 Im(f) 是如下定义的组装:

- $\mathrm{Im}(f) := \{f(a) \mid a \in B\}$
- $\overline{\mathbf{E}_{\mathrm{Im}(f)}}(b) := \mathbf{E}_B(b)$ for all $b \in \mathrm{Im}(f)$

$\hat{}$ $\hat{}$ 其中 f 和 m_f分别定义为：对于所有 $a \in A$，$f(a) := f(a)$；对于所有 $b \in \mathrm{Im}(f)$，$m_f(b) := b$；它们分别由 s_f和 $(\lambda x . x)^{\mathscr{A}}$ 跟踪。特别地，如果 f 是极端单态射 $\hat{}$[13]，那么 f 是同构。

注记 4.23。尽管 Im(f) 的载体是作为 f 的集合论像构造的，但单态射 $m_f: \mathrm{Im}(f) \to B$ 通常并不是态射 f 的像 [24]。至于满态射 $\hat{}$ f，它通常不是正则的。

命题 4.24（强子对象分类器）。配备箭头 $t: \mathbf{1} \to \Omega$ 的组装 Ω 是范畴 $\mathrm{Asm}_{\mathscr{A}}$ 中的强子对象分类器。

证明。设 $f: A \to B$ 是一个强单态射。作为强单态射，f 是一个 $\hat{}$ 极端单态射，因此 $f: A \to \mathrm{Im}(f)$ 是一个同构 [13]。由此可得，f 和 $m_f: \mathrm{Im}(f) \to B$ 表示同一个子对象。

最后，m_f的分类映射是 $\chi_f: B \to \Omega$，由 $\chi_f(b) := \{x \in 1 \mid b \in \mathrm{Im}(f)\}$ 定义，并由 $\top$跟踪。□

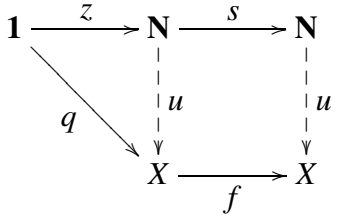
4.5. 自然数对象。现在我们考虑如下定义的组装 N:

- $\underline{\mathbf{N}} := \mathbb{N}$
- $\mathbf{E}_{\mathbf{N}}(n) := \bigwedge_{a \in \mathscr{A}^{\mathbb{N}}} (a_0 \to \bigwedge_{p \in \mathbb{N}} (a_p \to a_{p+1}) \to a_n)$ for all $n \in \mathbb{N}$.

（对 $n \in N$ 作归纳法可知，$(\lambda x\, f . f^n x) \Vdash \mathbf{E}_{\mathbf{N}}(n)$，因此 $\mathbf{E}_{\mathbf{N}}(n) \in \mathscr{S}$。）我们还考虑由 $z(*) := 0$ 和 $s(n) := n+1$（对所有 $n \in N$）定义的态射 $z: \mathbf{1} \to N$ 和 $s: N \to N$，它们分别由 $(\lambda z x\, f . x)^{\mathscr{A}}$ 和 $(\lambda n x\, f . f\,(n\, x\, f))^{\mathscr{A}} \in \mathscr{S}$ 跟踪。

命题 4.25（自然数对象）。配备箭头 $z: \mathbf{1} \to N$ 和 $s: N \to N$ 的组装 N 是范畴 $\mathrm{Asm}_{\mathscr{A}}$ 中的自然数对象。

证明。给定组装 A 以及两个态射 $q: \mathbf{1} \to X$ 和 $f: X \to X$，我们要证明存在唯一的态射 $u: N \to X$，使得下图交换:



u 的存在性。考虑映射 $u: N \to X$，定义为 $\underline{u}(0) = q(0)$，且对于所有 $n \in N$，$u(n+1) = f(u(n))$。给定态射 $q: \mathbf{1} \to X$ 和 $f: X \to X$ 的跟踪器 s_q、$s_f \in \mathscr{S}$（分别），我们

注意到 $s_q \top \preccurlyeq E_X(u(0))$ 和 $s_f \preccurlyeq \bigwedge_{p\in\mathbb{N}}(E_X(u(p)) \to E_X(u(p+1)))$（根据映射的定义），由此我们推导出

$$(\lambda m\,.\,m\,(s_q\top)\,s_f)^{\mathscr{A}} \preccurlyeq \bigwedge_{n\in\mathbb{N}}(\mathbf{E}_{\mathbf{N}}(n) \to \mathbf{E}_X(u(n)))$$

运用语义类型技术。因此，u 是一个类型为 $N \to X$ 的态射。

u 的唯一性。由等式 $u \circ z = q$ 和 $u \circ s = f \circ u$ 显然可得。 □

5. 强迫的特殊情形

5.1. 蕴涵代数与强迫。如 § 2 所述，完备 Heyting（或布尔）代数 (H, 4) 是蕴涵结构的特殊情形，即蕴涵 '→' 由序关系 '4' 通过 Heyting 伴随导出的蕴涵结构：

$$c \preccurlyeq (a \to b) \qquad \text{iff} \qquad (c \wedge a) \preccurlyeq b \qquad\qquad (\text{for all } a, b, c \in H)$$

只需赋予这些蕴涵结构平凡的分离子 $\mathscr{S} := \{\top\}$，即可立即将其转化为蕴涵代数。相应的 tripos $P : \mathrm{Set}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{HA}$ 随后（自然地）同构于强迫 tripos $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(-, H) : \mathrm{Set}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{HA}$。

然而，许多蕴涵代数 $\mathscr{A}$ 的关联 tripos 实际上同构于某个强迫 tripos（即形如 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(-, H)$ 的 tripos，其中 H 是某个完备 Heyting 代数），尽管其底层完备格 $\mathscr{A}$ 并非 Heyting 代数。在 [22], 这种情形下，定理 4.13（§ 4.5）如下：

定理 5.1（刻画强迫三胞胎）。对于每个蕴涵代数 $\mathscr{A}$（记其分离子为 $\mathscr{S}$），以下条件等价：

(1) 由 $\mathscr{A}$ 诱导的三胞胎同构于一个强迫三胞胎。(2) 分离子 $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{A}$ 是 $\mathscr{A}$ 的主滤子。(3) 分离子 $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{A}$ 是有限生成的，并且包含非确定性选择算子 $\Cap^{\mathscr{A}} := \bigwedge_{a,\, b\in\mathscr{A}} (a \to b \to a \wedge b) = (\lambda xy\,.\,x)^{\mathscr{A}} \wedge (\lambda xy\,.\,y)^{\mathscr{A}}$。

回顾一下，当存在某个 $s_0 \in \mathscr{S}$ 使得 $\mathscr{S} = \uparrow\{s_0\}$ 时，分离子 $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{A}$ 是一个主滤子；等价地，当 $\mathscr{S}$ 有一个最小元素 $s_0 = \min(\mathscr{S})$ 时，亦是如此。在这种情况下，由蕴涵代数 $\mathscr{A}$ 诱导的 Heyting 代数 $H := \mathscr{A}/\mathscr{S}$ 是完备的，相应的三胞胎同构于强迫三胞胎 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(-, H)$。（需要强调的是，这并不意味着 $\mathscr{A}$ 底层的格是一个完备 Heyting 代数。）

然而在实践中，大多数蕴涵代数都带有一个有限生成的分离子 $\mathscr{S}$，也就是说，$\mathscr{S}$ 是包含 $\mathscr{A}$ 某个有限子集的最小分离子。这通常是以下情况：

(1) 在直觉主义可实现性中，当蕴涵代数 $\mathscr{A}$ 由一个有序组合代数（OCA）导出，且该代数的元素由有限多个组合子生成（通过应用）时。这类有序组合代数的典型例子是由所有闭合的 λ-项（或组合项）在 β-转换下构成的组合代数，也就是说，它由两个项 $K \equiv \lambda xy.\, x$ 和 $S \equiv \lambda xyz\,.\,xz(yz)$（通过应用）生成。
(2) 在经典可实现性中，当蕴涵代数 $\mathscr{A}$ 由抽象 Krivine 结构（AKS）诱导，且其类证明项由有限多个指令（通过应用）生成时，情况便是如此。事实上，Krivine 在 [15, 17, 18, 19] 中给出的所有 AKS 示例都属于这种形式。

在分离子 $\mathscr{S}$ 由有限多个元素生成这一特殊（但常见）的情况下，很容易看出，只要 $\mathscr{S}$ 是一个滤子，$\mathscr{S}$ 就是 $\mathscr{A}$ 的主滤子；等价地说，只要 $\mathscr{S}$ 包含非确定性选择算子即可

$$\pitchfork^{\mathscr{A}} := \bigwedge_{a,b\in\mathscr{A}} (a \to b \to a \wedge b) = (\lambda xy\,.\,x)^{\mathscr{A}} \wedge (\lambda xy\,.\,y)^{\mathscr{A}}\,.$$

（直观地说：由于对所有 a、b $\in \mathscr{A}$，$\pitchfork^{\mathscr{A}}$ a b 4 a 且 $\pitchfork^{\mathscr{A}}$ a b 4 b，因此真值 $\pitchfork^{\mathscr{A}}$ 可以视为一个接受两个参数并以非确定方式返回其中任意一个的程序。）

上述讨论让我们想起，在（直觉主义或经典）实现性中，在实现子的语言由有限多个原语（通过应用）生成这一现实的假设下，仅仅为编程语言增添一个非确定性选择算子这一简单事实，实际上会对相应的实现性模型产生巨大影响；这些模型最终被证明与强迫模型同构。

5.2. 组装与强迫。回到 $\mathscr{A}$ 上的组装范畴 $\mathsf{Asm}_{\mathscr{A}}$，强迫情形由以下定理刻画：

定理 5.2. 对每个蕴涵代数 $\mathscr{A}$，以下断言等价：

（1）范畴 $\mathsf{Asm}_{\mathscr{A}}$ 是平衡的。（2）范畴 $\mathsf{Asm}_{\mathscr{A}}$ 是一个初等托扑斯。（3）范畴 $\mathsf{Asm}_{\mathscr{A}}$ 是一个格罗滕迪克托扑斯。（4）遗忘函子 $\Gamma : \mathsf{Asm}_{\mathscr{A}} \to$ 到 Set 是满的。（5）伴随 $\Gamma \dashv \Delta$ 是 $\mathsf{Asm}_{\mathscr{A}}$ 与 Set 之间的范畴等价。（6）由 $\mathscr{A}$ 诱导的 tripos $P : \mathsf{Set}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{HA}$ （同构于）一个强迫 tripos。

证明。(1) $\Rightarrow$ (6)。考虑组装 S，其定义为 S := $\mathscr{S}$，且对所有 s $\in \mathscr{S}$，$\mathbf{E}_S(s) := s$；再考虑态射 f : S $\to \Delta\mathscr{S}$，它定义为由 $\top \in \mathscr{S}$ 跟踪的集合论恒等映射。由命题 3.2 可知，f 在 $\mathsf{Asm}_{\mathscr{A}}$ 中既是单态射又是满态射。若现在假设 $\mathsf{Asm}_{\mathscr{A}}$ 是平衡的 (1)，那么 f 也是一个同构，这意味着逆态射 $f^{-1} : \Delta\mathscr{S} \to S$ 满足跟踪条件

$$\bigwedge_{s\in\mathscr{S}} (\mathbf{E}_{\Delta\mathscr{S}}(s) \to \mathbf{E}_S(s)) = \bigwedge_{s\in\mathscr{S}} (\top \to s) = \top \to \bigwedge \mathscr{S} \in \mathscr{S}\,.$$

因此 $(\bigwedge \mathscr{S}) \in \mathscr{S}$（由假言推理），这意味着 $\mathscr{S}$ 是一个主滤子，或者等价地，由 $\mathscr{A}$ 诱导的 tripos 与一个强迫 tripos 同构 (6)。

(6) $\Rightarrow$ (4)。如果由 $\mathscr{A}$ 诱导的 tripos 与一个强迫 tripos 同构 (6)，那么分离子 $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{A}$ 就是 $\mathscr{A}$ 的一个主滤子，由其最小元素 $s_0 := \min(\mathscr{S})$ 生成。给定任意两个组装 X 和 Y，我们注意到，每个集合论映射 f : X $\to$ Y 都由真值 $(\top \to s_0) \in \mathscr{S}$ 跟踪，因此 $\mathsf{Hom}_{\mathsf{Asm}_{\mathscr{A}}}(X, Y) = \mathsf{Hom}_{\mathbf{Set}}(X, Y) = \mathsf{Hom}_{\mathbf{Set}}(\Gamma X, \Gamma Y)$。这证明遗忘函子 $\Gamma : \mathsf{Asm}_{\mathscr{A}} \to \mathbf{Set}$ 是满的 (4)。

(4) $\Rightarrow$ (5). 关于伴随 $\Gamma \dashv \Delta$，我们注意到：

- 余单位 ϱ_X : $\Gamma(\Delta X) \to X$（X $\in$ 属于集合范畴）是（在集合范畴中的）恒等映射，因此始终是自然同构，与蕴涵代数 $\mathscr{A}$ 无关。
- 单位 $\eta_X : X \to \Delta(\Gamma X)$（X $\in$ 属于 $\mathsf{Asm}_{\mathscr{A}}$）是由真值 $\top \in \mathscr{S}$ 跟踪的集合论恒等映射（作为 $\mathsf{Asm}_{\mathscr{A}}$ 中的态射）。它始终是自然变换，但一般而言不是自然同构。

然而，若现在假设遗忘函子 $\Gamma : \mathsf{Asm}_{\mathscr{A}} \to \mathbf{Set}$ 是满的 (4)，则有 $\mathsf{Hom}_{\mathbf{Asm}}(\Delta(\Gamma X), X) = \mathsf{Hom}_{\mathbf{Set}}(\Gamma(\Delta(\Gamma X)), \Gamma X) = \mathsf{Hom}_{\mathbf{Set}}(X, X)$（由满性可知），这证明映射 $\zeta_X := \mathrm{id}_X \in \mathsf{Hom}_{\mathbf{Set}}(X, X)$ 是 $\mathsf{Asm}_{\mathscr{A}}$ 中类型为 $\Delta(\Gamma X) \to X$ 的态射。根据

构造，我们有 $\zeta_X \circ \eta_X = \mathrm{id}_X$ 和 $\eta_X \circ \zeta_X = \mathrm{id}_{\Gamma(\Delta X)}$。因此，单位 $\eta_X : X \to \Delta(\Gamma X)$（$X \in \mathrm{Asm}_{\mathscr{A}}$）也是一个自然同构，这证明伴随 $\Gamma \dashv \Delta$ 是 $\mathrm{Asm}_{\mathscr{A}}$ 与 Set 之间的范畴等价 (5)。

其余蕴涵关系 (5) ⇒ (3) ⇒ (2) ⇒ (1) 显而易见。 □

参考文献

[1] S. Awodey. 范畴论。牛津大学出版社，2010。[2] M.C. Bunge. 托扑斯理论与 Souslin 假设。《纯粹与应用代数杂志》，4(2):159–187，1974。[3] P. J. Cohen. 连续统假设的独立性。《美国国家科学院院刊》，50(6):1143–1148，1963年12月。[4] P. J. Cohen. 连续统假设的独立性 II。《美国国家科学院院刊》，51(1):105–110，1964年1月。[5] M.P. Fourman and J.M.E. Hyland. 分析学的层模型。载于《层的应用：层理论在逻辑、代数与分析中的应用研究研讨会论文集》，1977年7月9日至21日，达勒姆，第280–301页。Springer，2006。ˇ[6] M.P. Fourman and A. Sˇcedrov. “世界上最简单的选择公理”不成立。《数学手稿》，38(3):325–332，1982。[7] M.P. Fourman and D.S. Scott. 层与逻辑。载于《层的应用：层理论在逻辑、代数与分析中的应用研究研讨会论文集》，1977年7月9日至21日，达勒姆，第302–401页。Springer，2006。[8] P. Freyd. 托扑斯的若干方面。《澳大利亚数学学会通报》，7(1):1–76，1972。[9] P. Freyd. 选择公理。《纯粹与应用代数杂志》，19:103–125，1980。[10] T.G. Griffin. 一种将公式视为类型的控制概念。载于第17届 ACM SIGPLAN-SIGACT 编程语言原理研讨会论文集，第47–58页，1989。[11] J. M. E. Hyland. 有效拓扑斯。载于 A. S. Troelstra 和 D. Dalen 编，《L.E.J. Brouwer 百年纪念研讨会》，《逻辑与数学基础研究》第110卷，第165–216页。阿姆斯特丹：North-Holland，1982。[12] J. M. E. Hyland, P. T. Johnstone, and A. M. Pitts. Tripos 理论。载于《剑桥哲学学会数学学报》，第88卷，第205–232页，1980。[13] G. M. Kelly. 单态射、满态射与拉回。《澳大利亚数学学会杂志》，9:124–142，1969。[14] S. C. Kleene. 直觉数论的解释。《符号逻辑杂志》，10:109–124，1945。[15] J.-L. Krivine. 经典逻辑中的可实现性。载于《计算与程序行为的交互模型》，《全景与综述》第27卷，第197–229页。法国数学会，2009。ˇJ.-L. Krivine. 可实现性代数：一个良序化 R 的程序。《计算机科学逻辑方法》，7:1–47，2011。ˇJ.-L. Krivine. 可实现性代数 II：ZF ˇDC 的新模型。《计算机科学逻辑方法》，8(1:10):1–28，2012。ˇJ.-L. Krivine. 经典可实现性中的条形递归：依赖选择与连续统假设。载于 Jean-Marc Talbot 和 Laurent Regnier 编，《第25届 EACSL 计算机科学逻辑年会（CSL 2016）》，2016年8月29日至9月1日，法国马赛，《LIPIcs》第62卷，第25:1–25:11页。Schloss Dagstuhl - Leibniz 信息学中心，2016。[16] J.-L. Krivine. 可实现性代数 III：若干例子。《计算机科学中的数学结构》，28(1):45–76，2018。[17] F.W. Lawvere. 量词与层。载于《国际数学家大会论文集》，尼斯，第1卷，第329–334页，1970。 + M. Menni. 精确完备化与拓扑斯。博士论文，爱丁堡大学，2000。[18] A. Miquel. 蕴涵代数：可实现性与强迫的新基础。《计算机科学中的数学结构》，30(5):458–510，2020。¨A. Miquel. 蕴涵代数 II：关于基于集合的 tripos 的完备性，2020。[19] B. Mitchell. 范畴论。《纯粹与应用数学：专著与教科书丛书》。Academic Press，1965。[20] A. Pitts. Tripos 理论回顾。《计算机科学中的数学结构》，12(3):265–279，2002。[21] A. M. Pitts. Tripos 理论。博士论文，剑桥大学，1981。

[27] E. Robinson and G. Rosolini. 余极限完备化与有效拓扑斯。《符号逻辑杂志》，55(2):678–699, 1990。[28] R.A.G. Seely. 局部笛卡尔闭范畴与类型论。载于《剑桥哲学学会数学论文集》，第95卷，第33–48页。剑桥大学出版社，1984。[29] T. Streicher. 从范畴论视角看 Krivine 的经典可实现性。《数学结构与计算机科学》，2013。[30] M. Tiernay. 层理论与连续统假设，《数学讲义》第274卷。Springer，1972。[31] J. van Oosten. 可实现性：范畴论视角导论。Elsevier，2008。

基础计算机科学研究所（IRIF），巴黎西岱大学，Sophie Germain 大楼，邮政信箱 7014，8 place Aur´elie Nemours，75205 Paris cedex 13，巴黎，法国 & Rafael Laguardia 数学与统计研究所（IMERL），工程学院，乌拉圭共和国大学，Julio Herrera y Reissig 565，邮编 11300 Montevideo，乌拉圭

Rafael Laguardia 数学与统计研究所（IMERL），工程学院，乌拉圭共和国大学，Julio Herrera y Reissig 565，邮编 11300 Montevideo，乌拉圭

数学实验室（LAMA），萨瓦-勃朗峰大学，Le Chablais 大楼，科学园区，73376 Le Bourget du Lac，法国