Draft version April 24, 2023 年使用 LaTeX 双栏 style
在 AASTeX631 中排版

arXiv:2304.10566v1 [astro-ph.HE] 20 Apr 2023

采用先进麦克斯韦求解算法的相对论性磁重联粒子网格模拟

Hannah Klion ,[1] Revathi Jambunathan ,[1] Michael E. Rowan ,[2] Edoise Yang ,[1] Donald Willcox ,[1] Jean-Luc Vay ,[1] Remi Lehe ,[1] Andrew Myers ,[1] Axel Huebl ,[1] and Weiqun Zhang [1]

[1] *Lawrence Berkeley National Laboratory, 1 Cyclotron Road, Berkeley, CA 94720, USA*
[2] *Advanced Micro Devices, Inc., Santa Clara, CA, USA*

摘要

相对论性磁重联是一种非理想等离子体过程，是许多高能天体物理系统中非热粒子加速的来源。粒子网格模拟（PIC）方法常用于从第一性原理出发模拟磁重联。尽管人们在理解磁重联的物理过程方面已取得很大进展，尤其是在二维情形下，但先进算法和数值技术在高效模拟此类系统中的应用仍然有限。借助 GPU 加速的 PIC 代码 WarpX，我们考察了两种先进麦克斯韦求解算法的精度及其潜在性能优势：一种非标准有限差分格式（CKC）和一种超高阶伪谱方法（PSATD）。我们发现，对于相对论磁重联问题，CKC 和 PSATD 在定性和定量上都与标准 Yee网格有限差分方法相符。CKC 和 PSATD 均可采用比 Yee 长 40% 的时间步长，使 CKC 的求解时间缩短 ∼40%，但在使用满足高斯定律的电流沉积方案时，PSATD 并无性能优势。放宽这一约束仍能保持精度，并带来 30% 的加速。与 Yee 和 CKC 不同，PSATD 在任意时间步长下都具有数值稳定性，因此允许采用比有限差分方法更大的时间步长。我们发现，将时间步长提高到标准 Yee 时间步长的 2.4–3 倍仍能得到精确结果，但由于 PSATD 所用的电流沉积方案，这仅带来了相较 CKC 适度的性能提升。进一步优化该方案有望提升 PSATD 的有效性能。

1. 引言

在脉冲星风云等各种天体物理系统，以及活动星系核中的喷流（Giannios 2010年）、X射线双星（Tetarenko 等，2017年）和伽马射线暴（Piran 2004年；Kumar 和 Zhang，2015年）中，均观测到了高能辐射。尤其是，脉冲星会产生演化速度过快、无法用传统粒子加速理论解释的高能伽马射线耀发（Abdo 等，2011年；Tavani 等，2011年）。人们常借助磁重联来解释这些系统中快速的非热粒子加速和辐射现象（Cerutti 等，2012年；Nalewajko 等，2015年；McKinney 和 Uzdensky，2012年；Petropoulou 等，2019年；Lyutikov 和 Uzdensky，2003年；Philippov 等，2019年）。

在磁重联过程中，磁场能量会转化为粒子动能，形式包括整体运动和等离子体加热。对于高度磁化的天体物理系统，粒子加速由相对论性磁重联引起；在这一过程中，尚未发生重联的上游等离子体，其磁场能量密度远高于焓密度。等离子体获得相对论性的整体速度和热速度，粒子能量分布则形成非热的高能幂律尾部。这些被加速的粒子被认为是高能辐射的来源。

通讯作者：Hannah Klionklion@lbl.gov

粒子模拟（PIC）是一种成熟的方法，可用于从第一性原理研究非热等离子体加速（Birdsall & Langdon1991）。等离子体中的每种粒子组分都由计算粒子建模；这些粒子在计算域中运动时会产生电流。电流沉积在空间网格上，作为麦克斯韦方程的源项。电磁场求解步骤（也称为麦克斯韦求解）用于计算电场和磁场。电磁力被插值到粒子位置，并据此推进粒子的位置和速度。

随时间变化。因此，粒子模拟（PIC）方法能够完整地捕捉粒子加速过程，以及加速后的等离子体对场的反馈。

许多粒子模拟（PIC）研究考察了二维无碰撞电子-正电子等离子体（Zenitani 和 Hoshino 2001，2007；Cerutti 等，2012；Sironi 和 Spitkovsky 2014；Nalewajko 等，2015；Werner 等，2016）以及电子-离子等离子体（Melzani 等，2014）中的相对论性磁重联。细长的电流片会因撕裂模不稳定性而变得不稳定，进而形成并合并成链状的受困等离子体团。模拟还表明，在此类系统中，磁重联速率约为 0.1，该数值以重联磁场和 Alfv´en 速度为基准进行归一化（Guo 等，2015；Cassak 等，2017；Werner 等，2018）。Cerutti 等（2014）研究了撕裂模（二维）以及在三维中发展的漂移扭曲模的色散关系。模拟中增长最快的撕裂模已被证明与解析预期高度吻合（Zenitani 和 Hoshino 2007）。近期采用粒子模拟（PIC）的研究聚焦于磁重联启动的内在机制以及粒子能量增益的各个阶段（Guo 等，2019；Hakobyan 等，2021；Sironi 2022）。磁重联产生的粒子能谱呈现出延伸至高能区的硬幂律（Werner 等，2016，2018；Guo 等，2015；Hakobyan 等，2021；Petropoulou 等，2019）。随后可将这些能谱与辐射模型结合，以预测天体物理系统中磁重联的观测特征（Cerutti 等，2013；Nalewajko 等，2018）。

尽管人们在理解二维以及近期三维系统中的粒子加速方面已取得了重大进展（例如 Guo 等，2015年；Zhang 等，2021年；Schoeffler 等，2023年），但此类系统的 PIC 模拟在算法和计算方面的创新仍然有限。几乎所有研究都采用基于交错 Yee 网格的时域有限差分麦克斯韦求解器（Yee，1966年）（有时称为 FDTD），只有少数研究探索了 GPU 加速在天体物理 PIC 模拟中的优势（Bussmann 等，2013年；Chien 等，2020；Xiong 等，2023）。Yee 方法在空间和时间上均为二阶精度。对于某些等离子体系统，该方法固有的数值色散可能导致显著误差。当 Yee 求解器采用库朗极限对应的时间步长时，数值色散误差在网格单元的坐标轴方向上达到最大值，而在其主对角线方向上为零。为了获得色散更小的解，我们需要采用其他求解器，最终采用基于更高阶方法的求解器。Cole 和 K¨arkk¨ainnen 提出了一种非标准有限差分方法，以减轻数值色散的影响在采用库朗极限时间步长时，沿主轴方向Cole 1997年、2002年；K¨arkk¨ainen 等人 2006年提出的方法中，Cowan 等人 （2013年）将其扩展到了非立方网格单元。这种组合称为 Cole-K¨arkk¨ainnen-Cowan（CKC）方案。虽然 CKC 能够抑制沿主轴方向的数值色散，但在其他角度下，数值色散仍然存在。

包括基于傅里叶变换的谱方法在内的高阶方法，可以进一步降低数值色散。伪谱解析时域法（PSATD，Haber 等，1973年；Vay 等，2013年）就是其中一种方法，它能够实现可在运行时设定的任意阶精度。由于 Yee 和 CKC 均属于有限差分格式，因此只有当时间步长低于由库朗极限所确定的数值时，它们才能保持数值稳定（见第2.3节）；另一方面，PSATD 基于傅里叶空间中的解析积分，因此不存在此类限制。本文将两种非标准方法 CKC 和 PSTAD 在相对论性磁重联模拟中的性能和精度，与广泛采用的 Yee 格式进行比较。尽管 PSATD 在求解麦克斯韦方程组时，时间步长不受库朗稳定性极限的约束，但过大的时间步长仍可能降低模拟精度（因为以接近光速运动的粒子可能在单个时间步长内移动超过一个网格单元尺寸）。因此，我们将研究 PSATD 在时间步长超过光穿越一个网格单元所需时间时的性能和精度。

粒子模拟（PIC）算法能够从第一性原理准确捕捉磁重联物理过程，但计算开销可能很大，尤其是在使用更高阶粒子形状因子进行高分辨率模拟时。对于包括 PIC 在内的多种科学应用，图形处理器（GPU）相较于传统 CPU 架构可提供显著的加速（Bussmann 等，2013年；Germaschewski 等，2016年；Chien 等，2020；Vay 等，2020年；Myers 等，2021年）。我们使用 GPU加速的电磁 PIC 代码 WarpX（Vay 等，2020年；Myers 等，2021年）。该代码在 Summit 和 Perlmutter （ NVIDIA GPU ）以及全球首台已报告的百亿亿次级计算机 Frontier（AMD GPU）等领导级计算设施上，具有出色的整机扩展性（Fedeli、Huebl 等，2022年）。该代码基于 AMReX（Zhang 等，2019年）框架构建，支持 MPI+X 并行，其中 MPI 用于实现进程间通信，而 X 对应于 OpenMP、CUDA、HIP 或 SYCL 等接口，用于在多核 CPU 或 GPU 上进行并行编程。PIConGPU（Huebl 2019）、VPIC 2.0（Bird 等，2022年）以及等离子体模拟代码 PSC（Germaschewski 等，2016年）也采用类似策略，以实现性能可移植性，并支持扩展至多个

GPU 节点。非相对论磁重联已被用作对比案例，以验证多种 GPU 加速的 PIC 代码，包括 PSC、sputniPIC（Chien 等，2020），后者可利用配备多个 GPU 的单个节点；以及采用 CUDA Fortran 的单 GPU PIC 代码（Xiong 等，2023）。

本文首次采用先进的麦克斯韦求解器 CKC 和 PSATD，对相对论性磁重联进行二维 GPU 模拟。由于此前从未将这两种求解器用于相对论性磁重联，我们通过与采用传统 Yee 求解器的模拟结果进行比较来验证结果；Yee 求解器已在二维系统中得到充分研究。我们重点关注电流片结构的演化、粒子与场的能量平衡、粒子能谱以及磁重联速率。我们通过将时间步长参数化为相对于有限差分模拟标准库朗极限的数值，研究 PSATD 时间步长受到的精度约束。与采用不同求解器的模拟一样，我们将采用不同时间步长所得的结果与 Yee 基准模拟进行比较。对于相同的网格单元尺寸，CKC 的库朗极限允许采用比 Yee 更长的时间步长。PSATD 无条件稳定，但粒子模拟（PIC）中其他时间积分算法可能会对其精度施加限制。CKC 和 PSATD 都可能实现更快的模拟，因此我们比较这两种先进求解器的求解时间，并在保持网格单元尺寸不变的情况下，评估 PSATD 采用较大时间步长带来的性能提升。

本文其余部分安排如下：在第2 节中，我们将介绍模拟，包括电流片初始构型、触发磁重联的扰动，以及算法和数值参数的详细信息。在第3节中，我们将讨论采用不同麦克斯韦求解器所获得的精度和性能结果。在第4节中，我们将展示使用 PSATD 将时间步长增大至超过库朗极限后所获得的结果。最后，我们将在第5节中总结本文工作并讨论未来的研究方向。

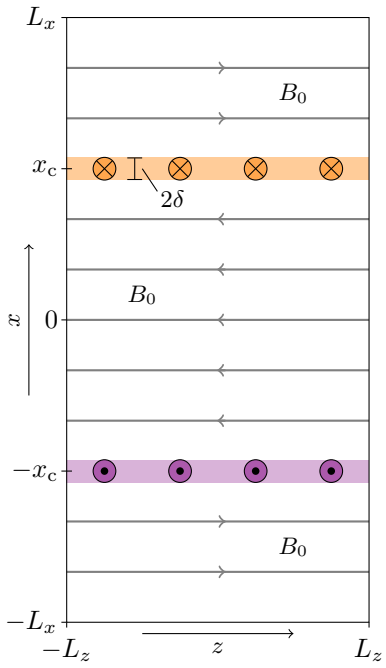

图 1. 双 Harris 电流片平衡态示意图，展示施加扰动之前的状态。电流片的中心位于 $x = \pm x_c$，其在 x 方向上的半宽度为 δ。它们在 y-z 平面上无限延伸。在 $x = x_c$ $(x = -x_c)$ 处的电流流入（流出）平面。上游磁场的大小为 B_0。数密度、粒子速度和磁场的表达式参见方程 1、3和 6 。

2. 模拟设置

2.1. *Harris* 电流片

模拟以两个处于平衡态的成对等离子体 Harris 电流片（Harris, 1962）作为初始条件。本节介绍该配置，其示意图如图 1所示。推导的完整细节见附录 A，重要参数的总结则见.....

参数可见表1 （缩放单位）和表4（SI 单位）。用于复现这些模拟和分析的输入文件可在线获取[1]。

远离电流片、位于上游处，磁场为 $\boldsymbol{B} = \pm B_0 \hat{\boldsymbol{z}}$。磁场方向在电流片处发生改变。我们主要采用的时间单位为上游电子回旋频率的倒数，$\omega_c^{-1} \equiv m_e/(eB_0)$，其中$c$ 为光速，e 为元电荷，m_e 为电子质量。基本长度单位为$\rho_c = c\omega_c^{-1}$，即标称相对论拉莫尔半径。电流片的半宽设为$\delta = 12.15\,\rho_c$，并沿 y-z 平面延伸。它们以 $x = \pm x_c \equiv \pm L_x/2$ 为中心，其中 L_x 为计算域在 x 方向上的半宽，计算域的范围为区间 $[-L_x, L_x]$。

[1] https://doi.org/10.5281/zenodo.7847375

我们建立了数密度$n(x)$和体速度 $\boldsymbol{\beta}(x)$的空间分布：

$$n(x) = n_{\rm b} + (n_{\rm d} - n_{\rm b}) \left(\operatorname{sech} \frac{x + x_{\rm c}}{\delta} + \operatorname{sech} \frac{x - x_{\rm c}}{\delta} \right) \tag{1}$$

$$\boldsymbol{\beta}(x) = \beta(x)\hat{\boldsymbol{y}} \tag{2}$$

$$= \beta_0 \left(\operatorname{sech} \frac{x + x_{\rm c}}{\delta} - \operatorname{sech} \frac{x - x_{\rm c}}{\delta} \right) \hat{\boldsymbol{y}}. \tag{3}$$

每种粒子的数密度为 $n(x)$。正电子的速度为 $\boldsymbol{\beta}(x)$，电子的速度为 $-\boldsymbol{\beta}(x)$。上游区域的数密度为 $n_{\rm b}$，而电流片中的数密度为 $n_{\rm d}$。电流片中心处的整体速度为 β_0，$\hat{\boldsymbol{y}}$ 是平行于 y 轴的单位矢量。根据安培定律，$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J}$：

$$-\frac{\partial}{\partial x} B_z = 2\mu_0 e n(x) \beta(x) c \tag{4}$$

其中，$\boldsymbol{B}$ 表示磁场，$\boldsymbol{J}$ 表示电流密度，而 μ_0 表示真空磁导率。J_y 前面的系数 2 是因为正电子和电子这两种粒子都会对总电流密度产生贡献。除非另有说明，所有物理量均在观测者参考系中给出。我们求解方程4，求得$B_z(x)$，其边界条件为

$$B_z(\infty) = -B_z(0) = B_0. \tag{5}$$

这给出了

$$B_z(x) = -\frac{2B_0}{\left(\frac{\pi}{2} + \frac{n_{\rm d}}{n_{\rm b}} - 1\right)} \times \left(\arctan\tanh \frac{x + x_{\rm c}}{2\delta} - \arctan\tanh \frac{x - x_{\rm c}}{2\delta} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\left[\frac{n_{\rm d}}{n_{\rm b}} - 1\right] \left[\tanh \frac{x + x_{\rm c}}{\delta} - \tanh \frac{x - x_{\rm c}}{\delta} - 1 \right] \right), \tag{6}$$

其中

$$B_0 = 2\mu_0 e n_{\rm b} \beta_0 c \delta \left(\frac{\pi}{2} + \frac{n_{\rm d}}{n_{\rm b}} - 1 \right). \tag{7}$$

我们选择上游“冷”磁化参数 $\sigma \equiv B_0^2/(\mu_0 n_{\rm b} m_{\rm e} c^2) = 30$。这与典型的相对论性“热”磁化参数 $\sigma_{\rm h} = B_0^2/(\mu_0 h)$略有不同，其中 h表示相对论焓密度。上游区域的温度将处于极弱相对论状态，即 $h \lesssim 1.5 n_{\rm b} m_{\rm e} c^2$，因此热磁化参数约为 20，且 $\sigma \sim \sigma_{\rm h}$。无论采用哪种磁化参数定义，磁重联都将在高度相对论性区域内进行。

表1. 所有模拟中通用的物理参数和符号。标有 * 的量可自由选择；其他量为推导所得。

参数	符号	数值
背景（冷）磁化度*	σ	30
背景温度*	$\theta_{\rm b}$	0.15
电流片半宽度*	δ	$12.15\,\rho_{\rm c}$
电流片趋肤深度	$\lambda_{\rm e}$	$2.45\,\rho_{\rm c}$
电流片超密度因子*	$n_{\rm d}/n_{\rm b}$	5
电流片速度	β_0	$0.22\,c$
电流片温度	$\theta_{\rm d}$	1.57
计算域半宽 (x)*	L_x	$2195\,\rho_{\rm c}$
计算域半宽 (z)*	L_z	$1058\,\rho_{\rm c}$

我们将电流片的过密度设为五倍，使得 $n_{\rm d} = 5n_{\rm b}$。根据定义，电流片中的趋肤深度为，

$$\lambda_{\rm e} \equiv \frac{c}{\omega_{\rm p}} = c\sqrt{\frac{m_{\rm e}\epsilon_0}{n_{\rm d} e^2}}, \tag{8}$$

其中 $\omega_{\rm p}$ 是电流片中的等离子体频率。根据目前已确定的各个量，$\lambda_{\rm e} = 2.45\rho_{\rm c}$。将方程 7 与 σ 和 $\lambda_{\rm e}$ 的表达式结合，可得电流片中心处速度的表达式：

$$\beta_0 = \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2} + \frac{n_{\rm d}}{n_{\rm b}} - 1\right)} \frac{\lambda_{\rm e}\sqrt{\frac{n_{\rm d}}{n_{\rm b}}\sigma}}{2\delta} = 0.22\,c. \tag{9}$$

我们根据观测者（未加撇号）参考系中 x 方向的压力平衡计算温度分布：

$$P_{\rm gas}(x) + P_{\rm mag}(x) = C \tag{10}$$

其中，C 为常数。气体压力 $P_{\rm gas} = T^{xx}$，其中 $T^{\mu\nu}$ 为应力-能量张量。在流体（加撇号）参考系中，$T'^{xx} = 2n'\theta mc^2$，其中 $\theta = k_{\rm B}T/(m_{\rm e}c^2)$ 为无量纲温度，n' 为流体参考系中的数密度。流体整体速度沿 y 方向，因此 $T'^{xx} = T^{xx}$。观测者参考系中的数密度为 $n = \gamma n'$，其中$\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$。代入得，

$$P_{\rm gas} = T^{xx} = 2nmc^2\theta\gamma^{-1} \tag{11}$$

$$= 2nmc^2\theta\sqrt{1-\beta^2}. \tag{12}$$

磁压力，

$$P_{\rm mag} = \frac{B^2}{2\mu_0}, \tag{13}$$

无需进行变换，因为 $\boldsymbol{B}$ 已经处于观测者参考系中。

现在我们有

$$2nmc^2\theta\sqrt{1-\beta^2}+\frac{B^2}{2\mu_0}=C. \tag{14}$$

远离电流片处，

$$n=n_{\rm b} \tag{15}$$
$$\theta=\theta_{\rm b}=\sigma/\eta \tag{16}$$
$$\beta=0 \tag{17}$$
$$B=B_0, \tag{18}$$

其中我们选择了 $\eta\equiv 200$，因此 $\theta_{\rm b}=0.15$。求解 $\theta(x)$：

$$\theta(x)=\frac{\sigma}{4}\frac{(4+\eta)/\eta-[B_z(x)/B_0]^2}{[n(x)/n_{\rm b}]\sqrt{1-\beta(x)^2}}. \tag{19}$$

通过计算方程 19 在 $x=\pm x_{\rm c}$处的值，可得电流片中心的温度为$\theta_{\rm d}=1.57$。

在模拟开始时初始化电子-正电子对；这些粒子均匀间隔排列，其动量通过从局部温度 ¨下的 Maxwell-Jüttner 分布中抽样来初始化 θ (Zenitani 2015年)。

需要指出的是，此处描述的设置略有不同寻常。我们使用数密度（方程 1）、体速度（方程 3）和温度（方程 19）的空间变化分布，同时表示上游等离子体和电流片。更常见的做法是，将电流片等离子体（具有固定的高温 $\theta_{\rm d}$ 和漂移速度 β_0）叠加在充满上游等离子体（温度 $\theta_{\rm b}$、数密度 $n_{\rm b}$）的区域上。因此，在初始化时，电流片中心的等离子体会具有双温分布。漂移等离子体的数密度是唯一随空间变化的量。最终，所得的电流分布非常相似，感生磁场也非常相似，并且两种构型均处于平衡态。主要区别在于，此处使用的 $\theta_{\rm d}$ 和 β_0 的数值不同于 Werner 等(2018年所采用的数值；除此之外，他们的 Harris 电流片看起来可能与我们的完全相同。

2.2. 扰动

<escape>我们在平衡态构型中加入一个扰动，以控制 X 点的位置和数量。我们参照Werner 等(2018年的研究），他们在矢量势中加入了一个百分之一的正弦扰动，该扰动会降低磁场</escape>

每个电流片外侧 z 轴处的压力：

$$A_y=\int B_z(x)\,{\rm d}x\times \left[1-0.01\cos^{51}\left(\frac{\pi}{L_z}z\right)\cos^2\left(\frac{\pi(x-x_c)}{L_x}\right)\right]. \tag{20}$$

我们将积分常数设为零。在大多数采用这种扰动的研究中，z 方向上的余弦项并不进行幂次运算。我们发现，将其提升至 51 次幂可以缩小扰动区域，从而减少我们所采用构型中的初始 X 点数量。这有助于确保不同模拟之间具有更一致的可比性。然而，在磁重联的初始阶段之后，扰动的形式不会影响结果。幂次的具体选择是任意的，但必须为奇数，以保持余弦项的符号不变。

我们使用 $\boldsymbol{B}=\nabla\times(A_y\hat{\boldsymbol{y}})$ 初始化模拟中的场。因此，所有模拟都将以 $\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$ 开始，并且该状态将由此处使用的所有数值方法保持守恒。

2.3. 粒子网格模拟

使用电磁粒子模拟（PIC）代码 WarpX 对相对论性电子–正电子对等离子体磁重联进行了模拟（Vay 等, 2020年；Myers 等, 2021年）。二维计算域采用均匀网格进行离散，网格单元尺寸为 $\Delta x=\Delta z=\lambda_{\rm e}/4$。电流片中的趋肤深度以及上游拉莫尔半径 $\rho_{\rm c}=1.63\Delta x$ 均能够得到分辨。在模拟接近结束时，预计被加速的粒子将具有$\rho_{\rm c,\ f}=\sigma\rho_{\rm c}$的拉莫尔半径。由于网格能够分辨初始时较小的拉莫尔尺度，因此随着该尺度在模拟过程中增大，网格将始终能够对其进行分辨。

<escape>这些模拟的初始设置为每种粒子种类在每个网格单元中包含 64 个粒子，并沿两个方向均匀分布。在此粒子密度下，整体结果已达到收敛，统计噪声并不显著。计算网格延伸至 $[-L_x,L_x]\times[-L_z,L_z]$，其中 $L_x=2195\,\rho_{\rm c}=73.2\,\rho_{\rm c,\ f}$且 $L_z=1058\,\rho_{\rm c}=35.3\,\rho_{\rm c,\ f}$。模拟的分辨率为 (7168×3456) 个网格单元，总粒子数为 31 亿。所有计算域边界均采用周期性边界条件。整个计算域为 $\sim 70\,\rho_{\rm c,\ f}$ 在较小维度上的尺度为上述数值，这使我们的模拟处于“大计算域”范围，在该范围内，粒子加速预计主要受等离子体性质限制，而非计算盒的尺寸（Werner 等 2016年）。</escape>

电磁场求解器的选择决定了时间步长。本文探讨了三种选择：基于 Yee 网格的标准时域有限差分法

（下文称为“Yee”）（Yee 1966），采用 Cowan 系数的非标准 Cole-K¨arkk¨ainen 有限差分求解器（CKC）（Cole 1997, 2002；K¨arkk¨ainen et al. 2006；Cowan et al. 2013），以及采用 16 阶模板的伪谱解析时域法（PSATD）（Haber et al. 1973；Vay et al. 2013；Vincenti & Vay 2016）。对于我们的均匀二维网格（网格单元为正方形），Yee 的最大稳定时间步长 Δt_C 由 Courant-Friedrichs-Lewy（CFL）条件决定：$\Delta t_C = \Delta x/(c\sqrt{2})$。CKC 允许采用更大的时间步长 $\Delta t_C = \Delta x/c$。与有限差分格式不同，PSATD 无条件稳定，因此其时间步长没有理论上限。在这种情况下，WarpX 默认将最小网格单元光穿越时间 $\Delta t_C = \Delta x/c$设为类似 Courant 条件的时间步长。在本文余下部分，我们将“CFL 因子”（简称“CFL”）定义为给定麦克斯韦求解器的 CFL 时间步长上限 Δt_C的乘数，因此模拟的时间步长为 $\Delta t = \text{CFL} \times \Delta t_C$。

进行了两组模拟。第一组使用时间步长 $\Delta t = 0.95\Delta t_C$（CFL 因子为 0.95），对比三种电磁场求解器。第二组研究采用 PSATD 时，超过 Δt_C 的时间步长所产生的影响。尽管时间步长不存在形式上的稳定性限制，但可以预期，当 CFL 因子超过某个待确定的数值时，模拟精度会下降。通过系统研究不同 CFL 因子范围内模拟的演化过程，我们将确定是否存在这样的实际时间步长上限，以及在何种情况下会出现这一上限。

默认情况下，每个麦克斯韦求解器都与一种能保证电荷守恒的电流沉积算法配对使用。Esirkepov 沉积方案（Esirkepov2001）与 Yee 或 CKC（Vay 等人，2011年）配合使用时，能够保持电荷守恒。然而，将 Esirkepov 沉积与高阶 PSATD 配合使用时，并不满足高斯定律。Vay 等人（2013年）开发了一种沉积方案（下文简称“Vay”），与 PSATD 配合使用时能够保持 $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = \rho/\epsilon_0$。这里，$\rho$ 表示电荷密度，因此我们也将满足该方程的算法组合称为“电荷守恒”。我们仅在 Yee 和 CKC 中使用 Esirkepov。除非另有说明，PSATD 均与 Vay 沉积配合使用。这三种组合构成了我们的主要比较对象。在测量求解时间时，将麦克斯韦求解器和电流沉积方案的性能差异分离出来会很有帮助。为此，我们将这三种主要模拟与采用 Esirkepov 沉积的 PSATD 模拟进行比较。对于这个问题，尽管违反了高斯定律，PSATD+与 Esirkepov 配合仍能得出正确结果。两种沉积方案粒子采用三次样条函数；映射到网格后，电流经过一次双线性滤波器平滑处理。

在所有情况下，场量收集操作也使用三次样条插值。我们采用相对论性二阶 Boris 推进算法来更新粒子的位置（Boris 1970）。

3. 结果：麦克斯韦求解器

3.1. 能量转换与粒子加速

第 2 节所述的 Harris 电流片磁重联粒子模拟（PIC）持续进行，直至磁重联完成，磁能不再转化为粒子动能，时间约为$t = 8000\text{–}9000\,\omega_c^{-1} \approx 4 \times (2L_z/c)$。Yee 模拟中的电流定性演化如图 2所示。其他模拟的演化情况也类似。模拟开始后不久，顶部和底部电流片（图 2中的左、右两列）都因扰动（方程 20）而坍缩；该扰动降低了电流片上方和下方的磁压力（图 2第二行）。随后形成由等离子体和电流构成的准圆形结构，称为等离子体团。它们继承了形成处电流片的平均电流。电流片中的等离子体团之间形成了多个磁 X 点。等离子体团沿电流片向外移动，并偶尔发生合并，如图 2第四行蓝框所示。合并会形成新的电流片，其电流方向与等离子体团中的主体电流反平行，并从原电流片垂直延伸出去。这就是“次级磁重联”发生的位置。在 $t \approx 8000\,\omega_c^{-1}$时，主磁重联和次级磁重联均已结束，仅剩一个等离子体团位于 $z \approx \pm L_z$（图 2底行）。

在所研究的三种麦克斯韦求解器中，磁重联的进行速率大致相同，形成的结构也相同。图 3比较了使用 Yee、CKC 和 PSATD 求解器的模拟中，电流片上方附近的等离子体结构，时刻为 t =1470 ω_c^{-1}。每个电流片中都形成了几个较小的等离子体团，计算域边缘则形成了一个较大的等离子体团。不同求解器产生的小型等离子体团位置和大小不尽相同，但所有情况下电流片的碎裂方式都相似。

使用这三种求解器时，能量转换和粒子加速的过程也相似。当磁重联在约 $t = 6000\,\omega_c^{-1}$时达到饱和，电磁场中的能量约有 40% 已转化为粒子动能（图 4）。其中包括与热运动和整体运动相关的能量。在最初的 $1800\,\omega_c^{-1}$内，能量转换几乎完全相同；此后，各数值方法之间出现了轻微差异。这段初始时期的

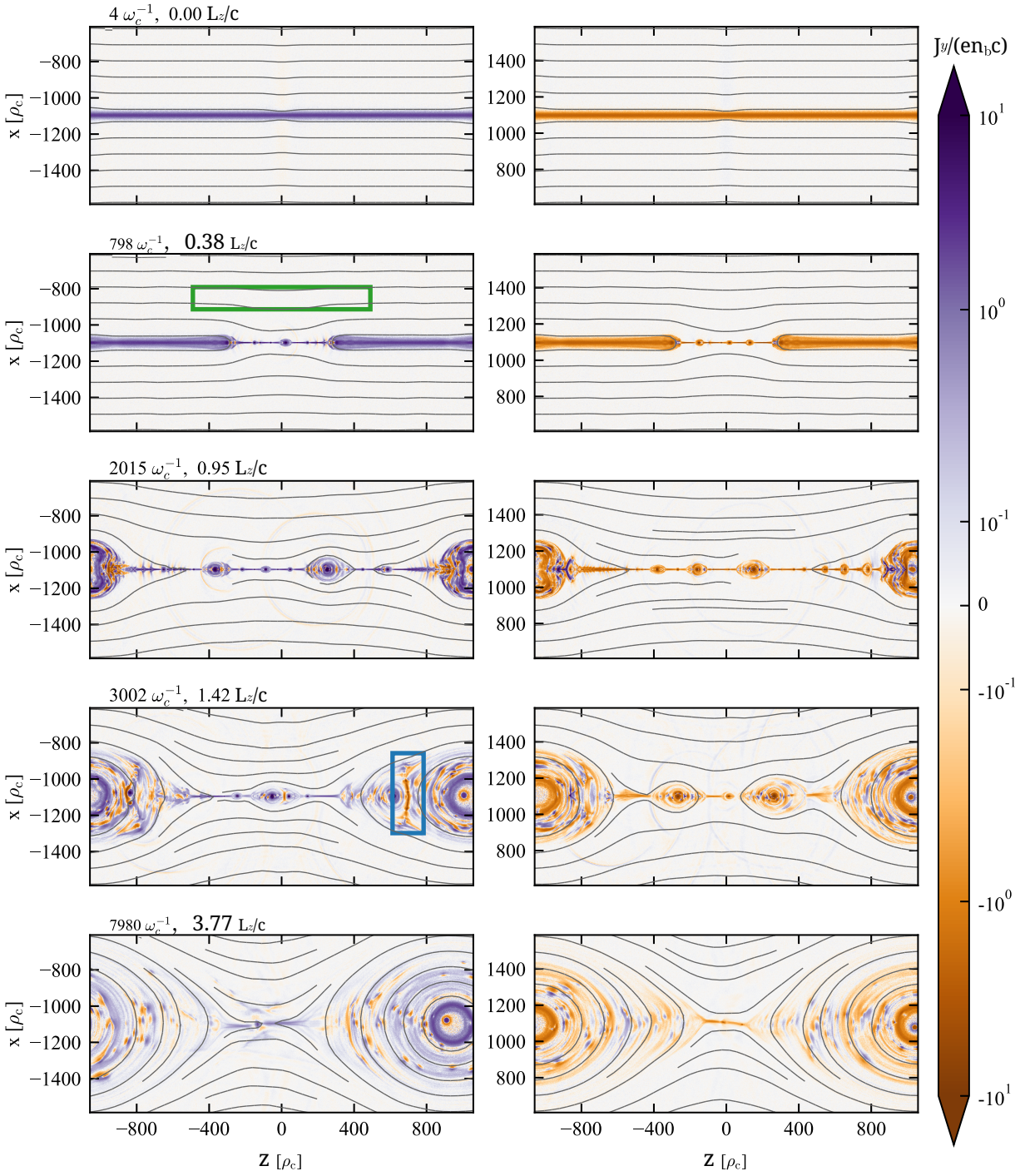

图 2. Yee模拟中，上方（左列）和下方（右列）的电流及面内磁场（黑线）的时间演化。在 $z = 0$ 处对初始电流片施加的小扰动使电流片在该处塌缩、变薄，并引发磁重联。电流片碎裂成等离子体团，等离子体团从中心移开并彼此合并，从而引发次级磁重联（例如蓝色方框标示的区域）。最终形成一个大型等离子体团，磁重联随之结束。绿色方框显示了用于计算第 3.2 节平均流入速度的区域。

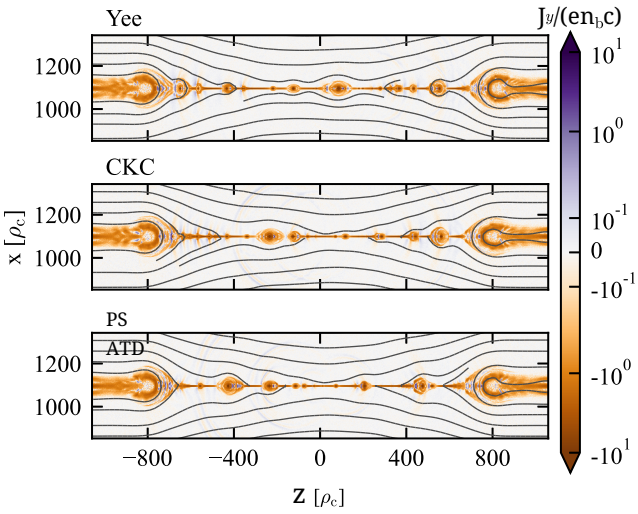

图 3. 使用不同麦克斯韦求解器的模拟中，电流片与磁场结构的比较。所有快照均显示在 $t = 1470\,\omega_c^{-1}$。在这一阶段，所有模拟都显示电流片已碎裂成几个小型等离子体团，并且一个较大的等离子体团正在计算域边缘形成。由于磁重联的非线性，电流结构与磁场结构之间存在细微差异。能量转换和粒子加速彼此相似（见图 4 和5）。

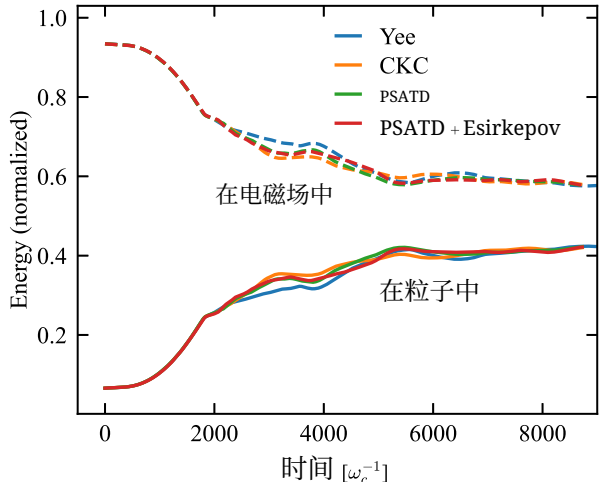

图 4. 磁重联模拟过程中电磁场（虚线）与粒子（实线）之间能量平衡的演化。纵轴以模拟开始时的总能量进行归一化。不同麦克斯韦求解器的结果以不同颜色表示（Yee：蓝色，CKC：橙色，PSATD+Vay 电流沉积：绿色，PSATD+Esirkepov 电流沉积：红色）。所有求解器在演化初期的 $\sim 1500\,\omega_c^{-1}$ 几乎完全相同，此后所有模拟均呈现出相似的演化趋势，最终约 40% 的场能量转化为粒子动能。

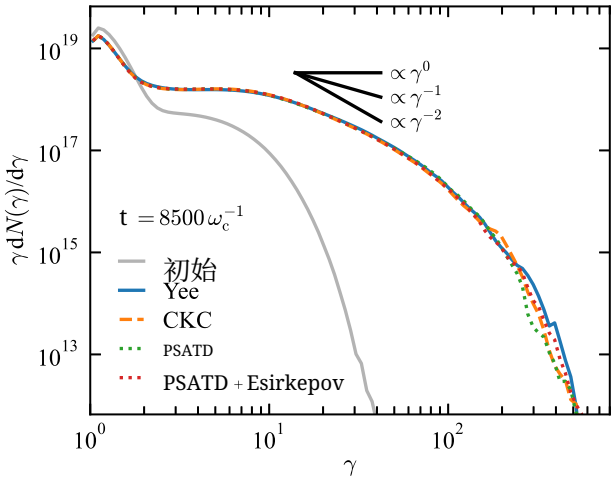

图5。 在模拟开始时（灰线）以及磁重联结束后（ γ）按粒子能量加权的粒子洛伦兹因子分布$t = 8500\,\omega_c^{-1}$。我们比较了不同麦克斯韦求解器得到的最终分布：Yee（实蓝线）、CKC（橙色虚线）、采用 Vay 电流沉积的 PSATD（绿色点线）以及采用 Esirkepov 电流沉积的 PSATD（红色点线）。三种麦克斯韦求解器都显示出非常相似的粒子加速，PSATD+Esirkepov 组合也是如此。新增的粒子动能大部分转移到了具有 $\gamma \sim \sigma$的粒子上。谱斜率在 0 到 -2 之间变化（以黑色线叠加显示），这与先前研究中发现的范围大致一致（Guo 等，2015年；Werner 等，2016年、2018年）。

相同的演化过程似乎是撕裂模不稳定性的线性增长。在此期间，增长最快的空间傅里叶模的振幅近似呈指数增长。在大约 $t = 1800\,\omega_c^{-1}$ 时，指数增长停止，这表明演化的非线性阶段开始了。这种非线性恰逢使用不同求解器时能量转换出现细微但明显的差异，表明这种分歧是非线性演化的结果。PSATD+Esirkepov 显示出类似的结果。

所有模拟的能量守恒精度均达到 1/2000 以内，远低于可接受的能量不守恒水平。CKC 模拟损失了初始总能量的 4×10^{-4}，略高于 Yee 和 PSATD 模拟分别损失的 3.5×10^{-4} 和 3×10^{-4}。

三种方法和 PSATD+Esirkepov 也产生了定量上相似的粒子加速。最高粒子 γ 在模拟开始时约为 30，而到磁重联结束时 $t = 8500\,\omega_c^{-1}$，最快的粒子达到 $\gamma = 500$，高出十倍以上。计算域中的大部分能量都存在于具有 $\gamma \lesssim \sigma$的粒子中。先前的研究发现，$dN/d\gamma \propto \gamma^{-\alpha}$具有 $\alpha \approx 1$–3 的幂律（Guo 等，2015年；Werner 等，2016年、2018年）。

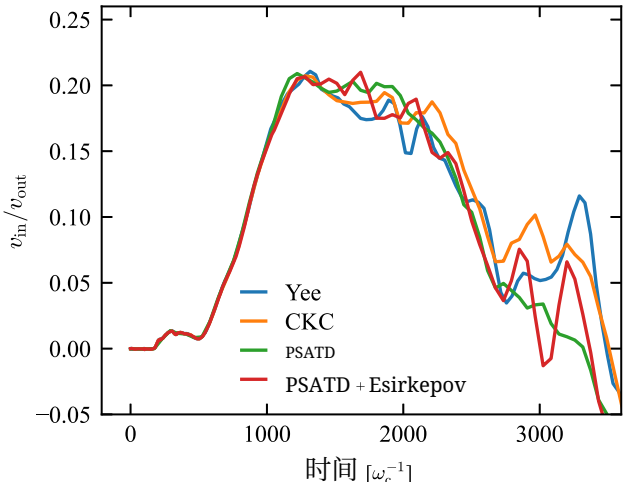

图 6. 估算的无量纲磁重联率 v_{in}/v_{out} 对于分别采用 Yee（蓝色）、CKC（橙色）、使用 Vay 电流沉积的 PSATD（绿色）以及 PSATD+Esirkepov（红色）的模拟。所有情况下，磁重联率的演化趋势相似，在 0.2 处达到峰值，并保持在 0.15 至 0.2 之间，时间范围为 $t = 1000\,\omega_c^{-1}$至 $2000\,\omega_c^{-1}$。这与预期的 0.1 的“普适”磁重联率一致（Comisso 和 Bhattacharjee，2016年；Liu 等，2017）。

这对应于洛伦兹因子分布的指数介于 0 和 -2 之间的幂律。我们的能量分布大致遵循这一斜率（图5）。

3.2. 磁重联率

无量纲磁重联率

$$\beta = -\frac{1}{v_A B_0 L_x}\frac{d\Phi}{dt} \tag{21}$$

它表征了磁重联线性理论的大部分内容（例如 Werner 和 Uzdensky，2021年）。阿尔芬速度为 v_A，而 Φ 是未重联磁通。直接测量未重联磁通量很困难，因此我们改用近似值 $\beta \approx v_{in}/v_{out}$，其中 v_{in} 是流入重联层的流入速度，v_{out} 是下游的末端排出速度（Cassak 等，2017年；Liu 等，2022年）。我们通过对以（x，z）=（$-x_c + x_R$，0）为中心、尺寸为 $x_R \times z_R = 245\,\rho_c \times 980\,\rho_c = 0.11\,L_x \times 0.92\,L_z$ 的区域内的 $|v_x|$ 取平均值，来计算 v_{in}。该区域在图 2 中以绿色矩形标出。测得的流入速度对 x_R 和 z_R 的选择相对不敏感。该测量结果在电流片两侧也呈对称性，即将测量框移至 $x = -x_c - x_R$ 不会改变测量结果。在另一条电流片上测得的结果也相似。因此，为简单起见，我们仅展示下方电流片 +x 侧的磁重联率。v_{in} 平均值仅包括上游区域中的网格单元，即超过 70% 的】【。

表 2. 求解器之间的性能比较。Yee、CKC 和 PSATD+Esirkepov 的每个时间步长墙钟时间相近，而 PSATD(+Vay) 的耗时高出 50%。由于 PSATD 和 CKC 允许采用更长的时间步长，CKC 可快 40% 得到解，而 PSATD(+Vay) 比 Yee 稍慢。PSATD+Esirkepov 的性能与 CKC 相当，这反映出每步的墙钟时间主要由沉积方案决定。这些数据来自在 21 个 OLCF Summit 节点（126 个 GPU）上运行至最终时间 $t = 1470\,\omega_c^{-1}$ 的模拟，运行时启用了动态负载均衡且未进行 I/O。

算法 选项	时间步长 $[\omega_c^{-1}]$	墙钟时间 每步 [秒]	墙钟时间至 $1470\,\omega_c^{-1}$ [s]
Yee	0.411	0.077	274.6
CKC	0.581	0.077	193.5
PSATD（+Vay）	0.581	0.115	290.0
PSATD+Esirkepov	0.581	0.083	209.9

等离子体起源于电流片的同一侧。由于磁重联会使等离子体跨越电流片混合，因此排除了等离子体团和其他重联排流。该阈值的数值不会对我们的结果产生显著影响。

我们通过取电流片中心$\delta = 12\,\rho_c$ 范围内 10 个最高单元平均 z 速度的中位数，来测量流出速度 v_{out}。根据 t =1000 ω_c^{-1}，该速度趋近于预期值 $v_A = c\sigma/\sqrt{\sigma^2 + 1} \approx c$。

Yee、PSATD 和 CKC 模拟的磁重联率估算结果如图 6所示。比值 v_{in}/v_{out} 在所有模拟中几乎以相同的方式从 0 增长到 0.2，时间为 $1200\,\omega_c^{-1}$。在接下来的 $1200\,\omega_c^{-1}$中，速率估算值保持相对稳定，在 0.15 到 0.2 之间，随后在约$t = 2500\,\omega_c^{-1}$时下降。这与 $2L_z/c$ 相吻合，即光穿越电流片所需的时间。在此之后，由于周期性边界条件导致重联前沿彼此干扰，$\beta \approx v_{in}/v_{out}$ 所依据的稳态假设不再成立。

测得的速率介于 0.15 和 0.2 之间，与先前研究的预期相符。通常，β 非相对论性磁重联的速率约为 0.1，而相对论性磁重联的速率更高（Blackman& Field1994；Guo 等，2015；Comisso& Bhattacharjee 2016；Liu 等，2017）。

3.3. 性能

电流片结构（图 3）、能量转换（图 4）、粒子加速（图5）以及重-

连接速率（图 6）在 Yee、PSATD 和 CKC 麦克斯韦求解器之间均表现出相似性。这表明，在我们所有的模拟中，磁重联过程均以相似的方式进行，说明 PSATD 和 CKC 求解器在磁重联问题中得到的结果与更为传统的 Yee 求解器所得结果具有可比性。采用 PSATD+Esirkepov 方案的模拟也得到了可比的结果，尽管其违反了高斯定律。将这一模拟纳入我们的性能比较，可以使我们区分麦克斯韦求解器和电流沉积方案对性能的影响。

在这些磁重联模拟中，大部分运行时间（~60%）都花费在电流沉积例程上，而其性能不受麦克斯韦求解器的影响。因此，Yee、CKC 和 PSATD+Esirkepov 模拟的每个时间步长的墙钟时间大致相同。与 Yee 相比，CKC 和 PSATD 允许使用长 40% 的时间步长，使 CKC 和 PSATD+Esirkepov 的求解时间分别比基准 Yee 缩短 40% 和 30%（见表 2）。PSATD+Esirkepov 的每个时间步长耗时比 Yee（+Esirkepov）或 CKC（+Esirkepov）长 10%，这表明 PSATD 场求解器本身对计算性能的影响很小。然而，由于电流沉积内核存在差异，PSATD（+Vay）的每个时间步长耗时增加了 50%。因此，尽管 PSATD 场求解器允许采用更长的时间步长，但求解时间总体上仅略有增加。WarpX 中的 Esirkepov 沉积实现经过了高度优化，因此，如果能够对 Vay 沉积进行类似的优化，PSATD+Vay 可能会成为更具优势的组合。这将是未来研究的一个方向。

4. 结果：使用 PSATD 实现大时间步长

PSATD 方法相较于 CKC 或 Yee 的一个特殊优势是，它不受库朗稳定性判据的限制。因此，我们能够在 PSATD 模拟中进一步增大时间步长，将 CFL 因子提高到 1 以上。如果其他算法选择保持不变，则每个时间步的耗时不太可能发生变化，从而缩短求解时间。本节研究一系列模拟，它们完全相同，唯一的区别是 CFL 因子，因此时间步长也不同。研究的 CFL 因子范围从基准值 0.95 到 2.2。我们将这一系列模拟称为 CX.X，其中“X.X”表示 CFL 因子。C0.95 是标记为

在第3节中称为‘PSATD’。正如第2节所述，在这一系列模拟中，我们仅使用 Vay 电流沉积方案。

在模拟早期以及对于较低的

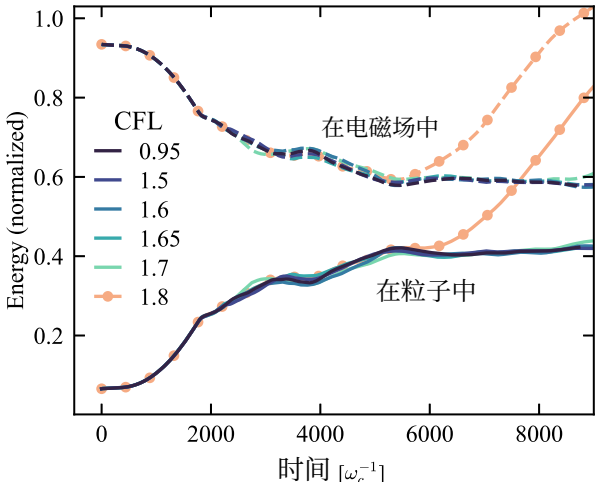

图 7. PSATD 磁重联模拟中电磁场（虚线）与粒子动能（实线）之间的能量平衡，其中 CFL 因子大于 1。CFL 因子小于 1.7 时，产生的结果与基准 C0.95 几乎完全相同。对于更大的数值（即橙色曲线对应的 C1.8，以及未显示的 C2.0 和 C2.2），我们观察到粒子能量和场能量均出现定性上的增加，且这一现象发生的时间逐渐提前。

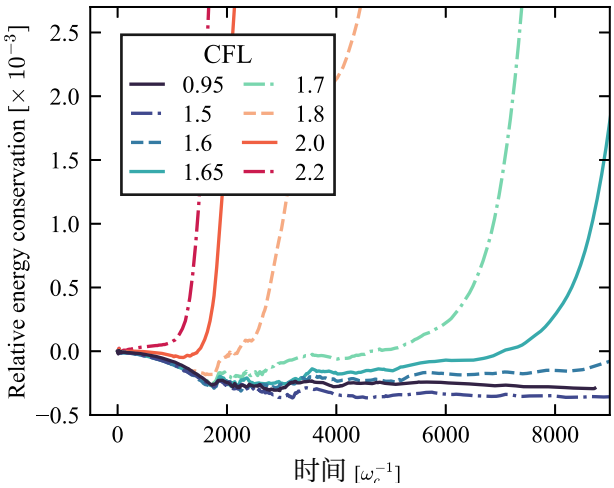

图8。 CFL 因子大于 1 时，磁重联模拟过程中的相对能量守恒情况。基准 C0.95 以深紫色实线表示。对于不超过 C1.6（蓝色虚线）的情况，能量不守恒程度仍然相对较小，与 C0.95 相当（小于 1/2000）。这表明，在整个关注的时间区间（$t \lesssim 9000\,\omega_c^{-1}$）内，CFL 因子 $\lesssim 1.6$ 足以捕捉必要的物理过程。对于大部分演化过程，C1.65（浅蓝色实线）也能保持较低程度的能量不守恒，但在约 $t = 7000\,\omega_c^{-1}$ 时，能量误差开始明显增大。到模拟结束时，其能量不守恒程度仍低于 1%，但正在快速增长。随着 CFL 因子的进一步增大，能量误差快速增长的现象逐渐提前发生，对于 C2.2（红色点划线），这种失控现象在 $2000\,\omega_c^{-1}$ 之前就已出现。

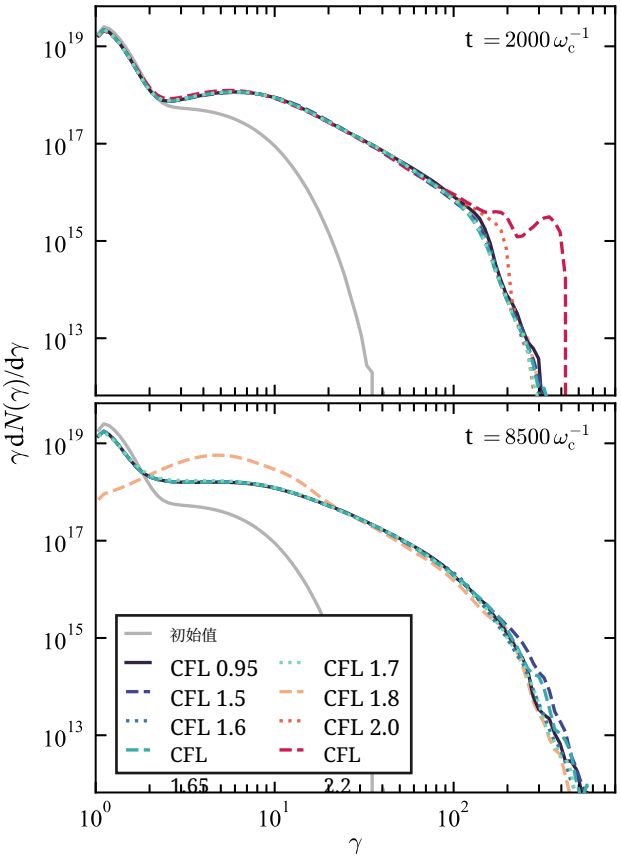

图9。 磁重联过程中（上图；γ）以及模拟接近结束时（下图；t =2000 ω_c^{-1}）粒子能量随洛伦兹因子的分布。基准 C0.95 以深紫色实线表示。较大的 CFL 因子以虚线和点线表示。对于 CFL 因子的数值 $\lesssim 1.7$，整个模拟过程中分布都十分接近，尤其是在较低能量处（$\lesssim 100$）。在高能量处存在微小差异，但无法与统计噪声区分。与能量守恒（图8）的情况类似，CFL 值最高的模拟最早出现偏离；对于 C2.0 和 C2.2（橙色点线和红色虚线），在 $t = 2000\,\omega_c^{-1}$时可见其与基准模拟不一致，而 C1.8（橙色虚线）仍保持一致。到模拟结束时，C1.8 已明显偏离基准，在 $\gamma \sim 4$处达到峰值，而不是接近 1。

CFL 因子数值，重联等离子体的统计特性往往保持不变。对于 CFL 因子 $\lesssim 1.65$，磁场向粒子的能量转换过程几乎完全相同（图 7）。我们观察到与基准运行相同的行为（图 4）：在初始 $\sim 1500\,\omega_c^{-1}$阶段，约有 20% 的磁场能量转移至粒子。此后，能量转换过程放缓，并最终达到饱和，此时约 40% 的能量存在于粒子中，60% 仍保留在磁场中。

在主要关注时段内，C1.7 与采用较低 CFL 因子的模拟结果吻合，直至重联在约 $7000\,\omega_c^{-1}$ 时达到饱和。在最后 $1000\,\omega_c^{-1}$，电磁场和粒子能量均略有增加，表明能量并未守恒。这一点反映在相对能量守恒情况中（见图 8）。能量不守恒的情况起初较轻微，但在约 $t = 7000\,\omega_c^{-1}$ 时急剧加剧，到模拟结束时 $t = 9000\,\omega_c^{-1}$ 达到 1%。

在能量平衡图（CFL 因子 ≤ 1.65，图 7）中看起来完全相同的各组模拟，表现出更高程度的能量守恒。对于 CFL 因子 $\lesssim 1.6$ 的模拟，能量不守恒程度与基准 C0.95 相当。C1.65 在模拟接近结束前也仅表现出较低程度的能量不守恒，之后才开始加剧。如果继续运行下去，我们预计能量不守恒会像 CFL 因子更高的模拟那样持续增加。在整个模拟期间，C1.65 都处于合理的容差范围内，能量守恒偏差不到 500 分之一。

对于 CFL 因子为 ≥ 1.8的模拟，在磁重联的最后阶段会出现显著的能量不守恒现象，其发生时间远早于 C1.7。对于 C1.8，能量误差到 $4000\,\omega_c^{-1}$ 时已显著累积；对于 C2.0 和 C2.2，则到 $2000\,\omega_c^{-1}$时已显著累积（图 8）。这些误差最初在能量守恒图中显现，但随后持续增大，直至在能量转换图中也清晰可见（图 7中的橙色曲线）。到 $t = 6000\,\omega_c^{-1}$时，场能量和粒子能量已明显偏离基准。C2.0 和 C2.2 还表现出更早出现的场能量和粒子能量失控增长，但为使图示更加清晰，未将其纳入图 7 。

粒子能谱进一步表明，在模拟的大部分过程中，CFL 因子为$\lesssim 1.7$ 的模拟结果彼此一致。图9 比较了初始粒子能量分布（灰线）与 $t = 2000\,\omega_c^{-1}$（磁重联中期）和 $t = 8500\,\omega_c^{-1}$（磁重联之后，接近模拟结束时）的粒子能量分布。在较早时刻，我们研究的所有运行结果与基准 C0.95 都非常接近，直至 $\gamma \sim 100$。CFL 因子小于 2 的运行结果在最高能量处也彼此高度一致；洛伦兹因子超过 300 的粒子寥寥无几，甚至没有。C2.0 中 $\gamma \sim 100$的粒子略微过量，且随着模拟推进，这种情况愈发明显。C2.2 中高能粒子过量的情况更加严重，最大洛伦兹因子达到 400，比此时 C1.8 所达到的最大值高出 30%。这也与图8中出现能量不守恒的起始时刻相吻合。高能粒子过量可能直接导致了最初的能量不守恒，但不久之后，我们还观察到冷上游等离子体出现了人工加热。

在 C0.95 和 CFL 因子较低（≤ 1.7）的运行中，冷上游等离子体在$\gamma \sim 1$处呈现为一个峰值，即使在模拟结束时也基本保持不变。然而，在 C1.8 及更高值的运行中，这个峰值会展宽并移至 $\gamma \sim 4$处。C1.8 接近结束时（图 9下图）可以清楚地看到这一现象。C2.0 和 C2.2 中也会出现这种情况，开始于上图所示时刻之后不久；为使图示清晰，我们省略了它们在后续面板中的分布。

在模拟结束时，CFL 因子为 $\lesssim 1.7$ 的运行结果在 $\gamma < 100$下的粒子能量分布几乎完全一致。对于能量最高的粒子，存在一些细微差异，其程度与不同电磁求解器之间所观察到的差异相当（见图 5）。这些最高能量的粒子也是最稀少的——在 $\gamma = 2$处的粒子数量是在 $\gamma = 100$处的 $\sim$5000 分之一，因此，较高能量区域更容易受到统计噪声的影响。

图中 CFL 因子 ≥ 1.65 所呈现的非守恒现象8 似乎至少部分是由上游区域的数值加热造成的。确切原因尚不确定，但我们认为这直接源于较大的 CFL 因子，而非未能解析某个物理时间尺度。巧合的是，C1.65 的时间步长略大于 $1\,\omega_c^{-1}$，这意味着无法捕捉上游粒子的回旋运动。然而，如果通过例如将各方向的网格单元尺寸加倍，并将 CFL 因子降至 1 以下来获得相同的时间步长，就不会发生这种加热。该效应由上游等离子体驱动。对不含电流片、仅充满上游（$\theta = 0.15$，$\sigma = 30$）等离子体的计算区域进行模拟，也显示出相同的数值加热。

除 C2.2 外，所有运行的无量纲磁重联率都非常相似（图 10）。正如第 3.2 节所讨论的，我们主要关注 $t < 2000\,\omega_c^{-1}$ 时间段内估算的磁重联率数值。在这一时间区间内，所有模拟均呈现出几乎相同的上升趋势，达到 0.2，随后在接下来的 $1000\,\omega_c^{-1}$ 时间内略微下降至 0.15。C2.2 在很大程度上遵循这一规律，但在 $t = 2000\,\omega_c^{-1}$ 时，其下降速度明显快于其他运行。这凸显了磁重联率的稳健性，并表明它可能不应被用来判断模拟是否产生了正确的结果。在

$t = 2000\,\omega_c^{-1}$，C2.0 和 C2.2 在高能粒子能谱方面均与基准模型存在定性差异（图9）。然而，它们的磁重联率测量结果与基准模型一致。

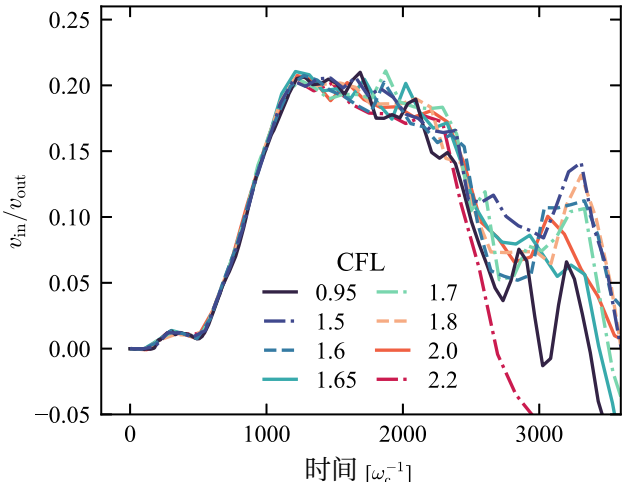

图 10. 通过电流片中的流入速度与流出速度之比估算的无量纲磁重联率（见第 3.2 节）。该磁重联率似乎基本不受 CFL 因子的影响。这主要是因为我们对磁重联率的估算仅在模拟的前 $2000\,\omega_c^{-1}$ 阶段有效，此时能量不守恒现象最小（图 8）。C2.2 是唯一一个在演化的前 $2500\,\omega_c^{-1}$ 阶段表现出显著偏离的模拟，这与其能量不守恒现象失控加剧的情况相吻合。

在此讨论的各项诊断指标中，能量守恒对高 CFL 因子引发的数值问题最为敏感。由于我们的模拟属于封闭系统，总能量在整个演化过程中应保持不变，因此可直接与真实值进行比较。随着 CFL 因子增大，我们发现，在能量不守恒开始迅速上升之前，这些模拟得到的粒子加速和磁重联率并未偏离基准。即使是 C2.2，在模拟的前 $1500\,\omega_c^{-1}$也与 C0.95 一致，直到其能量不守恒开始增加。虽然粒子能谱在能量不守恒开始失控后仍可能与基准相符（例如 $t = 8500\,\omega_c^{-1}$处的 C1.7，图 9 底部面板），但如果没有已知的基准，我们就无法确认粒子加速是否仍然正确。随着 CFL 因子增大，我们建议将能量不守恒的失控增长作为封闭系统的一项启发式判据，用于确定模拟结果何时变得不可靠。

在表 3 中，我们总结了 CFL 因子大于 1 的模拟的计算性能。同样，我们将结果与使用 PSATD麦克斯韦求解器的基准 C0.95 进行比较。我们发现，从 C0.95 到 C2.2，模拟固定物理时间间隔所需的运行时间减少了一半。在这一 CFL 因子范围内，物理时间步长增加了 2 倍。3，

表 3. 在其他条件相同的模拟中，CFL 因子介于 0.95 和 2.2 之间时的性能比较。PSATD 求解器和 Vay 沉积方案采用不同的 CFL 因子。这些数值来自使用动态负载均衡且不进行 I/O、在 21 个 OLCF Summit 节点（126 个 GPU）上运行至最终时间 $t = 1470\,\omega_c^{-1}$ 的模拟。

CFL 求解器	时间步长 $[\omega_c^{-1}]$	墙钟时间 每步 [s]	墙钟时间至 $1470\,\omega_c^{-1}$ [s]
0.95	0.582	0.115	290.0
1.5	0.919	0.126	200.9
1.6	0.978	0.127	190.9
1.65	1.010	0.128	186.4
1.7	1.041	0.128	180.9
1.8	1.102	0.129	172.5
2.0	1.225	0.131	157.2
2.2	1.347	0.131	143.0

每个时间步长的墙钟时间增加了约 15%。这种墙钟时间差异主要是因为在较高的 CFL 因子下，电流沉积过程（按每个时间步长计算）较慢。当粒子在每个时间步长内移动的距离更远时，它们更有可能在不同网格单元之间移动，这可能会降低沉积例程的缓存性能。

特定应用所获得的加速幅度，取决于在整个关注时间区间内保持结果可靠的前提下，CFL 因子可以提高到多大。我们预计，对于给定的 CFL 因子，能量守恒的时间区间会因问题设置而异。对于此处描述的配置，如果我们只关注磁重联的开始阶段，那么 CFL 因子取 2.2 可能就足够了。在这种情况下，求解时间将是 C0.95 的 50%。本研究旨在追踪磁重联从开始到饱和的全过程。为此，CFL 因子最多需要取 1.7，并且我们会在约 $6500\,\omega_c^{-1}$ 时终止模拟。取该 CFL 因子时，求解速度比基准 C0.95 快 1.6 倍。

5. 结论

我们首次使用 16 阶伪谱麦克斯韦求解器（PSATD）和超过传统 CFL 限制的时间步长，进行了相对论性重联的粒子网格模拟。我们发现，PSATD 和非标准有限差分格式 CKC 在定性和定量上都得出了与标准二阶有限差分格式 Yee 相同的结果。我们已验证这三种各种方案产生的磁岛演化在定性上相同，粒子-场能量平衡、粒子加速和磁重联率也相同（图 3–6）。粒子能量分布具有幂律尾部，谱指数为 α $\mathrm{d}N(\gamma)/\mathrm{d}\gamma \propto \gamma^{-\alpha}$。我们测得 α 介于 1 和 3 之间，符合预期（Guo 等, 2015年；Werner 等 2016年，2018年）。在模拟的大部分线性阶段，磁重联率介于 0.15 和 0.2 之间，与相对论性重联的预期一致。

我们还比较了各求解器的性能，并以求解时间衡量效率。对于相同的 CFL 因子，CKC 和 PSATD 所允许的时间步长比 Yee 长 $\sqrt{2}$ 倍。不过，每步所需的墙钟时间更多取决于电流沉积方案，而非麦克斯韦求解器。CKC 和 Yee（两者均采用 Esirkepov 沉积）的每步墙钟时间相同，因此求解时间加快了 $\sim$40%。高阶 PSATD 只有在采用 Vay 沉积时才能实现电荷守恒；但在当前的 WarpX 实现中，Vay 沉积的优化程度不如 Esirkepov，因此计算开销更大。因此，我们额外进行了一次 PSATD+Esirkepov 模拟，将求解器与电流沉积方法的比较分开。这样可以验证，PSATD 本身并非时间步开销更大的主要原因。尽管 PSATD+Esirkepov 不满足电荷守恒，但对于这个问题仍能给出正确结果，且每步墙钟时间仅比 CKC 或 Yee 高 10%。结合 PSATD 所允许的更大时间步长 $\sqrt{2}$，求解时间总计缩短了 30%。电荷守恒的 PSATD+Vay 每步所需时间比 Yee 长 50%，因此其求解时间略长于最常用的电荷守恒 Yee 算法。

与有限差分格式不同，PSATD 在任意时间步长下都具有数值稳定性，即使时间步长大于光穿过一个网格单元所需的时间也是如此。我们研究了 CFL 因子 > 1 对相对论磁重联问题中精度和性能的影响。我们发现，关注的时间尺度决定了由 CFL 因子参数化的最大允许时间步长。因子 ≤ 1.65在 $t = 8000\,\omega_c^{-1}$之前的时间内，能像基准 PSATD 案例一样较好地守恒能量，此时磁重联早已结束。在这段时间里，粒子加速（图 5）和磁重联率（图10）均与基准结果吻合良好。略高的 CFL 因子 1.7 在能量分布（图 7）和粒子加速方面仍与基准结果吻合良好，但在 $t \approx 6500\,\omega_c^{-1}$时开始出现能量发散误差的迹象，此时磁重联刚刚达到饱和。这表明，对于这一特定问题和计算设置，CFL

因子可提高至 1.7，而不会影响磁重联期间模拟结果的精度。随着我们逐步增大时间步长（CFL 因子最高增至 2.2 ），能量不守恒的发散现象会越来越早出现。在能量守恒的时间段内，粒子能量增益和磁重联率等其他诊断指标与基准案例一致，这表明，对于具有周期性边界条件的封闭系统，能量不守恒是判断模拟结果何时仍可靠的良好诊断指标。

每个时间步的墙钟时间随 CFL 因子的增大而仅略有增加：从基准 C0.95 到 C2.2，约增加 15%。时间步长的增加超过了每步墙钟时间的增加；在其他算法选择均不变的情况下，C0.95 到 C2.2 之间每单位物理时间的墙钟时间减少约一半。与 CKC+Esirkepov 相比——它是 CFL=0.95 模拟中效率最高的方案——采用 2.2 的 CFL 因子可使求解时间缩短 25%；采用我们认定适用于科学研究目的的 1.7 CFL 因子，则可使求解时间缩短 $< 10\%$。如果必须使用低于 1.7 的 CFL 因子，那么 CKC+Esirkepov 将是效率最高的选择，因为其电流沉积速度更快。未来的工作将进一步优化 Vay沉积例程，从而使更多情况下的权衡倾向于 PSATD+Vay 组合。尽管 PSATD+Esirkepov 在这些模拟中精度良好，但若不额外进行电流修正或散度清理操作来确保电荷守恒，我们不建议使用该方案。

PSATD的优势之一在于，它可以减少使用Yee或CKC求解器时可能出现的数值色散。尽管探究PSATD求解器对相对论等离子体中数值色散的缓解作用超出了本文范围，但众所周知，这种数值色散确实会污染天体物理喷流、激波和磁重联的模拟（Godfrey1974；Melzani等，2013；Godfrey与Vay，2014；Ikeya与Matsumoto，2015；Li等，2017；Nishikawa等，2021；Tomita等，2022）。因此，PSATD可以为研究高度相对论性等离子体提供新的机会；高度相对论性等离子体属于数值上具有挑战性的状态，并且是许多天体物理系统的特征。

<escape>本研究采用的数值与算法创新可用于实现更大规模、更高效率的天体物理和实验室等离子体模拟（Ji等，2022年）。我们的模拟也是最早一批采用GPU加速的天体物理PIC模拟之一</escape>

模拟。作为第一步，我们仅关注不包含额外动力学和辐射物理过程的二维系统。第三个空间维度在磁重联中具有重要的动力学意义，因为它会使电流片容易受到一种称为“漂移撕裂”（drift-kink）的额外不稳定性的影响，而这种不稳定性可能会抑制粒子加速（例如，Cerutti 等，2014；Sironi 和 Spitkovsky，2014；Guo 等，2015；Werner 和 Uzdensky，2017）。CKC 和 PSATD 在三维情况下可能尤其高效，因为它们的时间步长比 Yee 算法大 $\sqrt{3}$倍，而在二维情况下则为 $\sqrt{2}$ 倍。在许多天体物理磁重联环境中，同步辐射和正负电子对产生发挥着重要作用。借助 WarpX，我们将能够利用 GPU 加速的百亿亿次级计算资源，开展包含这些辐射物理过程的三维模拟。

我们感谢 Luca Comisso 就磁重联和磁重联率所作的富有见地的讨论。本研究部分由美国能源部科学办公室先进科学计算研究办公室、Exascale 计算项目（17-SC-20-SC）根据合同 DE-AC02-05CH11231，以及由 ASCR 应用数学项目资助的反应流模拟与分析项目（FWP #FP00011940）支持。本研究使用了开源粒子网格单元模拟代码 WarpXhttps://github.com/ECP-WarpX/WarpX，其主要经费来自美国能源部 Exascale 计算项目。WarpX 的主要贡献者来自 LBNL、LLNL、CEA-LIDYL、SLAC、DESY、CERN 和 Modern Electron。我们感谢所有 WarpX 贡献者。本研究使用了橡树岭国家实验室橡树岭领导力计算设施的资源，该设施由美国能源部科学办公室根据合同编号 DE-AC05-00OR22725 提供支持。本研究还使用了国家能源研究科学计算中心（NERSC）的资源。该中心是美国能源部科学办公室的用户设施，位于劳伦斯伯克利国家实验室，并依据合同编号 DE-AC02-05CH11231 运营；本研究使用了 NERSC 2022 年 DDR-ERCAP m3881 和 2022、2023 年 ASCR-ERCAP mp111 额度。

软件： WarpX(Fedeli, Huebl 等，2022年；WarpX 开发团队，2023年)、AMReX (Zhang 等，2019年；AMReX 开发团队等，2023年)、matplotlib (Hunter, 2007年)、numpy (Harris 等，2020年)、scipy (Virtanen 等，2020年)、yt (Turk 等，2011年)

附录

表 4. 所有模拟中通用的物理参数和符号。

参数	符号	数值
背景拉莫尔半径	ρ_{c}	4.1×10^{-3}米
背景拉莫尔频率	ω_{c}	$7.3 \times 10^{-10}\mathrm{s}^{-1}$
趋肤深度	λ_{e}	0.01 米
电流片半宽度	δ	0.05 米
背景磁化	σ	30
背景磁场	B_0	0.42 T
电流片数密度	n_{d}	2.8×10^{17}米$^{-3}$
背景数密度	n_{b}	5.6×10^{16}米$^{-3}$
电流片速度	β_0	$0.22\,c$
背景温度	θ_{b}	0.15
电流片温度	θ_{d}	1.57
计算域半宽 (x)	L_x	8.96 米
计算域半宽（z）	L_z	4.32 米

A. 磁场配置

A.1. 平衡态

在我们所有的模拟中，我们固定 $\rho_{\mathrm{c}} = 4.1 \times 10^{-3}$ 米，这对应于 $B = 0.42$特斯拉，并确定了表 4 中的其他量纲数值。这些数值用于 WarpX 模拟，该模拟要求使用 SI 单位。这个长度尺度的选择在很大程度上是任意的。在这一非辐射状态下，磁化度决定了大部分物理过程；其余结果也会相应缩放。

根据 ρ_{c} 与 λ_{e} 之间的关系以及趋肤深度的定义，我们可以计算电流片中的数密度 n_{d}:

$$n_{\mathrm{d}} = \frac{m\epsilon_0 c^2}{e^2 \lambda_{\mathrm{e}}^2} = 2.8 \times 10^{17}\,\mathrm{m}^{-3} \tag{A1}$$

进而得到背景数密度 $n_{\mathrm{b}} = 5.6 \times 10^{16}$米$^{-3}$。在此数密度下，要达到 30 的磁化度，背景磁场需为 $B_0 = 0.42$特斯拉。

在对安培定律（方程 4）进行积分后，

$$\begin{aligned} B_z(x) = &-4\mu_0 e n_{\mathrm{b}} c \beta_0 \delta \left[\arctan\left(\tanh\left(\frac{x+x_{\mathrm{c}}}{2\delta}\right)\right) - \arctan\left(\tanh\left(\frac{x-x_{\mathrm{c}}}{2\delta}\right)\right)\right] \\ &+ \frac{1}{2}\left(\frac{n_{\mathrm{d}}}{n_{\mathrm{b}}} - 1\right)\left(\tanh\left(\frac{x+x_{\mathrm{c}}}{\delta}\right) - \tanh\left(\frac{x-x_{\mathrm{c}}}{\delta}\right)\right) + C. \end{aligned} \tag{A2}$$

为求积分常数 C，我们应用方程 5 给出的条件:

$$B_z(\infty) = -B_z(0) = B_0. \tag{A3}$$

首先取 $x \to \infty$ 时的极限，

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} B_z(x) &= -4\mu_0 e n_{\mathrm{b}} \beta_0 c \delta \left(\arctan(1) - \arctan(1) + \frac{1}{2}\left(\frac{n_{\mathrm{d}}}{n_{\mathrm{b}}} - 1\right)(1-1)\right) + C \\ &= C, \end{aligned} \tag{A4}$$

因为 $\lim_{x\to\infty}\tanh(x) = 1$。在双精度下，如果 $x \geq 20$，则 $\tanh(x) = 1$，所以当 $x_c/\delta \geq 40$ 时，以下结论成立；这正是我们模拟中的情况：

$$\begin{aligned} B_z(0) &= -4\mu_0 e n_b \beta_0 c\delta \left(\arctan(1) - \arctan(-1) + \frac{1}{2}\left(\frac{n_d}{n_b} - 1\right)(1 - (-1)) \right) + C \\ &= -4\mu_0 e n_b \beta_0 c\delta \left(\frac{\pi}{2} + \frac{n_d}{n_b} - 1 \right) + C. \end{aligned} \tag{A5}$$

$$\tag{A6}$$

结合关于 B_z 满足 $x \to \infty$ 且在 $x = 0$ （方程 5）的条件：

$$B_0 = \lim_{x\to\infty} B_z(x) = C = -B_z(0) \tag{A7}$$

$$C = 4\mu_0 e n_b \beta_0 c\delta \left(\frac{\pi}{2} + \frac{n_d}{n_b} - 1 \right) - C \tag{A8}$$

$$C = 2\mu_0 e n_b \beta_0 c\delta \left(\frac{\pi}{2} + \frac{n_d}{n_b} - 1 \right). \tag{A9}$$

这给出了方程中磁场的表达式 6 和 7：

$$\begin{aligned} B_z(x) = -\frac{2B_0}{\left(\frac{\pi}{2} + \frac{n_d}{n_b} - 1\right)} &\left(\arctan\left(\tanh\left(\frac{x + x_c}{2\delta}\right)\right) - \arctan\left(\tanh\left(\frac{x - x_c}{2\delta}\right)\right) - \frac{\pi}{4} \right. \\ &\left. + \frac{1}{2}\left(\frac{n_d}{n_b} - 1\right)\left(\tanh\left(\frac{x + x_c}{\delta}\right) - \tanh\left(\frac{x - x_c}{\delta}\right) - 1\right)\right), \end{aligned} \tag{A10}$$

with

$$B_0 = 2\mu_0 e n_b \beta_0 c\delta \left(\frac{\pi}{2} + \frac{n_d}{n_b} - 1 \right). \tag{A11}$$

平衡态磁场和等离子体特性的完整表达式如下：

$$\begin{aligned} \frac{B(x)}{B_0} = \frac{2}{\frac{\pi}{2} + \frac{n_d}{n_b} - 1} &\left[\arctan\left(\tanh\left(\frac{x - x_c}{2\delta}\right)\right) - \arctan\left(\tanh\left(\frac{x + x_c}{2\delta}\right)\right) + \frac{\pi}{4} \right. \\ &\left. + \frac{1}{2}\left(\frac{n_d}{n_b} - 1\right)\left(\tanh\left(\frac{x - x_c}{\delta}\right) - \tanh\left(\frac{x + x_c}{\delta}\right) + 1\right)\right] \end{aligned} \tag{A12}$$

$$\frac{n(x)}{n_b} = 1 + \left(\frac{n_d}{n_b} - 1\right)\left(\operatorname{sech}\left(\frac{x + x_c}{\delta}\right) + \operatorname{sech}\left(\frac{x - x_c}{\delta}\right)\right) \tag{A13}$$

$$\beta(x) = \frac{\lambda_e\sqrt{\sigma}}{2\delta\left(\frac{\pi}{2} + \frac{n_d}{n_b} - 1\right)}\sqrt{\frac{n_d}{n_b}}\left(\operatorname{sech}\left(\frac{x + x_c}{\delta}\right) - \operatorname{sech}\left(\frac{x - x_c}{\delta}\right)\right) \tag{A14}$$

$$\theta(x) = \frac{\sigma}{4}\frac{(4 + \eta)/\eta - [B_z(x)/B_0]^2}{[n(x)/n_b]\sqrt{1 - \beta(x)^2}}. \tag{A15}$$

A.2. 磁场扰动

磁场扰动基于矢量势（方程 20），它是对 $B_z(x)$ 的积分（方程 6）。根据函数形式，我们将 $B(x)$ 分为三类项：常数项、arctan(tanh) 项，以及

双曲正切项。常数。其余两类项的积分则.....

$$\int \tanh\left(\frac{x \pm x_\mathrm{c}}{\delta}\right) \mathrm{d}x \equiv \zeta_\pm(x) = \delta \log\cosh\left(\frac{x \pm x_\mathrm{c}}{\delta}\right) \tag{A16}$$

$$\begin{aligned}\int \arctan\tanh\left(\frac{x \pm x_\mathrm{c}}{2\delta}\right) \mathrm{d}x &\equiv \xi_\pm(x) \\ &= 2\delta\left(\frac{x \pm x_\mathrm{c}}{2\delta}\right)\left[\arctan\left(\exp\left(-\frac{x \pm x_\mathrm{c}}{\delta}\right)\right) + \arctan\left(\tanh\left(\frac{x \pm x_\mathrm{c}}{2\delta}\right)\right)\right] \\ &+ \frac{\delta i}{2}\left[\mathrm{Li}_2\left(-i\exp\left(-\frac{x \pm x_\mathrm{c}}{\delta}\right)\right) - \mathrm{Li}_2\left(i\exp\left(-\frac{x \pm x_\mathrm{c}}{\delta}\right)\right)\right].\end{aligned} \tag{A17}$$

$\int B_z(x)\,\mathrm{d}x$ 的数值为:

$$\int B_z(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2B_0}{\frac{\pi}{2}+\frac{n_\mathrm{d}}{n_\mathrm{b}}-1}\left[\xi_-(x) - \xi_+(x) + \frac{\pi}{4}x + \frac{1}{2}\left(\frac{n_\mathrm{d}}{n_\mathrm{b}}-1\right)\left(\zeta_-(x) - \zeta_+(x) + x\right)\right] \tag{A18}$$

$$\begin{aligned}&= \frac{2B_0}{\frac{\pi}{2}+\frac{n_\mathrm{d}}{n_\mathrm{b}}-1}\left[\frac{\pi}{4}x + (x-x_\mathrm{c})\left(\arctan\exp\left(-\frac{x-x_\mathrm{c}}{\delta}\right) + \arctan\tanh\left(\frac{x-x_\mathrm{c}}{2\delta}\right)\right)\right. \\ &\quad - (x+x_\mathrm{c})\left(\arctan\exp\left(-\frac{x+x_\mathrm{c}}{\delta}\right) + \arctan\tanh\left(\frac{x+x_\mathrm{c}}{2\delta}\right)\right) \\ &\quad + \frac{\delta i}{2}\left(\mathrm{Li}_2\left(-i\exp\left(-\frac{x-x_\mathrm{c}}{\delta}\right)\right) - \mathrm{Li}_2\left(i\exp\left(-\frac{x-x_\mathrm{c}}{\delta}\right)\right)\right) \\ &\quad - \frac{\delta i}{2}\left(\mathrm{Li}_2\left(-i\exp\left(-\frac{x+x_\mathrm{c}}{\delta}\right)\right) - \mathrm{Li}_2\left(i\exp\left(-\frac{x+x_\mathrm{c}}{\delta}\right)\right)\right) \\ &\quad \left.+ \frac{1}{2}\left(\frac{n_\mathrm{d}}{n_\mathrm{b}}-1\right)\left(\delta\log\cosh\left(\frac{x-x_\mathrm{c}}{\delta}\right) - \delta\log\cosh\left(\frac{x+x_\mathrm{c}}{\delta}\right) + x\right)\right]\end{aligned} \tag{A19}$$

$$\begin{aligned}&= \frac{2B_0}{\frac{\pi}{2}+\frac{n_\mathrm{d}}{n_\mathrm{b}}-1}\left[\frac{\pi}{4}(x-2x_\mathrm{c}) + \frac{1}{2}\left(\frac{n_\mathrm{d}}{n_\mathrm{b}}-1\right)\left(\delta\log\cosh\left(\frac{x-x_\mathrm{c}}{\delta}\right) - \delta\log\cosh\left(\frac{x+x_\mathrm{c}}{\delta}\right) + x\right)\right. \\ &\quad + \frac{\delta i}{2}\left(\mathrm{Li}_2\left(-i\exp\left(-\frac{x-x_\mathrm{c}}{\delta}\right)\right) - \mathrm{Li}_2\left(i\exp\left(-\frac{x-x_\mathrm{c}}{\delta}\right)\right)\right) \\ &\quad \left.- \frac{\delta i}{2}\left(\mathrm{Li}_2\left(-i\exp\left(-\frac{x+x_\mathrm{c}}{\delta}\right)\right) - \mathrm{Li}_2\left(i\exp\left(-\frac{x+x_\mathrm{c}}{\delta}\right)\right)\right)\right].\end{aligned} \tag{A20}$$

方程 A20 由应用该简化处理得到

$$\arctan\left(e^{-2y}\right) + \arctan\left(\tanh(y)\right) = \frac{\pi}{4}. \tag{A21}$$

为保持对称性并保留周期性边界条件，我们将积分常数设为零。

磁场的扰动为:

$$\boldsymbol{B'} = \boldsymbol{\nabla}\times A_y - \vec{B} = -\frac{\partial A_y}{\partial z}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial A_y}{\partial x}\hat{\mathbf{k}} - \vec{B} \tag{A22}$$

$$\begin{aligned}&= -0.01\times\hat{\mathbf{i}}\left[\frac{51\pi}{L_z}\sin\left(\frac{\pi}{L_z}z\right)\cos^{50}\left(\frac{\pi}{L_z}z\right)\cos^2\left(\frac{\pi(x-x_\mathrm{c})}{L_x}\right)\int B_z(x)\,\mathrm{d}x\right] + \\ &+ 0.01\times\hat{\mathbf{k}}\left[\frac{\pi}{L_x}\cos^{51}\left(\frac{\pi}{L_z}z\right)\sin\left(\frac{2\pi(x-x_\mathrm{c})}{L_x}\right)\int B_z(x)\,\mathrm{d}x - \cos^{51}\left(\frac{\pi}{L_z}z\right)\cos^2\left(\frac{\pi(x-x_\mathrm{c})}{L_x}\right)B_z(x)\right].\end{aligned} \tag{A23}$$

参考文献

Abdo, A. A., Ackermann, M., Ajello, M., 等。2011年, 《科学》, 331, 739, doi: 10.1126/science.1199705

Bird, R., Tan, N., Luedtke, S. V., 等, 2022年, 《IEEE 并行与分布式系统汇刊》, 33, 952, doi: 10.1109/TPDS.2021.3084795

Birdsall, C. K. & Langdon, A. B. 1991，基于计算机模拟的等离子体物理 Blackman, E. G. & Field, G. B. 1994，PhRvL，72，494，doi: 10.1103/PhysRevLett.72.494Boris, J. P. 1970，第四届等离子体数值模拟会议论文集，3 Bussmann, M.，Burau, H.，Cowan, T. E.，等。2013，载于高性能计算、网络、存储与分析国际会议论文集，SC '13（美国纽约州纽约市：计算机协会），doi: 10.1145/2503210.2504564Cassak, P. A.，Liu, Y. H. & Shay, M. A. 2017，《等离子体物理学杂志》，83，715830501，doi: 10.1017/S0022377817000666Cerutti, B.，Uzdensky, D. A. & Begelman, M. C. 2012，ApJ，746，148，doi: 10.1088/0004-637X/746/2/148Cerutti, B.，Werner, G. R.，Uzdensky, D. A. & Begelman, M. C. 2013，ApJ，770，147，doi: 10.1088/0004-637X/770/2/147—。2014，ApJ，782，104，doi: 10.1088/0004-637X/782/2/104Chien, S. W. D.，Nylund, J.，Bengtsson, G.，等。2020，载于2020年IEEE第32届计算机体系结构与高性能计算国际研讨会（SBAC-PAD），149–156，doi: 10.1109/SBAC-PAD49847.2020.00030Cole, J. B. 1997年，《IEEE微波理论与技术汇刊》，45，991，doi: 10.1109/22.588615—。2002年，《IEEE天线与传播汇刊》，50，1185，doi: 10.1109/TAP.2002.801268Comisso, L. & Bhattacharjee, A. 2016，《等离子体物理学杂志》，82，595820601，doi: 10.1017/S002237781600101XCowan, B. M.，Bruhwiler, D. L.，Cary, J. R.，Cormier-Michel, E. & Geddes, C. G. R. 2013，《物理评论加速器与束流》，16，041303，doi: 10.1103/PhysRevSTAB.16.041303Esirkepov, T. Z. 2001年，《计算物理学通讯》，135，144，doi: 10.1016/S0010-4655(00)00228-9Fedeli, L.，Huebl, A.，Boillod-Cerneux, F.，等。2022，载于SC22：高性能计算、网络、存储与分析国际会议（美国加利福尼亚州洛斯阿拉米托斯：IEEE计算机学会），1–12，doi: 10.1109/SC41404.2022.00008Germaschewski, K.，Fox, W.，Abbott, S.，等。2016，《计算物理学杂志》，318，305，doi: 10.1016/j.jcp.2016.05.013Giannios, D. 2010年，MNRAS，408，L46，doi: 10.1111/j.1745-3933.2010.00925.xGodfrey, B. B. 1974，《计算物理学杂志》，15，504，doi: 10.1016/0021-9991(74)90076-X Godfrey, B. B., & Vay, J.-L. 2014, Journal of Computational Physics, 267, 1, doi: 10.1016/j.jcp.2014.02.022 Guo, F., Li, X., Daughton, W., et al. 2019, ApJL, 879, L23, doi: 10.3847/2041-8213/ab2a15 Guo, F., Liu, Y.-H., Daughton, W., & Li, H. 2015, ApJ, 806, 167, doi: 10.1088/0004-637X/806/2/167 Haber, I., Lee, R., Klein, H., & Boris, J. 1973年, in Proc. Sixth Conf. Num. Sim. Plasmas, 伯克利, CA, 46–48 Hakobyan, H., Petropoulou, M., Spitkovsky, A., & Sironi, L. 2021年, ApJ, 912, 48, doi: 10.3847/1538-4357/abedac Harris, C. R., Millman, K. J., van der Walt, S. J., et al. 2020, Nature, 585, 357, doi: 10.1038/s41586-020-2649-2 Harris, E. G. 1962, Il Nuovo Cimento, 23, 115, doi: 10.1007/BF02733547 Huebl, A. 2019, PhD thesis, Technische Universitaet Dresden, doi: 10.5281/zenodo.3266820 Hunter, J. D. 2007, Computing in Science & Engineering, 9, 90, doi: 10.1109/MCSE.2007.55 Ikeya, N., & Matsumoto, Y. 2015年, PASJ, 67, 64, doi: 10.1093/pasj/psv052 Ji, H., Daughton, W., Jara-Almonte, J., et al. 2022年, Nature Reviews Physics, 4, 263, doi: 10.1038/s42254-021-00419-x K¨arkk¨ainen, M., Gjonaj, E., Lau, T., & Weiland, T. 2006年, in Proc. ICAP, Chamonix, France Kumar, P., & Zhang, B. 2015年, PhR, 561, 1, doi: 10.1016/j.physrep.2014.09.008 Li, F., Yu, P., Xu, X., et al. 2017年, Computer Physics Communications, 214, 6, doi: 10.1016/j.cpc.2017.01.001 Liu, Y.-H., Cassak, P., Li, X., et al. 2022年, Communications Physics, 5, 97, doi: 10.1038/s42005-022-00854-x Liu, Y.-H., Hesse, M., Guo, F., et al. 2017年, PhRvL, 118, 085101, doi: 10.1103/PhysRevLett.118.085101 Lyutikov, M., & Uzdensky, D. 2003年, ApJ, 589, 893, doi: 10.1086/374808 McKinney, J. C., & Uzdensky, D. A. 2012年, MNRAS, 419, 573, doi: 10.1111/j.1365-2966.2011.19721.x Melzani, M., Walder, R., Folini, D., Winisdoerffer, C., & Favre, J. M. 2014, A&A, 570, A111, doi: 10.1051/0004-6361/201424083 Melzani, M., Winisdoerffer, C., Walder, R., et al. 2013年, A&A, 558, A133, doi: 10.1051/0004-6361/201321557 Myers, A., Almgren, A., Amorim, L., et al. 2021年, Parallel Computing, 108, 102833, doi: https://doi.org/10.1016/j.parco.2021.102833 Nalewajko, K., Uzdensky, D. A., Cerutti, B., Werner, G. R., & Begelman, M. C. 2015年, ApJ, 815, 101, doi: 10.1088/0004-637X/815/2/101

Nalewajko, K.,Yuan, Y., & Chru´sli´nska, M. 2018年, Journal of Plasma Physics, 84, 755840301, doi: 10.1017/S0022377818000624Nishikawa, K., Duţan, I.,K¨ ohn, C., & Mizuno, Y. 2021年, Living Reviews in Computational Astrophysics, 7, 1, doi: 10.1007/s41115-021-00012-0Petropoulou, M., Sironi, L., Spitkovsky, A., & Giannios, D. 2019年, ApJ, 880, 37, doi: 10.3847/1538-4357/ab287aPhilippov, A., Uzdensky, D. A., Spitkovsky, A., & Cerutti, B. 2019年, ApJL, 876, L6, doi: 10.3847/2041-8213/ab1590Piran, T. 2004年, Revie ws of Modern Physics, 76, 1143, doi: 10.1103/RevModPhys.76.1143Schoeffler, K. M., Grismayer, T., Uzdensky, D., & Silva, L. O. 2023年, ar Xiv e-prints, arXiv:2303.16643, doi: 10.48550/arXiv.2303.16643Sironi, L. 2022年, PhRvL, 128, 145102, doi: 10.1103/PhysRevLett.128.145102Sironi, L., & Spitkovsky, A. 2014年, ApJL, 783, L21, doi: 10.1088/2041-8205/783/1/L21Tavani, M., Bulgarelli, A., Vittorini, V., et al. 2011年, Science, 331, 736, doi: 10.1126/science.1200083Tetarenko, A. J., Sivakoff, G. R., Miller-Jones, J. C. A., et al. 2017年, MNRAS, 469, 3141, doi: 10.1093/mnras/stx1048AMReX 开发团队, Almgren, A., Beckner,V., et al. 2023年, AMReX-Codes/amrex: AMReX 23.04, 23.04, Zenodo, doi: 10.5281/zenodo.7790123Tomita, S., Ohira, Y., Kimura, S. S., Tomida, K., & Toma, K. 2022年, ApJL, 936, L9, doi: 10.3847/2041-8213/ac88beTurk, M. J., Smith, B. D., Oishi, J. S., et al. 2011年, The Astrophysical Journal Supplement Series, 192, 9, doi: 10.1088/0067-0049/192/1/9Vay, J. L., Geddes, C. G. R., Cormier-Michel, E., & Grote, D. P. 2011年, Journal of Computational Physics, 230, 5908, doi: 10.1016/j.jcp.2011.04.003

Vay, J.-L., Haber, I., & Godfrey, B. B. 2013年, 《计算物理学杂志》, 243, 260, doi: 10.1016/j.jcp.2013.03.010 Vay, J. L., Almgren, A., Amorim, L. D., 等, 2020年, 载于《物理学杂志会议系列》, 第1596卷, 《物理学杂志会议系列》, 012059, doi: 10.1088/1742-6596/1596/1/012059Vay, J.-L., Almgren, A., Amorim, L. D., 等, 2023年, ECP-WarpX/WarpX: 23.04, 23.04, Zenodo, doi: 10.5281/zenodo.7793695Vincenti, H., & Vay, J. L. 2016年, 《计算物理学通讯》, 200, 147, doi: 10.1016/j.cpc.2015.11.009Virtanen, P., Gommers, R., Oliphant, T. E., 等, 2020年, 《自然方法》, 17, 261, doi: 10.1038/s41592-019-0686-2Werner, G. R., & Uzdensky, D. A. 2017年, ApJL, 843, L27, doi: 10.3847/2041-8213/aa7892—. 2021年, 《等离子体物理学杂志》, 87, 905870613, doi: 10.1017/S0022377821001185Werner, G. R., Uzdensky, D. A., Begelman, M. C., Cerutti, B., & Nalewajko, K. 2018年, MNRAS, 473, 4840, doi: 10.1093/mnras/stx2530Werner, G. R., Uzdensky, D. A., Cerutti, B., Nalewajko, K., & Begelman, M. C. 2016年, ApJL, 816, L8, doi: 10.3847/2041-8205/816/1/L8Xiong, Q. Y., Huang, S. Y., Yuan, Z. G., 等, 2023年, ApJS, 264, 3, doi: 10.3847/1538-4365/ac9fd6Yee, K. 1966年, 《IEEE天线与传播汇刊》, 14, 302, doi: 10.1109/TAP.1966.1138693Zenitani, S. 2015年, 《等离子体物理学》, 22, 042116, doi: 10.1063/1.4919383Zenitani, S., & Hoshino, M. 2001年, ApJL, 562, L63, doi: 10.1086/337972—. 2007年, ApJ, 670, 702, doi: 10.1086/522226Zhang, Q., Guo, F., Daughton, W., Li, H., & Li, X. 2021年, PhRvL, 127, 185101, doi: 10.1103/PhysRevLett.127.185101Zhang, W., Almgren, A., Beckner, V., 等, 2019年, 《开放源代码软件杂志》, 4, 1370, doi: 10.21105/joss.01370