arXiv:2304.10441v1 [math.SP] 20 Apr 2023

斯图姆-刘维尔问题与小型控制集给出的全局界及其在量子图中的应用

米凯拉·埃吉迪、德利奥·穆尼奥洛和阿尔布雷希特·泽尔曼

Abstract. 我们为一维向量值自伴算子建立了 Logvinenko–Sereda 理论。因此，我们给出了特征函数的 L^2-范数及其线性组合的上界，并以它们在小控制集上的 L^2-范数和 $W^{1,2}$-范数来表示。这些控制集仅需满足可测性，并沿每个区间适当分布。一个关键步骤是证明具有相当一般顶点条件的拉普拉斯算子的 Bernstein 型估计。我们的结果还适用于一大类具有磁势的薛定谔算子；在高维情形下，相应的结果尚属未知。最后，我们通过讨论这些发现对量子图理论的影响来阐释所得结果。

Contents

1. 引言 1 2. 主要结果 5 2.1. 基本框架 5 2.2. 主要结果 6 2.3. 关于采样集的讨论 7 3. 主要结果的最优性 9 4. 应用 10 4.1. 迹的一个界 10 4.2. 热方程的可观测性与可控性 10 5. 定理 2.5 的证明 12 5.1. 良边上的解析性 13 5.2. 局部估计 13 5.3. 泰勒展开与证明结论 15 6. 定理 2.3 的证明 16 7. 度量图 18 附录 A. 具有可能非分离边界条件的向量值磁拉普拉斯算子的因子分解 22 参考文献 25

1. Introduction

量子图控制理论中的一个典型问题是：用光滑函数 f 在度量图 $\mathcal{G}$ 上的限制在一个（通常不连通的）控制集 ω 上的范数来界定其 L^2-范数。我们在此感兴趣的是寻找关于

2010 *Mathematics Subject Classification.* 34B45 (05C50 35P15 81Q35).*Key words and phrases.*谱几何；Sturm–Liouville 问题；磁性 Schr¨odinger 算子；唯一延拓性质；量子图的特征函数；控制理论。A.S. 的工作部分得到了 DFG 项目 VE 253/10-1 的资助，项目名称为 *Quantitative unique continuation properties of elliptic PDEs with variable 2nd order coefficients and applications in control theory, Anderson localization, and photonics*。D.M. 的工作部分得到了德国研究联合会（资助编号 397230547）的资助。

f 和 ω 蕴含该不等式

$$\|f\|^2_{L^2(\mathcal{G})} \leqslant C_\omega \|\chi_\omega f\|^2_{L^2(\mathcal{G})}, \tag{1.1}$$

其中，$\chi_\omega \in L^\infty(\mathcal{G})$ 是 ω的特征函数，常数 C_ω 对于属于适当函数类的 f 应保持一致。更具体地说，我们关注这样的情形：f 是半有界几何度量图上自由拉普拉斯算子（甚至是磁拉普拉斯算子）的自伴实现的特征函数，或更一般地说，是这些特征函数的线性组合；所谓半有界几何，是指边的长度不会趋近于 0；相关内容可参见专著[Pos12、BK13、Mug14、Kurss]。在这一几何假设下，拉普拉斯算子众所周知是本质自伴的，相应的量子图也可以等价地视为一个向量值 Sturm–Liouville 算子。这促使我们发展一种针对有限或可数无限个区间上的一维二阶算子的控制理论，其适用范围远超度量图这一框架。

关于欧几里得区域上光滑函数的许多局部界都是经典结果，包括哈纳克不等式和哈达玛三球定理；关于它们与谱几何之间相互作用的讨论，见 [BM21] 及其中的参考文献。证明薛定谔算子特征函数逐点估计的一种有趣方法，基于开有界区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$的扭转函数 $u := (-\Delta_D)^{-1}\mathbf{1}$ 的性质。[FM12,Ber12]表明，扭转函数是一种便利的景观函数，也就是说，它可以给出逐点界

$$|\varphi(x)| \leqslant |\lambda| \|\varphi\|_\infty u(x), \quad x \in \Omega, \tag{1.2}$$

对 Ω 上满足狄里赫莱条件的拉普拉斯算子的所有特征对 (λ, φ) 均成立。此后，人们又发现了能导出更精细不等式的其他景观函数，参见 [Ste17, ADF+19,Mug23]。这些结果激发了许多研究，探讨不同类型椭圆算子在各种几何结构上的特征函数的局域化性质，其中包括量子图 [HM18,HM20,MP23]，甚至一般的 M-矩阵 [FMT21]。近期，[AS19, LMS20]研究了组合图特征函数中不同但相关的（去）局域化性质。

本文聚焦于所谓的洛格维年科–谢列达型定理，这类定理目前仅适用于欧几里得区域。我们在此将其推广到满足一般（可能非分离）自伴边界条件的一维区间集合，并最终推广到可能无穷的度量图。洛格维年科–谢列达定理的原始形式可追溯至[Kac73, LS74], ，它给出了控制集 ω 满足何种几何条件的充要条件，使得对傅里叶变换具有紧支撑的函数，估计式 (1.1)（其中 $\mathcal{G}$ 由 $\mathbb{R}^d$ 替代）成立。粗略地说，这一条件要求 ω 是 $\mathbb{R}^d$中的一个可测且分布均匀的集合。随后，Kovrijkine 在[Kov01, Kov00], 中进一步改进了这一结果，得到了估计式 (1.1) 中改进且在定性意义上最优的常数。

后来，Kovrijkine 的同一技术被用于证明具有紧支撑傅里叶–贝塞尔变换的函数满足类似的估计，见 [GJ13]。近年来，他的技术得到了更广泛的应用：所考虑的函数属于拉普拉斯算子在 $\mathbb{R}^d$ 上截至某一能量值的谱投影的值域；事实证明，形式如 (1.1) 的估计对于热方程可控性理论至关重要，见 [EV20] 及其中的参考文献。更一般地，对于算子的谱子空间中的函数，此类形式的估计在控制理论中极为重要。因此，许多研究开始运用并改进 Kovrijkine 的原创思路：[Egi21] 研究无限条带上拉普拉斯算子的谱子空间；[BJPS21]研究 Hermite 函数（即 $\mathbb{R}^d$ 上谐振子的谱子空间中的函数）；[MPS] 为 Hermite 函数建立了谱不等式，允许 ω 具有直径次线性增长的孔洞；[DSV, DSV23] 将其拓展到密度递减的控制集；[Mar, AS] 进一步将其推广到一般的（各向异性）Shubin 算子；[Mar22]则研究盖尔范德–希洛夫空间中的函数。最后，[ES21] 提出了一个抽象的算子理论框架，用于推导此类不等式。将洛格维年科–谢列达定理推广到度量图，为在具有……的空间环境中开展类似研究铺平了道路。

奇点，并可能补充关于网络型结构上抛物型方程可控性的最新研究成果： [Iwa21] 研究了具有有限条有限长度边的等边图上采用标准拉普拉斯算子的热方程的可观测性，其中可观测集为足够大的离散点集； [MML21] 研究了星形图上时间分数阶扩散方程的可观测性； [BPCC+21, ABP22] 则考虑了度量树上具有二阶椭圆算子的抛物型系统，其控制集为叶子集或开子图，这些集合可能与所有边相交，也可能不相交。本文所提出技术的新颖之处在于，在研究（磁）拉普拉斯算子的多种实现形式时，我们考虑的控制集仅需满足可测性，尽管它们在所研究的空间中具有良好的分布特性。

在进一步阐述洛格维年科–谢列达方法时，我们的工作框架建立在[ES21]之上。然而，从欧几里得区域过渡到可能包含无限长度边的度量图并非易事： [ES21] 高度依赖复分析工具，尤其是针对多变量复值解析函数的唯一延拓原理，而在度量图上，这些工具并非总是可用的，因为唯一延拓原理通常并不成立，参见下文注记 7.3，以及 [BK13, 第 3 节。4] 和 [PT21, Kur 21] ，其中概述了能够保证特征函数处处具有支撑的拓扑条件和度量条件；事实上，规避唯一延拓原理失效的问题，是量子图谱几何研究中的一个常见课题。此外，还需要为子集 $\omega \subset \mathcal{G}$ 找到一种恰当的原始几何条件推广，以便同时处理有限长度边和无限长度边，并确保该集合相对于整个图足够大。在欧几里得情形下，集合 ω 的选取方式是：确保其与区域内包含的某个给定半径的每个球的交集测度均具有适当的下界；而在我们的情形下，受 [ES21, 命题 3.1], 的启发，我们要求 $\mathcal{G}$ 中的每条边都存在一个覆盖，该覆盖由长度可变但有界、且仅在边界处相互重叠的区间构成，并且 ω 与这些区间中每一个的交集测度均具有适当的下界；参见下文定义 2.2。这里，采用由可变长度区间构成的特定覆盖方式，可以获得具有更有利参数的估计，并处理每条边内部间隙较大的集合。更多细节请参见下文注记 2.6 (3) 和例 2.7 (3)。

在应用我们的方法时，关键在于假设函数 f ——或其某个（谱）类——满足如下伯恩斯坦不等式

$$\|f^{(m)}\|^2_{L^2(\mathcal{G})} \leqslant C_B(m)\|f\|^2_{L^2(\mathcal{G})} \quad \text{for all } m \in \mathbb{N}_0 \tag{1.3}$$

其中，序列 $(C_B(m))_{m\in\mathbb{N}_0}$ 满足适当的可求和性条件。一般而言，对于具有非平凡（非解析）势 V 的薛定谔算子，通常不会满足条件 (1.3)；但在整个欧几里得空间 $\mathbb{R}^d$ 上，对于具有二次势的谐振子，可以在 [BJPS21,ES21] 中加以研究；对于更一般的 Shubin 算子，包括势为 $|x|^{2k}$ 的非谐振子，也可以在 [Mar, AS] 中加以研究。本文的结果与 [HM20 第 4], 节中的结果互为补充，后者给出了逐点估计

$$|\varphi(x)| \leqslant \kappa(x)\|\varphi\chi_\omega\|_{L^2(\mathcal{G})}$$

对于适当的子图 $\omega \subset \{x \in \mathcal{G} : \ V(x) \geqslant \lambda\}$ ——即“势阱”的补集——，其中 κ 是一个取决于度量图内部结构的函数。

我们方法的另一个显著特点是，对于度量图上磁拉普拉斯算子的一大类自伴实现，可以采用一种简便的因式分解（参见 [HS04，第2] 节，其中给出了区域上类似的因式分解；对于度量图上的自由拉普拉斯算子情形，参见 [BK13，第 1.4 节1] 或 [Pos12，第 2.2 节2] ）。我们将充分利用这一点，为所有此类实现的特征函数提供界。据我们所知，文献中只有针对狄利克雷、诺伊曼以及（若适用）周期边界条件，才有与我们对区域上拉普拉斯算子的估计直接对应的结果。

如前所述，我们针对带有（分离或非分离）自伴边界条件的相当一般的 Sturm–Liouville 型算子发展了我们的理论。然而，将我们的理论应用于度量图尤其

令人着迷。我们将度量图视为以适当方式在端点处粘合起来的区间集合，而这种粘合方式由适当的非分离边界条件编码。对于标准拉普拉斯算子（即在顶点处满足连续性条件和 Kirchhoff 型条件的拉普拉斯算子实现；自 [PF83、Nic87] 的开创性研究以来最为常见），将我们的广义界与已知的、具有谱几何特征的特征值估计相结合，我们得到如下类型的结果：

> 给定一个紧致度量图 $\mathcal{G}$，对于由与 $-\Delta$ 相关联的标准拉普拉斯算子 $-\Delta$ 的 m 个最低特征值对应的特征函数构成的有限线性组合 f，我们可以证明
>
> $$\|\chi_\omega f\|^2_{L^2(\mathcal{G})} \geqslant C\|f\|^2_{L^2(\mathcal{G})}$$
>
> *and*
>
> $$\|\chi_\omega f'\|^2_{L^2(\mathcal{G})} \geqslant C\|f'\|^2_{L^2(\mathcal{G})},$$
>
> 其中 ω 可以是 $\mathcal{G}$ 的子图，甚至可以是度量测度空间 $\mathcal{G}$ 中的任意可测子集，只要它在各条边上的分布足够均匀。这尤其给出了相应的 $W^{1,\,2}$ 范数估计，

$$\|f\|_{W^{1,2}(\omega)} \geqslant C\|f\|_{W^{1,2}(\mathcal{G})}, \tag{1.4}$$

> 而在区域的情形下，似乎尚无已知的对应结果。

我们强调，(1.4) 中的常数 C 是显式的，且仅取决于 m、子图 ω，以及关于度量图的拓扑和度量结构的粗略信息——更具体地说，是其贝蒂数和直径——，见下文推论 7.2。

特别地，我们的估计 (1.4) 关于控制集 ω 是一致的，因此在“半监督情形”下效果更好：如果用户凭借合理的猜测，能够将 ω 放置在待估函数可能较小的区域中。值得注意的是，近年来，人们对度量图上特征函数分布形态的启发式认识不断加深，参见例如 [BKKM19、BCJ21、KR21、Mug23]。

本文的安排如下：第 2.1 节简要回顾本文采用的一般框架，包括一维磁拉普拉斯算子及更一般的向量值斯图姆–刘维尔算子的适当实现。第 2.2 节介绍本文的主要几何概念——度量图的采样子集（定义 2.2）——并陈述定理 2.3，该定理给出一类此类实现的特征函数的全局估计。反过来，这一结果或多或少可直接由定理 2.5 得出；该定理适用于所有满足伯恩斯坦不等式的函数（见定义 2.4）。在转向主要结果的证明之前，我们将在第 3 节说明我们的估计在相关参数方面具有定性最优性（例 3.1），随后在第 4 节讨论两个与向量值斯图姆–刘维尔算子相关的抛物型问题的应用。

第 5 节致力于证明定理 2.5，该证明分为若干引理。第 6 节中，我们最终证明，与一大类具有一般（可能非分离）自伴边界条件的磁拉普拉斯算子自伴实现相关的谱子空间中的元素，构成了另一类更重要的函数，这些函数满足伯恩斯坦不等式，从而完成定理 2.3 的证明。

最后，我们将研究结果具体化，考察度量图上标准拉普拉斯算子的特征函数的局域化性质。这可以说是自由拉普拉斯算子非分离自伴实现中最有趣的一类。在介绍一个满足伯恩斯坦不等式的首个（简单但非平凡）函数示例（例 7.4），即上文简要讨论过的扭转函数之后，我们在推论 7.2 中给出理论在标准拉普拉斯算子谱子空间元素上的应用。

检验磁拉普拉斯算子自伴实现是否满足伯恩斯坦条件——这是定理 2.3 证明中的关键步骤——需要借助一种技术上略显复杂的形式体系，以描述度量图上的高阶算子何时是自伴磁拉普拉斯算子的幂。自 [KS03]，以来，人们一直在研究这类算子，尤其参见 [Pan06,

Kur10、BW12]。为使本文内容自成一体，我们在附录 A 节回顾其理论的一些基本方面。

2. Main results

本节将介绍本文的主要结果，同时给出关于控制子集的记号框架和主要几何概念。

2.1. 基本框架。设 E 是一个有限集或可数无限集。我们考虑一个族$(\ell_{\mathsf{e}})_{\mathsf{e}\in\mathsf{E}} \subset (0、\ \infty]$，并令 I_{e}: $= [0、\ \ell_{\mathsf{e}})$。我们将每个 e 称为一条边，并将 ℓ_{e}称为其长度。注意，当 $\ell_{\mathsf{e}} < \infty$时， $I_{\mathsf{e}} = [0、\ \ell_{\mathsf{e}}]$；当 $\ell_{\mathsf{e}} = \infty$时， $I_{\mathsf{e}} = [0、\ \infty)$。特别地，我们允许边具有无限长度，即 $\ell_{\mathsf{e}} = \infty$。

若 $\ell_{\mathsf{e}} \equiv \ell$，那么鉴于同构 $L^2((0、\ \ell)) \otimes \mathbb{C}^{\mathsf{E}} \simeq \bigoplus_{\mathsf{e}\in\mathsf{E}} L^2((0_、\ \ell))$，我们可以将向量值 Sturm–Liouville 问题视为一族（以 E 为指标）的标量值 Sturm–Liouville 问题。不过，我们主要关注边长可能各不相同的一般情形。因此，我们立即聚焦于函数族 f_{e}: $I_{\mathsf{e}} \to \mathbb{C}$，$\mathsf{e} \in \mathsf{E}$。根据构造，这些函数可以与函数 f: $\mathcal{E} \to \mathbb{C}$对应，其中

$$\mathcal{E} := \bigsqcup_{\mathsf{e}\in\mathsf{E}} I_{\mathsf{e}}. \tag{2.1}$$

因此，我们可以考虑配备范数的（规范定义的）函数空间 $L^2(\mathcal{E}) = \bigoplus_{\mathsf{e}\in\mathsf{E}} L^2((0,\ell_{\mathsf{e}}))$

$$\|f\|_{L^2(\mathcal{E})} = \left(\sum_{\mathsf{e}\in\mathsf{E}} \|f_{\mathsf{e}}\|^2_{L^2((0,\ell_{\mathsf{e}}))}\right)^{1/2}.$$

我们还引入了

$$L^1_{\mathrm{loc}}(\mathcal{E}) := \{f\colon \mathcal{E} \to \mathbb{C} \mid f_{\mathsf{e}} \in L^1_{\mathrm{loc}}(I_{\mathsf{e}}) \quad \forall \mathsf{e} \in \mathsf{E}\}$$

and

$$W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{E}) := \{f\colon \mathcal{E} \to \mathbb{C} \mid f_{\mathsf{e}} \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(I_{\mathsf{e}}) \quad \forall \mathsf{e} \in \mathsf{E}\}.$$

我们提出以下假设。

假设 2.1。边集 $\mathcal{E}$ 具有半有界几何，即，

$$\ell^{\downarrow} := \inf_{\mathsf{e}\in\mathsf{E}} \ell_{\mathsf{e}} > 0.$$

为了参数化二阶微分算子的不同自伴实现，区分有限长度和无限长度的边是有益的，我们分别将其称为内部边和外部边。因此，我们设定

$$\mathsf{E}_{\mathrm{int}} := \{\mathsf{e} \in \mathsf{E} \mid \ell_{\mathsf{e}} < \infty\} \quad \text{and} \quad \mathsf{E}_{\mathrm{ext}} := \mathsf{E}\backslash\mathsf{E}_{\mathrm{int}} = \{\mathsf{e} \in \mathsf{E} \mid \ell_{\mathsf{e}} = \infty\}.$$

在假设 2.1 下，对于每个实值 $A \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathcal{E})$，我们可以考虑磁拉普拉斯算子在 $L^2(\mathcal{E})$ 中的自伴实现 $\Delta_{A,\ Y}$，该实现与 $\ell^2(\mathsf{E}) \oplus \ell^2(\mathsf{E}_{\mathrm{int}})$ 的一个闭子空间 Y 相关联。更准确地说，令

$$W_A(\mathcal{E}) := \{f \in L^2(\mathcal{E}) \cap W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{E}) \mid \mathrm{i}f' + Af \in L^2(\mathcal{E})\}$$

其中 $f' = (f'_{\mathsf{e}})_{\mathsf{e}\in\mathsf{E}}$，由 $\Delta_{A,\ Y}$在 $L^2(\mathcal{E})$ 中定义的算子

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\Delta_{A,Y}) &= \big\{f \in W_A(\mathcal{E}) \mid \mathrm{i}f' + Af \in W_A(\mathcal{E}),\ \Psi_+(f) \in Y,\ \Psi_-(\mathrm{i}f' + Af) \in Y^{\perp}\big\}, \\ \Delta_{A,Y} f &= -\mathrm{i}(\mathrm{i}f' + Af)' - A(\mathrm{i}f' + Af), \quad f \in \mathcal{D}(\Delta_{A,Y}), \end{aligned} \tag{2.2}$$

是自伴且非正的，其中

$$\Psi_{\pm}(g) = (\pm g_{\mathsf{e}}(0))_{\mathsf{e}\in\mathsf{E}} \oplus (g_{\mathsf{e}}(\ell_{\mathsf{e}}))_{\mathsf{e}\in\mathsf{E}_{\mathrm{int}}}, \quad g \in W_A(\mathcal{E}),$$

其中 $Y^{\perp}$表示 Y在 $\ell^2(\mathsf{E})\oplus\ell^2(\mathsf{E}_{\mathrm{int}})$中的正交补；注意，根据 Sobolev 嵌入定理，对于 $g = (g_{\mathsf{e}})_{\mathsf{e}\in\mathsf{E}} \in W_A(\mathcal{E})$ 每个 g_{e} 都可以视为定义在 I_{e}上的连续函数。$A = 0$ 的特殊情形给出了自由拉普拉斯算子的相应实现，并且通过适当选择 Y，涵盖了具有分离边界条件的情形，包括

每条边上的狄利克雷、诺伊曼或混合条件。此外，在引言中提到的度量图背景下，这也涵盖了（对于 $A = 0$）具有连续性和基尔霍夫型顶点条件的标准拉普拉斯算子，以及具有反基尔霍夫顶点条件的实现；参见下文的例 7.1。

关于磁拉普拉斯算子 $\Delta_{A,Y}$ 的更详细综述见下文第 6 节和附录 A。此外，命题 6.1 讨论了一项相关的技术结果，用于研究主结果所需的幂次 $\Delta_{A,Y}^m$；该结果也可能具有独立价值。

我们寻求如下形式的估计

$$\|\chi_\omega f\|^2_{L^2(\mathcal{E})} \geqslant C(\omega)\|f\|^2_{L^2(\mathcal{E})} \tag{2.3}$$

对于 $L^2(\mathcal{E})$ 中的某些函数类以及某些子集 $\omega \subset \mathcal{E}$，其中 χ_ω 表示 ω的特征函数。通常，人们预期集合 ω 沿各条边分布得越均匀，常数 $C(\omega)$ 就可以取得越大。此外，上述形式的估计意味着，如果 f 在 ω上为零，那么它必然已在整个 $\mathcal{E}$ 上为零。因此，ω 在每条边上的部分必须相对于该边本身足够大；等价地说，ω 必须在 $\mathcal{E}$中“分布良好”。下面的几何定义将这一思想形式化，并给出了相应的、针对 $\mathbb{R}^d$的几何条件的改编；该条件最早见于 [LS74,Kac73]。在下文中，我们用 $|\cdot|$ 表示通常的一维勒贝格测度。

定义 2.2. 若存在有限个或可数无穷多个闭区间 $(J_{\mathsf{e},k})_k$ 和 $J_{\mathsf{e},k} \subset I_{\mathsf{e}}$，使得

- $\bigcup_k J_{\mathsf{e},k} = I_{\mathsf{e}}$，• 这些区间 $J_{\mathsf{e},k}$ 的内部两两不相交，
- 每个 $J_{\mathsf{e},k}$ 的长度至多为 ρ，• $|\omega_{\mathsf{e}} \cap J_{\mathsf{e},k}| \geqslant \gamma|J_{\mathsf{e},k}|$

对所有 k均成立。

我们称 $\omega = \bigsqcup_{\mathsf{e}\in\mathsf{E}} \omega_{\mathsf{e}} \subset \mathcal{E}$在 $\mathcal{E}$中是 (γ,ρ)-采样的，当且仅当每个 $\omega_{\mathsf{e}} \subset I_{\mathsf{e}}$都是 (γ,ρ)-采样的。

关于采样集的例子和性质将在下文的主要结果之后讨论 w.

2.2. 主要结果。我们的首个主要结果为采样集 ω 以及谱子空间 $\mathrm{Ran}\,\mathsf{P}_{-\Delta_{A,Y}}(\lambda)$中的函数及其磁导数建立了形如 (2.3) 的估计，其中涉及磁拉普拉斯算子 $\Delta_{A,Y}$。这里，$\mathsf{P}_{-\Delta_{A,Y}}(\lambda)$ 表示与能量区间 $(-\infty,\lambda]$对应的 $-\Delta_{A,Y}$的谱投影。因此，相应的常数 $C(\omega)$ 取决于集合 ω 的采样参数以及能级 λ。

定理 2.3. 设 $\mathcal{E}$ 满足假设 2.1，并且 $\Delta_{A,Y}$ 如 (2.2) 中定义，其中 $A \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathcal{E})$ 为实值函数，$Y \subset \ell^2(\mathsf{E})\oplus\ell^2(\mathsf{E}_{\mathrm{int}})$为闭子空间。那么，对于每个函数$f \in \mathrm{Ran}\,\mathsf{P}_{-\Delta_{A,Y}}(\lambda)\backslash\{0\}$、$\lambda \geqslant 0$以及每个 (γ,ρ)-采样集 $\omega \subset \mathcal{E}$，我们有

$$\|\chi_\omega f\|^2_{L^2(\mathcal{E})} > 12\Big(\frac{\gamma}{48}\Big)^{\frac{40\rho\sqrt{\lambda}}{\log 2}+5}\|f\|^2_{L^2(\mathcal{E})}, \tag{2.4}$$

以及

$$\|\chi_\omega(\mathrm{i}f' + Af)\|^2_{L^2(\mathcal{E})} > 12\Big(\frac{\gamma}{48}\Big)^{\frac{40\rho\sqrt{\lambda}}{\log 2}+5}\|(\mathrm{i}f' + Af)\|^2_{L^2(\mathcal{E})}. \tag{2.5}$$

值得注意的是，如果 $\Delta_{A,Y}$具有纯离散谱，那么定理 2.3 中所考虑的谱子空间 $\mathrm{Ran}\,\mathsf{P}_{-\Delta_{A,Y}}(\lambda)$ 中的函数只是与不超过 λ 的特征值相对应的特征函数的有限线性组合。当且仅当 $\mathcal{D}(\Delta_{A,Y})$（等价地，$\mathcal{D}((-\Delta_{A,Y})^{1/2})$）关于相应的图范数紧嵌入 $L^2(\mathcal{E})$ 时，才是这种情形。

定理 2.3 是以下函数所适用的一项更一般结果的推论：

$$W^{\infty,2}(\mathcal{E}) := \bigcap_{m\in\mathbb{N}} W^{m,2}(\mathcal{E}) := \bigcap_{m\in\mathbb{N}}\bigoplus_{\mathsf{e}\in\mathsf{E}} W^{m,2}((0,\ell_{\mathsf{e}})),$$

其中 $W^{m,\,2}((0,\ell_{\mathsf{e}}))$ 是区间 $(0,\ell_{\mathsf{e}})$ 上阶数为 m 的通常 L^2-索伯列夫空间，并满足以下意义下的伯恩斯坦型不等式。

定义 2.4。我们称 $f\in W^{\infty,\,2}(\mathcal{E})$ 相对于$C_B\colon \mathbb{N}_0\to[0,\infty)$ 满足伯恩斯坦型不等式，当且仅当

$$\|f^{(m)}\|^2_{L^2(\mathcal{E})}\leqslant C_B(m)\|f\|^2_{L^2(\mathcal{E})}\quad \text{for all}\ \ m\in\mathbb{N}_0 \tag{2.6}$$

其中 $f^{(m)}=(f_{\mathsf{e}}^{(m)})_{\mathsf{e}\in\mathsf{E}}$。

只要满足 $f\neq 0$，上述定义显然要求对每个 $m\in\mathbb{N}_0$，常数$C_B(m)$大于或等于 $\|f^{(m)}\|^2_{L^2(\mathcal{E})}/\|f\|^2_{L^2(\mathcal{E})}$；从某种意义上说，最优选择应当取等号。然而，此处允许不等式成立，为得到对一类函数一致成立的 (2.3) 形式估计提供了可能。例如，事实证明，定理 2.3 中考虑的 Ran P–$\Delta_{A,\,Y}(\lambda)$ 内函数的适当变换，相对于 $C_B(m)=\lambda^m$, $m\in\mathbb{N}_0$ 满足这样的伯恩斯坦型不等式，见下文推论 6.3。

定理 2.5。设 $\mathcal{E}$ 如 (2.1) 所述，并假设 $f\in W^{\infty,2}(\mathcal{E})\backslash\{0\}$ 关于 C_B 满足伯恩斯坦型不等式： $\mathbb{N}_0\to[0,\infty)$。

If

$$h:=\sum_{m\in\mathbb{N}_0}(C_B(m))^{1/2}\frac{(10\rho)^m}{m!}<\infty \tag{2.7}$$

对于某个 $\rho>0$，那么对于每个 (γ,ρ)-采样集 $\omega\subset\mathcal{E}$，我们有

$$\|\chi_\omega f\|^2_{L^2(\mathcal{E})}>12\Big(\frac{\gamma}{48}\Big)^{\frac{4\log h}{\log 2}+5}\|f\|^2_{L^2(\mathcal{E})}. \tag{2.8}$$

值得强调的是，定理 2.5 不需要对 $\mathcal{E}$ 的几何性质作任何额外假设。特别是，对于定理 2.5 的适用范围，我们无需施加假设 2.1。

此外，我们指出，尽管定理 2.3 和第 4 节中的主要应用讨论的是函数类，但定理 2.5 是针对单个函数而设的，例如适用于多项式；多项式显然满足关于某个最终趋于零的 C_B 的伯恩斯坦型不等式。另一个较不常见的满足伯恩斯坦型不等式的函数是引言中提到的扭转函数，它在每条边上都是二次多项式，见下文例 7.4。

2.3. 关于采样集的讨论。现在，我们将更详细地讨论定义 2.2 中的采样集概念，以及它与我们的主要结果和进一步推论之间的关系。

我们首先归纳关于这一概念的一些基本观察。

注 2.6. (1) 定义 2.2 中的集合 ω_{e} 只要求是可测的，但不一定是开集。例如，每个 ω_{e} 也可以是具有正测度的分形集，参见下文例 2.7 的第 (5) 部分。(2) 定义 2.2 中的参数 γ 衡量每条边上每一段内 ω 的测度所占的比例。这些段由相邻的区间构成，其长度小于或等于 ρ，并覆盖每条边。(3) 定义 2.2 中的 ρ 越小（固定 γ时），ω 沿每条边的分布就必须越均匀。事实上，ρ 决定了每条边上允许出现的间隙大小上界。更具体地说，容易看出，每个 ω_{e} 可能包含的间隙长度在端点处至多为 $(1-\gamma)\rho$，在内部至多为 $2(1-\gamma)\rho$。(4) 若对于某些 $\rho>0$和 $\gamma\in(0,1]$，$\omega\subset\mathcal{E}$在 $\mathcal{E}$中是 (γ,ρ)-采样的，则对于所有 $\rho'\geqslant\rho$ 和 $\gamma'\leqslant\gamma$，ω在 $\mathcal{E}$ 中也同样是 (γ',ρ')-采样的。因此，(2.4)、(2.5) 和 (2.8) 右端范数前的系数显然会随着 ρ 减小、 γ 增大而增大。这与定义 2.2 之前的讨论一致。(5) 假设对每个 $\mathsf{e}\in\mathsf{E}$，集合 $\omega_{\mathsf{e}}\subset I_{\mathsf{e}}$ 在 I_{e} 中是 $(\gamma_{\mathsf{e}},\rho_{\mathsf{e}})$-采样的，且 $\gamma:=\inf_{\mathsf{e}\in\mathsf{E}}\gamma_{\mathsf{e}}>0$、 $\rho:=\sup_{\mathsf{e}\in\mathsf{E}}\rho_{\mathsf{e}}<\infty$。那么集合$\omega=\bigsqcup_{\mathsf{e}\in\mathsf{E}}\omega_{\mathsf{e}}\subset\mathcal{E}$在 $\mathcal{E}$中是 (γ,ρ)-采样的。

(6) 对于给定的密度 γ，总存在关于 ρ的最优（即最小）取值。更具体地说，若 ω 在 $\mathcal{E}$中是 (γ,ρ)-采样的，则 ω 在 $\mathcal{E}$ 中也同样是 $(\gamma,\tilde{\rho})$-采样的，其中 $\tilde{\rho}:=\sup_{\mathsf{e}\in\mathsf{E}}\sup_k|J_{\mathsf{e},k}|\leqslant\rho$，这里 $(J_{\mathsf{e},k})_k$ 表示任意一族相邻区间，它们覆盖 I_{e}，且符合 ω 为 (γ,ρ)-采样的定义。

(7) 与 (6) 类似，对于固定尺度 ρ，总存在一个关于 γ 的最优（即最大的）选择。更准确地说，如果 ω 在 $\mathcal{E}$ 中是 (γ,ρ)- 采样的，那么 ω 在 $\mathcal{E}$ 中也同样是 $(\tilde{\gamma},\rho)$- 采样的，其中 $\tilde{\gamma}:=\inf_{\mathsf{e}\in\mathsf{E}}\tilde{\gamma}_{\mathsf{e}}\geqslant\gamma$，其中

$$\tilde{\gamma}_{\mathsf{e}}=\inf_k\frac{|\omega_{\mathsf{e}}\cap J_{\mathsf{e},k}|}{|J_{\mathsf{e},k}|}\geqslant\gamma.$$

这里，$(J_{\mathsf{e},\ k})_k$ 再次表示覆盖 I_{e} 的任意一族相邻区间，并且符合 ω 为 (γ,ρ)-采样的定义。

现在我们讨论集合 ω 的若干种选择。

Exa 例 2.7. (1) $\omega=\mathcal{E}$ 和 $\omega=\bigsqcup_{\mathsf{e}\in\mathsf{E}}(0,\ell_{\mathsf{e}})$ 对所有 $\rho>$ 都是 $\mathcal{E}$ 中的 $(1,\rho)$-采样。 0.
(2) 对于 $\mathsf{E}=\mathbb{N}$ 和 $\mathcal{E}=\bigsqcup_{k\in\mathbb{N}}[0,1]$，选择 $\omega_k=[0,1/k]$ 会使对应边上的集合成为 $(1/k,1)$-采样集。但 $\inf_{k\in\mathbb{N}}|\omega_k|=0$，因此无论如何选择 γ 和 ρ，集合 $\omega=\bigsqcup_{k\in\mathbb{N}}\omega_k$ 都不可能在 $\mathcal{E}$ 中成为 (γ,ρ)-采样的。

(3) 假设 $\ell_{\mathsf{e}}<\infty$ （即 $\mathsf{e}\in\mathsf{E}_{\mathrm{int}}$），并考虑三个集合 $\omega_{\mathsf{e}}^{(1)}=(0、\ \ell_{\mathsf{e}}/2),\omega_{\mathsf{e}}^{(2)}=(0、\ \ell_{\mathsf{e}}/4)\cup(3\ell_{\mathsf{e}}/4,\ell_{\mathsf{e}})$, 和 $\omega_{\mathsf{e}}^{(3)}=(\ell_{\mathsf{e}}/4,3\ell_{\mathsf{e}}/4)$。显然，对于 $\rho\geqslant\ell_{\mathsf{e}}$，这三个集合在 e 中都是 $(1/2,\rho)$-采样的，只需用一个区间平凡覆盖即可。另一方面， $\omega_{\mathsf{e}}^{(1)}$ 和 $\omega_{\mathsf{e}}^{(2)}$ 都有一个长度为 $\ell_{\mathsf{e}}/2,$ 的间隙，而 $\omega_{\mathsf{e}}^{(3)}$ 有两个长度仅为 $\ell_{\mathsf{e}}/4,$ 的间隙；对于 $\rho<\ell_{\mathsf{e}}$，它们在采样性质方面表现不同： $\omega_{\mathsf{e}}^{(1)}$ 对于 $\ell_{\mathsf{e}}/2<\rho<\ell_{\mathsf{e}}$，通过 $[0、\ \ell_{\mathsf{e}}]=[0、\ \ell_{\mathsf{e}}-\rho]\cup[\ell_{\mathsf{e}}-\rho、\ \ell_{\mathsf{e}}]$，在$I_{\mathsf{e}}$中是 $(1-\ell_{\mathsf{e}}/(2\rho),\rho)$-采样的；但由于间隙 $[\ell_{\mathsf{e}}/2,\ell_{\mathsf{e}}]$, 无论 $\rho\leqslant\ell_{\mathsf{e}}/2$ 取何值，它都不是 I_{e} 中的 $(\gamma、\ \rho)$-采样。相比之下，由于 $\omega_{\mathsf{e}}^{(2)}$ 和 $\omega_{\mathsf{e}}^{(3)}$ 的内部有一个长度为 $\ell_{\mathsf{e}}/2$ 的间隙 $[\ell_{\mathsf{e}}/4,3\ell_{\mathsf{e}}/4]$，而 $\omega_{\mathsf{e}}^{(3)}$ 的端点处分别有长度为 $\ell_{\mathsf{e}}/4$ 的间隙 $[0、\ \ell_{\mathsf{e}}/4]$ 和 $[3\ell_{\mathsf{e}}/4,\ell_{\mathsf{e}}]$，对于 $\rho\leqslant\ell_{\mathsf{e}}/4$，无论 γ 取何值，这两个集合都不是 I_{e} 中的$(\gamma、\ \rho)$-采样。不过，对于 $\ell_{\mathsf{e}}/2\leqslant\rho<\ell_{\mathsf{e}}$，通过$[0、\ \ell_{\mathsf{e}}]=[0、\ \ell_{\mathsf{e}}/2]\cup[\ell_{\mathsf{e}}/2,\ell_{\mathsf{e}}],$，它们在 I_{e} 中都是 $(1/2,\rho)$-采样的；对于 $\ell_{\mathsf{e}}/4<\rho<\ell_{\mathsf{e}}/2$, 它们在 I_{e} 中都是 $(1-\ell_{\mathsf{e}}/(4\rho),\rho)$-采样的。对于 $\omega_{\mathsf{e}}^{(2)}$，后者可通过覆盖看出。

$$[0,\ell_{\mathsf{e}}]=[0,\ell_{\mathsf{e}}/2-\rho]\cup[\ell_{\mathsf{e}}/2-\rho,\ell_{\mathsf{e}}/2]\cup[\ell_{\mathsf{e}}/2,\ell_{\mathsf{e}}/2+\rho]\cup[\ell_{\mathsf{e}}/2+\rho,\ell_{\mathsf{e}}],$$

并且对于 $\omega_{\mathsf{e}}^{(3)}$通过

$$[0,\ell_{\mathsf{e}}]=[0,\rho]\cup[\rho,\ell_{\mathsf{e}}/2]\cup[\ell_{\mathsf{e}}/2,\ell_{\mathsf{e}}/2+\rho]\cup[\ell_{\mathsf{e}}-\rho,\ell_{\mathsf{e}}].$$

(4) 假设 $\ell_{\mathsf{e}}=\infty$ （即，$\mathsf{e}\in\mathsf{E}_{\mathrm{ext}}$），并令 ω_{e} 为一个可测的 1-周期集，满足$|\omega_{\mathsf{e}}\cap[0,\ 1]|=\gamma$，其中 $\gamma\in(0,\ 1)$。那么， ω_{e}的间隙长度至多为 $1-\gamma$，显然是$(\gamma,\ 1)$中的采样集，其依据是覆盖 $[0,\ \infty)=\bigcup_{k\in\mathbb{N}_0}[k,\ k+1]$。事实上，对于任意测度为 $|A|>1-\gamma$ 的可测子集 $A\subset[0,\ 1]$，都有 $|\omega_{\mathsf{e}}\cap A|\geqslant|A|-(1-\gamma)$。因此，考虑到 ω_{e}的周期性，并利用覆盖 $[0,\ \infty)=\bigcup_{k\in\mathbb{N}_0}[k\rho,\ (k+1)\rho]$ （其中 $\rho>1-\gamma$），不难看出， ω_{e}是 I_{e}中的 $(1-(1-\gamma)/\rho,\rho)$-采样集；对于 $1-\gamma<\rho\leqslant1$，是$(\gamma/\rho,\rho)$-采样集；对于 $1<\rho\leqslant2-\gamma$，是 $(1-2(1-\gamma)/\rho,\rho)$-采样集；对于 $2-\gamma<\rho\leqslant2$，依此类推。特别地，对于所有 $\rho\geqslant1,$ ω_{e} 都是 I_{e}中的 $(\gamma/(2-\gamma),\rho)$-采样集。

(5) 假设 $\ell_{\mathsf{e}}=1$，并令 ω_{e} 为史密斯–沃尔泰拉–康托尔集，即通过从此前得到的每个 2^{n-1} 区间中间依次移除长度为 $1/4^n$ 的区间所得到的集合。该集合是闭集，空内点，且测度为 $1/2$。由于 ω_{e} 的最大间隙长度为 $1/4,$，因此当 $\rho\in(0、\ 1/8]$时，无论选择何种 γ，它都不是 $(\gamma、\ \rho)$- 采样集。然而，它可通过 $[0、\ 1]=[0、\ 1/2]\cup[1/2,1],$ 成为 $(1/2,1/2)$-采样集，因为每个区间都包含一半的 ω_{e}；此外，它还可通过 $[0、\ 1]=[0、\ 7/32]\cup[7/32,1/2]\cup[1/2,25/32]\cup[25/32,1],$ 成为 $(4/9,9/32)$-采样集，因为每个区间都包含 ω_{e} 中一部分，其测度为 $1/8$。

我们通过讨论定义 2.2 的一种可能推广及其对结果的影响，来结束本节。

注 2.8. 可以通过放宽采样集的概念，允许区间 $J_{\mathrm{e},\ k}$ 彼此重叠，从而推广定理 2.5。对于某些集合，这可能会得到稍微更优的参数 γ 和 ρ （分别相差 2 倍和 $1/2,$ ），但证明会变得更加复杂；并且，如果不存在三个或更多区间重叠的情况，则必须用以下内容替换 (2.8)우우우우우우

$$\|\chi_\omega f\|_{L^2(\mathcal{E})}^2 > 6\Big(\frac{\gamma}{48}\Big)^{\frac{4\log h}{\log 2}+7}\|f\|_{L^2(\mathcal{E})}^2,$$

见下文注 5.6。不过，由于我们主要关注估计关于 $C_B(m)$ （分别是 λ）以及 ω 的几何参数的一般变化规律，因此我们选择采用当前较简明的定义 2.2 版本，相应地也采用估计式 (2.8) 的较简明版本。

3. 主要结果的最优性

现在我们更仔细地分析定理 2.3 和定理 2.5。首先讨论定理 2.3 中的估计关于 $\gamma^{\rho\sqrt{\lambda}}$ 的变化规律是否最优；这一点在欧几里得情形下基本上已为人所知，参见例如 [EV20，例 3.1]。

例 3.1. 考虑区间 $(0,\ell)$, $\ell<\infty$ 上的二阶导数，并施加诺伊曼边界条件。取 #E $=1$,$\mathcal{E}=[0,\ell]$ 和 $Y=\ell^2(\mathrm{E})\times\ell^2(\mathrm{E}_{\mathrm{int}})\equiv\mathbb{C}^2$ 后，这些条件符合定理 2.3 的框架。

对某个 $\gamma\in(0,4/\pi^2]$，考虑子集 $\omega=[\frac{\ell}{4}(1-\gamma),\frac{\ell}{4}(1+\gamma)]\cup[\frac{\ell}{4}(3-\gamma),\frac{\ell}{4}(3+\gamma)]\subset\mathcal{E}$。根据覆盖 $[0,\ell]=[0,\ell/2]\cup[\ell/2,\ell],$，该子集是 $\mathcal{E}$ 中的 $(\gamma,\ell/2)$-采样集。我们固定一个足够大的 $\lambda>0$，使得 $\alpha:=[\frac{\ell\sqrt{\lambda}}{2\pi}]\geqslant 2$，并取

$$f(x):=\cos^\alpha\Big(\frac{2\pi x}{\ell}\Big),\quad x\in\mathcal{E}.$$

通过傅里叶分析很容易看出，f 是与小于或等于 $\frac{4\pi^2\alpha^2}{\ell^2}\leqslant\lambda$ 的特征值相关的二阶导数特征函数的线性组合，因此属于 $\mathsf{RanP}_{-\Delta_{0,\ Y}}(\lambda)\backslash\{0\}$，其中 $Y=\mathbb{C}^2$。

由 Jensen 不等式可得

$$\|f\|_{L^2(\mathcal{E})}^2=\int_0^\ell\cos^{2\alpha}\Big(\frac{2\pi x}{\ell}\Big)\,\mathrm{d}x\geqslant\ell\bigg(\int_0^\ell\Big|\cos\Big(\frac{2\pi x}{\ell}\Big)\Big|\frac{1}{\ell}\,\mathrm{d}x\bigg)^{2\alpha}=\ell\Big(\frac{2}{\pi}\Big)^{2\alpha}.$$

利用余弦函数的对称性、对于 $x\in[0,\ \pi/2]$, 有 $\cos(x)\leqslant-x+\pi/2$ 这一事实以及变量替换，我们还可以估计

$$\begin{aligned}\|\chi_\omega f\|_{L^2(\mathcal{E})}^2&=\int_\omega\cos^{2\alpha}\Big(\frac{2\pi x}{\ell}\Big)\,\mathrm{d}x=2\int_{\frac{\ell}{4}(1-\gamma)}^{\frac{\ell}{4}(1+\gamma)}\cos^{2\alpha}\Big(\frac{2\pi x}{\ell}\Big)\,\mathrm{d}x\\&=\frac{\ell}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}(1-\gamma)}^{\frac{\pi}{2}(1+\gamma)}\cos^{2\alpha}(y)\,\mathrm{d}y=\frac{2\ell}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}(1-\gamma)}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2\alpha}(y)\,\mathrm{d}y\\&\leqslant\frac{2\ell}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}(1-\gamma)}^{\frac{\pi}{2}}\Big(-y+\frac{\pi}{2}\Big)^{2\alpha}\,\mathrm{d}y=\frac{2\ell}{\pi(2\alpha+1)}\Big(\frac{\pi\gamma}{2}\Big)^{2\alpha+1}.\end{aligned}$$

鉴于 $\alpha\geqslant 2$、$2\alpha+1=2[\ell\sqrt{\lambda}/(2\pi)]+1\geqslant\ell\sqrt{\lambda}/\pi-1,$ 和 $\gamma\leqslant 4/\pi^2,$，我们得出结论:

$$\frac{\|\chi_\omega f\|_{L^2(\mathcal{E})}^2}{\|f\|_{L^2(\mathcal{E})}^2}\leqslant\frac{1}{\ell}\Big(\frac{\pi}{2}\Big)^{2\alpha}\frac{2\ell}{\pi(2\alpha+1)}\Big(\frac{\pi\gamma}{2}\Big)^{2\alpha+1}\leqslant\frac{1}{5}\Big(\frac{\pi^2\gamma}{4}\Big)^{2\alpha+1}\leqslant\frac{1}{5}\Big(\frac{\pi^2}{4}\gamma\Big)^{\frac{\ell\sqrt{\lambda}}{\pi}-1},$$

这与定理 2.3 中关于形式 $\gamma^{\rho\sqrt{\lambda}}$ 的行为所得到的下界一致。因此，从渐近角度看，不能指望定理 2.3 中的估计具有定性上更好的行为。

尽管例 3.1 表明，定理 2.3 中的估计在（定性意义上）是最优的，但如下例所示，该估计在某些情况下效果不佳。

例 3.2. (1) 再次考虑集合 $\omega = \mathcal{E}$，它对于所有 $\rho > 0$ 都是 $\mathcal{E}$ 中的 $(1,\rho)$-采样，见例 2.7 的第 (1) 项。于是，对于每个 $A \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathcal{E})$ 以及 $\ell^2(\mathsf{E}) \times \ell^2(\mathsf{E}_{\mathrm{int}})$ 的每个闭子空间 Y，在定理 2.3 中令 $\rho \to 0$ 取极限可得

$$\frac{\|\chi_\omega f\|^2_{L^2(\mathcal{E})}}{\|f\|^2_{L^2(\mathcal{E})}} \geqslant 12\Big(\frac{1}{48}\Big)^5 \approx 4.7 \cdot 10^{-8}, \quad f \in \operatorname{Ran} \mathsf{P}_{-\Delta_{A,Y}}(\lambda)\backslash\{0\},\ \lambda \geqslant 0. \tag{3.1}$$

另一方面，由于 $\|\chi_\omega f\|^2_{L^2(\mathcal{E})}/\|f\|^2_{L^2(\mathcal{E})} = 1$，这表明该估计在数值上表现不佳，至少当 ω 在 $\mathcal{E}$ 中“较大”时是如此。

(2) 在 $(0,\pi)$ 上考虑与特征值 $\lambda = k^2$ 对应的二阶导数算子、满足诺伊曼边界条件的（L^2-归一化）特征函数 $f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(kx)$，其中$k \in \mathbb{N}$。此外，令 $\#\mathsf{E} = 1$ 且 $\mathcal{E} = [0,\pi]$，取 $\omega = (\pi(1-\gamma)/2, \pi(1+\gamma)/2) \subset \mathcal{E}$，其中某个 $\gamma \in (0,1)$；鉴于 $[0,\pi] = [0,\pi/2] \cup [\pi/2,\pi]$，它是 $\mathcal{E}$ 中的 $(\gamma,\pi/2)$-采样。经初等计算可得

$$\begin{aligned}\frac{\|\chi_\omega f\|^2_{L^2(\mathcal{E})}}{\|f\|^2_{L^2(\mathcal{E})}} = \|\chi_\omega f\|^2_{L^2(\mathcal{E})} &= \frac{2}{\pi}\int_\omega \cos^2(kx)\,\mathrm{d}x = \frac{4}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}(1-\gamma)}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(kx)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi\gamma}{4} + \frac{2\cos(\frac{k\pi(\gamma-1)}{2})\sin(\frac{k\pi(\gamma-1)}{2}) + 2\cos(\frac{k\pi}{2})\sin(\frac{k\pi}{2})}{4k}.\end{aligned}$$

后者收敛至 $\pi\gamma/4 > 0$，当 $k \to \infty$ 时；而定理 2.3 给出的下界则随 $k \to \infty$ 指数收敛至零。

4. Applications

本节讨论主要结果的两个应用：半群 $(\mathrm{e}^{t\Delta_{A,\,Y}})_{t\geqslant 0}$ 的迹的一个界，以及热方程在 $L^2(\mathcal{E})$ 上的可观测性/零可控性。

4.1. 迹的一个界。回顾一下：由磁拉普拉斯算子的所有实现生成的热半群，只要其形式定义域是 $W_A(\mathcal{E})$ 的闭子空间，且集合 E 有限并满足 $\mathsf{E}_{\mathrm{ext}} = \varnothing$，便属于迹类。事实上，由于半群的解析性，对每个 $t > 0$，指数算子 $\mathsf{e}^{\frac{t}{2}\Delta_{A,\,Y}}$作为从 $L^2(\mathcal{E})$ 到 $W_A(\mathcal{E})$ 的算子都是有界的，参见例如[Are，命题 7.3.4]。进而，由于希尔伯特–施密特算子的理想性质，且 $W_A(\mathcal{E})$ 到 $L^2(\mathcal{E})$ 的嵌入是希尔伯特–施密特的（见下文引理 A.2），对每个 $t > 0$，指数算子 $\mathsf{e}^{\frac{t}{2}\Delta_{A,\,Y}}$同样是希尔伯特–施密特算子。因此我们得出结论：对所有 $t > 0$，$\mathsf{e}^{t\Delta_{A,\,Y}} = \mathsf{e}^{\frac{t}{2}\Delta_{A,\,Y}}\mathsf{e}^{\frac{t}{2}\Delta_{A,\,Y}}$属于迹类。

现在可以直接验证：对每个特征对考虑估计式 (2.4)，并将所有这些估计代入指数级数。

推论 4.1. 在定理 2.3 的假设下，设 E 为有限集，且 $\mathsf{E}_{\mathrm{ext}} = \varnothing$。那么，对于任意 (γ,ρ)-采样集 $\omega \subset \mathcal{E}$，$\mathsf{e}^{t\Delta_{A,\,Y}}$ 的迹满足

$$\operatorname{Tr}(\mathrm{e}^{t\Delta_{A,Y}}) \leqslant \frac{1}{12}\Big(\frac{48}{\gamma}\Big)^5 \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{e}^{-\lambda_k + \frac{40\rho\sqrt{\lambda_k}}{\log 2}\log(48/\gamma)} \|\chi_\omega f_k\|^2_{L^2(\mathcal{G})},$$

其中，$(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 是 $-\Delta_{A,\,Y}$ 的特征函数标准正交基，$(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 是相应特征值构成的序列。

4.2. 热方程的可观测性与可控性。结合 [NTTV20] 中相当一般的定理 2.8 与我们的定理 2.3，我们可以得到以下关于由 $\Delta_{A,\,Y}$ 生成的半群 $(\mathrm{e}^{t\Delta_{A,\,Y}})_{t\geqslant 0}$ 的 L^2-可观测性估计。

推论 4.2. 设 $\mathcal{E}$和 $Y \subset \ell^2(\mathsf{E}) \oplus \ell^2(\mathsf{E}_{\mathrm{int}})$ 如定理 2.3 中所述，且设 $\omega \subset \mathcal{E}$ 为 (γ,ρ)- 采样。则对于每个 $T > 0$ 和 $g \in L^2(\mathcal{E})$，我们有

$$\|\mathrm{e}^{T\Delta_{A,Y}} g\|^2_{L^2(\mathcal{E})} \leqslant C(\omega,T)^2 \int_0^T \|\chi_\omega \mathrm{e}^{t\Delta_{A,Y}} g\|^2_{L^2(\mathcal{E})}\,\mathrm{d}t \tag{4.1}$$

with

$$C(\omega,T)^2 \leqslant \frac{K_1\gamma^{-K_2}}{T}\exp\Big(\frac{K_3\rho^2\log^2(K_4/\gamma)}{T}\Big), \tag{4.2}$$

其中 $K_j>0$, $j=1,\dots,4$ 均为通用常数。

证明。我们可以将 (2.4) 重写为

$$\|\mathsf{P}_{-\Delta_{A,Y}}(\lambda)f\|^2_{L^2(\mathcal{E})} \leqslant d_0\mathrm{e}^{d_1\sqrt{\lambda}}\|\chi_\omega \mathsf{P}_{-\Delta_{A,Y}}(\lambda)f\|^2_{L^2(\mathcal{E})},\quad f\in L^2(\mathcal{E}),\ \lambda\geqslant 0,$$

with

$$d_0=\frac{1}{12}\Big(\frac{48}{\gamma}\Big)^5 \quad\text{and}\quad d_1=\frac{40\rho}{\log 2}\log\Big(\frac{48}{\gamma}\Big).$$

因此，根据 [NTTV20, 定理 2.8]，我们得到，对于所有 $T>0$ 和 $g\in L^2(\mathcal{E})$，有

$$\|\mathrm{e}^{T\Delta_{A,Y}}g\|^2_{L^2(\mathcal{E})} \leqslant C(\omega,T)^2\int_0^T \|\chi_\omega \mathrm{e}^{t\Delta_{A,Y}}g\|^2_{L^2(\mathcal{E})}\,\mathrm{d}t$$

with

$$C(\omega,T)^2=\frac{C_1d_0}{T}(2d_0+1)^{C_2}\exp\Big(\frac{C_3d_1^2}{T}\Big),$$

其中 C_1、C_2、$C_3>0$ 是普适常数。代入 d_0 和 d_1 的值，我们看到，$C(\omega、T)^2$ 可以按照 (4.2) 中的方式进行界定。□

经典的对偶性论证（例如参见 [TT09], ）表明，上述 L^2-可观测性估计等价于系统在每个正时间 $T>0$ 内的零可控性

$$\begin{cases}\partial_t u(t,\cdot)-\Delta_{A,Y}u(t,\cdot)=h(t,\cdot)\chi_\omega, & t\in(0,T),\\ u(0,\cdot)=u_0\in L^2(\mathcal{E}).\end{cases} \tag{4.3}$$

这意味着，对于每个初始数据 $u_0\in L^2(\mathcal{E})$ 以及每个正时间 $T>0$，都存在一个控制函数 h，使系统 (4.3) 的（温和）解在时间 T 时达到零，即 $u(T、\cdot)=0$。因此，我们得到以下结果：

推论 4.3. 设 $\mathcal{E}$和 $Y\subset \ell^2(\mathsf{E})\oplus\ell^2(\mathsf{E}_{\mathrm{int}})$ 如定理 2.3 中所述，并设 $\omega\subset\mathcal{E}$ 是 (γ,ρ)-采样。那么，对于任意时间 $T>0$, (4.3) 都是零可控的，且有

$$C_T:=\sup_{\|u_0\|_{L^2(\mathcal{E})}=1}\inf\{\|h\chi_\omega\|_{L^2((0,T)\times\mathcal{E})}\mid \textit{the solution } u \textit{ of } (4.3) \textit{ with RHS } h\chi_\omega \textit{ satisfies } u(T,\cdot)\equiv 0\}\leqslant C(\omega,T), \tag{4.4}$$

其中 $C(\omega,T)$ 是推论 4.2 中的常数。

备注 4.4. (1) 通过在 $L^2(\mathcal{E})$ 上的酉规范变换 U_A，以及在边界空间 $\ell^2(\mathsf{E})\oplus\ell^2(\mathsf{E}_{\mathrm{int}})$ 上相应的酉变换 V_A（该变换相应地映射边界条件），容易验证 $D_{A,\ Y}=U_A^*D_{0,\ V_AY}U_A$；关于 U_A 和 V_A的定义细节，请参阅第 6 节和附录。进而，磁拉普拉斯算子 $\Delta_{A,\ Y}$与自由拉普拉斯算子 $\Delta_{0,\ V_AY}$ 酉等价，其边界条件通过 $\Delta_{A,\ Y}=U_A^*\Delta_{0,\ V_AY}U_A$对应于 $V_AY\subset\ell^2(\mathsf{E})\oplus\ell^2(\mathsf{E}_{\mathrm{int}})$。

（2）如果 A 满足

$$A_{\mathsf{e}}\in L^{p_{\mathsf{e}}}((0,\ell_{\mathsf{e}})),\quad p_{\mathsf{e}}\in[2,\infty],\ \mathsf{e}\in\mathsf{E},$$

使得

$$\sup_{\mathsf{e}\in\mathsf{E}}\|f_{\mathsf{e}}\|_{L^{p_{\mathsf{e}}}((0,\ell_{\mathsf{e}}))}<\infty,$$

特别是，如果对某些 $p\in[2,\infty]$, $A\in L^p(\mathcal{E})$，那么可以证明 $W_A(\mathcal{E})$ 与 $W^{1,\ 2}(\mathcal{E})$一致。在这种情况下，相应磁拉普拉斯算子的形式域不依赖于 A。

(3) 第 (1) 部分的情形在抗磁不等式的背景下尤为有趣：与欧几里得空间中的磁薛定谔算子情形一样，标准抗磁不等式结合 [Ouh05, 定理 2.21] 中的抽象判据，可推出 $(\mathrm{e}^{t\Delta_{A,\,Y}})_{t\geqslant 0}$ 受 $(\mathrm{e}^{t\Delta_{0,\,V_AY}})_{t\geqslant 0}$ 控制（即，对所有 $t\geqslant 0$ 和所有 $f\in L^2(\mathcal{E})$，都有 $|\mathrm{e}^{t\Delta_{A,\,Y}}f|\leqslant \mathrm{e}^{t\Delta_{0,\,V_AY}}|f|$），只要 $(\mathrm{e}^{t\Delta_{0,\,V_AY}})_{t\geqslant 0}$ 是正的。根据 [Mug14, 定理 6.85]，当且仅当 $\mathcal{H}$ 在 V_AY 上的正交投影算子保正时，情况才是如此。

特别地，在推论 4.2 的假设和记号下，我们可以进而得到估计

$$\|\mathrm{e}^{T\Delta_{A,V_A^*Y}}f\|^2_{L^2(\mathcal{E})}\leqslant C(\omega,T)^2\int_0^T\|\chi_\omega \mathrm{e}^{t\Delta_{0,Y}}f\|^2_{L^2(\mathcal{E})}\,\mathrm{d}t. \tag{4.5}$$

通过了解满足边界条件 Y 的自由拉普拉斯算子所对应的半群在某个 $(\gamma、\ \rho)$-采样集上的情况，可以在时刻 T 观测与 $\Delta_{A、\ V_A^*Y}$相关联的半群；该采样集是系统 (4.3) 在 $A=0$ 下的控制集。

5. 定理 2.5

回顾一下，$f\in W^{\infty、\ 2}(\mathcal{E})$ 关于 C_B 满足伯恩斯坦型不等式：$\mathbb{N}_0\to[0、\ \infty)$，使得对于某个 $\rho>0$，式 (2.7) 成立；并且令 $\omega\subset\mathcal{E}$ 为 $(\gamma、\ \rho)$-采样。

我们首先将定理 2.5 的情形归约为一个在若干方面稍加专门化的情形：

首先，我们可以假设每个 $C_B(m)$ 都严格为正。事实上，取 $C_B(m)+\varepsilon、\ \varepsilon>0$而不是 $C_B(m)$，就可以将定理 2.5 中的 h 替换为和 $h+\varepsilon^{1/2}\exp(10\rho)$，并在最终估计中考虑 $\varepsilon\to 0$ 时的极限。

其次，我们注意到，(2.6)（因此，(2.7)也）在边的细分下保持不变。这意味着，我们可以将每个 I_{e} 分解为由 I_{e}中关于 ω_{e} 的采样假设所确定的相邻区间，同时 (2.6) 和 (2.7) 仍然成立。因此，不失一般性，我们可以假设

$$\ell^{\uparrow}:=\sup_{\mathsf{e}\in\mathsf{E}}\ell_{\mathsf{e}}\leqslant\rho, \tag{5.1}$$

同时，$(\gamma、\ \rho)$-采样集 ω 满足

$$|\omega_{\mathsf{e}}|\geqslant\gamma\ell_{\mathsf{e}}\quad\text{ for all }\ \mathsf{e}\in\mathsf{E}. \tag{5.2}$$

经过上述简化，我们现在将 E 中的边分为良边和坏边。这类似于 Kovrijkine 在欧氏空间情形中的做法 [Kov01,Kov00]，其目的是将伯恩斯坦型不等式局部化到良边上。

定义 5.1. 若边 $\mathsf{e}\in\mathsf{E}$ 关于函数 f andC_B：$\mathbb{N}_0\to[0,\infty)$ 满足以下条件，则称其为良边：

$$\|f_{\mathsf{e}}^{(m)}\|^2_{L^2((0,\ell_{\mathsf{e}}))}\leqslant 2^{m+1}C_B(m)\|f_{\mathsf{e}}\|^2_{L^2((0,\ell_{\mathsf{e}}))}\quad\text{ for all }\quad m\in\mathbb{N}. \tag{5.3}$$

若边 $\mathsf{e}\in$E 不是良边，则称其为坏边；也就是说，若存在 $m\in\mathbb{N}$ 使得我们有$\|f_{\mathsf{e}}^{(m)}\|^2_{L^2((0,\ell_{\mathsf{e}}))}>2^{m+1}C_B(m)\|f_{\mathsf{e}}\|^2_{L^2((0,\ell_{\mathsf{e}}))}$，则称其为坏边。

在当前每个 $C_B(m)$ 均严格为正的附加假设下，该定义得到

$$\sum_{\mathsf{e}:\ \mathsf{e}\text{ bad}}\|f_{\mathsf{e}}\|^2_{L^2((0,\ell_{\mathsf{e}}))}<\frac{1}{2}\|f\|^2_{L^2(\mathcal{E})}. \tag{5.4}$$

事实上，利用 f 的伯恩斯坦型不等式，我们得到

$$\begin{aligned}\sum_{\mathsf{e}\colon \mathsf{e}\text{ bad}} \|f_{\mathsf{e}}\|^2_{L^2((0,\ell_{\mathsf{e}}))} &< \sum_{\mathsf{e}\colon \mathsf{e}\text{ bad}}\sum_{m\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^{m+1}C_B(m)}\|f_{\mathsf{e}}^{(m)}\|^2_{L^2((0,\ell_{\mathsf{e}}))}\\ &\leqslant \sum_{m\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^{m+1}C_B(m)}\|f^{(m)}\|^2_{L^2(\mathcal{E})}\\ &\leqslant \|f\|^2_{L^2(\mathcal{E})}\sum_{m\in\mathbb{N}} 2^{-m-1}\\ &= \frac{1}{2}\|f\|^2_{L^2(\mathcal{E})},\end{aligned}$$

这证明了 (5.4)。特别地，良边存在，并且我们有

$$\|f\|^2_{L^2(\mathcal{E})} < 2\sum_{\mathsf{e}\colon \mathsf{e}\text{ good}} \|f_{\mathsf{e}}\|^2_{L^2((0,\ell_{\mathsf{e}}))}. \tag{5.5}$$

5.1. 良边上的解析性。根据 (5.3) 和 (2.7)，以下结果可直接由 [ES21 的一维情形（引理 3.2]）推出。为使本文自成一体，我们在下文重述这一特例的证明。

引理 5.2. 对每条良边 $\mathsf{e}\in\mathrm{E}$，函数 f_{e} 在 $(0,\ell_{\mathsf{e}})$中解析。

证明。设 e 为一条良边，并令 $r:=\min\{1,10\rho\}/\sqrt{2}$。取 $y\in(0,\ell_{\mathsf{e}})$，并令 $0<\varepsilon<r$ 满足 $J:=(y-\varepsilon,y+\varepsilon)$ 的闭包属于 $(0,\ell_{\mathsf{e}})$。根据 Sobolev 嵌入定理，存在常数 $c=c(\varepsilon)>0$，使得

$$\|g\|_{L^\infty(J)} \leqslant c\|g\|_{W^{1,2}(J)} \quad \text{for all} \quad g\in W^{1,2}(J).$$

我们将此应用于 $g=f_{\mathsf{e}}^{(m)}|_J$，对每个 $m\in\mathbb{N}_0$均如此。由 (5.3) 得到

$$\begin{aligned}\|f_{\mathsf{e}}^{(m)}\|^2_{L^\infty(J)} &\leqslant c^2\|f_{\mathsf{e}}^{(m)}\|^2_{W^{1,2}(J)} \leqslant c^2\|f_{\mathsf{e}}^{(m)}\|^2_{W^{1,2}((0,\ell_{\mathsf{e}}))}\\ &= c^2\big(\|f_{\mathsf{e}}^{(m)}\|^2_{L^2((0,\ell_{\mathsf{e}}))}+\|f_{\mathsf{e}}^{(m+1)}\|^2_{L^2((0,\ell_{\mathsf{e}}))}\big)\\ &\leqslant c^2\|f_{\mathsf{e}}\|^2_{L^2((0,\ell_{\mathsf{e}}))}\big(2^{m+1}C_B(m)+2^{m+2}C_B(m+1)\big).\end{aligned}$$

考虑到 $\sqrt{2}r\leqslant 1$，可得

$$\begin{aligned}\|f_{\mathsf{e}}^{(m)}\|_{L^\infty(J)} &\leqslant c\|f_{\mathsf{e}}\|_{L^2((0,\ell_{\mathsf{e}}))}\big(2^{(m+1)/2}C_B(m)^{1/2}+2^{(m+2)/2}C_B(m+1)^{1/2}\big)\\ &\leqslant \sqrt{2}c\|f_{\mathsf{e}}\|_{L^2((0,\ell_{\mathsf{e}}))}\frac{(m+1)!}{r^{m+1}}\sum_{k\in\mathbb{N}_0} C_B(k)^{1/2}\frac{(\sqrt{2}r)^k}{k!}.\end{aligned}$$

由于 $\sqrt{2}r\leqslant 10\rho$，并结合 (2.7)，足以得出 f_{e} 的泰勒级数在 J 中绝对收敛，且在该处与 f_{e} 一致。因此，f_{e} 在 $(0$、$\ell_{\mathsf{e}})$ 中是解析的。□

5.2. 局部估计。对于 $r>0$，记以原点为中心、半径为 r 的复圆盘为 $D_r\subset\mathbb{C}$。我们采用以下局部估计，其灵感来自 [Naz93] 中的 Turán 引理，并可追溯至 [Kov01,Kov00]。它也（隐含地）包含在若干近期著作中，例如 [GJ13，第 4 定理。5], [EV20，第 5], [WWZZ19], [BJPS 21], [MPS] 节。按当前表述，它是 [ES21 引理 3.5], 的一维变体，其证明也在下文重现。

引理 5.3. 设 $l>0$。此外，设 $g\colon (0,l)\to\mathbb{C}$ 是一个不消失函数，且具有有界解析延拓 $G\colon (0,l)+D_{4l}\to\mathbb{C}$。那么，对于每个可测集 $S\subset(0,l)$，我们有

$$\|g\|^2_{L^2(S)} \geqslant 24\Big(\frac{|S|}{48l}\Big)^{4\frac{\log M}{\log 2}+1}\|g\|^2_{L^2((0,l))}$$

with

$$M:=\frac{\sqrt{l}}{\|g\|_{L^2((0,l))}}\cdot\sup_{z\in(0,l)+D_{4l}}|G(z)|\geqslant 1.$$

引理 5.3 的证明依赖于 Kovrijkine 的以下著名结果 [Kov01]。

引理 5.4（[Kov01，引理 1]）。设 $\phi\colon D_{4+\varepsilon}\to\mathbb{C}$ 对某个 $\varepsilon>0$ 而言是解析函数，且 $|\phi(0)|\geqslant 1$。此外，设 $E\subset[0、1]$ 可测且测度为正。则，

$$\sup_{t\in[0,1]}|\phi(t)|\leqslant\Big(\frac{12}{|E|}\Big)^{\frac{2\log M_\phi}{\log 2}}\sup_{t\in E}|\phi(t)|,$$

其中 $M_\phi=\sup_{z\in D_4}|\phi(z)|$。

注 5.5。 *[Kov01]* 中引理的原始表述要求函数 ϕ 在 D_5 上解析，并且不等式中的指数为 $\log M_\phi/\log 2$，而非 $2\log M_\phi/\log 2$。该处的证明表明，只需 ϕ 在半径严格大于 4 的复圆盘内解析即可。然而，我们只有在指数中额外加入因子 2 后才能复现这一结果。由于这对我们的目的并非必需，因此这里采用稍大的指数。

引理 5.3 的证明。考虑开集

$$W=\Big\{x\in(0,l)\colon |g(x)|<\Big(\frac{|S|}{48l}\Big)^{\frac{2\log M}{\log 2}}\frac{\|g\|_{L^2((0,l))}}{\sqrt{l}}\Big\}.$$

只需证明 $|S|\geqslant 2|W|$，因为这样我们便有 $|S\backslash W|\geqslant|S|/2$，根据$W$ 的定义可得

$$\begin{aligned}\|g\|^2_{L^2(S)}&\geqslant\|g\|^2_{L^2(S\backslash W)}\geqslant\frac{|S|}{2}\Big(\frac{|S|}{48l}\Big)^{\frac{4\log M}{\log 2}}\frac{\|g\|^2_{L^2((0,l))}}{l}\\&=24\Big(\frac{|S|}{48l}\Big)^{\frac{4\log M}{\log 2}+1}\|g\|^2_{L^2((0,l))}.\end{aligned}$$

为了证明 $|S|\geqslant 2|W|$，我们可以假设 $W\neq\varnothing$。取 $y\in(0,l)$，使得$|g(y)|\geqslant\|g\|_{L^2((0,l))}/\sqrt{l}$ 并且 $\xi\in\{\pm1\}$，从而子区间 $I:=\{y+\xi t\colon t\in[0,l)\}\cap(0,l)$ 包含于$(0,l)$ 且满足

$$\frac{|I\cap W|}{|I|}\geqslant\frac{|W|}{2l}.$$

显然，若 $\xi=1$，则有 $I=[y,l)$；若 $\xi=-1$，则有 $I=(0,y]$。

考虑函数

$$\mathbb{C}\ni z\mapsto\phi(z)=\frac{\sqrt{l}}{\|g\|_{L^2((0,l))}}G(y+|I|\xi z).$$

现在，当 ε 足够小时，对所有 $z\in D_{4+\varepsilon}$ 都有 $|I|\xi z\in D_{4l}$，因此 ϕ 在圆盘$D_{4+\varepsilon}$内解析。此外，我们有

$$\sup_{t\in[0,1]}|\phi(t)|\geqslant|\phi(0)|=\frac{\sqrt{l}}{\|g\|_{L^2((0,l))}}|g(y)|\geqslant 1$$

and

$$M_\phi:=\sup_{z\in D_4}|\phi(z)|\leqslant\frac{\sqrt{l}}{\|g\|_{L^2((0,l))}}\sup_{z\in y+D_{4l}}|G(z)|\leqslant M.$$

将引理 5.4 应用于 ϕ 和集合 $E=\{t\in[0,1]\colon y+|I|\xi t\in W\}$，并利用 $G|_{(0,\ l)}=g$ 以及 $|E|=|I\cap W|/|I|\geqslant|W|/(2l)$, 这一事实，我们得到

$$\begin{aligned}\sup_{x\in W}\frac{\sqrt{l}}{\|g\|_{L^2((0,l))}}|g(x)|&\geqslant\sup_{t\in E}\frac{\sqrt{l}}{\|g\|_{L^2((0,l))}}|g(y+|I|\xi t)|\\&=\sup_{t\in E}|\phi(t)|\geqslant\Big(\frac{|E|}{12}\Big)^{\frac{2\log M_\phi}{\log 2}}\sup_{t\in[0,1]}|\phi(t)|\geqslant\Big(\frac{|W|}{24l}\Big)^{\frac{2\log M}{\log 2}}.\end{aligned}$$

结合 W 的定义，我们得出：

$$\sup_{x\in W}|g(x)| \leqslant \Big(\frac{|S|}{48l}\Big)^{\frac{2\log M}{\log 2}} \frac{\|g\|_{L^2((0,l))}}{\sqrt{l}} \leqslant \Big(\frac{|S|}{2|W|}\Big)^{\frac{2\log M}{\log 2}} \sup_{x\in W}|g(x)|.$$

由于 g 不为零，后者要求 $|S|\geqslant 2|W|$，由此完成证明。 □

5.3. 泰勒展开与证明的结束。鉴于引理 5.3 中的局部估计，我们需要证明，对每条良边 e，函数 f_{e} 都能解析延拓到 $(0,\ell_{\mathsf{e}})$ 的一个足够大的复邻域内。根据引理 5.2，只需对 f_{e} 的一个适当泰勒展开进行估计，为此我们需要对 f_{e} 的导数给出适当的逐点估计。与 [Kov01, Kov00], 类似，我们断言，对每条良边 e，都存在一点 $x_{\mathsf{e}}\in(0,\ell_{\mathsf{e}})$，使得

$$|f_{\mathsf{e}}^{(m)}(x_{\mathsf{e}})| \leqslant 2^{(m+1)}\frac{C_B(m)^{1/2}}{\ell_{\mathsf{e}}^{1/2}}\|f_{\mathsf{e}}\|_{L^2((0,\ell_{\mathsf{e}}))} \quad \text{for all} \quad m\in\mathbb{N}_0. \tag{5.6}$$

Indeed，反设对每个 $x\in(0,\ell_{\mathsf{e}})$，都存在 $m_x\in\mathbb{N}_0$，使得

$$|f_{\mathsf{e}}^{(m_x)}(x)|^2 > 4^{m_x+1}\frac{C_B(m_x)}{\ell_{\mathsf{e}}}\|f_{\mathsf{e}}\|^2_{L^2((0,\ell_{\mathsf{e}}))}.$$

由此可得

$$\frac{1}{\ell_{\mathsf{e}}}\|f_{\mathsf{e}}\|^2_{L^2((0,\ell_{\mathsf{e}}))} < \frac{1}{4^{m_x+1}C_B(m_x)}|f_{\mathsf{e}}^{(m_x)}(x)|^2 \leqslant \sum_{m\in\mathbb{N}_0}\frac{1}{4^{m+1}C_B(m)}|f_{\mathsf{e}}^{(m)}(x)|^2.$$

在 $(0,\ell_{\mathsf{e}})$ 上积分，并利用良边的定义，可得

$$\begin{aligned}\|f_{\mathsf{e}}\|^2_{L^2((0,\ell_{\mathsf{e}}))} &< \sum_{m\in\mathbb{N}_0}\frac{1}{4^{m+1}C_B(m)}\|f_{\mathsf{e}}^{(m)}\|^2_{L^2((0,\ell_{\mathsf{e}}))}\\ &\leqslant \sum_{m\in\mathbb{N}_0}\frac{1}{2^{m+1}}\|f_{\mathsf{e}}\|^2_{L^2((0,\ell_{\mathsf{e}}))} = \|f_{\mathsf{e}}\|^2_{L^2((0,\ell_{\mathsf{e}}))},\end{aligned}$$

从而导出矛盾。这就证明了 (5.6)。

现在我们终于可以证明定理 2.5。

定理 2.5 的证明。设 $\mathsf{e}\in\mathsf{E}$ 是一条良边，并令 $x_{\mathsf{e}}\in(0,\ell_{\mathsf{e}})$ 按照 (5.6) 选取。我们首先假设 f_{e} 不为零。考虑到 (5.1)，并回想 h 在 (2.7) 中的定义，对于每个 $z\in x_{\mathsf{e}}+D_{5\ell^\uparrow}$，我们有

$$\begin{aligned}\sum_{m\in\mathbb{N}_0}\frac{|f_{\mathsf{e}}^{(m)}(x_{\mathsf{e}})|}{m!}|z-x_{\mathsf{e}}|^m &\leqslant \sum_{m\in\mathbb{N}_0}\frac{1}{m!}C_B(m)^{1/2}2^{(m+1)}(5\ell^\uparrow)^m\frac{\|f_{\mathsf{e}}\|_{L^2((0,\ell_{\mathsf{e}}))}}{\ell_{\mathsf{e}}^{1/2}}\\ &= 2\frac{\|f_{\mathsf{e}}\|_{L^2((0,\ell_{\mathsf{e}}))}}{\ell_{\mathsf{e}}^{1/2}}\sum_{m\in\mathbb{N}_0}C_B(m)^{1/2}\frac{(10\ell^\uparrow)^m}{m!}\\ &\leqslant 2\frac{\|f_{\mathsf{e}}\|_{L^2((0,\ell_{\mathsf{e}}))}}{\ell_{\mathsf{e}}^{1/2}}\sum_{m\in\mathbb{N}_0}C_B(m)^{1/2}\frac{(10\rho)^m}{m!}\\ &= 2\frac{\|f_{\mathsf{e}}\|_{L^2((0,\ell_{\mathsf{e}}))}}{\ell_{\mathsf{e}}^{1/2}}h<\infty.\end{aligned}$$

因此，f_{e} 在 x_{e} 附近的泰勒展开在复圆盘 $x_{\mathsf{e}}+D_{5\ell^\uparrow}$内收敛。由于(0，根据 $\ell_{\mathsf{e}}\leqslant\ell^\uparrow$ 并结合引理 5.2，f_{e}在 x_{e}附近的泰勒展开由此定义了 f_{e}的一个有界解析延拓 F_{e}：$(0,\ \ell_{\mathsf{e}})+D_{4\ell_{\mathsf{e}}}\to\mathbb{C}$，且

$$M_{\mathsf{e}} := \frac{\ell_{\mathsf{e}}^{1/2}}{\|f_{\mathsf{e}}\|^2_{L^2((0,\ell_{\mathsf{e}}))}}\cdot\sup_{z\in(0,\ell_{\mathsf{e}})+D_{4\ell_{\mathsf{e}}}}|F_{\mathsf{e}}(z)| \leqslant 2h<\infty.$$

现在，根据引理 5.3 中的局部估计以及关于 ω 的采样假设 (5.2)，我们得到

$$\begin{aligned}\|f_{\mathsf{e}}\|^2_{L^2(\omega_{\mathsf{e}})} &\geqslant 24\Big(\frac{|\omega_{\mathsf{e}}|}{48\ell_{\mathsf{e}}}\Big)^{\frac{4\log M_{\mathsf{e}}}{\log 2}+1}\|f_{\mathsf{e}}\|^2_{L^2((0,\ell_{\mathsf{e}}))}\\ &\geqslant 24\Big(\frac{\gamma}{48}\Big)^{\frac{4\log(2h)}{\log 2}+1}\|f_{\mathsf{e}}\|^2_{L^2((0,\ell_{\mathsf{e}}))}\\ &= 24\Big(\frac{\gamma}{48}\Big)^{\frac{4\log h}{\log 2}+5}\|f_{\mathsf{e}}\|^2_{L^2((0,\ell_{\mathsf{e}}))}.\end{aligned} \tag{5.7}$$

式 (5.7) 的右端显然也给出了 $\|f_{\mathsf{e}}\|^2_{L^2(\omega_{\mathsf{e}})}$ 的下界，即使 f_{e} 消失，因此，该估计对所有良边 $\mathsf{e}\in\mathsf{E}$ 都成立。因此，结合 (5.5)，对所有良边求和最终得到

$$\begin{aligned}\|\chi_\omega f\|^2_{L^2(\mathcal{E})} = \sum_{\mathsf{e}\in\mathsf{E}}\|f_{\mathsf{e}}\|^2_{L^2(\omega_{\mathsf{e}})} &\geqslant \sum_{\mathsf{e}:\ \mathsf{e}\text{ good}}\|f_{\mathsf{e}}\|^2_{L^2(\omega_{\mathsf{e}})}\\ &\geqslant 24\Big(\frac{\gamma}{48}\Big)^{\frac{4\log h}{\log 2}+5}\sum_{\mathsf{e}:\ \mathsf{e}\text{ good}}\|f_{\mathsf{e}}\|^2_{L^2((0,\ell_{\mathsf{e}}))}\\ &> 12\Big(\frac{\gamma}{48}\Big)^{\frac{4\log h}{\log 2}+5}\|f\|^2_{L^2(\mathcal{E})},\end{aligned}$$

由此完成定理的证明。 □

注 5.6。上述证明高度依赖于这样一个事实：在采样集的定义中覆盖每条边的区间彼此相邻，这使得我们能够将每条边分解开来，从而归结为满足 (5.1) 和 (5.2) 的情形，并将边作为整体处理。然而，如果允许区间之间存在实质性重叠（如注 2.8 所建议），我们就不得不处理彼此分离的区间，而不是将整条边作为整体处理，这使得表述更加繁琐。此外，还必须处理这些重叠。例如，如果$(J_{\mathsf{e},k})_k$ 表示覆盖 I_{e} 的区间族，并且其中任意两个以上区间不存在重叠，那么

$$\sum_k \|g\|^2_{L^2(J_{\mathsf{e},k})} \leqslant 2\|g\|^2_{L^2(I_{\mathsf{e}})},\quad g\in L^2(I_{\mathsf{e}}).$$

后者要求相应地调整关于好区间和坏区间（而非边）的概念，并调整定理 2.5 证明的最后部分，从而得到注 2.8 中提到的略有不同的估计，另见 *[ES21]*。不过，只有当所有边上的采样参数都能从这些重叠中受益时，才值得考虑这种做法。

6. Proof of Theorem 2.3

根据定理 2.5，只要谱子空间 $\operatorname{Ran}\mathsf{P}_{-\Delta_{A,Y}}(\lambda)$ 中的函数（或其适当变换）满足定义 2.4 意义下的伯恩斯坦型不等式，并具有适当的 $C_B\colon \mathbb{N}_0\to[0,\infty)$，即可推出定理 2.3。

设 $A\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathcal{E})$ and $Y\subset\ell^2(\mathsf{E})\oplus\ell^2(\mathsf{E}_{\mathrm{int}})$ 如定理 2.5 的陈述所述。回顾一下（例如，见下文推论 A.5），式 (2.2) 中的 $\Delta_{A,Y}$ 是 $L^2(\mathcal{E})$ 中唯一的非正自伴算子，满足

$$\mathcal{D}(\Delta_{A,Y})\subset\mathcal{D}_{A,Y}:=\{f\in W_A(\mathcal{E})\mid (f_{\mathsf{e}}(0))_{\mathsf{e}\in\mathsf{E}}\oplus(f_{\mathsf{e}}(\ell_{\mathsf{e}}))_{\mathsf{e}\in\mathsf{E}_{\mathrm{int}}}\in Y\}$$

and

$$\langle \mathrm{i}f'+Af,\mathrm{i}g'+Ag\rangle_{L^2(\mathcal{E})}=\langle -\Delta_{A,Y}f,g\rangle_{L^2(\mathcal{E})},\quad f\in\mathcal{D}(\Delta_{A,Y}),\ g\in\mathcal{D}_{A,Y}.$$

此外，引入记号

$$(\mathrm{i}\partial+A)f:=\mathrm{i}f'+Af,\quad f\in W_A(\mathcal{E}),$$

我们有

$$-\Delta_{A,Y}f=(\mathrm{i}\partial+A)^2f,\quad f\in\mathcal{D}(\Delta_{A,Y}).$$

下面的命题与所期望的 Bernstein 型不等式有关，但讨论的是磁导数，而非普通导数。

命题 6.1. 对所有 $m \in \mathbb{N}_0$ 以及所有 $f,g \in \mathcal{D}^\infty(\Delta_{A,\ Y}) := \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{D}(\Delta_{A,\ Y}^k)$，有

$$\langle (\mathrm{i}\partial + A)^m f, (\mathrm{i}\partial + A)^m g\rangle_{L^2(\mathcal{E})} = \langle (-\Delta_{A,Y})^m f, g\rangle_{L^2(\mathcal{E})}.$$

Proof。设 $f,g \in \mathcal{D}^\infty(\Delta_{A,\ Y})$ 和 $m \in \mathbb{N}_0$。若 m 为偶数，记作 $m = 2j$，其中 $j \in \mathbb{N}_0$，则

$$\langle (-\Delta_{A,Y})^m f, g\rangle_{L^2(\mathcal{E})} = \langle (-\Delta_{A,Y})^j f, (-\Delta_{A,Y})^j g\rangle_{L^2(\mathcal{E})} = \langle (\mathrm{i}\partial + A)^m f, (\mathrm{i}\partial + A)^m g\rangle_{L^2(\mathcal{E})}.$$

若 m 为奇数，记作 $m = 2j+1$，其中 $j \in \mathbb{N}_0$，则 $(-\Delta_{A,\ Y})^j f, (-\Delta_{A,\ Y})^j g \in \mathcal{D}(\Delta_{A,\ Y}) \subset \mathcal{D}_{A,\ Y}$，因此

$$\begin{aligned}\langle (-\Delta_{A,Y})^m f, g\rangle_{L^2(\mathcal{E})} &= \langle (-\Delta_{A,Y})(-\Delta_{A,Y})^j f, (-\Delta_{A,Y})^j g\rangle_{L^2(\mathcal{E})}\\ &= \langle (\mathrm{i}\partial + A)(-\Delta_{A,Y})^j f, (\mathrm{i}\partial + A)(-\Delta_{A,Y})^j g\rangle_{L^2(\mathcal{E})}\\ &= \langle (\mathrm{i}\partial + A)^m f, (\mathrm{i}\partial + A)^m g\rangle_{L^2(\mathcal{E})}.\end{aligned}$$

□

注 6.2. 根据 (2.2)、命题 6.1 及其证明，不难看出，与幂 $(-\Delta_{A,\ Y})^m$ 相关联的二次型 $\mathfrak{a}_{A,\ Y,\ m}$ 为

$$\mathfrak{a}_{A,Y,m}[f,g] = \langle (\mathrm{i}\partial + A)^m f, (\mathrm{i}\partial + A)^m g\rangle_{L^2(\mathcal{E})}, \quad f,g \in \mathcal{D}[\mathfrak{a}_{A,Y,m}],$$

with

$$\mathcal{D}[\mathfrak{a}_{A,Y,m}] = \Big\{ f \in W_A(\mathcal{G}) \mid (\mathrm{i}\partial + A)^k f \in W_A(\mathcal{G}),\ \Psi_+((\mathrm{i}\partial + A)^k f) \in Y_k,\ k = 0,\dots,m-1 \Big\},$$

其中 $Y_k = Y$ 在 k 为偶数时成立，而 $Y_k = \{(-\alpha)\oplus\beta \mid \alpha\oplus\beta \in Y\}^\perp$ 在 k 为奇数时成立，另见下文注 A.4。

在 $A = 0$ 的特殊情形下，命题 6.1 中等式的左端在 $g = f$ 时与 $\|f^{(m)}\|^2_{L^2(\mathcal{E})}$ 重合，因此可据此推导出适当的伯恩斯坦型不等式，见下文推论 6.3 第二部分的证明。然而，若 $A \neq 0$，我们首先必须使用规范变换，将磁导数转化为普通导数。为此，我们引入酉变换

$$U_A \colon L^2(\mathcal{E}) \to L^2(\mathcal{E}), \quad f \mapsto \left(f_{\mathsf{e}} \cdot \exp\Big(-\mathrm{i}\int_0^{\cdot} A_{\mathsf{e}}(s)\,\mathrm{d}s\Big)\right)_{\mathsf{e}\in\mathsf{E}}.$$

于是容易看出（参见下文引理 A.2），U_A 将 $W_A(\mathcal{E})$ 映射到 $W^{1,\ 2}(\mathcal{E})$，其中

$$(U_A f)' = U_A((\partial - \mathrm{i}A)f) = -\mathrm{i}U_A((\mathrm{i}\partial + A)f) \in L^2(\mathcal{E}), \quad f \in W_A(\mathcal{E}). \tag{6.1}$$

基于这一点，我们从命题 6.1 推导出以下结果。

推论 6.3。在命题 6.1 的情形下，U_A 将 $\mathcal{D}^\infty(\Delta_{A,\ Y})$ 映射到 $W^{\infty,\ 2}(\mathcal{E})$，并且有

$$\langle (U_A f)^{(m)}, (U_A g)^{(m)} g\rangle_{L^2(\mathcal{E})} = \langle (-\Delta_{A,Y})^m f, g\rangle_{L^2(\mathcal{E})} \tag{6.2}$$

对所有 $m \in \mathbb{N}_0$ 以及所有 $f,\ g \in \mathcal{D}^\infty(\Delta_{A,\ Y})$ 均成立。特别地，对于每个 $f \in \mathsf{Ran}\ \mathsf{P}_{-\Delta_{A,\ Y}}(\lambda)$，函数 $U_A f \in W^{\infty,\ 2}(\mathcal{E})$ 关于 C_B 满足伯恩斯坦型不等式：$\mathbb{N}_0 \to [0,\ \infty)$，$C_B(m) = \lambda^m$。

证明。对于 $f \in \mathcal{D}^\infty(\Delta_{A,\ Y})$ 和 $m \in \mathbb{N}_0$，显然有 $(\mathrm{i}\partial + A)^m f \in W_A(\mathcal{E})$。因此，迭代应用 (6.1)，我们得到

$$(U_A f)^{(m)} = U_A((\partial - \mathrm{i}A)^m f) = (-\mathrm{i})^m U_A((\mathrm{i}\partial + A)^m f) \in L^2(\mathcal{E}), \quad f \in \mathcal{D}^\infty(\Delta_{A,Y}),\ m \in \mathbb{N}_0.$$

特别地，U_A 确实将 $\mathcal{D}^\infty(\Delta_{A,Y})$ 映射到 $W^{\infty,2}(\mathcal{E})$，并且由于 U_A 是酉算子，命题 6.1 的断言可直接改写为 (6.2)。随后，利用函数演算并结合 (6.2) 和 $g = f$，即可得到剩余结论。

$$\|(U_A f)^{(m)}\|^2_{L^2(\mathcal{E})} = \langle (-\Delta_{A,Y})^m f, f\rangle_{L^2(\mathcal{E})} \leqslant \lambda^m \langle f, f\rangle_{L^2(\mathcal{E})} = \lambda^m \|U_A f\|^2_{L^2(\mathcal{E})},$$

至此，证明得证。 □

在最终转向定理 2.3 的证明之前，我们先指出，对于每个 $f \in \operatorname{Ran} \mathsf{P}_{-\Delta_{A,\,Y}}(\lambda)$都有

$$(\mathrm{i}\partial + A)f \in \operatorname{Ran} \mathsf{P}_{-\Delta_{A,Y_-}}(\lambda), \tag{6.3}$$

其中

$$Y_- = \{(-\alpha) \oplus \beta \mid \alpha \oplus \beta \in \ell^2(\mathsf{E}) \oplus \ell^2(\mathsf{E}_{\mathrm{int}})\}^\perp.$$

这是因为算子 $-\Delta_{A,Y}$ 和 $-\Delta_{A,Y_-}$ 在某种意义上互为对偶的结果，参见下文推论 A.5。

定理 2.3 的证明。由推论 6.3，对于 $f \in \operatorname{Ran} \mathsf{P}_{-\Delta_{A,Y}}(\lambda)$，函数 $U_A f$ 关于 C_B 满足伯恩斯坦型不等式：$\mathbb{N}_0 \to [0,\ \infty)$，其中 $C_B(m) = \lambda^m$。(2.7) 中相应的量 h 可写为 $h = \exp(10\rho\sqrt{\lambda})$。对 f 本身的结论随即由将定理 2.5 应用于 $U_A f$ 并结合以下事实直接得到：

$$\|U_A f\|_{L^2(\mathcal{E})} = \|f\|_{L^2(\mathcal{E})} \quad \text{and} \quad \|\chi_\omega U_A f\|_{L^2(\mathcal{E})} = \|\chi_\omega f\|_{L^2(\mathcal{E})}.$$

根据 (6.3)，对于 $(\mathrm{i}\partial + A)f$，结论可用同样的方法得到，只需将 $\Delta_{A,Y}$ 替换为 Δ_{A,Y_-}。□

7. Metric graphs

虽然我们已经看到，只要存在自然因子分解，我们的主要结果就适用于相当广泛的一类作用在支撑于 $\mathcal{E}$ 上的函数上的算子，但现在我们将说明，当把 $\mathcal{E}$ 视为度量图的边集时，如何将我们的理论具体化；关于这类度量测度空间的精确定义，请参见 [Mug] 。为方便起见，我们将

$$\mathcal{H} = \ell^2(\mathsf{E}) \oplus \ell^2(\mathsf{E}_{\mathrm{int}}),$$

并赋予 $\mathcal{H}$ 自然内积。

我们首先讨论，在各个度量图上对 Y 作不同选择，如何导出（磁）拉普拉斯算子的某些实现。

例 7.1。为简单起见，我们考虑 $A = 0$ 的情形，不过，鉴于注 4.4 (2)，即便允许例如带有某些 $p \in [2,\infty]$ 的 $0 \neq A \in L^p(\mathcal{G})$，也不会有实质性的变化。

(1) 选择 $Y = \{0\}$ 得到（解耦的）狄利克雷拉普拉斯算子，而选择 $Y = \mathcal{H}$（即 $Y^\perp = \{0\}$）则对应于（解耦的）诺伊曼拉普拉斯算子。

(2) 此外，假设度量图 $\mathcal{G}$ 是局部有限的，也就是说，对每个顶点 $\mathsf{v} \in \mathsf{V}$，与 v 相接的边集 E_v（即端点之一与 v 重合的边）是有限的。在这种情况下，自由拉普拉斯算子最常见的实现——标准拉普拉斯算子——是通过施加连续性条件和基尔霍夫型顶点条件得到的。更具体地，对每个顶点 v，我们定义向量 $\iota_\mathsf{v}^+ = (\iota_{\mathsf{v},\,\mathsf{e}}^+)_{\mathsf{e}\in\mathsf{E}} \in \ell^2(\mathsf{E})$ 和 $\iota_\mathsf{v}^- = (\iota_{\mathsf{v},\,\mathsf{e}}^-)_{\mathsf{e}\in\mathsf{E}_{\mathrm{int}}} \in \ell^2(\mathsf{E}_{\mathrm{int}})$ 如下

$$\iota_{\mathsf{v},\mathsf{e}}^+ = \begin{cases} 1, & \mathsf{v} \text{ is initial endpoint for } \mathsf{e}, \\ 0, & \text{otherwise}, \end{cases} \qquad (\mathsf{e} \in \mathsf{E})$$

and

$$\iota_{\mathsf{v},\mathsf{e}}^- = \begin{cases} 1, & \mathsf{v} \text{ is terminal endpoint for } \mathsf{e}, \\ 0, & \text{otherwise}, \end{cases} \qquad (\mathsf{e} \in \mathsf{E}_{\mathrm{int}}).$$

标准拉普拉斯算子由此定义为将 Y 取为向量 $y_\mathsf{v} := \iota_\mathsf{v}^+ \oplus \iota_\mathsf{v}^- \in \mathcal{H}$、$\mathsf{v} \in \mathsf{V}$ 的线性张成的闭包，即，

$$Y = \overline{\operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{y_\mathsf{v} \in \mathcal{H} : \mathsf{v} \in \mathsf{V}\}}. \tag{7.1}$$

注意，由于假设图是局部有限的，因此每个 y_{v} 确实属于 $\mathcal{H}$ ，而且 y_{v} 只有有限个非零项。不难看出，每个$f \in \mathcal{D}(\Delta_{0,\ Y})$ 在顶点处都是连续的，并满足基尔霍夫型条件

$$\sum_{\mathsf{e}\in\mathsf{E}} \iota^{-}_{\mathsf{v},\mathsf{e}} f'_{\mathsf{e}}(\ell_{\mathsf{e}}) - \sum_{\mathsf{e}\in\mathsf{E}_{\mathsf{v}}} \iota^{+}_{\mathsf{v},\mathsf{e}} f'_{\mathsf{e}}(0) = 0, \quad \mathsf{v} \in \mathsf{V},$$

也就是说，在每个顶点，流入流量之和等于流出流量之和。

(3) 在上一项的情形下， Y 的另一种重要选择例如可以通过取

$$Y = \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{(-\iota^{+}_{\mathsf{v}}) \oplus \iota^{-}_{\mathsf{v}} \in \mathcal{H} \colon \mathsf{v} \in \mathsf{V}\}^{\perp}$$

其中 $\iota^{\pm}_{\mathsf{v}}$如上所述，参见下文注 A.4。这些条件有时称为反基尔霍夫条件，对应于耦合强度为零的 δ'-条件。值得注意的是，根据下文推论 A.5 (b)，它们与基尔霍夫边界条件互为对偶。

(4) 其他涵盖的实现还包括在连续性条件和基尔霍夫型顶点条件中采用适当权重的情形；这些权重在保正半群理论及基态严格正性中的作用已在 [Mug14, 定理 6.85] 和 [Kur19] 中讨论。然而，具有非平凡耦合参数的 δ-或 δ'-耦合不属于上述框架。

现在，我们将说明如何使估计式 (2.4) 和 (2.5) 对某一类度量图的几何参数保持一致：首先注意，若度量图 $\mathcal{G}$ 连通且只有有限条边，且每条边的长度有限，那么 $\Delta_{A,Y}$在 $L^2(\mathcal{G})$ 上的谱由一列非负实特征值构成，并且这些特征值累积于 $+\infty$，参见下文的引理 A.2 和推论 A.5。将这些特征值按非递减顺序排列，并按重数计数，记为

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \dots.$$

现在考虑标准拉普拉斯算子，即例 7.1(2) 中讨论的实现（特别地，我们假设 $A = 0$）；若 $\mathcal{G}$ 不是一个环，那么 $\lambda_1 = 0$ 是一个单特征值，并且已知以下双边（紧确）估计成立：

$$\frac{k^2\pi^2}{4|\mathcal{G}|^2} \leqslant \lambda_k \leqslant \left(k - 1 + \frac{3}{2}\beta + \frac{|N|}{2}\right)^2 \frac{\pi^2}{|\mathcal{G}|^2}, \quad k = 2, 3, \dots,$$

关于第 k 个特征值，参见 [Fri05，定理 1], [BKKM17，定理 4.9],以及 [KS18，定理 2]。这里， $|N|$ 表示度为 1 的顶点数，按定义，这些顶点上施加的是纯 Neumann 条件； β : $= |E| - |V| + 1$ 是$\mathcal{G}$的 Betti 数，而 $|\mathcal{G}| := \sum_{\mathsf{e}\in\mathsf{E}} \ell_{\mathsf{e}}$ 表示 $\mathcal{G}$的总长度。近期， [DKM$^+$22定理 5.2], 给出了一个涉及图的直径 D 的另一种上界，即 $\mathcal{G}$中任意两点间距离的上确界：

$$\lambda_k \leqslant (k + \beta - 1)^2 \frac{\pi^2}{D^2}, \quad k = 2, 3, \dots.$$

因此，定理 2.3 推出了一些估计：对于对应于 k 个最低特征值的特征函数线性组合，这些估计关于 $\mathcal{G}$ 的总长度 $|\mathcal{G}|$ 、贝蒂数 β 以及度为 1 的顶点数 $|N|$ （分别地，图的直径）是一致的。

推论 7.2. 设 $\mathcal{G}$ 为一个总长度有限的有限度量图。设 $f \neq 0$ 为对应于标准拉普拉斯算子 $\Delta_{\mathcal{G}}$在 $\mathcal{G}$上（如例 7.1 (2) 所示）按重数计的 k 个最低特征值的特征函数的有限线性组合。那么，对于每个 $(\gamma,\ \rho)$-采样集$\omega \subset \mathcal{E}$ ，我们有

$$\|\chi_\omega f\|^2_{L^2(\mathcal{G})} > C\|f\|^2_{L^2(\mathcal{G})}$$

and

$$\|\chi_\omega f'\|^2_{L^2(\mathcal{G})} > C\|f'\|^2_{L^2(\mathcal{G})}$$

其中常数 $C > 0$ 满足

$$12\Big(\frac{\gamma}{48}\Big)^{\frac{40\rho}{\log 2}\left(k-1+\frac{3}{2}\beta+\frac{|N|}{2}\right)\frac{\pi}{|\mathcal{G}|}+5} \leqslant C \leqslant 12\Big(\frac{\gamma}{48}\Big)^{\frac{20\rho k\pi}{|\mathcal{G}|\log 2}+5}.$$

此外，对于直径为 D 的度量图，常数 C 可以选取得满足下界

$$C \geqslant 12\Big(\frac{\gamma}{48}\Big)^{\frac{40\rho(k+\beta-1)\pi}{D\log 2}+5}.$$

我们指出，只需将 $\mathcal{E}$ 替换为 $\mathcal{G}$，第 4 节的结果也可以表述为针对度量图的结论。特别地，若考虑 $A = 0$ 以及上述双侧特征值估计，则推论 4.1 的陈述可以仅用图的几何性质来表述。

注 7.3. 如引言中所述，度量图上的唯一延拓原理一般不成立。这大大限制了将我们的主要结果推广到度量图的一般子集 ω 的可能性。例如，人们可能会天真地猜想，只需假设子图 $\omega \subset \mathcal{G}$ 满足某个条件，便可放宽定义 2.2 中 ω 的采样性质 ¨

$$|\omega| \geqslant \gamma|\mathcal{G}|, \tag{7.2}$$

也就是说，假设 $\mathcal{G}$ 中有一部分（但不一定是每条边的一部分）属于 ω。然而，在这一较弱假设下，定理 2.3 通常不成立；套索图 $\mathcal{G}$ 的环上支撑的特征函数就是一个反例，见图 7.1。

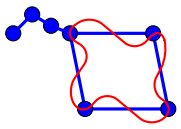


FIGURE 7.1. 一张不满足唯一延拓原理的度量图；图中以红色描绘了具有标准顶点条件的拉普拉斯算子的第二个特征函数。

另一方面，ω 必须与所有边相交这一事实似乎只是我们所用方法造成的结果。该方法基于复分析工具，而这些工具似乎难以从单条边推广到网络状的分枝空间；对于至少某些类别的度量图，这一条件或许可以放宽。事实上，至少对于边长两两不可公度的度量图，已知特征函数不可能在任何开子图上恒等于零，见 [BK13，第 3 节]。

我们在本节最后将定理 2.5 应用于所谓的扭转函数，这一函数我们已在引言中提到过。

例 7.4. 给定一张紧致度量图，对于任意严格正、具有正预解式的自伴实现 Δ，其扭转函数 u 是下列方程的（唯一）解：

$$-\Delta u(x) = 1, \quad x \in \mathcal{G}, \tag{7.3}$$

参见 [MP23]。如果此类实现的顶点条件在某个集合 $\varnothing \neq \mathsf{V_D} \subset \mathsf{V}$ 上为狄利克雷型，而在 $\mathsf{V}\setminus \mathsf{V_D}$ 上为标准型（连续性和基尔霍夫条件），那么已知（参见 [MP23，命题 5.1] 的证明）

$$\frac{T(\mathcal{G};\mathsf{V_D})}{|\mathcal{G}|} < \frac{\|u\|^2_{L^2(\mathcal{G})}}{\|u'\|^2_{L^2(\mathcal{G})}},$$

其中，$|\mathcal{G}|$ 再次表示 $\mathcal{G}$ 和 $T(\mathcal{G}$的总长度；$\mathsf{V_D}) := \|u\|_{L^1(\mathcal{G})} < \infty$ 是 $\mathcal{G}$的所谓扭转刚度。此外，

$$\|u''\|^2_{L^2(\mathcal{G})} = \|\mathbf{1}\|^2_{L^2(\mathcal{G})} = |\mathcal{G}|$$

and

$$\|u^{(m)}\|^2_{L^2(\mathcal{G})} = \|(\mathbf{1})^{(m-2)}\|^2_{L^2(\mathcal{G})} = 0 \quad \text{for all} \ \ m \geqslant 3,$$

因此， u 在每条边上都是一个二次多项式。这表明度量图的扭转函数 u满足关于 C_B的伯恩斯坦型不等式： $\mathbb{N}_0 \to [0,\infty)$ 其中

$$C_B(0) = 1, \quad C_B(1) = \frac{|\mathcal{G}|}{T(\mathcal{G};\mathsf{V_D})}, \quad C_B(2) = \frac{|\mathcal{G}|}{\|u\|^2_{L^2(\mathcal{G})}} < \frac{|\mathcal{G}|^2}{T(\mathcal{G};\mathsf{V_D})^2}, \tag{7.4}$$

其中最后一个不等式由柯西–施瓦茨不等式得出，且对所有 $m \geqslant 3$， $C_B(m) = 0$ 。因此，定理 2.5 适用，并对每个 (γ,ρ)-采样集 $\omega \subset \mathcal{E}$ 给出如下估计

$$\|u\chi_\omega\|^2_{L^2(\mathcal{G})} > 12\Big(\frac{\gamma}{48}\Big)^{\frac{4\log h}{\log 2}+5}\|u\|^2_{L^2(\mathcal{G})} \tag{7.5}$$

with

$$h = \sqrt{C_B(0)} + \sqrt{C_B(1)}10\rho + \sqrt{C_B(2)}\frac{(10\rho)^2}{2}. \tag{7.6}$$

这里，量 h 仍取决于函数 u 本身，但可以用仅取决于图的几何性质的量来界定。首先，我们注意到 (7.5) 的右端关于 h单调不增。鉴于 (7.4)，因此可以在 (7.5) 中用以下表达式替换 h

$$h' = 1 + \frac{10\rho\sqrt{|\mathcal{G}|}}{\sqrt{T(\mathcal{G};\mathsf{V_D})}} + \frac{50\rho^2|\mathcal{G}|}{T(\mathcal{G};\mathsf{V_D})}$$

并进一步寻找商 $|\mathcal{G}|/T(\mathcal{G};\mathsf{V_D})$的上界。现在，扭转刚度$T(\mathcal{G};\mathsf{V_D})$ 是一个仅取决于 $\mathcal{G}$和 $\mathsf{V_D}$ 的量，并且可根据 [MP23，命题 3.1 和定理 3.9]显式计算。若该图有 $|\mathsf{E}|$ 条边，且至少在一个顶点上施加狄利克雷条件（即 $\mathsf{V_D} \neq \varnothing$），则上界

$$\frac{|\mathcal{G}|}{T(\mathcal{G};\mathsf{V_D})} \leqslant \frac{12|\mathsf{E}|^3}{|\mathcal{G}|^2}$$

已知该结论成立，参见 [MP23, (4.6) 以及命题 4.8] 中改进后的估计。特别地，当度量图仅由一个长度为 $|\mathcal{G}| = \ell$ 的区间构成时，根据 [MP23,Example 2.4] ，我们甚至有

$$T(\mathcal{G};\mathsf{V_D}) = \frac{\ell^3}{3} \quad \text{or} \quad T(\mathcal{G};\mathsf{V_D}) = \frac{\ell^3}{12},$$

这分别取决于 $\mathsf{V_D}$ 是由一个还是两个顶点构成。如果我们进一步选取 $\omega = (\frac{\ell}{4}、\ \frac{3\ell}{4})$，并回忆例 2.7 (3) 中该集合是 $(\gamma = \frac{1}{2}、\ \rho = \frac{\ell}{2})$-采样的，就得到

$$\|u\chi_\omega\|^2_{L^2(\mathcal{G})} > 12\Big(\frac{1}{96}\Big)^{\frac{4\log h'}{\log 2}+5}\|u\|^2_{L^2(\mathcal{G})}, \tag{7.7}$$

with

$$h' = 1 + 5\sqrt{3} + \frac{75}{2} < 48 \quad \text{resp.} \quad h' = 1 + 10\sqrt{3} + 150 < 169.$$

当然，一般估计式 (7.5) 还可以与 (1.2)（及其图上的对应形式）结合，从而得到一个全局估计：对于至少在一个顶点处施加了狄利克雷条件的标准拉普拉斯算子的任意特征函数，其估计可由小控制集上扭转函数的范数给出。

<escape>Appendix A. Factorisation of vector-valued magnetic Laplacians with possibly non-separated boundary conditions</escape>

在本附录中，我们回顾本文主体部分所研究的算子类，即定义在边集 $\mathcal{E}$ 上、与实值 $A \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathcal{E})$ 及 $\ell^2(\mathsf{E}) \oplus \ell^2(\mathsf{E}_{\mathrm{int}})$ 的闭子空间 Y 相关联的磁拉普拉斯算子的自伴实现 $\Delta_{A,\,Y}$。值得再次指出的是，关于欧几里得区域上带磁势的薛定谔算子的类似研究，可见 [HS04]。以下始终假设假设 2.1 成立。

记

$$\mathcal{H} = \ell^2(\mathsf{E}) \oplus \ell^2(\mathsf{E}_{\mathrm{int}})$$

为边界空间，并赋予其自然内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$ 及相应的范数 $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$。我们还记

$$\mathcal{B}(\mathcal{E}) := \big\{ f \colon \mathcal{E} \to \mathbb{C} \mid f_{\mathsf{e}} \in C(I_{\mathsf{e}}) \ \forall \mathsf{e} \in \mathsf{E},\ (f_{\mathsf{e}}(0))_{\mathsf{e}\in\mathsf{E}} \oplus (f_{\mathsf{e}}(\ell_{\mathsf{e}}))_{\mathsf{e}\in\mathsf{E}_{\mathrm{int}}} \in \mathcal{H} \big\},$$

并引入边界求值映射 $\Psi_{\pm} \colon \mathcal{B}(\mathcal{E}) \to \mathcal{H}$，定义如下：

$$\Psi_{\pm}(f) = (\pm f_{\mathsf{e}}(0))_{\mathsf{e}\in\mathsf{E}} \oplus (f_{\mathsf{e}}(\ell_{\mathsf{e}}))_{\mathsf{e}\in\mathsf{E}_{\mathrm{int}}}.$$

以下我们将用到区间上的一阶索博列夫嵌入。对于 L^1 情形，我们满足于一个定性结果——即 $W^{1,\,1}((a,\ b))$ 对于满足 $a < b$ 的 $a,\ b \in \mathbb{R}$ 连续嵌入于 $C([a,\ b])$ ——而对于 L^2 情形，我们采用 [Mar83] 在这一背景下得到的最优结果，并由此得到 [Pos12，引理 2.23] 的一个略为更强的版本；对于不具有半有界几何的度量图， [KMN22，引理 3.2 和注 3.3] 中则得到了一个不同但可比的结果。

引理 A.1. 空间 $W^{1,2}(\mathcal{E}) = \bigoplus_{\mathsf{e}\in\mathsf{E}} W^{1,2}((0,\ell_{\mathsf{e}}))$ 包含于 $\mathcal{B}(\mathcal{E})$，且算子 $\Psi_{\pm}$ 到 $W^{1,2}(\mathcal{E})$ 的限制是有界的，并且存在有界右逆。更确切地说，我们有

$$\|\Psi_{\pm}(f)\|^2_{\mathcal{H}} \leqslant 2\coth(\ell^{\downarrow})\|f\|^2_{W^{1,2}(\mathcal{E})} \quad \textit{for all} \quad f \in W^{1,2}(\mathcal{E}), \tag{A.1}$$

并且对每个 $\nu \in \mathcal{H}$，都存在 $f^{\pm} \in W^{1,2}(\mathcal{E})$，使得 $\Psi_{\pm}(f^{\pm}) = \nu$，且

$$\|f^{\pm}\|^2_{W^{1,2}(\mathcal{E})} = \Big(\frac{\ell^{\downarrow}}{6} + \frac{2}{\ell^{\downarrow}}\Big)\|\nu\|^2_{\mathcal{H}}.$$

证明。设 $f \in W^{1,2}(\mathcal{E})$。由从 [Mar83], 的 Sobolev 嵌入可知，对每个 $\mathsf{e} \in \mathsf{E}$，我们有$f_{\mathsf{e}} \in C(I_{\mathsf{e}})$ 且

$$|f_{\mathsf{e}}(0)|^2 \leqslant \coth(\ell^{\downarrow})\|f_{\mathsf{e}}\|^2_{W^{1,2}((0,\ell^{\downarrow}))} \leqslant \coth(\ell^{\downarrow})\|f_{\mathsf{e}}\|^2_{W^{1,2}((0,\ell_{\mathsf{e}}))},$$

并且对 $\mathsf{e} \in \mathsf{E}_{\mathrm{int}}$，还有

$$|f_{\mathsf{e}}(\ell_{\mathsf{e}})|^2 \leqslant \coth(\ell^{\downarrow})\|f_{\mathsf{e}}\|^2_{W^{1,2}((\ell_{\mathsf{e}}-\ell^{\downarrow},\ell_{\mathsf{e}}))} \leqslant \coth(\ell^{\downarrow})\|f_{\mathsf{e}}\|^2_{W^{1,2}((0,\ell_{\mathsf{e}}))}.$$

分别对 $\mathsf{e} \in \mathsf{E}$ 和 $\mathsf{e} \in \mathsf{E}_{\mathrm{int}}$求和，即得 (A.1)。特别地， $W^{1,2}(\mathcal{E})$ 确实包含于 $\mathcal{B}(\mathcal{E})$，且 $\Psi_{\pm}$ 到 $W^{1,2}(\mathcal{E})$ 的限制是有界的。

反过来，设 $\nu = \alpha \oplus \beta \in \mathcal{H}$。我们如下定义 $f^{\pm} \in L^2(\mathcal{E})$：对于 $\mathsf{e} \in \mathsf{E}_{\mathrm{int}}$，令 $f^{\pm}_{\mathsf{e}} \in L^2((0,\ell_{\mathsf{e}}))$由下式给出

$$f^{\pm}_{\mathsf{e}}(x) := \begin{cases} \pm\alpha_{\mathsf{e}}(1 - 2x/\ell^{\downarrow}), & 0 \leqslant x \leqslant \ell^{\downarrow}/2, \\ 0, & \ell^{\downarrow}/2 < x < \ell_{\mathsf{e}} - \ell^{\downarrow}/2, \\ \beta_{\mathsf{e}}(1 + 2(x - \ell_{\mathsf{e}})/\ell^{\downarrow}), & \ell_{\mathsf{e}} - \ell^{\downarrow}/2 \leqslant x \leqslant \ell_{\mathsf{e}}. \end{cases}$$

Then 显然 $f^{\pm}_{\mathsf{e}}$属于 $W^{1,2}((0,\ell_{\mathsf{e}}))$ 其中 $f^{\pm}_{\mathsf{e}}(0) = \pm\alpha_{\mathsf{e}}$ 且 $f^{\pm}_{\mathsf{e}}(\ell_{\mathsf{e}}) = \beta_{\mathsf{e}}$。此外，

$$\|f^{\pm}_{\mathsf{e}}\|^2_{L^2((0,\ell_{\mathsf{e}}))} = \frac{\ell^{\downarrow}}{6}(|\alpha_{\mathsf{e}}|^2 + |\beta^2_{\mathsf{e}}|) \quad \text{and} \quad \|(f^{\pm}_{\mathsf{e}})'\|^2_{L^2((0,\ell_{\mathsf{e}}))} = \frac{2}{\ell^{\downarrow}}(|\alpha_{\mathsf{e}}|^2 + |\beta_{\mathsf{e}}|^2).$$

对于 $\mathsf{e} \in \mathsf{E}_{\mathrm{ext}} = \mathsf{E}\backslash\mathsf{E}_{\mathrm{int}}$，令 $f^{\pm}_{\mathsf{e}} \in L^2((0,\ell_{\mathsf{e}}))$ 由下式给出

$$f^{\pm}_{\mathsf{e}}(x) := \begin{cases} \pm\alpha_{\mathsf{e}}(1 - 2x/\ell^{\downarrow}), & 0 \leqslant x \leqslant \ell^{\downarrow}/2, \\ 0, & \ell^{\downarrow}/2 < x. \end{cases}$$

则再次有 $f^{\pm}_{\mathsf{e}}$属于 $W^{1,2}((0,\ell_{\mathsf{e}}))$，且满足 $f^{\pm}_{\mathsf{e}}(0)=\pm\alpha_{\mathsf{e}}$ 和

$$\|f^{\pm}_{\mathsf{e}}\|^2_{L^2((0,\ell_{\mathsf{e}}))}=\frac{\ell^{\downarrow}}{6}|\alpha_{\mathsf{e}}|^2 \quad \text{and} \quad \|(f^{\pm}_{\mathsf{e}})'\|^2_{L^2((0,\ell_{\mathsf{e}}))}=\frac{2}{\ell^{\downarrow}}|\alpha_{\mathsf{e}}|^2.$$

对 $\mathsf{e}\in\mathsf{E}=\mathsf{E}_{\mathrm{int}}\cup\mathsf{E}_{\mathrm{ext}}$ 求和最终表明，确实有 $f^{\pm}\in W^{1,2}(\mathcal{E})$ 其中 $\Psi_{\pm}(f^{\pm})=\nu$ 以及

$$\|f^{\pm}\|^2_{W^{1,2}(\mathcal{E})}=\|f^{\pm}\|^2_{L^2(\mathcal{E})}+\|(f^{\pm})'\|^2_{L^2(\mathcal{E})}=\Big(\frac{\ell^{\downarrow}}{6}+\frac{2}{\ell^{\downarrow}}\Big)\|\nu\|^2_{\mathcal{H}}.$$

这证明了该陈述的剩余部分，从而完成证明。 □

给定一个实值 $A\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathcal{E})$，回顾可得

$$W_A(\mathcal{E})=\{f\in L^2(\mathcal{E})\cap W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{E})\colon (\mathrm{i}\partial+A)f\in L^2(\mathcal{E})\}$$

其中 $(\mathrm{i}\partial+A)f=\mathrm{i}f'+Af$，且相应的酉规范变换 U_A 在 $L^2(\mathcal{E})$ 中由下式给出

$$U_Af=\Big(f_{\mathsf{e}}\cdot\exp\Big(-\mathrm{i}\int_0^{\cdot}A_{\mathsf{e}}(s)\,\mathrm{d}s\Big)\Big)_{\mathsf{e}\in\mathsf{E}},\quad f\in L^2(\mathcal{E}).$$

我们还引入边界空间中的酉变换 $V_A\colon\ \mathcal{H}\to\mathcal{H}$，其定义为

$$V_A(\alpha\oplus\beta)=\alpha\oplus\Big(\beta_{\mathsf{e}}\cdot\exp\Big(-\mathrm{i}\int_0^{\ell_{\mathsf{e}}}A_{\mathsf{e}}(s)\,\mathrm{d}s\Big)\Big)_{\mathsf{e}\in\mathsf{E}_{\mathrm{int}}}.$$

注意到，由于对所有 $\mathsf{e}\in\mathsf{E}$ 都有 $A_{\mathsf{e}}\in L^1_{\mathrm{loc}}(I_{\mathsf{e}})$，$U_A$ 和 V_A 确实定义良好；此外，U_A 将 $L^2(\mathcal{E})\cap\mathcal{B}(\mathcal{E})$ 映射到 $L^2(\mathcal{E})\cap\mathcal{B}(\mathcal{E})$，并且

$$V_A\circ\Psi_{\pm}=\Psi_{\pm}\circ U_A \quad \text{on} \quad L^2(\mathcal{E})\cap\mathcal{B}(\mathcal{E}). \tag{A.2}$$

我们在 $W_A(\mathcal{E})$ 上赋予内积

$$\langle f,g\rangle_{W_A(\mathcal{E})}:=\langle f,g\rangle_{L^2(\mathcal{E})}+\langle(\mathrm{i}\partial+A)f,(\mathrm{i}\partial+A)g\rangle_{L^2(\mathcal{E})}$$

并得到 $W_A(\mathcal{E})$ 和 $W^{1,2}(\mathcal{E})$之间的如下关系，这也可作为空间 $W_A(\mathcal{E})$ 的另一种刻画。

引理 A.2. 规范变换 U_A 是从 $W_A(\mathcal{E})$ 到 $W^{1,2}(\mathcal{E})$的酉变换，并且每个 $f\in W_A(\mathcal{G})$ 都满足

$$(U_Af)'=-\mathrm{i}U_A((\mathrm{i}\partial+A)f). \tag{A.3}$$

特别地，关于内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{W_A(\mathcal{E})}$ 是一个希尔伯特空间；$W_A(\mathcal{E})$ 作为集合包含于 $\mathcal{B}(\mathcal{E})$中，并且 $\Psi_{\pm}$ 到 $W_A(\mathcal{E})$ 的限制是满射。

此外，如果 E 有限且每条边的长度有限，也就是说 $\mathsf{E}=\mathsf{E}_{\mathrm{int}}$，那么 $W_A(\mathcal{E})$ 到 $L^2(\mathcal{E})$的嵌入是希尔伯特–施密特的。

证明。我们 证明 $U_AW_A(\mathcal{E})=W^{1,2}(\mathcal{E})$ 作为集合相等，且 (A.3) 成立。由此可得 th at

$$\|U_Af\|^2_{W^{1,2}(\mathcal{E})}=\|U_Af\|^2_{L^2(\mathcal{E})}+\|(U_Af)'\|^2_{L^2(\mathcal{E})}=\|U_Af\|^2_{L^2(\mathcal{E})}+\|U_A((\mathrm{i}\partial+A)f)\|^2_{L^2(\mathcal{E})}=\|f\|^2_{W_A(\mathcal{E})}$$

对所有 $f\in W_A(\mathcal{E})$，因为 U_A 在 $L^2(\mathcal{E})$中是酉的，所以 U_A 也是从 $W_A(\mathcal{E})$ 到$W^{1,2}(\mathcal{E})$的酉算子。特别地，$W_A(\mathcal{E})$ 关于 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{W_A(\mathcal{E})}$ 是希尔伯特空间，因为 $W^{1,2}(\mathcal{E})$ 是希尔伯特空间。此外，由 (A.2) 可知，根据引理 A.1，$W_A(\mathcal{E})$ 属于$\mathcal{B}(\mathcal{E})$，且 $\Psi_{\pm}$ 到 $W_A(\mathcal{E})$ 的限制是满射。

设 $f\in W_A(\mathcal{G})$。逐边应用标准的 Sobolev 嵌入定理和弱可微函数的链式法则（例如参见 [Bre10，推论 8.11]），可知 $g:=U_Af$ 属于$W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{E})$ 并且满足

$$g'_{\mathsf{e}}=(f'_{\mathsf{e}}-\mathrm{i}A_{\mathsf{e}}f_{\mathsf{e}})\exp\Big(-\mathrm{i}\int_0^{\cdot}A_{\mathsf{e}}(s)\,\mathrm{d}s\Big),\quad \mathsf{e}\in\mathsf{E},$$

以便使得

$$(U_Af)'=-\mathrm{i}U_A((\mathrm{i}\partial+A)f)\in L^2(\mathcal{E}).$$

因此，$U_Af\in W^{1,2}(\mathcal{E})$ 且（A.3）成立。

反之，设 $f = U_A^* g$具有某种 $g \in W^{1,2}(\mathcal{E})$。根据 Sobolev 嵌入定理，并再次利用链式法则，我们得出 f属于 $L^2(\mathcal{E}) \cap W^{1,1\,\mathrm{loc}}(\mathcal{E})$，且满足

$$f'_{\mathsf{e}} = (g'_{\mathsf{e}} + \mathrm{i}A_{\mathsf{e}} g_{\mathsf{e}}) \exp\Big(\mathrm{i}\int_0^{\cdot} A_{\mathsf{e}}(s)\,\mathrm{d}s\Big), \quad \mathsf{e} \in \mathsf{E},$$

使得

$$(\mathrm{i}\partial + A) f = \mathrm{i} U_A^* g' \in L^2(\mathcal{E}).$$

因此，$f \in W_A(\mathcal{E})$，这就完成了对 $U_A W_A(\mathcal{E}) = W^{1,2}(\mathcal{E})$ 以及 (A.3 的证明).

最后，$W_A(\mathcal{E})$ 到 $L^2(\mathcal{E})$ 的嵌入是 U_A 与 $W^{1,2}(\mathcal{E})$ 到 $L^2(\mathcal{E})$的嵌入的复合。若 $\mathsf{E} = \mathsf{E}_{\mathrm{int}}$ 有限，则后者是希尔伯特–施密特算子，因为此时根据 [Gra68, Satz 1]，每个 $W^{1,2}((0,\ell_{\mathsf{e}}))$ 到 $L^2((0,\ell_{\mathsf{e}}))$ 的嵌入都是希尔伯特–施密特算子。□

现在设 Y是 $\mathcal{H} = \ell^2(\mathsf{E}) \oplus \ell^2(\mathsf{E}_{\mathrm{int}})$的一个子空间。我们考虑由下式定义的算子 $D_{A,Y}$，它属于 $L^2(\mathcal{E})$

$$\mathcal{D}(D_{A,Y}) := \big\{ f \in W_A(\mathcal{E}) \colon \Psi_+(f) \in Y \big\}, \quad D_{A,Y} f := (\mathrm{i}\partial + A) f \quad \text{for} \quad f \in \mathcal{D}(D_{A,Y}).$$

算子 $D_{A,Y}$ 模拟了区间上的一阶（磁）导数算子。因此，其伴随算子对应于带有适当边界条件的相同微分表达式，这并不令人意外；另见 [SSVW15, Theorem 3.6] 以及 [Pos12, Lemma 2.2.8]。

命题 A.3. 算子 $D_{A,\,Y}$ 是稠密定义的，其伴随算子 $D^*_{A,\,Y}$ 由下式给出

$$\mathcal{D}(D^*_{A,Y}) = \big\{ f \in W_A(\mathcal{E}) \colon \Psi_-(f) \in Y^\perp \big\}, \quad D^*_{A,Y} f = (\mathrm{i}\partial + A) f \quad \textit{for} \quad f \in \mathcal{D}(D^*_{A,Y}).$$

此外，$D_{A,\,Y}$ 是可闭的，且 $D_{A,\,Y} = D_{A,\,\overline{Y}}$，其中 $\overline{Y}$ 表示 Y 在 $\mathcal{H}$中的闭包。特别地，$D_{A,\,Y}$ 是闭集当且仅当 Y 是闭集。

证明。我们引入辅助空间

$$C_c^\infty(\mathcal{E}) := W^{1,2}(\mathcal{E}) \cap \{ f \colon \mathcal{E} \to \mathbb{C} \mid f_{\mathsf{e}} \in C_c^\infty((0,\ell_{\mathsf{e}})) \ \forall \mathsf{e} \in \mathsf{E} \}.$$

由于根据引理 A.2，$U_A^* C_c^\infty(\mathcal{E})$ 包含于 $\mathcal{D}(D_{A,\,Y})$ 中，且 $C_c^\infty(\mathcal{E})$ 在 $L^2(\mathcal{E})$中稠密，因此 $D_{A,\,Y}$是稠密定义的。

为了给出 $D^*_{A,\,Y}$的表示，我们注意到，对 f、$g \in W^{1,\,2}(\mathcal{E})$ 进行分部积分可得

$$\langle f'_{\mathsf{e}}, g_{\mathsf{e}} \rangle_{L^2((0,\ell_{\mathsf{e}}))} = f_{\mathsf{e}}(\ell_{\mathsf{e}}) \overline{g_{\mathsf{e}}(\ell_{\mathsf{e}})} - f_{\mathsf{e}}(0) \overline{g_{\mathsf{e}}(0)} - \langle f_{\mathsf{e}}, g'_{\mathsf{e}} \rangle_{L^2((0,\ell_{\mathsf{e}}))}, \quad \mathsf{e} \in \mathsf{E},$$

按照自然的理解，$f_{\mathsf{e}}(\ell_{\mathsf{e}}) = 0 = g_{\mathsf{e}}(\ell_{\mathsf{e}})$ if $\mathsf{e} \in \mathsf{E}_{\mathrm{ext}} = \mathsf{E} \backslash \mathsf{E}_{\mathrm{int}}$。给定 $f, g \in W_A(\mathcal{E})$，根据引理 A.2，我们应用后者得到 $U_A f, U_A g \in W^{1,2}(\mathcal{E})$ 并得出

$$\langle (U_A f)', U_A g \rangle_{L^2(\mathcal{E})} = \langle \Psi_+(U_A f), \Psi_-(U_A g) \rangle_{\mathcal{H}} - \langle U_A f, (U_A g)' \rangle_{L^2(\mathcal{E})}.$$

考虑到 (A.2) 和 (A.3) 以及 U_A 和 V_A的酉性，可得

$$\langle (\mathrm{i}\partial + A) f, g \rangle_{L^2(\mathcal{E})} = \langle \Psi_+(\mathrm{i}f), \Psi_-(g) \rangle_{\mathcal{H}} + \langle f, (\mathrm{i}\partial + A) g \rangle_{L^2(\mathcal{E})}, \quad f, g \in W_A(\mathcal{E}). \tag{A.4}$$

Set

$$\mathcal{D} := \big\{ g \in W_A(\mathcal{E}) \mid \Psi_-(g) \in Y^\perp \big\}.$$

由 (A.4) 易知 $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}(D^*_{A,Y})$，其中 $D^*_{A,Y} g = (\mathrm{i}\partial + A) g$ 对所有 $g \in \mathcal{D}$ 均成立。接下来需要证明 $\mathcal{D}(D^*_{A,Y}) \subset \mathcal{D}$。为此，令 $g \in \mathcal{D}(D^*_{A,Y})$。于是对每个 $\varphi \in C_c^\infty(\mathcal{E})$，都有 $U_A^* \varphi \in W_A(\mathcal{E})$，其中 $D_{A,\,Y} U_A^* \varphi = \mathrm{i} U_A^* \varphi'$，因此，

$$\langle \varphi, U_A D^*_{A,Y} g \rangle_{L^2(\mathcal{E})} = \langle D_{A,Y} U_A^* \varphi, g \rangle_{L^2(\mathcal{E})} = -\langle \varphi', \mathrm{i} U_A g \rangle_{L^2(\mathcal{E})}.$$

因此，$U_A g \in W^{1,\,2}(\mathcal{E})$ 其中 $\mathrm{i}(U_A g)' = U_A D^*_{A,\,Y} g$，即 $g \in W_A(\mathcal{E})$ 且 $D^*_{A,\,Y} g = (\mathrm{i}\partial + A) g$。于是，公式 (A.4) 推出，对于所有 $f \in \mathcal{D}(D_{A,\,Y})$，都有

$$\begin{aligned} \langle f, \mathrm{i}\partial + A) g \rangle_{L^2(\mathcal{E})} &= \langle f, D^*_{A,Y} g \rangle_{L^2(\mathcal{E})} = \langle D_{A,Y} f, g \rangle_{L^2(\mathcal{E})} = \langle \mathrm{i}\partial + A) f, g \rangle_{L^2(\mathcal{E})} \\ &= \langle \Psi_+(\mathrm{i}f), \Psi_-(g) \rangle_{\mathcal{H}} + \langle f, \mathrm{i}\partial + A) g \rangle_{L^2(\mathcal{E})}, \end{aligned}$$

也就是说,

$$\langle \Psi_+(f), \Psi_-(g)\rangle_{\mathcal{H}} = 0, \quad f \in \mathcal{D}(D_{A,Y}).$$

由于根据引理 A.2， Ψ_+ 到 $W_A(\mathcal{E})$ 的限制是满射，因此我们得出 $\Psi_-(g)$ 确实属于 $Y^\perp$，这就证明了$D^*_{A,Y}$的表示。特别地，$D^*_{A,Y}$再次是稠密定义的，也就是说，$D_{A,Y}$ 是可闭的。

最后，互换 Ψ_+ 和 Ψ_-的角色，采用与上述相同的推理可知，$D_{A,Y}$的闭包由$D_{A,Y} = (D^*_{A,Y})^* = D_{A,\overline{Y}}$给出，其中最后一个等式用到了$(Y^\perp)^\perp = \overline{Y}$。□

注 A.4. 定义酉变换 $S\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ 如下

$$S(\alpha \oplus \beta) = (-\alpha) \oplus \beta,$$

容易看出 $\Psi_- = S \circ \Psi_+$，因此实际上$D^*_{A,Y} = D_{A,SY^\perp}$。特别地，$D_{A,Y}$是自伴的，当且仅当 $Y^\perp = SY$。

命题 A.3 使我们能够在 $L^2(\mathcal{E})$ 中引入磁拉普拉斯算子 $\Delta_{A,\,Y}$，其边界条件对应于闭子空间 $Y \subset \mathcal{H}$。

推论 A.5. 设 $A \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathcal{G})$ 为实值，且 $Y \subset \mathcal{H}$ 为闭子空间。则以下断言成立。

(a) $L^2(\mathcal{E})$ 中由下式给出的二次型 $\mathfrak{a}_{A,\,Y}$

$$\mathfrak{a}_{A,Y}[f,g] = \langle D_{A,Y}f, D_{A,Y}g\rangle_{L^2(\mathcal{E})} = \langle (\mathrm{i}\partial + A)f, (\mathrm{i}\partial + A)g\rangle_{L^2(\mathcal{E})}, \quad \mathcal{D}[\mathfrak{a}_{A,Y}] = \mathcal{D}(D_{A,Y}),$$

是闭且稠密定义的，其相伴的自伴算子 $-\Delta_{A,\,Y}$ 与 $D^*_{A,\,Y}D_{A,\,Y}$ 一致。特别地，$\Delta_{A,\,Y}$ 由下式给出

$$\mathcal{D}(\Delta_{A,Y}) = \big\{ f \in W_A(\mathcal{E}) \mid (\mathrm{i}\partial + A)f \in W_A(\mathcal{E}),\ \Psi_+(f) \in Y,\ \Psi_-((\mathrm{i}\partial + A)f) \in Y^\perp \big\},$$

$$\Delta_{A,Y} f = -(\mathrm{i}\partial + A)^2 f = -\mathrm{i}(\mathrm{i}f' + Af)' - A(\mathrm{i}f' + Af), \quad f \in \mathcal{D}(\Delta_{A,Y}).$$

(b) 自伴算子 $D_{A,\,Y}D^*_{A,\,Y}$ 与拉普拉斯算子 $-\Delta_{A,\,SY^\perp}$ 一致，其中 S 如注 A.4 所述；并且对每个 $\lambda \geqslant 0$，算子 $D_{A,\,Y}$ 将谱子空间 $\mathrm{Ran}\,\mathbf{P}_{-\Delta_{A,\,Y}}(\lambda)$ 映入 $\mathrm{Ran}\,\mathbf{P}_{-\Delta_{A,\,SY^\perp}}(\lambda)$。

证明。由命题 A.3 可知 (a) 显然成立，因此只需证明 (b)。此处，根据评注 A.4，容易看出

$$-\Delta_{A,SY^\perp} = D^*_{A,SY^\perp}D_{A,SY^\perp} = D_{A,S(SY^\perp)^\perp}D_{A,SY^\perp} = D_{A,Y}D^*_{A,Y}.$$

现在，考虑极分解 $D_{A,Y} = W|D_{A,Y}|$，其中部分等距算子 W 的初始集为 $\mathrm{Ran}|D_{A,Y}|$，终集为 $\mathrm{Ran}\overline{D_{A,Y}}$，例如参见 [Kat95，第 VI.2 节7]。于是我们得到恒等式 $D_{A,Y} = W|D_{A,Y}| = |D^*_{A,Y}|W$，其成立于 $\mathcal{D}(D_{A,Y}) = \mathcal{D}(|D_{A,Y}|)$ 上；尽管 W 只是一个部分等距算子，但这已足以得出结论：对所有$\lambda \geqslant 0$，$W\mathbf{P}_{|D_{A,Y}|}(\lambda) = \mathbf{P}_{|D^*_{A,Y}|}(\lambda)W$，例如参见 [ES22，引理 33]。因此，若 f 属于 $\mathrm{Ran}\,\mathbf{P}_{-\Delta_{A,Y}}(\lambda) = \mathrm{Ran}\,\mathbf{P}_{|D_{A,Y}|}(\lambda^{1/2})$，则有 $Wf \in \mathrm{Ran}\,\mathbf{P}_{|D^*_{A,Y}|}(\lambda^{1/2})$，从而 $D_{A,Y}f = |D^*_{A,Y}|Wf \in \mathrm{Ran}\,\mathbf{P}_{|D^*_{A,Y}|}(\lambda^{1/2}) = \mathrm{Ran}\,\mathbf{P}_{-\Delta_{A,SY^\perp}}(\lambda)$。证明完毕。□

References

[ABP22] J. Apraiz 和 J.A. B´arcena-Petisco。网络上带环的抛物型方程的可观测性与控制，2022。hal-03501343v2。[ADF+19] D.N. Arnold、G. David、M. Filoche、D. Jerison 和 S. Mayboroda。通过有效势实现特征函数的局域化。*Comm. Partial Differ. Equations*，44:1186–1216，2019。[Are] W. Arendt。热核。ISEM 2005/2006 讲义，https://www.uni-ulm.de/fileadmin/website_uni_ulm/maw

[AS] P. Alphonse 和 A. Seelmann。各向异性 Shubin 算子的定量谱不等式及其在零可控性中的应用。预印本 arXiv:2212.10842。[AS19] N. Anantharaman 和 M. Sabri。图上的量子遍历性：从谱离域到空间离域。*Ann. Math.*，189:753–835，2019。

[BCJ21] D. Borthwick、L. Corsi 和 K. Jones。量子图谱隙的精确直径界。*Proc. Amer. Math. Soc.*，149：2879–2890，2021。[Ber12] M. van den Berg。关于扭转函数和 Sobolev 常数的估计。 *Potential Analysis*，36 607 616，2012：–。[BJPS21] K. Beauchard、P. Jaming 和 K. Pravda-Starov。Hermite 函数有限组合的谱估计与次椭圆二次方程的零可控性。 *Studia Math.*，260(1)：1–43，2021。[BK13] G. Berkolaiko 和 P. Kuchment。

Introduction to Quantum Graphs 186 *Math. Surveys and*，第 卷。美 *Monographs* 2013

国数学会，罗德岛州普罗维登斯，。[BKKM17] G. Berkolaiko、J.B. Kennedy、P. Kurasov 和 D. Mugnolo。组合图和量子图的边连通度与谱隙。 *J. Phys. A*，50：365201，2017。[BKKM19] G. Berkolaiko、J.B. Kennedy、P. Kurasov 和 D. Mugnolo。量子图谱分析的手术原理。 *Trans. Amer. Math. Soc.*，372：5153–5197，2019。[BM21] S.M. Berge 和 E. Malinnikova。关于 Helmholtz 方程解的三球定理。*Complex Analysis and its Synergies*，7：1–10，2021。[BPCC$^+$21] J.A. B´arcena-Petisco、M. Cavalcante、G. Coclite、N. de Nitti 和 E. Zuazua。网络上的双曲型和抛物型方程控制及奇异极限，2021。hal-03233211。[Bre10] H. Brezis。 *Functional Analysis*，*Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*。Universitext。施普林格出版社，柏林，2010。[BW12] G. Berkolaiko 和 T. Weyand。量子图特征值关于磁扰动的稳定性及特征函数的节点计数。 *Phil. Trans. R. Soc. A*，372：20120522，2012。[DKM$^+$22] M. D¨ufel、J.B. Kennedy、D. Mugnolo、M. Pl¨umer 和 M. T¨aufer。边界条件很重要：关于无限量子图的谱，2022。arXiv:2207.04024。[DSV] A. Dicke、A. Seelmann 和 I. Veseli´c。具有有限体积或各向异性衰减密度传感器集的二次抛物型微分方程控制问题。eprint arXiv:2201.02370。[DSV23] A. Dicke、A. Seelmann 和 I. Veseli´c。Hermite 函数的不确定性原理与具有衰减密度传感器集的零-可控性。 *J. Fourier Anal. Appl.*，29：11，2023。[Egi21] M. Egidi。无限条带上热方程的零可控性与控制代价估计。 *Math. Nachr.*，294(5)：843–861，2021。[ES21] M. Egidi 和 A. Seelmann。关于谱子空间的抽象 Logvinenko–Sereda 型定理。

J. ： 。[ES22]

Math. Anal. Appl. 500 125149, 2021

M. Egidi 和 A. Seelmann。热方程控制问题中的反射原理。

J. ： –。[EV20]

Dyn. Control Syst. 28 635 655, 2022

M. Egidi 和 I. Veseli´c。环面上的无尺度唯一延拓估计与 Logvinenko–Sereda 定理。 *Ann. Henri Poincaré*，21(12)：3757–3790，2020。[FM12] M. Filoche 和 S. Mayboroda。Anderson 局域化和弱局域化的普适机制。

Proc. Natl. ： –。[FMT

Acad. Sci. USA 109 14761 14766, 2012

21] M. Filoche、S. Mayboroda 和 T. Tao。 *M*-矩阵的有效势。 *J. Math. Phys.*，62：041902，2021。[Fri05] L. Friedlander。度量图特征值的极值性质。 *Ann. Inst. Fourier*，55 212，2005 199：–。[GJ13] S. Ghobber 和 P. Jaming。Fourier–Bessel 变换的洛格维年科–谢列达定理。

Integral

Transforms Spec. Funct. 24 6 470 484, 2013 ，( )：–。[

Gra68] B. Gramsch。关于 Rellich 在 Sobolev 空间中的嵌入定理。 *Math. Z.*，106：81–87，1968。[HM18] E. M. Harrell 和 A.V. Maltsev。关于量子图上的 Agmon 度量与指数局域化。*Comm. Math. Phys.*，359：429–448，2018。[HM20] E.M. Harrell 和 A.V. Maltsev。量子图上的局域化与景观函数。

Trans. ： –。[HS04]

Amer. Math. Soc. 373 1701 1729, 2020

D. Hundertmark 和 B. Simon。半群差的抗磁不等式。

J. Reine Angew. ： –。[Iwa

Math 571 107 130, 2004

21] S. Iwasaki。等边度量图上的热方程可观测性。载于 *2021 60th Annual Conference of the Society of Instrument and Control Engineers of Japan (SICE)* 1270 1275, ，第 – 页。[2021

Kac73] V. `E. Kacnel'son。整函数空间中的等价范数。 *Mat. Sb. (N.S.)*，92 54，165，1973 134 34( )：–。[Kat95] T. Kato。 *Perturbation theory for linear operators*。数学经典。施普林格出版社，柏林，1995。1980 年版本的重印本。[KMN22] A. Kostenko、D. Mugnolo 和 N. Nicolussi。无限量子图的自伴扩张与马尔可夫扩张。 *J. London Math. Soc.*，105：1262–1313，2022。[Kov00] O. Kovrijkine。

Some estimates of Fourier transforms。ProQuest LLC，密歇根州安娜堡，2000。学位论文（博士）—加州理工学院。[Kov01] O. Kovrijkine。与 Logvinenko–Sereda 定理相关的一些结果。 *Proc. Amer. Math. Soc.*，129 3037 3047，2001：–。

[KR21] J.B. Kennedy 和 J. Rohleder。《量子图上的热点》。 *Comm. Pure Appl. Anal.*, 20 3029 3063, 2021 : – . [KS03] V. Kostrykin 和 R. Schrader。《带磁通量的量子线》。 *Commun. Math. Phys.*, 237:161– 179, 2003. [KS18] P. Kurasov 和 A. Serio。《关于图拉普拉斯算子谱估计的锐性》。

Rep. Math. , : – . [Kur10]

Phys. 82 63 80, 2018

P. Kurasov。《Aharonov–Bohm 环的逆问题》。 *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 148 362, 2010 331: – .[Kur19] P. Kurasov。《量子图的基态》。 *Lett. Math. Phys.*, 109:2491–2512, 2019. [Kur21] P. Kurasov。《度量图上总能被探测到的特征函数》。 *Acta Phys. Pol. A*, 140(6), 2021. [Kurss] P. Kurasov。《图的谱几何》, （即将出版）。 [LMS20] E. Le Masson 和 M. Sabri。

L^p *Commun. Math.* 《图上特征

Phys. 374 211 240, 2020

函数的范数与支撑集》。, : – . [LS74] V. N. Logvinenko 和 Ju. F. Sereda。《指数型整函数空间中的等价范数》。 *Teor. Funkts. Funkts. Anal. Prilozh.*, Vyp. 20:102–111, 175, 1974. [Mar] J. Martin。《各向异性 Shubin 算子的谱不等式》。电子预印本 arXiv:2205.11868v2. [Mar83] J.T. Marti。《Sobolev 不等式中最小常数的计算，适用于

$H^1(0\ s)$ *SIAM J. Numer.* 》。, : – .[

Anal. 20 1239 1242, 1983

Mar22] J. Martin。《Gelfand-Shilov 空间中的不确定性原理与零可控性》。 *J. Funct. Anal.*, 283 109619, 2022 : . [MML21] V. Mehandiratta 、 M. Mehra 和 G. Leugering。《度量图上由时间分数阶扩散方程驱动的最优控制问题：最优性系统与有限差分近似》。

SIAM

J. Control and Optim. 59 4216 4242, 2021 , : – . [MP23]

D. Mugnolo 和 M. Pl¨umer。《紧量子图的扭转刚度与基态能量》。 *Calc. Var.*, 62:27, 2023. [MPS] J. Martin 和 K. Pravda-Starov。《Hermite 函数组合的谱不等式，以及具有 Gelfand-Shilov 平滑效应的演化方程的零可控性》。电子预印本 arXiv:2007.08169v2.[Mug] D. Mugnolo。《度量图究竟是什么？》arXiv:1912.07549. [Mug14] D. Mugnolo。《 *Semigroup Methods for Evolution Equations on Networks*》。Underst. Compl. Syst. 施普林格出版社，柏林，2014. [Mug23] D. Mugnolo。《景观函数给出的逐点特征向量估计：Filoche–Mayboroda–van den Berg 界的若干变体》。arXiv:2301.06126, 2023. [Naz93] F. L. Nazarov。《指数多项式的局部估计及其在不确定性原理型不等式中的应用》。 *Algebra i Analiz*, 5(4):3–66, 1993. [Nic87] S. Nicaise。《有限拓扑网络的谱》。 *Bull. Sci. Math., II. Sér.*, 111:401–413, 1987. [NTTV20] I. Naki´c、M. T¨aufer、M. Tautenhahn 和 I. Veseli´c。《大区域上热方程控制成本的锐估计与均匀化》。 *ESAIM:COCV*, 26:54, 2020. [Ouh05] E.M. Ouhabaz。《

Analysis of Heat Equations on Domains 30 *Lond. Math. Soc. Monograph* 》, 卷 of . *Series* 2005

Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, . [Pan06] K. Pankrashkin。《磁场与自旋轨道相互作用下周期量子图中的局域化效应》。 *J. Math. Phys.*, 47:112105, 2006. [PF83] B.S. Pavlov 和 M. D. Faddeev。《自由电子模型与散射问题》。

Theor. Math. , : – . [Pos12]

Phys. 55 485 492, 1983

O. Post。《 *Spectral Analysis on Graph-Like Spaces*》, 第 2039 卷， *Lect. Notes Math.* 施普林格出版社，柏林，2012. [PT21] M. Pl¨umer 和 M. T¨aufer。《量子图上具有全支撑的特征函数》。 *Lett. Math. Phys.*, 111:153, 2021. [SSVW15] C. Schubert、C. Seifert、J. Voigt 和 M. Waurick。《无限度量图上的边界系统与（斜）自伴算子》。 *Math. Nachr.*, 288:1776–1785, 2015. [Ste17] S. Steinerberger。《量子态的局域化与景观函数》。 *Proc. Amer. Math. Soc.*, 145 2895 2907, 2017 : – . [TT09] M. Tucsnak 和 T. Tannennbaum。《 *Observation and Control in Operator Semigroups*》。Birkh¨auser, Basel, 2009. [WWZZ19] G. Wang、M. Wang、C. Zhang 和 Y. Zhang。《热方程的可观测集、可观测性、插值不等式与谱不等式，适用于 $\mathbb{R}^n$》。 *J. Math. Pures Appl. (9)*, 126:144–194, 2019.

(M. Egidi) Universität Rostock, Institut für Mathematik, D-18051 Rostock, Germany
Email address: michela.egidi@uni-rostock.de (D.Mugnolo) Lehrgebiet Analysis,
Fakultät Mathematik und Informatik, FernUniversität in Ha-gen, D-58084 Hagen, Germany
Email address: delio.mugnolo@fernuni-hagen.de (A. Seelmann) Technische Universität Dortmund,
Fakultät für Mathematik, D-44221 Dortmund,Germany*Email address*:
albrecht.seelmann@math.tu-dortmund.de