arXiv:2304.10430v1 [math-ph] 20 Apr 2023

一维梯度损伤解

预印本

Nunziante Valoroso 那不勒斯帕特诺
佩大学工程系 那不勒斯，80143
nunziante.valoroso@uniparthenope.it

2023年4月21日

摘要

本文考虑一种名为“梯度损伤”的正则化损伤模型，其中梯度增强项采用损伤空间梯度的显式上界形式。通过计算两个依赖于单一参数的问题的解析解，展示了所提出方法的主要特征。第一个问题是经典的一维受拉载荷可损伤杆问题，其硬化函数基于与给定内聚关系的等价性确定。第二个应用是 I 型分层问题，其中界面的内聚定律从梯度损伤概念出发进行构建，即通过预先规定内聚过程区内损伤分布的形状来确定。

关键词 损伤力学 · 正则化 · 内聚区模型

1 引言

损伤与断裂力学的存在，源于工程结构需要通过预测性计算来预防灾难性失效。损伤物理的复杂性使材料在实验室试验通常采用的宏观尺度上不可能保持均匀，因此固体力学中出现了许多不同的建模假设；每种假设都是在不同尺度上的物理相关性与结构设计适用性之间权衡的结果。Bažant 和 Planas（1998）。尽管如此，由于损伤与断裂现象本身具有非光滑性，计算失效机制和结构的极限承载能力，对土木工程和机械工程而言仍然是艰巨的任务。François 等（2013）。

粗略而言，可以将失效计算方法分为两大类：连续方法和非连续方法，两者各有优点和局限性。非连续描述允许位移场发生跳跃，因此必须处理离散裂纹表示中固有的拓扑变化。在有限元框架下，这需要采用具有嵌入式不连续性的特殊单元 Armero and Garikipati (1996)，或扩展有限元方法（X-FEM），既可以采用 Belytschko 及其合作者提出的原始形式 Möes et al. (1999)，也可以采用所谓的厚水平集（Thick Level Set）模型的形式 Moës et al. (2011)。
也可以将源自 Barenblatt（1962）研究的内聚区模型纳入不连续模型系列。这类模型最初旨在描述裂纹附近的应力状态；在内聚区模型中，可以用损伤、分层或脱黏等术语来指称断裂发生前的各种渐进现象。在此过程中，材料分离受到沿扩展的裂纹尖端产生的吸引力的阻碍；该区域即内聚过程区。

在内聚区方法中，裂纹扩展由表面牵引力与位移跳跃之间的独立关系控制，该关系包含典型的断裂参数，即内聚强度和断裂韧性。在某些条件下，软化曲线的形状也会影响断裂预测 Alfano (2006)，但人们普遍认为，与其他参数相比，它的重要性较低。无论如何，内聚区概念的经典实现仅允许沿材料中预先存在的界面出现强不连续。

在任何加载之前，因此在数值计算中使用沿潜在不连续面布置的退化（零厚度）有限元 Mi 等（1998）。

离散裂纹表征能够贴近断裂的物理机制，但也带来诸多困难，其中大多数与裂纹追踪有关。这在一定程度上促使人们采用连续方法，将其作为一种从应变局部化阶段开始模拟断裂的工具；在此阶段尚不存在物理裂纹张开，而完全损伤状态则可视为宏观裂纹的弥散表征。在这种背景下，基本思路是保留初始有限元网格的拓扑结构，并通过长度尺度参数将有关材料微观结构的简明信息引入材料模型；该参数用于引入必要的正则化，以恢复问题的适定性，方法可以是采用 Pijaudier-Cabot 和 Bažant 提出的非局部积分方法 Pijaudier-Cabot and Bažant (1987)，也可以是沿着 Peerlings 等人的研究方向引入梯度增强 Geers et al. (1998); Peerlings et al. (1996)。我们还注意到，相场模型这一类方法源自准静态断裂变分理论的正则化形式 Bourdin et al. (2000)；尽管其出发视角不同，即全局能量最小化，但最终得到的扩散型场方程与梯度损伤模型的方程相当接近，例如 Miehe et al. (2010a,b) 等。

在所有此类情况下，平均算子或微分算子都会发挥作用，从而本构方程不再在局部层面定义，而是在结构模型的尺度上建立。由此可以得出，间断的连续表示通过单元提供全局平滑的解；而在通常的局部模型中，应力、应变和内部变量均以逐点方式定义，可以将其理解为单元内部及跨单元边界处通常不连续的场 Alfano 等（1998）。

本章讨论一种基于梯度的连续体损伤表述，称为分级损伤 Valoroso 和 Stolz（2022），即一种带有凸约束的广义标准模型，并具有 Moës 等人提出的厚水平集方法的几何解释。该模型的变分结构及其定向凸性使得能够依据直接方法的思想，通过关于位移和损伤交替进行最小化，并关于拉格朗日乘子进行最大化，采用凸规划实现有效求解；这些拉格朗日乘子隐含了跟踪完全损伤区域与完好材料之间界面所必需的信息。

具体而言，下文将梯度损伤模型应用于两个不同的一维问题，并对其非均匀解进行闭式求解。第一个问题见第2节；这是一个相当经典的问题，研究受拉载荷作用下的杆。该问题的意义在于，相关解被认为能够代表三维结构穿过局部化带时的响应。此外，这一解析解通常用于设计连续体损伤模型的本构函数，使可损伤杆的响应与仅以内聚界面作为耗散源的弹性杆相同，参见 Lorentz 和 Godard（2011）；Wu（2017）。

第二个问题见第3节；从某种意义上说，它与受拉杆问题类似，研究一个由单个参数控制的分层问题，其中界面本构关系基于梯度损伤概念进行了梯度增强。值得注意的是，在 Hillerborg 等（1976）所述的内聚模型中，原则上无需进行正则化，因此迄今鲜有尝试沿内聚界面引入梯度。然而，普遍认为细观尺度上可能存在非局部相互作用，因此将材料长度尺度引入界面模型是一项值得尝试的做法（Latifi等（2017）；Nguyen等（2016））。

2 可损伤杆

首先，考虑图1所示的均匀弹性可损伤杆；结构占据的区域 Ω 为区间 $[-L, L]$，忽略体力，并通过杆两端不断增加的伸长来施加载荷。

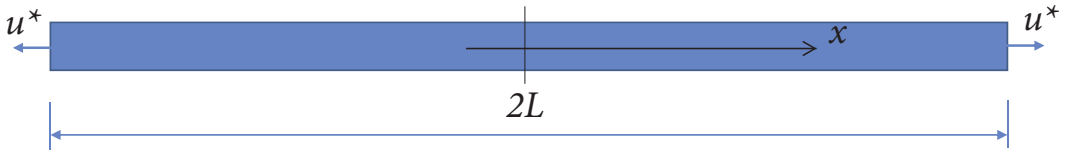


图1：一维杆。模型问题。

在当前的一维情形中，储能函数为：

$$\psi(u,d) = \frac{1}{2}\,\omega(d)\,E\,\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)^2 \tag{1}$$

其中， $E>0$ 为弹性模量， u 为满足本质边界条件的轴向位移：

$$u(-L) = -u^\star, \quad u(L) = u^\star; \qquad u^\star > 0 \tag{2}$$

d 为损伤变量 ， $\omega(d)$是一个单调递减函数，用于描述材料退化 on.
将讨论范围限定于广义标准材料类，通过规定耗散伪势即可补全局部模型（Halphen 和 Nguyen（1975））；对于率无关性，该伪势必须关于通量 d正一阶齐次：

$$\varphi(\dot{d}) = Y_c(d)\,\dot{d} + \sqcup_{\Re^+}(\dot{d}) \tag{3}$$

在上述关系中， $Y_c(d)$是当前损伤状态 d的正凸函数，此处将其视为一个参数；$\sqcup_{\Re^+}$ 是非负实数集的凸示性函数，用于确保不可逆性：

$$\sqcup_{\Re^+}(d^*) = \begin{cases} 0 & \text{if } d^* \geq 0 \\ +\infty & \text{otherwise} \end{cases} \tag{4}$$

同样，损伤也是一个受约束变量，因为它必须满足物理界限：

$$0 \leq d \leq 1 \tag{5}$$

在本表述中，可以通过可容许域的示性函数，或使用其平滑版本（例如 $g_1(d)$）来体现这一点，并满足相应的 Karush-Kuhn-Tucker 条件

$$g_1(d) \leq 0; \qquad \gamma_1 \geq 0; \qquad \gamma_1\,g_1(d) = 0 \tag{6}$$

众所周知，由上述势函数导出的局部本构方程会产生相对于有限元网格不具客观性的数值解；实际上，由于应变软化，应变和损伤会局部化于梯度较大的狭窄区域，且机械耗散会受到网格细化的显著影响。通过采用非局部形式，即在本构方程中引入空间相互作用以提供适当的局部化限制器，可以恢复客观性（Bažant 和 Planas（1998））。为此，在梯度损伤模型中，通过以下方式明确规定了作用于损伤梯度的非局部约束（Valoroso 和 Stolz（2022））：

$$g_2(d) = ||\nabla d|| - f(d) \tag{7}$$

其中，界函数 $f(d) > 0$ 可以是任意非线性的，只要它是凹函数；此外，还满足以下互补条件：

$$g_2(d) \leq 0\,; \qquad \gamma_2 \geq 0\,; \quad \gamma_2\,g_2(d) = 0 \tag{8}$$

这些条件将梯度约束 (7) 表征为非耗散的。
非局部性的直接结果是，热力学势是状态变量 u 和 d的泛函，此处将它们视为场 Germain et al. (1983)。特别地，杆的内能是如下拉格朗日函数：

$$\mathcal{E}(\varepsilon, d, \gamma_i) = \int_\Omega \psi(\varepsilon, d)\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \left[\gamma_1\,g_1(d) + \gamma_2\,g_2(d)\right]\mathrm{d}x \tag{9}$$

其中， ψ 是局部储 能函数，由方程 (1) 定义；同样，整体耗散伪势可通过积分
n 通过积分得到 在物理域 Ω 上对耗散函数（3）进行积分：

$$\mathcal{D}(\dot{d}) = \int_\Omega \varphi(\dot{d})\,\mathrm{d}x \tag{10}$$

与轴向应变和损伤功共轭的力分别是柯西应力和能量释放率。特别是，前者与平衡方程一同通过令势能（9）对位移 u 的一阶变分为零而得到：

$$\sigma = \omega(d)\,E\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \tag{11}$$

在接下来的推导中，梯度约束取为：

$$g_2(d) = \left| \frac{\mathrm{d}d}{\mathrm{d}x} \right| - \frac{1}{l_c} \leq 0 \tag{12}$$

由此得到沿杆件分布的分段线性损伤分布。能量释放率是一个变分导数，包含一个源自公式（12）的非局部项以及两个边界条件（Miehe et al., 2010b）。具体而言，对泛函（9）关于损伤变量求一阶变分，随后进行分部积分，可得：

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial d}\delta d^* = \left[-\int_\Omega G \; \mathrm{d}x + \left[\!\left[\gamma_2 \operatorname{sign}\left(\frac{\mathrm{d}d}{\mathrm{d}x} \right) \right]\!\right]_S + \left[\gamma_2 \operatorname{sign}\left(\frac{\mathrm{d}d}{\mathrm{d}x} \right) \right]_{\partial\Omega} \right] \delta d^* \tag{13}$$

其中定义域项 G 表示：

$$G = -\frac{\partial \psi}{\partial d} - \gamma_1 \frac{\mathrm{d}g_1}{\mathrm{d}d} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\gamma_2 \operatorname{sign}\left(\frac{\mathrm{d}d}{\mathrm{d}x} \right) \right) \tag{14}$$

S 为损伤梯度可能出现的不连续点集。对于非耗散内部不连续，（内部）跃变关系为：

$$\gamma_2^+ = \gamma_2^- = 0 \tag{15}$$

而（外部）自然边界条件为：

$$\gamma_2(x) = 0; \quad x \in \partial\Omega \tag{16}$$

这使得外边界上的损伤导数可以不为零。

损伤演化由法向性法则控制：

$$G - Y_c(d) \leq 0, \qquad \dot{d} \geq 0, \qquad (G - Y_c(d))\,\dot{d} = 0 \tag{17}$$

该法则源于类似 Biot 的次微分包含关系：

$$-\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial d} \in \partial \mathcal{D}(\dot{d}) \tag{18}$$

在初始加载过程中，位移 $u^\star$ 增加至弹性极限：

$$u_{el} = \sqrt{\frac{2\,Y_c(0)}{-\omega'(0)\,E}}\,L \tag{19}$$

此时唯一的响应是均匀的弹性响应：

$$u^\star = \frac{\sigma\,L}{E} \tag{20}$$

损伤开始增长且其空间分布 $d(x)$ 已知后，恒定应力与规定位移之间的关系可明确写为：

$$u^\star = \frac{\sigma}{2\,E}\int_\Omega \omega^{-1}(d(x))\;\mathrm{d}x \tag{21}$$

超过弹性极限的解与缺陷的萌生和扩展相关，并且可以是均匀的或局部化的；在这两种情况下，都可以使用最大损伤程度 $d_m \leq 1$ 进行参数化。

对于均匀非弹性情形，损伤演化要求杆上各处的局部应变能都增加；这可以表示为

$$\left(\frac{Y_c(d)}{-\omega'(d)} \right)' > 0 \tag{22}$$

其中使用了 由（17）导出的局部极限条件，撇号表示对.....求导 t 至驱动变量 d。上述不等式等价于：

$$Y_c(d)\,\omega''(d) - Y_c'(d)\,\omega'(d) > 0 \tag{23}$$

这是局部稳定性的必要要求。Lorentz 和 Godard（2011）提出了条件（23），以及一项额外的应变软化条件，即互补弹性能应随损伤增加而降低，即：

$$\left(\frac{\omega^2(d)\,Y_c(d)}{-\omega'(d)}\right)' < 0 \tag{24}$$

因此有

$$\left[Y_c'(d)\,\omega^2(d) + Y_c(d)\,2\,\omega(d)\omega'(d)\right]\omega'(d) - Y_c(d)\omega^2(d)\,\omega''(d) > 0 \tag{25}$$

不失一般性，对于非均匀损伤，我们假设与单个缺陷相关的应变局部化在达到初始弹性极限（19）后立即于点 $x = 0$ 开始；因此，鉴于（12）的对称性，研究可以限制在杆的一半范围内。

互补条件 (8) 表明，乘子 γ_2 仅在非局部约束 (12) 取等号处才可能非零。在这种情况下，损伤场为：

$$d(x) = d(0) - \frac{x}{l_c} \tag{26}$$

且约束集与区间 $[0, l_m]$ 重合，即

$$l_m = l_c\,d(0) = l_c\,d_m \leq l_c \tag{27}$$

局部化带的半宽度，另见图 2。

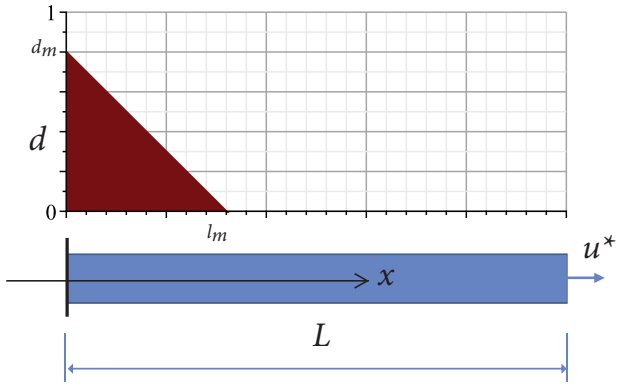


图 2：一维杆。局部化解的损伤分布。

对于损伤演化（$d > 0$），由式（17）可得如下微分问题：

$$Y(d(x)) - \frac{\mathrm{d}\gamma_2}{\mathrm{d}x} = Y_c\left(d(x)\right) \tag{28}$$

其中，局部损伤驱动力为：

$$Y = -\frac{\partial\psi}{\partial d} = \frac{-\omega'(d)}{\omega^2(d)}\frac{\sigma^2}{2\,E} \tag{29}$$

关系式 (28) 是一个一阶微分方程，满足两个边界条件；第一个边界条件用于计算作为驱动变量 d_m 的函数的（均匀）应力 σ，第二个则用于确定拉格朗日乘子场 γ_2 的积分常数。后者在由 $g_2(d) = 0$ 定义的活动约束集边界上、损伤梯度不连续处或区域外边界上必定为零；在区域外边界上，条件 (16) 成立。因此，对 (28) 在 0 与 l_m 之间积分 —— 这两个值对应损伤梯度的两个不连续点 —— 可得 Valoroso 和 Stolz （2022）提出的平均极限条件：

$$\int_0^{l_m} Y(d(x))\,\mathrm{d}x = \int_0^{l_m} Y_c\left(d(x)\right)\,\mathrm{d}x \tag{30}$$

积分通过 u-代换计算，形式如下：

$$\int_0^{l_m} y(d(x))\,\mathrm{d}x = -l_c \int_{d(0)}^{d(l_m)} y(d)\,\mathrm{d}d \tag{31}$$

由此得到应力关于最大损伤水平 d_m 的函数：

$$\sigma(d_m) = \left[\frac{2\,E}{\omega^{-1}(d_m) - 1}\,H(d_m)\right]^{\frac{1}{2}} \tag{32}$$

其中 $H(d_m)$ 是定积分：

$$H(d_m) = \int_0^{d_m} Y_c(d)\,\mathrm{d}d \tag{33}$$

而被积函数 $Y_c(d)$是本构函数，它又可以通过与内聚模型相一致的方式确定。为此，将方程（21）改写为杆的一半，并把积分拆分为两部分，分别表示损伤行为和纯弹性响应：

$$u^\star = \frac{\sigma}{E}\left[\int_0^{l_m} \left[\omega^{-1}(d(x)) - 1\right]\,\mathrm{d}x + L\right] = \frac{1}{2}\,w + \frac{\sigma\,L}{E} \tag{34}$$

在上述方程中，w 是局部化带两侧的表观张开位移；它可以根据所选参数化表示为：

$$w(d_m) = \frac{2\,\sigma(d_m)}{E}\,l_c\,F(d_m) \tag{35}$$

其中，无量纲项 $F(d_m)$ 表示：

$$F(d_m) = \int_0^{d_m} \left(\omega^{-1}(d) - 1\right)\,\mathrm{d}d \tag{36}$$

且仅取决于所假设的退化函数 $\omega(d)$ 的形式。

利用关系式（32）和（35），通过要求可损伤杆的宏观响应与弹性杆的宏观响应等效，确定本构函数 $Y_c(d)$。在后一种情况下，局部化带被具有给定属性的内聚界面所取代。具体而言，我们考虑图3所示的线性软化定律，其解析表达式为：

$$\sigma = \sigma_c\left(1 - \frac{\sigma_c}{2\,G_c}\,w\right) \tag{37}$$

其中，σ_c 和 G_c 分别表示峰值应力和断裂能。

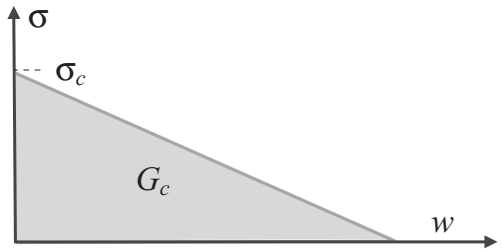


图3：线性软化函数。

将（35）代入（37），并求解 $\sigma(d_m)$，即可得到应力关于最大损伤 d_m 的函数：

$$\sigma(d_m) = \frac{\sigma_c}{1 + \lambda\,F(d_m)} \tag{38}$$

其中 λ 是无量纲参数：

$$\lambda = \frac{l_c}{l_{coh}} \tag{39}$$

表示分级损伤模型的特征长度 l_c 与黏聚区的长度尺度 l_{coh} 之比，Hillerborg 等（1976）：

$$l_{coh} = \frac{E\,G_c}{\sigma_c^2} \tag{40}$$

对于给定的 d_m，积分（33）的值 $H(d_m)$ 由将（38）代入（32）得到：

$$H(d_m) = \frac{\omega^{-1}(d_m) - 1}{2\,E}\left(\frac{\sigma_c}{1 + \lambda\,F(d_m)}\right)^2 \tag{41}$$

受稳定性 论证的启发（将在后文加以说明），我们为退化函数选取二次 c
表达式：

$$\omega = (1 - d)^2 \tag{42}$$

由此可得式（36）：

$$F(d_m) = \frac{d_m^2}{1 - d_m} \tag{43}$$

而式（32）给出了如下（均匀）应力表达式：

$$\sigma(d_m) = \sigma_c\,\frac{1 - d_m}{\lambda\,d_m^2 + 1 - d_m} \tag{44}$$

其极限为

$$\lim_{d_m \to 0} \sigma(d_m) = \sigma_c; \qquad \lim_{d_m \to 1} \sigma(d_m) = 0 \tag{45}$$

本构函数 $Y_c(d)$ 通过对式（41）求导计算如下：

$$Y_c(d) = \frac{\sigma_c^2}{E}\,\frac{1 + \lambda\,d^2(d - 3)}{(\lambda\,d^2 + 1 - d)^3} \tag{46}$$

相关极限为：

$$Y_c(0) = \lim_{d \to 0} Y_c(d) = \frac{\sigma_c^2}{E}; \qquad \lim_{d \to 1} Y_c(d) = \frac{\sigma_c^2}{E}\,\frac{1 - 2\,\lambda}{\lambda^3} \tag{47}$$

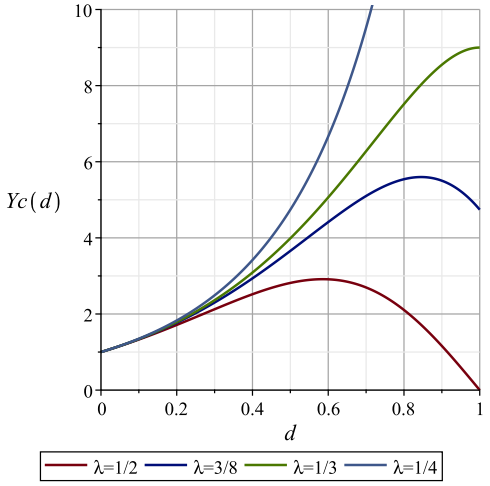


图 4：与线性软化相一致的本构函数 Y_c。

图 4 展示了函数 $Y_c(d)$ 归一化为 $Y_c(0)$ 后，在参数 λ 取不同值时的情况；该参数决定函数 $Y_c(d)$ 本身的性质。在实践中，数值计算中使用的 λ 的安全取值可以按照满足条件 (23) 和 (25) 的方式选取 Valoroso 和 Stolz（2022）。

对于当前情形，局部稳定性要求 (23) 给出：

$$\lambda < \frac{(d-2)\sqrt{d^4 - 4\,d^3 + 40\,d^2 - 72\,d + 36} + d^3 - 4\,d^2 - 10\,d + 12}{8\,d^4 - 36\,d^3 + 24\,d^2} \tag{48}$$

取极限

$$\lim_{d\to 1} \lambda = \frac{1}{2} \tag{49}$$

另一方面，应变软化条件 (25) 意味着：

$$0 \;<\; \lambda \;<\; \frac{1 + (1-d)^2}{2\,d} \tag{50}$$

上述关系定义了 λ 的可容许区域，如图5中的阴影部分所示。显然，对于每个 $d \in [0,\,1]$，任何小于0.5的正 λ值都能满足这两个条件。

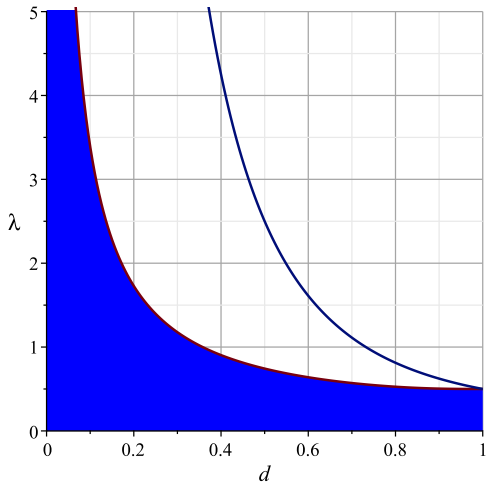


图5：参数 λ的可容许区域。

对于给定的损伤分布，应力与位移之间的关系 $u^\star$ 由方程 (21) 得出：

$$\sigma(d_m) = \frac{E\,u^\star}{L}\,\frac{1-d_m}{\left(\beta\,d_m^2 + 1 - d_m\right)} \tag{51}$$

with

$$\beta = \frac{l_c}{L} \tag{52}$$

显然，在当前语境下，已知损伤分布等同于已知约束集$[0, l_m]$，此时方程 (21) 中的积分不为零，且拉格朗日乘子 γ_2 不为零。

求解乘子 γ_2 相当于计算微分方程 (28) 的积分。为此，使用链式法则：

$$\frac{\mathrm{d}\gamma_2}{\mathrm{d}x} = \gamma_2'(d)\frac{\mathrm{d}d}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{l_c}\gamma_2'(d) \tag{53}$$

从而得到积分：

$$\frac{1}{l_c}\,\gamma_2(d) = \frac{-\sigma^2(d_m)}{2\,E\,\omega(d)} + \frac{\sigma_c^2}{E}\,\frac{d\,(2-d)}{2\,\left(\lambda\,d^2 + 1 - d\right)^2} + C \tag{54}$$

积分常 nt C 是使用 γ_2 的两个边界条件之一得到的，即 $\gamma_2(0) = \gamma_2(d_m) = 0$，tha t is:

$$C = \frac{\sigma^2(d_m)}{2\,E} \tag{55}$$

由此可得：

$$\begin{aligned}\gamma_2(d) &= \frac{-\sigma^2(d_m)\,l_c}{2\,E}\left(\omega^{-1}(d)-1\right)+\frac{\sigma_c^2\,l_c}{E}\,\frac{d\,(2-d)}{2\,(\lambda\,d^2+1-d)^2}\\ &= \frac{l_c}{2\,E}\,\frac{d\,(2-d)}{(1-d)^2}\left[\sigma^2(d)-\sigma^2(d_m)\right]\end{aligned} \tag{56}$$

方程（56）描述了乘子 γ_2 在活动约束区间内的变化，并取决于固定值 d_m 和函数 $d=d(x)$；后者是沿杆的横坐标 x 的函数。显然，拉格朗日乘子 γ_2 在 $x=0$ 处为零，此时 $d=d_m$；在 $x=l_m$ 处也为零，此时 $d=0$。此外，由于微分关系（28），乘子在该区间内于点 $\bar{x}$ 处达到最大值，此时 $Y(x)=Y_c(d(x))$。

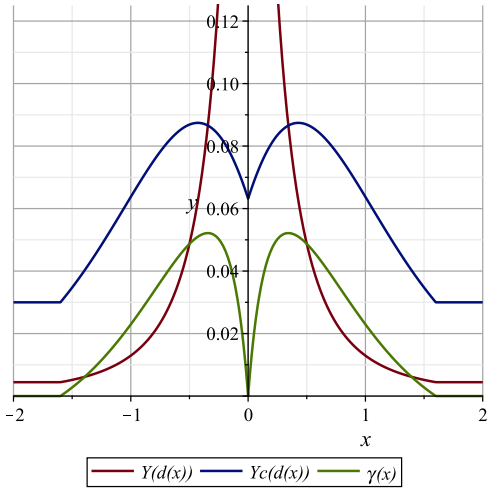


图 6：一维杆。单个缺陷对应的对称局部化解中，Y、Y_c 和 γ_2 的典型空间分布。

图 6 展示了对称局部化带内拉格朗日乘子 $\gamma_2(x)$ 的典型空间分布，同时还展示了局部损伤驱动力 Y 和本构函数 Y_c。

弹性损伤杆的响应显然取决于长度尺度 l_c 和 l_{coh}，其影响通过式（39）定义的无量纲参数 λ 体现，也取决于式（52）给出的几何因子 β。

实际上，通过比较方程（44）和（51），可得：

$$u^\star(d_m)=\frac{\sigma_c\,L}{E}\,\frac{\beta\,d_m^2+1-d_m}{\lambda\,d_m^2+1-d_m} \tag{57}$$

这一关系可用于确定杆在位移控制下响应稳定（即不出现回跳）的条件。这要求端部位移 $u^\star$ 是损伤最大值 d_m的递增函数，即：

$$\frac{\partial u^\star}{\partial d_m}=\frac{\sigma_c\,L}{E}\,\frac{(\beta-\lambda)(2\,d_m-d_m^2)}{\lambda\,d_m^2+1-d_m}>0 \tag{58}$$

由此可得损伤受拉杆在位移控制下响应稳定性的控制条件

$$\beta>\lambda \;\Leftrightarrow\; L<l_{coh} \tag{59}$$

稳定性条件很大程度上取决于退化函数（42）和本构函数（46）的表达式。实际上，令 Y_c 为常数函数，即 $Y_c(0)$由（47）给出，并采用二次退化函数（42），可得：

$$\sigma(d_m)=\frac{2\,\sigma_c\,(1-d_m)}{\sqrt{4-2\,d_m}} \tag{60}$$

代替（44）和

$$u^{\star}(d_m) = \frac{\sigma_c\, L}{E}\, \frac{2(\beta\, d_m^2 + 1 - d_m)}{\sqrt{4 - 2\, d_m}} \tag{61}$$

它取代了（57）。现在稳定性条件为：

$$\beta > \frac{3 - d_m}{d_m\,(8 - 3\, d_m)} \tag{62}$$

由此可推知，无论杆有多短，弹性极限之后总会立即发生回跳，因为式（62）的右端在 $d_m \to 0$ 处发散。这会减慢有限元问题的求解收敛速度，因此应尽可能避免。

然而，存在危害更大的情况。在这方面，考虑线性退化函数的情形

$$\overline{\omega}(d) = 1 - d \tag{63}$$

和恒定弹性极限

$$\overline{Y}_c = \frac{\sigma_c^2}{2\, E} \tag{64}$$

在这种情况下，可得应力和端部位移如下：

$$\sigma(d_m) = \sigma_c\, \sqrt{1 - d_m} \tag{65}$$

$$u^{\star}(d_m) = \frac{\sigma_c\, L}{E}\, \left(1 - \beta\, d_m - \beta\, \ln\left(1 - d_m\right)\right) \tag{66}$$

此时稳定性条件为：

$$\beta > \frac{1}{\ln\left(1 - d_m\right) + 3\, d_m} \tag{67}$$

显然，对于 $d_m \to 0$ 和 $d_m \to 1 - exp(-3d_m) \simeq 0.94048$，(67) 式的右端都会发散。

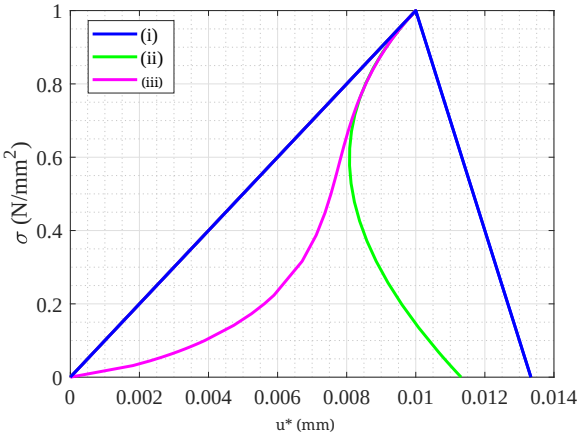


图 7：一维杆。采用不同的本构函数 $\omega(d)$ 和 $Y_c(d)$ 得到的归一化应力–位移响应。

图 7 展示了上述不同本构函数 $\omega(d)$ 和 $Y_c(d)$ 选取下杆的 $\sigma - u^{\star}$ 响应，即：

(i)二次退化和实现与线性软化等价的非恒定极限 $Y_c(d)$；(ii) 二次退化和恒定极限 $Y_c = \sigma_c^2/E$；(iii) 线性退化和恒定极限 $Y_c = \sigma_c^2/2E$。

对于所有这些情况，由（39）和（52）分别定义的无量纲参数满足 $\lambda \leq 0.5$ and$\beta > \lambda$，对应于一根可视为短杆的杆。

3 带内聚界面的块体

一般而言，内聚定律是位移不连续矢量（即界面应变）与表面牵引矢量之间的关系，后者起应力的作用。在下文的推导中，仅考虑 I 型张开；此时牵引力和位移跳跃均垂直于界面。为简化符号表示，不考虑负的相对位移。

作为一个模型问题，考虑图 8 所示的结构：一个刚性块体通过一层厚度可忽略且可发生损伤的黏合层连接到固定支座（Volokh，2004）。端部位移 δ单调增加，使块体发生均匀转动，但损伤呈非均匀分布，并从左边缘开始以非零梯度成核。

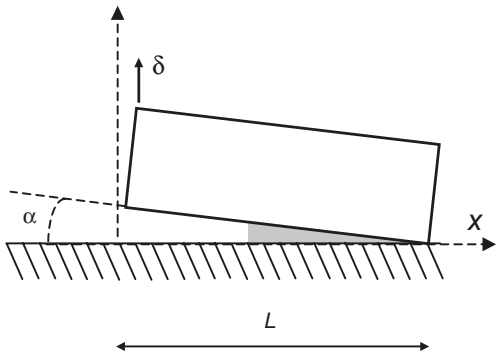


图 8：刚性块体问题。

将 w 记为界面两侧的张开位移，则可由此得到局部内聚定律的储能函数采用基于损伤的表述形式（Valoroso 和 Champaney，2006）：

$$\tilde{\psi}(w,d) = \frac{1}{2}\,\omega(d)\,k\,w^2 \tag{68}$$

其中， k 是受拉时（未损伤的）界面刚度。

对于当前问题，变形运动学完全由一个参数描述，即转角α，此处假定该转角按通常意义为小量。因此，开口位移为:

$$w(x) = \alpha\,(L-x) \tag{69}$$

而类应力变量为:

$$\begin{aligned} t(x,d) &= \frac{\partial\tilde{\psi}(w,d)}{\partial w} = \omega(d)\,k\,\alpha\,(L-x) \\ \tilde{Y}(x,d) &= -\frac{\partial\tilde{\psi}(w,d)}{\partial d} = -\omega'(d)\,\frac{1}{2}\,k\,\alpha^2(L-x)^2 \end{aligned} \tag{70}$$

基于分级损伤概念的非局部界面模型，其控制方程在形式上与第 2 节中针对受拉杆推导的方程完全相同，仅有两处细微修改。具体而言，储能函数~(1)需替换为(68)，而函数 $Y_c(d)$现在则直接给定，例如可根据所选牵引-分离关系的形状来确定。

~例如，能够导出图 9 所示（局部）双线性内聚定律的本构函数 $Y_c(d)$为:

$$\tilde{Y}_c(d) = \frac{-\omega'(d)\,G_0\,G_c^2}{\left[G_0 + (G_c - G_0)\;\omega(d)\right]^2} \tag{71}$$

其对应的分离功为:

$$\int_0^{+\infty} \tilde{Y}_c(d)\,\dot{d}\;\mathrm{d}t = -\int_0^1 \tilde{Y}_c\,(\omega)\;\mathrm{d}\omega = G_c \tag{72}$$

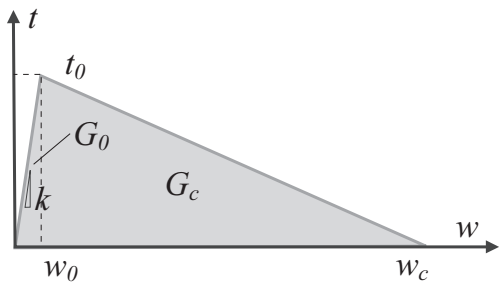


图 9：双线性内聚定律

其中， G_0 和 G_c 分别表示初始能量阈值和界面断裂韧度：

$$G_0 = \frac{1}{2} k \, {w_0}^2; \qquad G_c = \frac{1}{2} k \, w_0 \, w_c \tag{73}$$

在不失一般性的前提下，在下文中我们假设方程（12）和（42）成立；此外，非局部界面模型的长度尺度 l_c 被假定大于块体的宽度 L 。

可以利用绕旋转中心的力矩平衡来追踪结构的平衡路径：

$$P \, L = \int_\Omega t(x,d) \, (L - x) \, \mathrm{d}x \tag{74}$$

Ω 为物理域 $[0, L]$， P 为对应规定位移 δ 的反作用力。在初始加载过程中，后者逐渐增大，直至达到弹性极限 δ_0，其值为：

$$\delta_0 = \sqrt{\frac{2 \, G_0}{k}} = \alpha_0 \, L \tag{75}$$

~ ~它是在满足局部极限条件 $Y = Y_c(0)$ 时首次达到的。这一状态对应于在$x = 0$ 处的损伤萌生；从此以后，加载过程即可用所关注区域内损伤区域的大小 $l_m > 0$ 来有效参数化。

对于 $l_m \leq l_c$，长度 l_m 也与活动约束集的大小相一致（即 $g_2(d) = 0$ 所在的位置），并且所采用的参数化与以最大损伤 d_m 表示的参数化完全等价，其定义如下：

$$d_m = \min \left\{ 1, \frac{l_m}{l_c} \right\} \tag{76}$$

值得强调的是，与具有单个演化缺陷的受拉杆情况不同，对于当前问题，一旦损伤过程区完全形成，约束集就会沿界面平移。具体而言，当受损区域的尺寸 l_m 等于长度尺度 l_c 时，就会发生这种情况；为考虑这一情形，通过梯度约束 (12) 规定的（分段）线性损伤函数可方便地定义为：

$$d(x) = \max \left\{ 0, d_m - \frac{x - c}{l_c} \right\} \tag{77}$$

其中，完全损伤子域的（有限）大小为：

$$c = \max \left\{ 0, l_m - l_c \right\} \tag{78}$$

如第 2 节所述，由于梯度依赖性，正交性法则给出了微分方程（28）；该方程现在允许开口角 α 和拉格朗日乘子 γ_2 采用两组边界条件。

对于刚性块体问题，平均极限条件为：

$$\int_0^H \tilde{Y}(x, d(x)) \, \mathrm{d}x = \int_0^H \tilde{Y}_c \left(d(x) \right) \mathrm{d}x \tag{79}$$

表 1：刚性块体问题的数据集

$L = 2\,mm;$	$k = 800\,N/mm^3$
$G_c = 0.25\,N/mm;$	$G_0 = 0.025\,N/mm$

其中， H 表示包含在物理域 $[0, L]$内的活动过程区部分的大小：

$$H = \min\left\{l_m, L\right\} \tag{80}$$

采用上述记号，关于旋转中心的力矩平衡可表示为 s:

$$P\,L = \int_c^H \omega(d) k\,\hat{\alpha}\,(L-x)^2\,\mathrm{d}x + \int_H^L k\,\hat{\alpha}\,(L-x)^2\,\mathrm{d}x \tag{81}$$

由此，通过区分方程（79）积分限的不同可能情况，即可得到平衡路径的不同分支；这些情况又考虑了拉格朗日乘子场的边界条件（16）以及内部跳跃条件（15）（如有）。

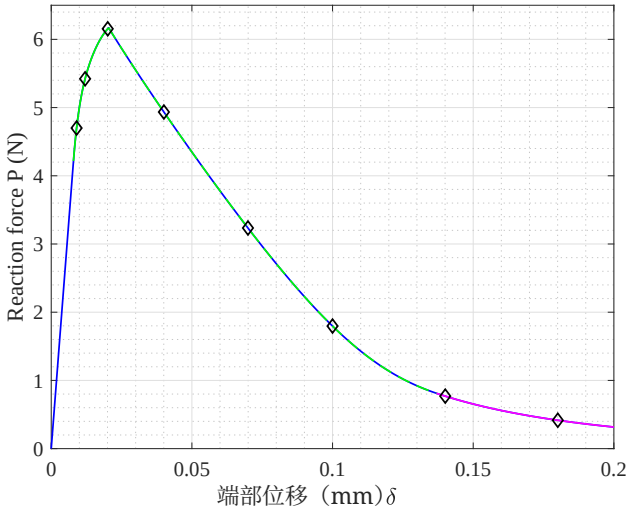


图10：刚性块体问题的平衡曲线。

阶段 1. 线弹性 初始线弹性阶段完全是局部的；位移的极限值由式 (75) 给出，对应的反作用力为：

$$P_0 = \sqrt{2\,G_0\,k}\,\frac{L}{3} \tag{82}$$

阶段 2。针对 $0 < l_m \leq L$ 的损伤萌生与增长在此情况下，利用积分极限条件 (79) 可将开口角 α 计算为长度 l_m（驱动变量）的函数，如下：

$$\hat{\alpha}_1 = \alpha_0 \sqrt{\frac{G_c\,l_c^2\,L^2\,(2\,l_c - l_m)}{A_1\,A_2}} \tag{83}$$

with

$$A_1 = \left[\frac{l_m^3}{6} - \frac{2}{3}(l_c + L)\,l_m^2 + (L + 2\,l_c)\,L\,l_m - 2\,L^2\,l_c\right] \tag{84}$$

$$A_2 = \left[(G_0 - G_c)(l_m^2 - 2\,l_c\,l_m) - G_c\,l_c^2\right] \tag{85}$$

和极限

$$\hat{\alpha}_1^0 = \lim_{l_m \to 0} \hat{\alpha}_1 = \alpha_0 \tag{86}$$

$$\hat{\alpha}_1^L = \lim_{l_m \to L} \hat{\alpha}_1 = \alpha_0 \sqrt{\frac{6\,G_c\,l_c^2\,(2\,l_c - L)}{(4\,l_c - 3\,L)\,[(l_c - L)^2\,G_c - (L - 2\,l_c)\,G_0\,L]}} \tag{87}$$

显然，极限 (86) 与由 (75) 定义的张开角 α_0 一致，而上限 (87) 则标志着关系式 (83) 的有效范围终点；根据平衡条件，该点对应的端部反作用力为：

$$\hat{P}_1 = \left[L^3\,l_c^2 + (l_m - 3\,l_c)\,l_m^2\,L^2 - \frac{(l_m - 4\,l_c)\,l_m^3\,L}{2} + \frac{(l_m - 5\,l_c)\,l_m^4}{10}\right] \frac{k\,\hat{\alpha}_1}{3\,l_c^2\,L} \tag{88}$$

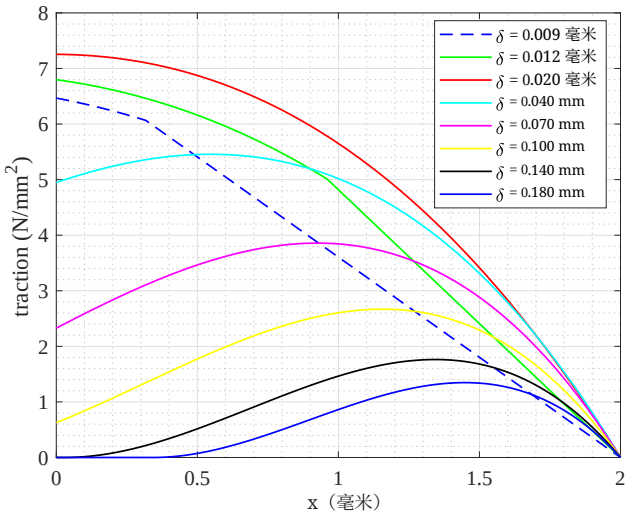


图11：不同端部位移下沿界面的牵引力分布 δ。

阶段3。 $L \le l_m \le l_c$ 的损伤扩展当驱动变量 l_m 增长超过长度 L时，零损伤边界将位于界面物理域之外。在这种情况下，拉格朗日乘子的边界条件和极限条件(79)给出了整个域 $[0, L]$上的平均等式，由此得到平衡路径的另一个非线性分支，其定义如下：

$$\hat{\alpha}_2 = \alpha_0 \sqrt{\frac{6\,G_c^2\,l_c^4\,(L + 2\,l_c - 2\,l_m)}{B_1\,B_2\,B_3}} \tag{89}$$

with

$$B_1 = L + 4\,l_c - 4\,l_m \tag{90}$$

$$B_2 = (l_c - l_m)^2\,G_c - l_m\,(l_m - 2\,l_c)\,G_0 \tag{91}$$

$$B_3 = (L - l_m + l_c)^2\,G_c - (L - l_m)(L - l_m + 2\,l_c)G_0 \tag{92}$$

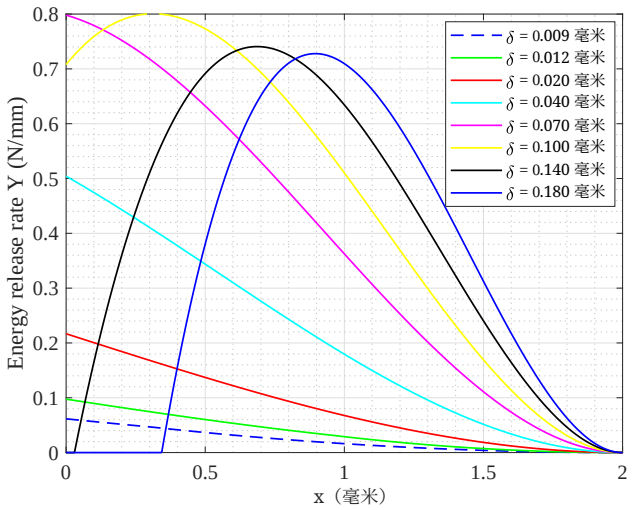
相应的反作用力值为：

$$\hat{P}_2 = \frac{k\,L^2}{30\,l_c^2}\left[10\,l_c^2 + (5\,L - 20\,l_m)\,l_c + L^2 - 5\,L\,l_m + 10\,l_m^2\right]\,\hat{\alpha}_2 \tag{93}$$

阶段 4. 裂纹扩展 对于 $l_m > lc$，存在一个由 (78) 定义的有限尺寸完全损伤区域 c；由于跃迁关系 (15)，在此情况下，非平凡极限条件简化为区间 $[c, L]$ 上的平均等式，因此可将后者作为计算平衡曲线最后一段的驱动变量。

现在，开口角的计算公式为：

$$\hat{\alpha}_3 = \frac{\alpha_0}{(L - c)^2} \sqrt{\frac{6\,G_c^2\,l_c^2\,L^2}{G_0\,[G_c\,(L - c)^2 - G_0(-L + c - l_c)(-L + c + l_c)]}} \tag{94}$$

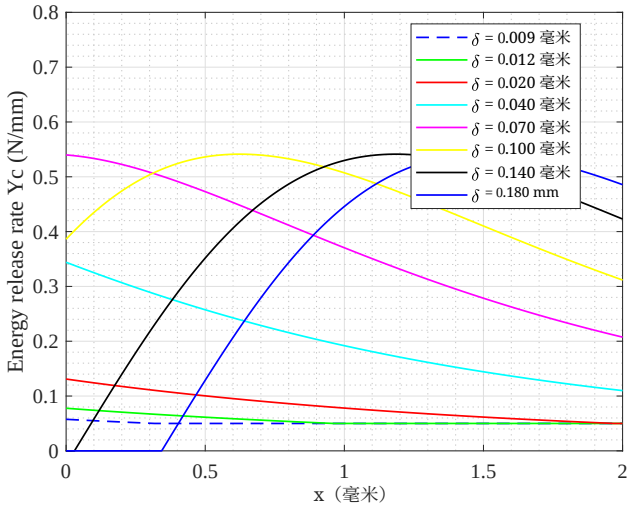


˜图12：界面上随端部位移 δ变化的损伤共轭力 Y。

而平衡方程给出：

$$\hat{P}_3 = \frac{k\,(L-c)^5}{30\,l_c^2\,L}\,\hat{\alpha}_3 \tag{95}$$

正如预期的那样，当位于物理域内的活动损伤过程区部分逐渐缩小并最终塌缩为一个点时，反作用力（95）趋于零。



˜图13：不同端部位移 δ下沿界面的阈值函数 Y_c。

块体脱层问题的完整平衡路径如图10所示。该曲线对应于长度尺度 $l_c = 6\,mm$ 以及表1的数据集。图中的不同颜色用于区分理论解的四个分支，而载荷-挠度曲线上突出显示的点表示为图11中的绘图所选取的位置；图11展示了不同损伤程度下沿界面的表面牵引力分布。

与局部模型的情况不同，在局部模型中，由于式 (71) 的作用，表面牵引力的分布曲线会复现牵引-分离曲线的双线性形状；而在本例中，由于梯度依赖性，随着端部位移 δ的增大，牵引力分布会从双线性形状连续地转变为类似指数函数的形状。

此外，值得注意的是，本构关系的微分特性使得表面牵引力的点值可以高于底层局部模型的峰值应力 $\sqrt{2\,k\,G_0}$。同样，由于极限条件具有平均化特性，损伤共轭变量 Y 的点值 $\tilde{}$ $\tilde{}$也可能超过极限函数 Y_c 的对应值。这一现象在图 12 和图 13 中得到了清晰展示，两图采用相同的比例绘制，以便于比较。

$\tilde{}$ $\tilde{}$还值得注意的是，函数 Y 和 Y_c 在物理域 $[0, L]$ 上仅共享一个点值。该点对应于拉格朗日乘子场 γ_2 的极值点；由于显然的符号约束，该极值确实为最大值。拉格朗日乘子场用于施加非局部梯度约束，参见图14。

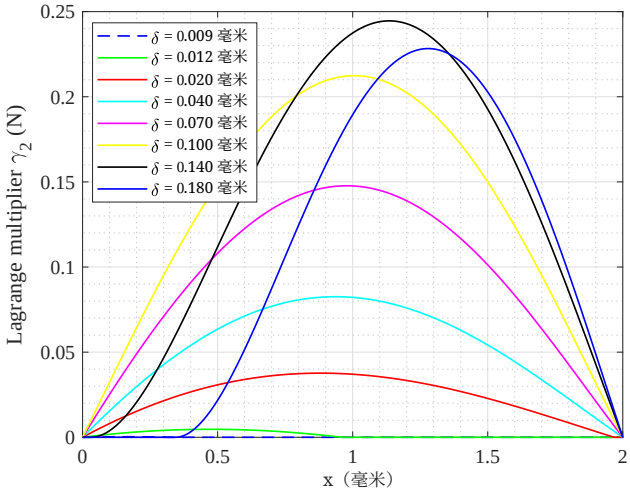


图14：不同端部位移 δ 下沿界面的拉格朗日乘子 γ_2。

4 闭合

基于 Valoroso 和 Stolz（2022）提出的分级损伤公式，本文讨论了两个一维问题，并计算了相关解析解，作为有限元方法的参考。在受拉杆问题中，均匀应力由平均极限条件得出，而本构函数 Y_c 的确定方式则使整体响应曲线与采用线性软化的内聚区模型相一致。另一方面，在块体脱层问题中，本构函数 Y_c 根据局部内聚模型给定，而积分极限条件则提供了控制变形运动学的参数。在这种情况下，可得到一条整体平衡曲线，其取决于长度尺度，因为梯度依赖性的作用是使表面牵引力得以松弛，不再受到底层局部软化曲线形状的约束。

参考文献

Z.P. Bažant 和 J. Planas。《混凝土及其他准脆性材料中的断裂与尺寸效应》。CRC Press，伦敦，1998。doi:https://doi.org/10.1201/9780203756799。D. François、A. Pineau 和 A. Zaoui。《材料的力学行为》。第二卷：断裂力学与损伤。《固体力学及其应用》。Springer，2013。ISBN 978-94-007-4929-0。doi:10.1007/978-94-007-4930-6。F. Armero 和 K. Garikipati。乘法有限应变塑性中的强不连续性分析及其与固体应变局部化数值模拟的关系。《International Journal of Solids and Structures》，33(20):2863–2885，1996。ISSN 0020-7683。doi:10.1016/0020-7683(95)00257-X。N. Möes、J. Dolbow 和 T. Belytschko。无需重新网格划分的裂纹扩展有限元方法。《国际数值方法工程杂志》，46(1):131–150，1999。doi:10.1002/(SICI)1097-0207(19990910)46:1<131::AID-NME726>3.0.CO;2-J。

N. Moës、C. Stolz、P.-E. Bernard 和 N. Chevaugeon。基于水平集的损伤扩展模型：厚水平集方法。《国际数值方法工程杂志》，86(3):358–380，2011。ISSN 1097-0207。doi:10.1002/nme.3069。G.I. Barenblatt。脆性断裂中平衡裂纹的数学理论。载于 H.L. Dryden、Th. von Kármán、G. Kuerti、F.H. van den Dungen 和 L. Howarth（编），《应用力学进展》，第 7 卷，第 55–129 页。爱思唯尔，1962。doi:10.1016/S0065-2156(08)70121-2。G. Alfano。界面定律形状对内聚区模型应用的影响。《复合材料科学与技术》，66(6):723–730，2006。ISSN 0266-3538。doi:10.1016/j.compscitech.2004.12.024。Y. Mi、M. A. Crisfield、G. A. O. Davies 和 H. B. Hellweg。利用界面单元模拟渐进分层。《复合材料杂志》，32(14):1246–1272，1998。doi:10.1177/002199839803201401。G. Pijaudier-Cabot 和 Z.P. Bažant。非局部损伤理论。《工程力学杂志》，113(10):1512–1533，1987。doi:10.1061/(ASCE)0733-9399(1987)113:10(1512)。M.G.D. Geers、R. De Borst、W.A.M. Brekel mans 和 R.H.J. Peerlings。用于失效分析的基于应变的瞬态梯度损伤模型。《计算方法应用力学与工程》，160(1-2):133 – 153，1998。ISSN 0045-7825。doi:10.1016/S0045-7825(98)80011-X。R.H.J. Peerlings、R. De Borst、W.A.M. Brekelmans 和 J.H.P. De Vree。准脆性材料的梯度增强损伤。《国际数值方法工程杂志》，39(19):3391–3403，1996。ISSN 1097-0207。doi:10.1002/(SICI)1097-0207(19961015)39:19<3391::AID-NME7>3.0.CO;2-D。B. Bourdin、G.A. Francfort 和 J-J. Marigo。重新审视脆性断裂的数值试验。《固体力学与物理学杂志》，48(4):797 – 826，2000。ISSN 0022-5096。doi:10.1016/S0022-5096(99)00028-9。C. Miehe、M. Hofacker 和 F. Welschinger。率无关裂纹扩展的相场模型：基于算子分裂的稳健算法实现。《计算方法应用力学与工程》，199(45):2765 – 2778，2010a。ISSN 0045-7825。doi:10.1016/j.cma.2010.04.011。C. Miehe、F. Welschinger 和 M. Hofacker。热力学一致的断裂相场模型：变分原理与多场有限元实现。《国际数值方法工程杂志》，83(10): 1273–1311，2010b。doi:10.1002/nme.2861。G. Alfano、L. Rosati 和 N. Valoroso。J2弹塑性的类位移有限元模型：变分形式与有限步求解。《计算方法应用力学与工程》，155(3-4):325 – 358，1998。ISSN 0045-7825。doi:10.1016/S0045-7825(97)00171-0。N. Valoroso 和 C. Stolz。准脆性固体中的分级损伤。《国际数值方法工程杂志》，123(11):2467–2498，2022。doi:10.1002/nme.6947。E. Lorentz 和 V. Godard。梯度损伤模型：迈向全尺度计算。《计算方法应用力学与工程》，200(21-22):1927 – 1944，2011。ISSN 0045-7825。doi:10.1016/j.cma.2010.06.025。J.-Y. Wu。损伤力学与准脆性破坏的统一相场理论。《固体力学与物理学杂志》，103:72 – 99，2017。ISSN 0022-5096。doi:10.1016/j.jmps.2017.03.015。A. Hillerborg、M. Modéer 和 P.-E. Petersson。利用断裂力学和有限元分析混凝土中的裂纹形成与裂纹扩展。《水泥与混凝土研究》，6(6):773–781，1976。ISSN 0008-8846。doi:10.1016/0008-8846(76)90007-7。M. Latifi、F.P. van der Meer 和 L.J. Sluys。用于模拟复合材料分层的界面厚水平集模型。《国际数值方法工程杂志》，111(4):303–324，2017。doi:10.1002/nme.5463。T.T. Nguyen、J. Yvonnet、Q.-Z. Zhu、M. Bornert 和 C. Chateau。利用微型计算机断层扫描获得的真实微结构，采用相场方法计算模拟与裂纹扩展相互作用的界面损伤。《计算方法应用力学与工程》，312:567–595，2016。ISSN 0045-7825。doi:10.1016/j.cma.2015.10.007。B. Halphen 和 Quoc Son Nguyen。关于广义标准材料。《力学杂志》，14:39–63，1975。P. Germain、Q.S. Nguyen 和 P. Suquet。连续介质热力学。《应用力学杂志》，50(4b):1010– 1020，1983。doi:10.1115/1.3167184。K. Y. Volokh。内聚区模型的比较。《工程数值方法通讯》，20(11):845–856，2004。doi:10.1002/cnm.717。N. Valoroso 和 L. Champaney。用于模拟胶黏连接组件脱黏的基于损伤力学的方法。《工程断裂力学》，73(18):2774–2801，2006。ISSN 0013-7944。doi:10.1016/j.engfracmech.2006.04.029。