arXiv:2304.10570v1 [math.AG] 20 Apr 2023

张量几何：未解问题与研究方向

FULVIO GESMUNDO

摘要。本文汇集了在 AGATES 启动研讨会期间的报告与讨论之后提出的一系列开放问题和研究思路。该研讨会于2022年9月19日至26日在波兰科学院数学研究所（IMPAN）和华沙大学数学系（MIM UW）举行。

AGATES 启动研讨会[1] 涵盖了从经典代数几何和表示论，到理论计算机科学、量子物理和数据科学等多个领域的主题。来自不同领域的十二位演讲者介绍了各自研究领域中的开放问题，旨在为参与者提供研究方向，使他们能够在 AGATES 学期剩余时间内开展相关研究，同时促进新的合作，并推动张量几何在不同领域中的应用。

在本文档中，我们将研究方向划分为四个主题，这些主题反映了在 AGATES 暑期学校期间所涵盖的内容。该暑期学校于启动研讨会前一周举行。在每个章节中，我们都会简要介绍相应主题的背景知识。然而，本文档绝非一份自成体系的资料：我们提供了一些有用的参考文献，以帮助感兴趣的读者对相关主题及其最新研究进展形成总体认识。显然，这些参考文献所包含的内容远超理解下文所述开放问题所需的范围；我们建议读者先通读这些笔记，之后再根据需要补充相关理论，以便全面理解令自己感兴趣的问题。

- 我们假设读者具备基础的代数几何知识。读者应了解簇、维数、次数的定义，理想-簇对应的基本性质，以及一些本科阶段的交换代数知识。关于所需射影几何知识的基础内容，请参阅 [Har92] 。
- 这些讲义的核心内容，尤其是第一部分的核心内容，是张量秩理论及其若干变体。 [BCC+18、Lan12] 涵盖了所有必需的理论，内容还远不止于此。从几何学角度介绍割线簇理论的入门内容，可参阅[CGO14、One22]。
- 关于张量谱理论的入门介绍，请参阅 [Ven23] 。从张量分析的角度对这一主题进行了全面论述的资料是[QL17]。关于该主题的最新进展，以及从更具几何性的角度对该主题的研究，可参阅 [Sod20、Tei22]。
- 《理论计算机科学》和《复杂性理论》中的几何与代数方法在以下著作中有详细介绍：[Lan17]。 [BI18] 介绍了几何复杂性理论，涵盖了开始研究该领域所需的几乎全部材料。 [BCS97] 是一本关于代数复杂性理论的完整教材。

[1] https://agates.mimuw.edu.pl/index.php/agates/kickoff-workshop

- 量子物理中的张量几何极为丰富多样。关于张量网络的入门介绍，参见 [Orfrm[o]–4, STG+19] 。而 [Ste23、Sey22]则采取了更偏几何的视角。

我们指出，张量在几何学及许多相关领域中都发挥着核心作用，还有许多相关课题可供探索，提供了丰富的研究方向。这些笔记仅展示了其中一小部分。在每一节末尾，我们都会提出一些在 AGATES 启动研讨会期间未作详细探讨的其他课题；我们认为这些课题或许会引起本笔记读者的兴趣，因为它们展现了众多尚待探索的方向和应用。

致谢。 本研究得到华沙大学主题研究计划“张量：几何、复杂性与量子纠缠”、卓越计划——研究型大学项目，以及西蒙斯基金会授予波兰科学院数学研究所的第663281号资助（2021—2023年）的支持。我谨向 Weronika Buczyńska、Jarosław Buczyński、Francesco Galuppi 和 Joachim Jelisiejew 表示感谢，感谢他们组织 AGATES 学期活动，并在华沙提供了良好的科研环境。我还要感谢 Maria Chiara Brambilla、Mario Kummer、Benjamin Lovitz、Alessandro Oneto、Giorgio Ottaviani、Tim Seynnaeve、Daniel Stilck França、Vincent Steffan、Nick Vannieuwenhoven 和 Emanuele Ventura，感谢他们在 AGATES 学期活动期间与我们进行的富有启发性的讨论，以及他们在撰写本文档过程中提出的建议。

记号。 我们主要在复数域上工作。在某些章节中，我们会提及与实几何的联系，并会明确说明。给定一个向量空间 V, $\mathbb{P}V$ 表示 V中直线组成的射影空间； V^* 表示 V的对偶空间。对于空间 V, W，用$V \otimes W$ 表示 V与 W的张量积；它也可以等同于线性映射空间 $\mathrm{Hom}(V^*, W) \simeq \mathrm{Hom}(W^*, V)$，或双线性映射空间 $V \times W \to \mathbb{C}$。对于 $d \geq 0$，令 $V^{\otimes d}$ 表示 V 的 d 次张量幂。于是， $S^dV \subseteq V^{\otimes d}$ 表示对称张量子空间，即在对称群 $\mathfrak{S}_d$ 对张量因子进行置换的作用下保持不变的张量； S^dV 可等同于 V^*上 d 次数的齐次多项式空间。对于子集 $S \subseteq V$，令 $\langle S \rangle$ 表示 S 的线性张成；若 $S \subseteq \mathbb{P}V$，同一记号表示射影线性张成。

第一部分：经典几何

设 $V_1, \ldots, V_k$ 是维数分别为 $n_1, \ldots, n_k$ 的向量空间，并设 $d_1, \ldots, d_k$ 为非负整数。多重次数为 $(d_1, \ldots, d_k)$ 的塞格雷-维罗内塞嵌入是映射

$$v_{d_1,\ldots,d_k} : \mathbb{P}V_1 \times \cdots \times \mathbb{P}V_k \to \mathbb{P}(S^{d_1}V_1 \otimes \cdots \otimes S^{d_k}V_k);$$

其像记为 $\mathscr{V}_{d_1,\ldots,d_k}$，是由秩为一的部分对称张量构成的塞格雷-维罗内塞簇

$$\mathscr{V}_{d_1,\ldots,d_k} = \{\ell_1^{d_1} \otimes \cdots \otimes \ell_k^{d_k} : \ell_j \in V_j\} \subseteq \mathbb{P}(S^{d_1}V_1 \otimes \cdots \otimes S^{d_k}V_k).$$

当 $k = 1$时，这是线性形式幂构成的维罗内塞簇。若 $(d_1, \ldots, d_k) = (1, \ldots, 1)$，则这是由可分解张量构成的塞格雷簇。

给定一个簇 $X \subseteq \mathbb{P}V$ 和一个元素 $p \in \mathbb{P}V$， p 的 X-秩为

$$\mathrm{R}_X(p) = \min\{r : p \in \langle x_1, \ldots, x_r \rangle \text{ for some } x_1, \ldots, x_r \in X\}; \tag{1}$$

r阶割簇 X 是

$$\sigma_r(X) = \overline{\{p \in \mathbb{P}V : \mathrm{R}_X(p) \leq r\}}$$

其中，闭包在扎里斯基拓扑或欧几里得拓扑下是等价的。 p的边界 X-秩为

$$\underline{\mathrm{R}}_X(p) = \min\{r : r \in \sigma_r(X)\}.$$

显然，$\mathrm{R}_{\underline{X}}(p) \leq \mathrm{R}_X(p)$，对于大多数代数簇 X ，都存在不等式严格成立的例子。

1.1. 割线簇的维数。 关于割线簇的研究已经投入了大量精力，其中一个特别受关注的方向是研究其维数。通过直接的参数计数可以得出，对于一个簇 $X \subseteq \mathbb{P}V$，有

$$\dim \sigma_r(X) \leq \min\{r \dim X + r - 1, \dim V - 1\};$$

我们称 $\sigma_r(X)$ 具有预期维数，若等式成立；若不等式严格成立，则称 X 是 r-亏格的，或称 $\sigma_r(X)$是亏格的。

一般而言，人们对割线簇的维数所知甚少。曲线永不亏格是一个经典事实 [Pal06]；亏格曲面早在20世纪初便已分类[Sev01，Ter21]；具有亏格第二割线簇的三维簇已在 [Sco08]中分类，而[CC05]则对一般情形下的亏格三维簇进行了分类；具有亏格第二割线簇的四维簇近期已完成分类 [CCR20]。在 Segre-Veronese 簇的情形下，人们了解得更多。除有限个已知例子外，Veronese 簇都不亏格，这些例子已在[AH95]中分类。对于更一般的维数和多重次数组合，我们所知较少。关于当前研究现状的总结见 [BCC+18，GO22]。一般情形下，这个问题仍未解决，人们通常认为已知的亏格情形就是全部存在的情形。

我们提出以下非常一般性的研究方向:

问题 1. 对缺陷塞格雷-维罗内簇进行分类并确定其维数 .

通过 Terracini 引理 [BCC+18，引理 1], 问题 1 可以改述为关于多射影空间乘积上某些线丛的特殊性的表述。给定簇 $\mathcal{L}$ 上的一个线丛 X 以及一个零维概形 $\mathbb{X} \subseteq X$，我们称 $\mathbb{X}$ 在 $\mathcal{L}$上施加独立条件，如果

$$\dim H^0(\mathcal{I}_{\mathbb{X}} \otimes \mathcal{L}) = \max\{\dim H^0(\mathcal{L}) - \deg(\mathbb{X}), 0\}.$$

我们称线丛 $\mathcal{L}$ 为特殊的，如果存在 $r \geq 1$ 使得 r 个支撑点为一般位置的双重点在 X 上不施加独立条件 $\mathcal{L}$。根据 Terracini 引理，该条件等价于 r阶割线簇 X 是缺陷的 [BCC+18]。

问题 2。 对射影空间乘积上的特殊线丛进行分类。更一般地，对有趣的簇类上的特殊线丛进行分类。

一般而言，可以进一步探讨其他0维概形（不同于重二重点的并），是否会对某些线丛施加独立条件。例如，Segre-Harbourne-Gimigliano-Hirschowitz 猜想便以此为研究对象。粗略地说，该猜想预言，具有一般支撑点的肥点除了一份已分类的已知情形列表外，均施加独立条件；相关猜想见 [Nag59、LU06]。关于包含在 $\mathbb{P}^n$ 中的重二重点并的概形情形，研究见[BO11]；关于曲线型概形的情形，研究见 [CG94]。对于 $\mathbb{P}^n$中的少量点，相关情况已有明确结论，参见例如[BDP15、BDP16]。

原则上，可以研究具有任意支撑集的概形情形。预计在这种情况下实现分类将难以企及。然而，若将问题具体化为次数为 2 的零维概形情形，问题便会变得容易处理得多。这种情形已经

与 Terracini 轨迹研究的重要联系 [BC21], 这些簇与割线簇相关，并且控制着它们的奇异轨迹（至少在一定程度上）。

问题 3. 给定一个簇 X、X 上的线丛 $\mathcal{L}$ 以及一个整数 r，确定是否存在一个 0 维概形 $\mathbb{X} \subseteq X$，它是若干互不相交的次数为 2 的概形之并，使得约化概形 $\mathbb{X}^{\mathrm{red}}$ 在 $\mathcal{L}$ 上施加独立条件，但 $\mathbb{X}$ 不施加独立条件。

对于较小的 r，若干经典结果可以给出问题 3的答案。对于 $r = 2$，曲线的情形相当于刻画簇 的边缘簇； X对于曲线而言，这一问题已得到充分理解，而对于曲面已有一些部分结果 [RS12、RS11b、MRS22]。对于较小的 r，在 Veronese 簇和 Segre-Veronese 簇的情形下已有若干结果 [BC21、BBS20、BV23、CG23]。问题 3 的无约束版本似乎难以处理，但即便只是针对特殊簇类给出部分答案，也会很有价值。

1.2. 广义加性分解与 0 维概形。 为了研究张量的秩与边界秩之间的关系，文献中引入了若干相关的秩概念。我们将介绍其中一个对本节很重要的概念。

给定一个簇 $X \subseteq \mathbb{P}V$和一个点 $p \in \mathbb{P}V$，仙人掌 X秩为 p [BR13，BB14] 是

$$\mathrm{cR}_X(p) = \min\{r : p \in \langle \mathbb{X} \rangle \text{ for some 0-dimensional scheme } \mathbb{X} \subseteq X, \text{ with } \deg(\mathbb{X}) = r$$

注意，在附加假设簇 $\mathbb{X}$ 光滑时，也就是由 r 个互不相同的点组成时，仙人掌秩的定义会退化为秩的定义；特别地，$\mathrm{cR}_X(p) \leq \mathrm{R}_X(p)$。本节尤其关注 $X = v_d(\mathbb{P}V) \subseteq \mathbb{P}S^dV$ 为 Veronese 簇的情形。在这种情况下，apolarity 理论保证， $f \in \langle v_d(\mathbb{X}) \rangle$ 当且仅当定义理想 $I_{\mathbb{X}} \subseteq \mathrm{Sym}(V^*)$ 属于 $\mathbb{X}$ 的 apolar 理想 $\mathrm{Ann}(f)$ f；关于该理论的介绍，参见[BCC+18，第 2.1 节。 $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}V$ apolar to f，当且仅当$I_{\mathbb{X}} \subseteq \mathrm{Ann}(f)$。如果不存在与 f apolar 的真子概形 $\mathbb{X}' \subseteq \mathbb{X}$，则称 $\mathbb{X}$ 非冗余。如果 $\deg(\mathbb{X}) = \mathrm{cR}_X(f)$，则称 $\mathbb{X}$ 为极小的。

在对称张量的情形下，我们将 $f \in S^dV$ 的广义加性分解（GAD）定义为以下形式的表达式

$$f = \ell_1^{d-k_1} g_1 + \cdots + \ell_s^{d-k_s} g_s$$

其中 $\gcd(g_i, \ell_i) = 1$ 且 $\ell_1, \ldots, \ell_s$ 两两不同。 f 的 Waring 秩分解是 f 的一种特殊 GAD；类似地，平凡分解 $f = f$ 也是 f 的一个 GAD。

我们可以自然地将一个零维概形 $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}V$ 与齐次多项式 $f \in S^dV$的 GAD 联系起来。该构造较为技术性，详情请参阅 [BJMR18]；其次数定义了相应 GAD 的长度。

给定 $f \in S^dV$，与 f 对偶的概形和与 f 的 GAD 相关联的概形之间的关系尚未完全明了。一般而言，若 $\mathbb{X}$ 是与 f 的 GAD 相关联的概形，则 $\mathbb{X}$ 与 f [对偶 BBM14, BJMR18]。反过来则未必成立：存在与 f 对偶、但并非由 GAD [BOT22] 导出的概形。不过，反向命题的一个较弱形式成立：若 $\mathbb{X}$ 是与 $f \in S^dV$ 对偶的概形，则存在一个次数 D 和 f 的一个扩张 $f^{\mathrm{ext}} \in S^DV$（即关于某个微分算子的一个反导数），使得 $\mathbb{X}$ 与 f^{ext} [的一个 GAD 相关联 BBM14]。控制这些关系的一个重要参数是概形的 Castelnuovo-Mumford 正则性。关于这一概念的基本性质，请参阅[Eis05] 。若 $\mathbb{X}$ 是正则性为 $\mathrm{reg}(\mathbb{X}) \leq d$ 的概形，则$\mathbb{X}$ 与 f 对偶，当且仅当它包含一个与 f 的 GAD 相关联的子概形 $\mathbb{X}'$。然而，给定 f，尚不清楚与 f 的 GAD 相关联的概形，或与 f 对偶的（极小）概形，其 $\mathrm{reg}(\mathbb{X})$ 的最大可能值是多少。

问题 4. 设 $f \in S^dV$，且设 $\mathbb{X}$ 是 f 的一个极小对偶概形。是否有 $\mathrm{reg}(\mathbb{X}) \leq d$?

已知，如果 $\mathbb{X}$ 是与形式 $f \in S^dV$ 极化对偶的不可约冗余方案，则界 $\mathbf{reg}(\mathbb{X}) \leq d$ 不一定成立。

问题 5. 确定与形式 $f \in S^dV$ 伴随的一个冗余不可约方案的正则性 $\mathrm{reg}(\mathbb{X})$ 的最大可能值。

<escape>此外，与某些特定 GAD 相关联的概形在次数 d 上是正则的：例如，约化概形（与 Waring 分解相关联）以及次数为 2 的概形（与切向分解相关联）便属于这种情况 [BT20]。</escape>

问题 6。 对于 $f \in S^dV$，设 $\mathbb{X}$ 是与最短长度 *GAD* 相关联的概形。是否$\mathrm{reg}(\mathbb{X}) \leq d$? 一般而言，确定 f 满足什么条件时，可以保证存在一个其相关概形具有较低正则性的 *GAD*。

1.3. **割线簇的次数。** 代数几何中的一个经典课题是确定割线簇的次数。特别值得关注的是割线簇为超曲面的情形。例如，在 [KS22], 中观察到，如果 X 是一个实代数簇，其复化 $X_{\mathbb{C}}$ 的割线簇是一个超曲面，那么该超曲面的定义方程是双曲多项式的一个候选例子，而其锥无法用线性矩阵不等式描述。在 [CGJ19], 中，具有作为超曲面的割线簇的簇被用于构造秩和边界秩在塞格里乘积下严格次可乘性的例子。

第二割线簇的次数下界见 [CR06]。若 $X \subseteq \mathbb{P}V$是非退化簇，且 $\mathrm{codim}\,\sigma_2(X) = c$，则 $\deg(\sigma_2(X)) \geq \binom{c+2}{2}$。双重点公式 [EH16, Sec. 2.4] 的一个经典应用是计算曲线的割线簇的次数：若 $C \subseteq \mathbb{P}V$ 是次数为 d、亏格为 g的非退化曲线，则 $\deg(\sigma_2(X)) = \binom{d-1}{2} - g$。在 [CR06], 中，结合弱缺陷簇理论，对双重点公式作了更深入的应用，从而分类了满足 $\deg(\sigma_2(X))$ 达到下界 $\binom{c+2}{2}$的簇 X。

对于更高阶的割线簇，目前所知甚少。一些特殊情形已得到全面或近乎全面的理解：例如有理正规曲线和椭圆正规曲线 [Fis06], 以及一些 Segre-Veronese 簇的割线簇的零星例子 [Str87、LM04、Ott09]。

我们提出两个与此方向相关的问题：

问题 7. 本着[CR06]的精神，为高阶割线簇的次数给出下界。

问题 8. 分类维数较小且其第二和／或第三割线簇具有最小次数的簇。更一般地，给定 r，构造一个簇 X，使得 $\sigma_r(X)$ 是次数尽可能低的超曲面。

1.4. **其他主题。** 近期的 [BB21] 发展了一种基于边界版本的 apolarity 理论，该理论建立在[HS04]引入的多重分次希尔伯特概形之上。饱和理想极限的研究与变形理论之间存在有趣的联系 [JM22, Mań22], 并由此带来了许多新的、有趣的开放方向。

此外，关于割线簇方程的研究仍是一个重要课题，其中还有许多未解问题。按照 [CHL19]的思路，可以围绕前文提到的边界 apolarity 探索新的方向。

第 2 部分：张量谱理论

张量谱理论横跨代数几何与优化理论。事实上，它是经典矩阵谱理论在张量领域的自然推广，并与半定规划相关。优化理论通常在实数域上展开，尽管几何研究最好在复数域中进行。

（实）欧几里得距离发挥着重要作用。因此，给定复空间 V，通常会固定一个实子空间 $V_{\mathbb{R}}$以及一个满秩二次型（即内积）$\langle -, - \rangle \in S^2V^*$，使其限制在 $V_{\mathbb{R}}$ 上时为正定。然后，$\langle -, -\rangle$可用于在 $V_{\mathbb{R}}$上定义欧几里得距离 $\| - \|$，并建立 $V \simeq V^*$ 与其对偶空间V 之间的同一对应。

给定 V如上所述，以及一个张量 $T \in V^{\otimes d}$，其特征向量 T 是一个元素 $v \in V$，满足$^{f}{}_{2\,\sqsupset,,}{}_{d}$ $v^{\otimes(d-1)} = \lambda v$ 其中某个 $\lambda \in \mathbb{C}^\times$；这里$_{2\,\neg,\ldots,d}$ 表示在将 V与 V对应同一后，对除第一个张量因子外的所有因子进行张量缩并。显然，由于张量 $v^{\otimes(d-1)}$是对称的，特征向量仅取决于 T 在空间 $V \otimes S^{d-1}V$中的部分对称分量。通过选择在不同张量因子上进行缩并，可以给出类似的定义；由此得到特征相容簇，详见第 2.2 节。

从矩阵情形推广到张量情形，最直接的推广是对称张量。若将 $f \in S^dV$ 视为 V 上的齐次多项式，则 f 的特征向量定义等价于条件 $\nabla f(v) = \lambda v$，其中某个 $\lambda \in \mathbb{C}^\times$；这里 ∇f 表示 f 的微分，或者等价地，表示在某种坐标选取下其偏导数构成的向量。

记 $f|_\Sigma$ 为 f 在单位球面 $\Sigma_V = \{v \in V$ 上的限制函数：$\langle v, v\rangle = 1\}$：容易看出，$v$ 是 f 的特征向量，当且仅当它是 $f|_\Sigma$ 的临界点，其临界值为 $\lambda = f(v)$。f 的谱范数定义为 $\|f\|_\infty = \max\{|f(v)| : v \in \Sigma_V\}$，它等于 f 的临界值中模最大的那个。当 f 是二次型，或者等价地，T 是对称矩阵时，这些概念就特化为矩阵的相应概念。

2.1. 对称张量的特征向量与特征概形。齐次多项式 $f \in S^dV$的特征概形是由条件 $\nabla f(v) \wedge v = 0$定义的 $\mathbb{P}V$的子概形 $\mathbb{X}_f$；如果 x_0、……、x_n是 V上的坐标，这等价于矩阵的 2×2 阶子式全部为零

$$\begin{pmatrix} x_0 & \cdots & x_n \\ \partial_0 f & \cdots & \partial_n f, \end{pmatrix}$$

其中，$\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$ 是关于变量 x_j的偏导数。这推广了对称矩阵的特征向量集的概念。在[FS94中，CS13], 观察到，如果 f 是一般的，则其特征概形是0维的，并且由 $D_{n\text{个}d} = {}_{d-2}^{(d-1)^{n+1}-1}$ 个不同点组成，其中 $\dim V = n + 1$。事实上，[CS13] 证明了一个~~更强的条件~~：只要 $\mathbb{X}_f$ 是有限的，其次数就是 $D_{n,\,d}$ 然而，对于哪些点构形，或更一般地，哪些 0 维概形能够作为张量的特征概形出现，人们所知甚少。对于每个d，定义特征构形簇

$$\mathcal{E}_{n,d} = \overline{\{(v_1, \ldots, v_{D_{n,d}}) \in (\mathbb{P}V)^{(\cdot D_{n,d})} : \mathbb{X}_f = \{v_1, \ldots, v_{D_{n,d}}\} \text{ for some } f \in S^dV\}}.$$

这里 $(\mathbb{P}V)^{(\cdot D_{n,d})}$ 表示对称积 $(\mathbb{P}V)^{\times D_{n,}{}^{d}}/\mathfrak{S}_{D_{n,d}}$。更一般地，可以将 $\mathcal{E}_{n,d}$ 定义为 Hilbert 概形 $\mathrm{Hilb}^{D_{n,d}}(\mathbb{P}V)$ 的一个子概形，其中包含 $\mathbb{P}V$ 中的 $D_{n,d}$ 个点。

我们提出以下非常一般的问题：

问题9. 确定$\mathcal{E}_{n,d}$的方程。

在问题9中，“方程”应作广义理解，即扎里斯基闭条件。该问题已在 [BGV21、BGV22、BM23], 中得到研究，其中针对 $n=2$，3提供了部分结果，并基本上给出了完整刻画。

可以将问题9 专门化到非约化概形的情形。此时，甚至在确定方程之前，就可以研究特征概形的不可约分支可能具有哪些次数：

问题10。设 $\mathbb{X}$ 是由某个张量的特征概形所对应的非约化概形。 $\mathbb{X}$的不可约分支可能具有哪些次数？哪些概形可以作为不可约分支出现？

例如，对于矩阵，已知 [ASS17] 特征概形的所有不可约分支都是曲线型概形。

2.2. 特征概形相容性。如前所述， $V^{\otimes d}$ 中的（非对称）张量的特征向量可以相对于任意一组 $d-1$ 因子来定义。张量 $T\in V^{\otimes d}$ 的第 k个特征概形，是相对于除第k个因子以外的其他因子定义的特征概形；更准确地说

$$\mathbb{X}_T^k=\{v\in\mathbb{P}V : T\underset{\widehat{k}}{} v^{\otimes d}=\lambda v \text{ for some } \lambda\in\mathbb{C}^\times\};$$

这里 $T\underset{\widehat{k}}{} v^{\otimes d}$ 表示对除 k-个因子以外的所有因子进行缩并。这会产生 d（通常）各不相同的特征概形，它们必须满足某种相容性条件。由此引入的特征相容簇，见 [ASS17], ，记录了张量 d 的哪些方案组（ T-元组）可以作为其特征概形：

$$\mathrm{EC}_{n,d}=\overline{\{(\mathbb{X}_1,\dots,\mathbb{X}_d)\in(\mathbb{P}V)^{\cdot D_{n,d}}\times\cdots\times(\mathbb{P}V)^{\cdot D_{n,d}} : \text{ there exists } T\in V^{\otimes d} \text{ with } \mathbb{X}_i=\mathbb{X}_T^i\}};$$

与特征构形簇类似，可以在 d 份 $\mathrm{Hilb}^{D_{n,d}}(\mathbb{P}V)$ 的乘积中定义特征相容簇。对其中任意一个 d 因子的投影，$\mathrm{EC}_{n,d}$ 都满射到 $\mathcal{E}_{n,d}$。矩阵的情形 $d=2$ 已完全为人所知：其方程见 [ASS17, 第 3.1], 命题，且到 $(\mathbb{P}V)^{\cdot D_{n,d}}=(\mathbb{P}V)^{n+1}$ 的任一投影都是双有理的。除矩阵情形外，人们知之甚少，而即使是二元形式的情形，也蕴含着有趣的几何特征。我们提出一个与问题9类似的问题：

问题11。确定EC_n的维数和方程，d。

2.3. 张量的奇异向量。 与特征向量类似，可以将矩阵的奇异向量这一概念推广到张量情形。固定 d向量空间 V_1、.....、 V_d，每个空间都配备内积 $\langle -,-\rangle_i$，从而可以将 V_i与 V_i等同。给定 $T\in V_1\times\cdots\times V_d$， T的一个奇异元组是一个 d-元组（v_1、.....、 v_d） $\in V_1\times\cdots\times V_d$，满足以下条件。

$$T\underset{\widehat{k}}{}(v_1\otimes\cdots\otimes\widehat{v_k}\otimes\cdots\otimes v_d)=\lambda v_k \text{ for every } k=1,\dots,d.$$

与特征值的情形类似，这与优化理论的联系在于：奇异元组定义了将 T 视为球面乘积 $\Sigma_{V_1}\times\cdots\times\Sigma_{V_d}$上函数时的一个奇异点。最大奇异值定义了一个范数，即称为该张量的谱范数。

对于一般张量的奇异 d元组的数量 $T\in V_1\otimes\cdots\otimes V_d$ 已在[FO14] 中确定，并以其生成函数的形式给出。如果 $n_i+1=$维数V_i，那么一个一般张量

T有 $c(\mathbf{n})$ 个奇异元组，其中 $c(\mathbf{n})$ 是多项式中 $h_1^{n_1}\cdots h_d^{n_d}$ 的系数

$$\prod_{k=1}^{d}\frac{(\sum_{i\neq k}h_i)^{n_k+1}-h_k^{n_k+1}}{(\sum_{i\neq k}h_i)-h_k}.$$

可以定义用于记录奇异元组集合的簇，这与对称情形中特征构形簇和特征相容簇的情况类似。可以研究类似于问题9 的问题。

此外，围绕具有特定性质的张量（例如，其奇异元组定义在实数域上）的存在性，还提出了许多尚未解决的开放问题。

问题 12. 给定实向量空间 V_1，……，V_d，其中 维数 $V_i = n_i + 1$，是否存在一个张量 $T \in V_1 \otimes \cdots \otimes V_d$，使得 T具有 $c(\mathbf{n})$ 个定义在实数域上的临界点？

在对称情形下，问题 12的一个类似问题在 [ASS17], 中提出，探讨是否存在实齐次多项式 $f \in S^dV$ 具有$D_{n,\ d}$ 个临界点。这个问题有肯定答案：在 [Koz18], 中证明了存在具有全实特征构形的调和多项式。关于非对称情形，目前所知甚少，矩阵的情形除外，其答案是肯定的。

2.4. 最佳低秩逼近。优化理论与张量谱理论之间的一个重要联系，在于对最佳秩一逼近的刻画。在实向量空间 $V_{\mathbb{R}}$ 上的正定二次型 $\langle -,-\rangle$ 定义了一个欧几里得范数 $\|v\|^2 = \langle v, v\rangle$，进而定义了一个距离函数 $\mathrm{dist}(v, w) = \|v - w\|^2$。

给定一个代数簇 $X \subseteq V$ 和一个元素 $v \in V$，距离函数自然在 X 上诱导出一个正则函数，其定义为 $\mathrm{dist}_X(-, v) : X \to \mathbb{C}$。如果 v 是一般的，则 $\mathrm{dist}_X(-, v)$ 在 X 上的临界点集合是有限的，由互不相同的点组成，并且其基数不依赖于 v 的选择； X 的欧氏距离次数记为 $\mathrm{EDdeg}(X)$，它是对 $v \in V$ [DHO+16] 的一般选择而言，$\mathrm{dist}(-, v)$ 的临界点数。如果 X 与其所有实点集合的 Zariski 闭包重合，则可以证明这些临界点中至少有一个是实点：对 $\xi \in X$ 而言，使 $\mathrm{dist}(v, \xi)$ 取得可能的最低值的实点 ξ，就是 X 上对 v 的最佳逼近点。

在对称张量的情形下，向量空间 V（维数为 $n+1$）上的内积 $\langle -,-\rangle$ 自然地诱导出 S^dV 上的内积，通常称为 Frobenius 内积。记 $\mathscr{V}_{d,n}$ 为 Veronese 簇 $v_d(\mathbb{P}V)$ 上的仿射锥。容易证明，对于 $f \in S^dV$，元素 $v^d \in \mathscr{V}_{n,d}$ 的一个标量倍是 $\mathrm{dist}^{\mathscr{V}_{n,d}}(-, f)$ 的临界点，当且仅当 $[v]$ 是 f 的特征向量。特别地，[CS13] 的结果保证 $D_{n,d} = \mathrm{EDdeg}(\mathscr{V}_{n,d})$。

类似地，对于一般张量的情形，空间 V_i （维数为 $V_i = n_i + 1$）上的内积 $\langle -,-\rangle$ 自然地在 $V_1 \otimes \cdots \otimes V_d$ 上诱导出 Frobenius 内积。记 $\mathscr{S}_{n_1,\ldots,n_d}$ 为 $\mathbb{P}(V_1 \otimes \cdots \otimes V_d)$ 中秩一张量的 Segre 簇上的仿射锥，则张量 T 的奇异元组与距离函数 $\mathrm{dist}^{\mathscr{S}_{n_1,\ldots,n_d}}(-, T)$ 的临界向量之间存在自然对应。在这种情形下， [FO14] 中的数 $c(\mathbf{n})$ 与欧几里得距离次数 $\mathrm{EDdeg}(\mathscr{S}_{n_1,\ldots,n_d})$ 相同。

请注意，上述关于张量情形下欧几里得距离次数的刻画，涉及从秩为一$\widehat{\ }$张量的射影簇的仿射锥出发的距离函数。可以如下定义欧几里得距离次数的仿射版本：设 X为射影簇 $X \subseteq \mathbb{P}V$ 上的锥，且 $H \subseteq V$ 为一个一般仿射超平面；令 $X^H = \widehat{X} \cap H$为 H中的一个仿射簇。 X^H的欧几里得距离次数

不依赖于 H的选取，并称为$\smile X$的仿射欧几里得距离次数，记作 $\mathrm{aEDdeg}(X)$。一般而言，$\mathrm{EDdeg}(X)$与 $\mathrm{aEDdeg}(X)$ 并不相同。在张量情形下，这一概念已在 [BPS22] 中概率张量的背景下得到研究；概率张量是指位于仿射超平面 $\sum_{(i_1,\dots,i_d)\in[n_1]\times\cdots\times[n_d]} t_{i_1,\dots,i_d} = 1$中的张量。有人猜想 [BPS22，猜想 20] ：如果 T 是一个坐标非负的概率张量，那么在其 $\mathbf{aEDdeg}(\mathscr{S}_{n_1,\dots,n_d})$ 个临界点中，恰有一个点的坐标为实数。因此，我们提出以下问题

问题13。 确定概率张量的$\mathrm{aEDdeg}(\mathscr{S}_{n_1,\dots,n_d})$临界点中实元素的可能数量。

我们指出，除了一些特殊情形外，确定非有理齐性簇的欧氏距离次数这一问题基本上仍未得到解决。例如，对于 Segre 簇和 Veronese 簇的割线簇，即使在较低维数的情形下，这一问题也完全悬而未决。我们提出一个受限情形下的问题：

问题 14. 确定$\mathrm{EDdeg}(\sigma_2(v_d(\mathbb{P}^1)))$，即 $\mathbb{P}^d$中有理正规曲线的割簇的欧几里得距离次数。

2.5. **其他主题。** 张量的谱范数是优化理论中备受关注的量。与矩阵的情况不同，目前已知的计算方法寥寥无几。特别是，一个重要的关注量是 最佳秩一逼近比 ，即弗罗贝尼乌斯范数与谱范数之间的比值。从几何角度对此进行的研究见 [AKU20] ，但目前仅在极少数情况下已知。

这个主题也可以在受限的情形下进行研究。例如，在 [欧盟23], 研究了限制在秩为2张量簇上的距离函数，并确定了一个（边界）秩为2的张量到秩一张量簇的最大距离。

第 3 部分：代数复杂性理论中的几何方法

求值多项式、矩阵相乘或求解线性方程组和多项式方程组等代数任务，是数学多个领域的核心内容。代数复杂性理论研究执行这些任务的复杂度，运用组合学、代数、概率和几何中的工具。我们将重点关注多项式求值任务，这通常通过代数电路来建模：代数电路是用于编码求值给定多项式算法的有向图。粗略地说，如果一个多项式（更准确地说，是一个多项式族）可以由一个规模较小的电路求值，那么就认为它易于求值；“规模较小”的含义通常取决于所考察的特定复杂性类。通常，人们会限制使用某些特殊电路，以反映所关注的计算模型；在这种情形下，某个多项式族属于给定复杂性类这一事实，可以转化为其属于某个代数簇的问题，并可利用几何和表示论中的工具加以研究。

为简便起见，我们将讨论范围限制在齐次情形。一个 p-族是一个序列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$，其中 $f_n \in S^{d_n}\mathbb{C}^{N_n}$ 是关于 N_n 个变量的 d_n 次齐次多项式，且 d_n、N_n 均关于 n 多项式有界。复杂性类通常定义为这样一组 p-族：对于该类中的每个 p-族，给定的复杂性度量关于为序列编号的参数 n 多项式有界。

3.1. **不同复杂度度量之间的关系。** 回顾 X相对于代数簇 X 的秩的定义，见（1）。复杂性理论中两个值得关注的簇是先前提到的 Veronese 簇 $\mathscr{V}_{N,\,d}$，以及

线性形式乘积的 Chow 簇

$$\mathrm{Ch}_{N,d} = \{\ell_1 \cdots \ell_d \in S^d\mathbb{C}^N : \text{ for some } \ell_j \in S^1 V\}.$$

齐次多项式 $f \in S^d\mathbb{C}^N$ 的 Chow 秩记为 $\mathrm{R}_{Ch}(f)$，即其相对于 Chow 簇的秩。相应地，人们定义了复杂度类

$$\mathbf{VWaring} = \{(f_n) \text{ p-family} : \mathrm{R}_{\mathscr{V}}(f_n) \in O(n^s) \text{ for some } s\};$$
$$\mathbf{VChow} = \{(f_n) \text{ p-family} : \mathrm{R}_{\mathrm{Ch}}(f_n) \in O(n^s) \text{ for some } s\};$$

这些分别是 Waring 秩和 Chow 秩具有多项式有界性的多项式序列类。在计算机科学界，它们有时记作 $\Sigma\Lambda\Sigma$and $\Sigma\Pi\Sigma$，不过这些类并不一定要求多项式是齐次的。

多项式 $f \in S^d\mathbb{C}^N$ 的另一个有趣的复杂度度量是迭代矩阵乘法复杂度，其定义如下：

$$\mathrm{immC}(f) = \min\left\{ r : f = M_1 \cdots M_d, \text{ for some } \begin{array}{l} M_1 \in \mathbb{C}^N \otimes \mathrm{Mat}_{1\times r} \\ M_j \in \mathbb{C}^N \otimes \mathrm{Mat}_{r\times r} \text{ for } j = 2,\ldots,d-1 \\ M_d \in \mathbb{C}^N \otimes \mathrm{Mat}_{r\times 1} \end{array} \right\};$$

换句话说，immC(f) 是使得 f 能够表示为由大小为 r 且其元素为线性形式的矩阵相乘所得的乘积的最小 r。在复杂性理论领域，immC(f)被称为 f 的<样式id='6'>代数分支程序宽度</样式>，而将 f 表示为矩阵乘积的表达式被称为 f 的代数分支程序（ABP）。复杂性类 VBP 是

$$\mathbf{VBP} = \{(f_n) \text{ p-family} : \mathrm{immC}(f_n) \in O(n^s) \text{ for some } s\}.$$

对于齐次多项式 f，显然有 $\mathrm{R}_{\mathscr{V}}(f) \geq \mathrm{R}_{\mathrm{Ch}}(f) \geq \mathrm{immC}(f)$。因此，有如下包含关系：VWaring $\subseteq$ VChow $\subseteq$VBP。已知这些包含关系均为严格包含：p-族 $m_n = x_1 \cdots x_n$ 满足 $\mathrm{R}_{\mathscr{V}}(m_n) = 2^{n-1}$ [RS11a]，，而 $\mathrm{R}_{\mathrm{Ch}}(m_n) = 1$，这表明 $(m_n) \in$ VChow \VWaring；p-族 $\det_n = \det(X_n)$（其中 X_n 是一个变量矩阵）满足 $\mathrm{R}_{\mathrm{Ch}}(\det_n) \geq c_n$，其中 c_n 是关于 n[的超多项式函数 GKKS13, LST22]，且 immC($\det_n$) $\leq O(n^3)$ [Val79, Tod92]，，这表明 ($\det_n$) $\in$ VBP \VChow。

类似地，可以通过将复杂度度量 $\mathrm{R}_{\mathscr{V}}$、R_{Ch}、immC 替换为其半连续对应形式 $\underline{\mathrm{R}}_{\mathscr{V}}$、$\underline{\mathrm{R}}_{\mathrm{Ch}}$、$\underline{\mathrm{immC}}$，来定义边界 类。我们已经见过边界秩的定义。边界 迭代矩阵乘法复杂度定义为

$$\underline{\mathrm{immC}}(f) = \min\{r : f = \lim_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon \text{ for some sequence } f_\varepsilon \text{ such that } \mathrm{immC}(f_\varepsilon) \leq r\}.$$

相应的复杂度类记作 VWaring、VChow、VBP。同样，立即可得 VWaring $\subseteq$ VChow $\subseteq$ VBP。与上文相同的例子表明这些包含关系都是严格的。关于一个复杂度类与其边界版本之间的差异，目前所知甚少。

问题 15。 设 $\mathcal{C}$ 是**VW**aring、**VC**how 或**VBP**中的一个复杂性类。判定 $\mathcal{C} = \overline{\mathcal{C}}$ 是否成立。

事实上，即使更弱的 去边界化 结果也极具意义。例如，近期[DDS22] 表明了包含关系 **VC**如何 $\subseteq$ **VBP**； [DGI+22] 为 $\mathrm{R}_{\mathscr{V}}(f)$ 给出了形式为 $\deg(f) \cdot \exp(\mathrm{R}_{\mathscr{V}}(f))$的上界。我们提出了该领域的一个重大开放问题：

问题16。 确定是否存在**VW**aring $\subseteq \overline{\mathbf{VC}\text{how}}$。更为温和地说，确定$\mathrm{R}_{\mathscr{V}}(f)$关于$\mathrm{R}_{\mathrm{Ch}}(f)$的非平凡上界。

3.2. **小宽度代数分支程序的簇**。与割线簇的情形类似，集合

$$\mathrm{IMM}_{r,V} = \{f \in \mathbb{P}S^dV : \underline{\mathrm{immC}}(f) \leq r\}$$

在 Zariski 拓扑下是闭集，因此可以将其视为 $\mathbb{P}S^dV$ 的一个子簇。这是所有允许宽度至多为 r 的代数分支程序（ABP）的齐次多项式所构成的簇。当 $r = 1$ 时，它与 Chow 簇 $\mathrm{Ch}_{d,n}$ 重合。[GGIL22] 基于超曲面 $\{f = 0\} \subseteq \mathbb{P}V$ 的交理论性质，给出了 $\mathrm{IMM}_{r,V}$ 的一些方程，并将其与多项式空间上的其他复杂性度量（如切片秩和强度）联系起来 [BDE19]。 [AW16] 基于 f 的限制所满足的某些退化条件，给出了 $\mathrm{IMM}_{2,V}$ 的一种刻画。利用 [Ges16] 的结果，可以确定 $\dim \mathrm{IMM}_{r,V}$ 的值。我们建议将这些结果推广到更广泛的 r 和 $\dim V$ 取值范围。

问题 17。确定$\mathrm{IMM}_{r\text{的方程，}V} \subseteq \mathbb{P}S^dV$对于较小的 r 和维数 V。

几何复杂性理论（GCT） [MS01, MS08] 是一种拟议的方法，旨在通过表示论障碍研究（边界）复杂性类之间的关系。关于该方法的详细介绍，请参阅 [BI18] ，此处我们仅作简要概述。通常，控制复杂性度量的簇 X_r ，例如 $\sigma_r(v_d(\mathbb{P}V))$、 $\sigma_r(\mathrm{Ch}_{d,V})$和 $\mathrm{IMM}_{r,V}$，都是 $\mathrm{GL}(V)$-簇，即在一般线性群 $\mathrm{GL}(V)$的自然作用下封闭的簇。这使得它们的理想 $\mathcal{I}(X_r) \subseteq \mathrm{Sym}(S^dV^*)$以及坐标环 $\mathbb{C}[X_r] = \mathrm{Sym}(S^dV^*)/\mathcal{I}(X_r)$成为群 $\mathrm{GL}(V)$的表示。一般而言，如果两个射影簇 X, Y满足 $X \subseteq Y$，那么就存在一个满射 $\mathbb{C}[Y] \to \mathbb{C}[X]$；此外，该满射是分次的，并且如果 X, Y是 $\mathrm{GL}(V)$-簇，那么它还是 $\mathrm{GL}(V)$-等变的。因此，给定两个分别控制两个 $\mathrm{GL}(V)$-不变（边界）复杂性度量的簇 X_r 和 Y_s ，可以通过证明对于某个次数 δ，不存在满射 $\mathbb{C}[Y_s]_\delta \to \mathbb{C}[X_r]_\delta$ ，从而证明 $X_r \not\subseteq Y_s$ 。由于 $\mathrm{GL}(V)$-等变性，保证这种满射不存在的一个充分条件是：存在一个不可约 $\mathrm{GL}(V)$-表示，它在$\mathbb{C}[X_r]$ 中的出现重数高于在 $\mathbb{C}[Y_s]$中的出现重数。具有上述性质的不可约表示称为重数障碍，其存在即可保证 $X_r \not\subseteq Y_s$。几何复杂性理论计划提出了这种方法及其若干变体，旨在证明 $\mathrm{VNP} \not\subseteq \mathrm{VP}$，但同一框架也可以调整用于分离其他边界复杂性类。

然而，[IP17、BIP19、GIP17] 的结果对复杂度模型以及可能成功应用此方法的簇施加了严格限制。尚未探索此方法的一种情形是 $\mathrm{IMM}_{r,\ V}$。

问题 18。 实现针对小型代数分支程序簇的 *GCT* 方法 $\mathrm{IMM}_{r,\ V}$。

3.3. **其他主题**。 在本节中，我们没有涉及任何有关矩阵乘法复杂度的问题，而这正是代数复杂性理论中的核心研究课题。对矩阵乘法张量的张量秩下界的研究，一直是研究割线簇方程的重要动力 [LO13、 LO15、 LM18]。利用几何方法获得上界的思路早在 [BCLR79], 中就已出现，该工作首次推动了对边界秩的系统性研究；最新的上界结果 [CW90、 AW21] 则基于所谓的 Strassen 激光法 [Str87], ，这是一种结合几何方法、概率方法和组合技术的方法。至少对于该方法的原始形式，已有若干障碍得到证明[AW18、 AFG15、 CVZ21、 BL20]； [HJMS22] 提出了一种改进方法，旨在绕过这些障碍。

第 4 部分：量子物理中的几何方法

最后一节探讨张量几何中的问题，这些问题源于对量子物理和量子信息论中纠缠现象的研究。不过，本节所述问题也与其他领域密切相关，例如不变理论和加法组合学；在适当之处，我们将简要提及这些联系。

<escape>简而言之，量子物理将所关注的量子系统的状态建模为一个配备了厄米内积的复向量空间中的元素。复合系统的状态由张量空间中的一个元素描述，其中每个因子都是与复合系统的一个组成部分相对应的空间。系统的演化由酉矩阵的作用描述。有关量子形式体系的详细介绍以及量子信息论的入门知识，请参阅 [NC00] 。</escape>

从几何角度来看，我们关注量子 SLOCC 操作，它们最终对应于由 $\mathrm{End}(V_1)\times\cdots\times\mathrm{End}(V_d)$ 。因此，纠缠理论的大部分内容都可以从几何角度加以研究，即研究张量空间 $V_1\otimes\cdots\otimes V_d$ 上诱导的变换。

张量 $T, S \in V_1\otimes\cdots\otimes V_d$，我们称 T限制（分别退化）到 S，如果 $S \in \mathrm{End}(V_1)\times\cdots\times\mathrm{End}(V_d)\cdot T$（分别是 $S \in \mathrm{End}(V_1)\times\cdots\times\mathrm{End}(V_d)\cdot T$）。一个经典事实是，$T$ 的退化所构成的簇 $\mathrm{End}(V_1)\times\cdots\times\mathrm{End}(V_d)\cdot T$，与 $\mathrm{GL}(V_1)\times\cdots\times\mathrm{GL}(V_d)$ 作用下 T 的轨道闭包相同。即使张量 T 和张量 S 不属于同一个张量空间，我们仍称 T 限制或退化到 S：这意味着将各自的空间重新嵌入一个公共空间，使得 T 的像限制或退化到 S 的像。例如，考虑 d 个因子上的秩为 r 的单位张量，其定义为 $\mathrm{u}_d(r) = \sum_{i=1}^r e_i\otimes\cdots\otimes e_i \in \mathbb{C}^r\otimes\cdots\otimes\mathbb{C}^r$；张量 $T \in V_1\otimes\cdots\otimes V_d$ 的张量秩 $\mathrm{R}(T)$（分别是张量边界秩 $\mathrm{R}(T)$）定义为使得 $\mathrm{u}_d(r)$ 限制（分别退化）到 T 的最小 r 。

4.1. 张量网络与矩阵乘积态。 张量网络定义了一类张量，它们由特定的张量缩并构成，并由加权图的组合结构编码。它们被用于量子多体物理，因为它们能够模拟理想的纠缠性质，并应用于全息、量子化学和机器学习。具体而言，设 $\Gamma = (\mathrm{v}(\Gamma), \mathrm{e}(\Gamma))$ 是一个图，其顶点集为 $\mathrm{v}(\Gamma) = \{1,\dots,d\}$，边集为 $\mathrm{e}(\Gamma)$；设 $\mathbf{m} = (m_e : e \in \mathrm{e}(\Gamma))$ 是对 Γ 的边赋予整数权重的映射，这些权重称为键维数。定义张量空间 $W_1\otimes\cdots\otimes W_d$ 中的一个特定图张量 $T(\Gamma, \mathbf{m})$；因子 W_j 的维数由与 j 相邻的边的权重决定；更精确地说，$W_j = \bigotimes_{e\ni j}\mathbb{C}^{m_e}$。此外，给定 Γ 的顶点上的一组整数权重 $\mathbf{n} = (n_j : j = 1,\dots,n)$，称为局部维数，定义一个集合。

$$\mathcal{TNS}^{\Gamma}_{\mathbf{m},\mathbf{n}}{}^{\circ} = \{T \in \mathbb{C}^{n_1}\otimes\cdots\otimes\mathbb{C}^{n_d} : T \text{ is a restriction of } T(\Gamma,\mathbf{m})\}$$

张量网络簇为$\mathcal{TNS}^{\Gamma}_{\mathbf{m},\ \mathbf{n}} = \mathcal{TNS}^{\Gamma}_{\mathbf{m},\ \mathbf{n}}{}^{\circ}$ 其中，闭包可在扎里斯基拓扑或欧几里得拓扑下等价地取。有关这一构造的详细信息，请参阅[BLG21]；关于将其推广到超图情形，请参阅 [CVZ19、CGMZ21] 。

在 [BLG21], 中，给出了簇 $\mathcal{TNS}^{\Gamma}_{\mathbf{m},\mathbf{n}}$ 的维数上界，并证明在相当广泛的键维数和局部维数范围内，该上界是紧的。此外，还针对一些特定情形给出了簇 $\mathcal{TNS}^{\Gamma}_{\mathbf{m},\mathbf{n}}$ 的定义方程。我们提出以下问题：

问题19。确定张量网络簇 $\mathcal{TNS}^{\Gamma}_{\mathbf{m},\mathbf{n}}$ 的方程。如有必要，可将研究范围限定于特定类别的图 Γ，或特定的键维数和局部维数分配。

有趣的是，当 Γ 是一个环图 C_d，其键维数为 $m_1,\dots,m_d$ 时，图张量与迭代矩阵乘法张量重合，后者编码了多线性映射

$$\begin{aligned}\mathbf{MaMu_m} : \mathrm{Mat}_{m_1\times m_2}(\mathbb{C}) \times \cdots \times \mathrm{Mat}_{m_{d-1}\times m_d}(\mathbb{C}) &\to \mathrm{Mat}_{m_1\times m_d}(\mathbb{C})\\ (A_1,\dots,A_{d-1}) &\mapsto A_1\cdots A_{d-1}.\end{aligned}$$

在这种情况下，张量网络簇称为键维数为的矩阵乘积态$\mathbf{m}$ [PGVWC07], 簇，并且是一个活跃研究领域的主题。它是第 3.2 节中定义的小宽度代数分支程序簇的非交换类比；与代数分支程序的情形类似，可以很容易地确定矩阵乘积态簇的线性代数描述

$$\mathcal{TNS}^{C_d}_{\mathbf{m},\mathbf{n}} = \overline{\left\{ \sum_{(i_1,\dots,i_d)\in[n_1]\times\cdots\times[n_d]} \mathrm{trace}(M^{(1)}_{i_1}\cdots M^{(d)}_{i_d})\cdot e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_d} : M^{(k)}_{i_k}\in \mathrm{Mat}_{m_k\times m_{k+1}}(\mathbb{C}) \right\}}.$$

在这种情况下，更一般地说，当张量网络的底层图具有特定对称性时，人们会关注矩阵乘积态的一个受限版本：如果 $m_1=\cdots=m_d$ 和 $n_1=\cdots=n_d$，则考虑由不依赖于指标 k 的矩阵集合所构成的 $\mathcal{TNS}^{C_d}{}_{\mathbf{m},\mathbf{n}}$ 子簇。更准确地说

$$\mathcal{UTNS}^{C_d}_{m,n} = \overline{\left\{ \sum_{(i_1,\dots,i_d)\in[n]\times\cdots\times[n]} \mathrm{trace}(M_{i_1}\cdots M_{i_d})\cdot e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_d} : M_{i_k}\in \mathrm{Mat}_{m\times m}(\mathbb{C}) \right\}}$$

这是均匀或平移不变周期性边界条件下的矩阵乘积态簇，其在量子物理中的重要性见 [PGVWC07，VWPGC06]。在 [GLW18], 中，利用某些秩条件得到了该簇的一些方程。[CMS23], 和 [DMS22] 给出了受限情形下线性方程空间的完整刻画。这些结果的核心是迹代数，它使人们能够在$\mathcal{UTNS}^{C_d}_{m}$、n 的几何与不变理论中的经典结果之间建立深刻联系。该领域仍有许多未解决的问题；我们提出以下一般问题，并请参阅[Sey22] 了解更多详情。

问题20. 研究均匀矩阵乘积态簇的几何。特别是，利用迹代数的性质，系统地确定各类方程。

4.2. **张量子秩**。张量的子秩是一种度量，用来衡量通过对各个方向上的切片作线性组合，能够将张量对角化到何种程度；这一概念由 [Str87] 在研究矩阵乘法复杂度时引入，从某种意义上说，它与前文定义的经典概念——张量秩——互为对偶。具体而言，给定 $T\in V_1\otimes\cdots\otimes V_d$，$T$ 的子秩为

$$\mathrm{Q}(T) = \max\{q : T \text{ restricts to } \mathbf{u}_d(q)\};$$

不出所料，子秩并非半连续的，这促使我们定义 T 的边界子秩，即

$$\underline{\mathrm{Q}}(T) = \max\{q : T \text{ degenerates to } \mathbf{u}_d(q)\}.$$

显然，$\underline{\mathrm{Q}}(T) \leq \mathrm{Q}(T)$，并且根据定义，边界子秩沿着退化是半连续的，即如果 S 是 T 的一个退化，则$\underline{\mathrm{Q}}(S) \leq \underline{\mathrm{Q}}(T)$。然而，它沿任意曲线不一定是半连续的：例如，如果 Z 是 $\mathbb{C}^q \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}^q$中的一个一般秩一张量，那么 $T_\varepsilon = \mathrm{u}_d(q) + \varepsilon Z$ 对于一般的 ε满足$\underline{\mathrm{Q}}(T_\varepsilon) \leq q-1$，但 $T_0 = \mathrm{u}_d(q)$，因此$\underline{\mathrm{Q}}(T_0) = q$。

$\underline{\mathrm{Q}}$子秩是量子信息论中纠缠的一种度量。它决定了可以从量子态中提纯出的“GHZ 型”纠缠的量。[VC17] 详见此处。

通常，子秩和边界子秩的下界是通过显式约化获得的。另一方面，我们只有少数几种求上界的方法，而且它们通常依赖于确定某种其他的秩概念，该概念为子秩和边界子秩提供上界；几何秩 [KMZ20], 切片秩 [ST16], 张量压缩性值 [LM18]、G-稳定秩 [Der22] 以及其他许多概念都属于这种情况。尽管这些界有助于在许多值得关注的情形下精确确定边界子秩（以及子秩），但有证据表明，我们不能指望它们通常都是紧的。因此，我们提出以下问题。

问题21. 确定一种真正的方法，用于求张量的子秩和边界子秩的上界，且不依赖于其他秩的概念。

在 [DMZ22], 中，$\mathrm{Q}(T)$ 的值，即一般张量的子秩，$T \in \mathbb{C}^n \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}^n$ 已在较小的误差范围内得到确定。对于三因子上的张量，已证明$\lfloor \sqrt{3n-2} \rfloor - 5 \leq \mathrm{Q}(T) \leq \lfloor \sqrt{3n-2} \rfloor$。一般张量的边界子秩的值尚不清楚；如果 $T \in \mathbb{C}^n \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}^n$ 是一般的，则已知 $\underline{\mathrm{Q}}(T) \leq n-1$，例如参见 [Cha22]。

问题 22. 确定一般张量的边界子秩，并给出张量的边界子秩高于一般值的条件。

4.3. 稳定子秩。 稳定子秩的概念出现在纠缠理论中。它用于衡量使用某些特定量子操作制备给定量子态的复杂度。设 X、Y、Z 为三个泡利矩阵，定义如下。

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

泡利群是由 $\{X, Y, Z\}$ 生成的 $P_1 \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ 的子群；它是一个包含 16 个元素的群。第 d 个泡利群是 $P_1 \times \cdots \times P_1 \subseteq \mathrm{GL}_2 \times \cdots \times \mathrm{GL}_2$ 通过 $\mathrm{GL}_2^{\times d}$ 在 $\mathbb{C}^{2 \otimes d}$ 上的自然作用所得到的 $P_d \subseteq \mathrm{GL}(\mathbb{C}^2 \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}^2)$ 像。

Clifford 群是酉矩阵群 $U(\mathbb{C}^{2 \otimes d})$ 中 P_d 的正规化子。它是无限群，但其中心商群是有限的；将这个商群记为 C_d。C_d 在 $\mathbb{P}(\mathbb{C}^2 \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}^2)$ 上有一个自然作用。为描述 C_d 的一组生成元，我们引入 GL_2 中的两个元素

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix},$$

以及 GL($\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$) 中的一个元素

$$\begin{aligned} CNOT : \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 &\to \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \\ e_0 \otimes e_0 &\mapsto e_0 \otimes e_0 \\ e_0 \otimes e_1 &\mapsto e_0 \otimes e_1 \\ e_1 \otimes e_0 &\mapsto e_1 \otimes e_1 \\ e_1 \otimes e_1 &\mapsto e_1 \otimes e_0. \end{aligned}$$

那么， C_d由元素 H、 S以及作用于 $\mathbb{C}^2 \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}^2$任意一个因子或任意一对因子上的 CNOT（取模 $U(\mathbb{C}^{2\otimes d})$中心后的等价类）生成。

集合 稳定子态是

$$\mathcal{S}tab_d = \{U \cdot (e_0^{\otimes d}) \in \mathbb{C}^2 \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}^2 : U \in C_d\};$$

集合 $\mathcal{S}tab_d \subseteq \mathbb{C}^{2\otimes d}$ 是有限的，且它有 $2^d \prod_{k=1}^{d}(2^k+1)$ 个元素 [Gro06]，其线性张成空间是整个空间 $\mathbb{C}^2 \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}^2$。

状态 $T \in \mathbb{C}^2 \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}^2$ 的稳定子秩定义为

$$\mathrm{stabR}(T) = \min\{r : T = \alpha_1 T_1 + \cdots + \alpha_r T_r \text{ for some } T_i \in \mathcal{S}tab_d, \text{ and } \alpha_i \in \mathbb{C}\};$$

换句话说，$\mathrm{stabR}(T) = \mathrm{R}_{\mathcal{S}tab_d}(T)$。

构造具有较大稳定子秩的显式态通常是一个难题。如果$v = e_0 + \sqrt{2}e_1$， [PSV22] 中证明了 $\mathrm{stabR}(v^{\otimes d}) \geq cd$ 对某个常数 c成立；稍弱的下界$\mathrm{stabR}(v^{\otimes d}) \geq {}_4{}^{d+1}{}_{\log(d+1)}$ 则在 [LS22]中得到证明。

问题 23。 证明稳定子秩的一个超线性下界。

由于 $\mathcal{S}\mathrm{tab}_d$ 是有限的，因此稳定子秩不超过 r 的元素集合是一个由 r 维线性空间构成的簇。在 [LS22]，中，从几何和组合的角度研究了这些集合。特别地，泛型稳定子秩 stabR_d 定义为满足 $S^d\mathbb{C}^2$ 包含于 r 个 $\mathcal{S}\mathrm{tab}_d$ 元素张成的空间中的最小 r 。已知 [QPG21, LS22]，$\mathrm{stabR}_d \leq O(2^{d/2})$，且显然 $\mathrm{stabR}_d \geq d+1$；此外，除非 P $=$ NP，否则已知 stabR_d 关于 d 的函数增长是超多项式的。

问题 24。确定 stabR_d 的非平凡下界。

4.4. **其他主题**。 对感兴趣的量子态进行张量网络表示是可取的，因为这样可以执行局部张量运算，每次只考虑少数几个因子。多年来，人们提出了多种高效实现这一目标的方法。近期提出的一种方法基于 Metropolis 蒙特卡罗缩并，见 [SWVC08，AÅPK21]，该方法是在矩阵乘积态的框架下提出的。可以进一步探索将此方法推广到其他张量网络的可能性，例如参见 [CRS20]。

另一个值得关注的主题，在这些笔记中仅略有涉及，那就是*Strassen* 谱理论，它与复杂性理论、加法组合学和量子信息有着联系。该领域存在若干尚未解决的问题，完整的参考文献请参见 [WZ22] 。

参考文献

[AÅPK21] Y. Aragonès-Soria、J. Åberg、C.-Y. Park 和 M. J. Kastoryano。一般矩阵乘积态的经典限制是准局部吉布斯态。*J. Math. Phys.*，62(9):093511，2021。doi:10.1063/5.0040256。

[AFG15] A. Ambainis、Y. Filmus 和 F. Le Gall。快速矩阵乘法：Coppersmith-Winograd 方法的局限性。载于第 47 届 ACM 理论计算研讨会论文集，第 585–593 页。ACM，2015。doi:10.1145/2746539.2746554。[AH95] J. Alexander 和 A. Hirschowitz。多个变量的多项式插值。J. Alg. Geom.，4(2):201–222，1995。[AKU20] A. Agrachev、K. Kozhasov 和 A. Uschmajew。切比雪夫多项式与最佳秩一近似比。SIAM J. Mat. Anal. Appl. (SIMAX)，41(1):308–331，2020。doi:10.1137/19M1269713。[ASS17] H. Abo、A. Seigal 和 B. Sturmfels。张量的特征构形。载于《离散数学中的代数与几何方法——当代数学 685》，第 1–25 页。美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，2017。doi:10.1090/conm/685/13717。[AW16] E. Allender 和 F. Wang。论宽度为二的代数分支程序的能力。computational complexity，25:217–253，2016。doi:10.1007/s00037-015-0114-7。[AW18] J. Alman 和 V. V. Williams。对所有已知（以及一些未知）矩阵乘法方法的限制。第 580–591 页，2018。doi:10.1145/3326229.3326282。[AW21] J. Alman 和 V. V. Williams。改进的激光方法与更快的矩阵乘法。载于 2021 年 ACM-SIAM 离散算法研讨会论文集 (SODA)，第 522–539 页。SIAM，2021。doi:10.1137/1.9781611976465.3。[BB14] W. Buczyńska 和 J. Buczyński。高次数 Veronese 重嵌入的割线簇、催化矩阵与可平滑化 Gorenstein 概形。J. Alg. Geom.，23(1):63–90，2014。doi:10.1090/S1056-3911-2013-00595-0。[BB21] W. Buczyńska 和 J. Buczyński。极性、边界秩与多重分次 Hilbert 概形。Duke Math. J.，170(16):3659–3702，2021。doi:10.1215/00127094-2021-0048。[BBM14] A. Bernardi、J. Brachat 和 B. Mourrain。对称张量不同秩概念的比较。Lin. Alg. Appl.，460:205–230，2014。doi:10.1016/j.laa.2014.07.036。[BBS20] E. Ballico、A. Bernardi 和 P. Santarsiero。Segre 簇上三点的 Terracini 轨迹。arXiv:2012.00574，2020。[BC21] E. Ballico 和 L. Chiantini。关于射影簇的 Terracini 轨迹。Milan J. Math.，89(1):1–17，2021。doi:10.1007/s00032-020-00324-5。[BCC+18] A. Bernardi、E. Carlini、M. Catalisano、A. Gimigliano 和 A. Oneto。《割线簇与张量分解指南》。Mathematics，6(12):314，2018。doi:10.3390/math6120314。[BCLR79] D. Bini、M. Capovani、G. Lotti 和 F. Romani。 $O(n^{2.7799})$ 复杂度与 $n \times n$ 近似矩阵乘法。Inform. Process. Lett.，8(5):234–235，1979。[BCS97] P. Bürgisser、M. Clausen 和 M. A. Shokrollahi。《代数复杂性理论》，数学科学基础丛书第 315 卷。Springer-Verlag，柏林，1997。[BDE19] A. Bik、J. Draisma 和 R. H. Eggermont。有界强度的多项式与张量。Comm. Cont. Math.，21(07):1850062，2019。doi:10.1142/S0219199718500621。[BDP15] M. C. Brambilla、O. Dumitrescu 和 E. Postinghel。关于线性系的一种特殊性概念，见 $\mathbb{P}^n$。Trans. Amer. Math. Soc.，367(8):5447–5473，2015。doi:10.1090/S0002-9947-2014-06212-0。[BDP16] M. C. Brambilla、O. Dumitrescu 和 E. Postinghel。关于在 $n+3$ 个点处吹起的簇的有效锥。Experimental Mathematics，25(4):452–465，2016。doi:10.1080/10586458.2015.1099060。[BGV21] V. Beorchia、F. Galuppi 和 L. Venturello。三元张量的特征概形。SIAM J. Appl. Alg. Geom.，5(4):620–650，2021。doi:10.1137/20M1355410。[BGV22] V. Beorchia、F. Galuppi 和 L. Venturello。张量特征概形的方程。arXiv:2205 04413，2022。。[BI18] M. Bläser 和 C. Ikenmeyer。几何复杂性理论导论。2018。讲义见 https://www.dcs.warwick.ac.uk/~u2270030/teaching_sb/summer17/introtogct/gct.pdf。[BIP19] P. Bürgisser、C. Ikenmeyer 和 G. Panova。几何复杂性理论中不存在出现障碍。J. Amer. Math. Soc.，32(1):163–193，2019。doi:10.1090/jams/908。[BJMR18] A. Bernardi、J. Jelisiejew、P. M. Marques 和 K. Ranestad。具有给定 Hilbert 函数的多项式及其应用。Collectanea mathematica，69(1):39–64，2018。doi:10.1007/s13348-016-0190-2。

[BL20] M. Bläser 和 V. Lysikov。《分块张量的切片秩与代数结构张量的不可逆性》。载于第 45 届国际数学基础与计算机科学研讨会（MFCS 2020）。Schloss Dagstuhl-Leibniz 信息学中心，2020。doi:10.4230/LIPIcs.MFCS.2020.17。[BLG21] A. Bernardi、C. De Lazzari 和 F. Gesmundo。《张量网络簇的维数》。Comm. Cont. Math.，在线版：2250059，2021。doi:10.1142/S0219199722500596。[BM23] V. Beorchia 和 R. M. Miró-Roig。《特征点的配置》。J. Pure and Appl. Alg.，227(5)：107269，2023。doi:10.1016/j.jpaa.2022.107269。[BO11] M. C. Brambilla 和 G. Ottaviani。《关于部分多项式插值》。Lin. Alg. Appl.，435(6)：1415–1445，2011。doi:10.1016/j.laa.2011.03.024。[BOT22] A. Bernardi、A. Oneto 和 D. Taufer。《自然 apolar 概形的正则性》，2022。于 AGATES Workshop on Tensors in statistics, optimization and machine learning 上报告，https://agates.mimuw.edu.pl/images/OptimiStat-slides/Slides_Taufer.pdf。[BPS22] T. Boege、S. Petrović 和 B. Sturmfels。《边缘独立模型》。载于 ISSAC '22：2022 年国际符号与代数计算研讨会论文集，第 263–271 页，2022。doi:10.1145/3476446.3536193。[BR13] A. Bernardi 和 K. Ranestad。《关于三次形式的仙人掌秩》。J. Symb. Comput.，50：291–297，2013。doi:10.1016/j.jsc.2012.08.001。[BT20] A. Bernardi 和 D. Taufer。《Waring 分解、切向分解与仙人掌分解》。J. Math. Pures Appl.，143：1–30，2020。doi:10.1016/j.matpur.2020.07.003。[BV23] E. Ballico 和 E. Ventura。《关于非常充足的 Terracini 轨迹的注记》。arXiv:2303.12509，2023。[CC05] L. Chiantini 和 C. Ciliberto。《关于亏格三维簇的分类》。载于《具有意外性质的射影簇》，第 131–176 页，2005。doi:10.1515/9783110199703。[CCR20] L. Chiantini、C. Ciliberto 和 F. Russo。《关于割线亏损簇，特别是维数为 4 的情形》。arXiv:2011.01105，2020。[CG94] M. V. Catalisano 和 A. Gimigliano。《关于 $\mathbb{P}^2$ 的曲线型子概形》。J. Pure and Appl. Alg.，93(1)：1–14，1994。doi:10.1016/0022-4049(94)90077-9。[CG23] L. Chiantini 和 F. Gesmundo。《低秩三次形式的分解与 Terracini 轨迹》。arXiv:2302.03715，2023。[CGJ19] M. Christandl、F. Gesmundo 和 A. K. Jensen。《边界秩在张量积下不具乘法性》。SIAM J. Appl. Alg. Geom.，3：231–255，2019。doi:10.1137/18M1174829。[CGMZ21] M. Christandl、F. Gesmundo、M. Michałek 和 J. Zuiddam。《高阶张量的边界秩非可加性》。SIAM J. Mat. Anal. Appl.，42(2)：503–527，2021。doi:10.1137/20M1357366。[CGO14] E. Carlini、N. Grieve 和 L. Oeding。《关于割线簇的四场讲座》。载于《代数、组合学与几何之间的联系》，第 101–146 页。Springer，2014。doi:10.1007/978-1-4939-0626-0_2。[Cha22] C.-Y. Chang。《最大边界子秩张量》。arXiv:2208.04281，2022。[CHL19] A. Conner、A. Harper 和 J. M. Landsberg。《矩阵乘法与 3×3 行列式的新下界》。arXiv:1911.07981，2019。[CMS23] A. Czapliński、M. Michałek 和 T. Seynnaeve。《从代数几何学家的角度看均匀矩阵乘积态》。Adv. in Appl. Math.，142：102417，2023。doi:10.1016/j.aam.2022.102417。[CR06] C. Ciliberto 和 F. Russo。《具有最小割线次数的簇及曲面上最大维数的线性系》。Adv. Math.，200(1)：1–50，2006。doi:10.1016/j.aim.2004.10.008。[CRS20] A. Capel、C. Rouzé 和 D. Stilck França。《量子自旋系统的修正对数 Sobolev 不等式：经典与对易的最近邻相互作用》。arXiv:2009.11817，2020。[CS13] D. Cartwright 和 B. Sturmfels。《张量特征值的数量》。Lin. Alg. Appl.，438(2)：942–952，2013。doi:10.1016/j.laa.2011.05.040。[CVZ19] M. Christandl、P. Vrana 和 J. Zuiddam。《图张量的渐近张量秩：超越矩阵乘法》。Computational Complexity，28(1)：57–111，2019。doi:10.1007/s00037-018-0172-8。[CVZ21] M. Christandl、P. Vrana 和 J. Zuiddam。《不可逆性带来的快速矩阵乘法障碍》。Theory of Computing，17(2)：1–32，2021。doi:10.4086/toc.2021.v017a002。[CW90] D. Coppersmith 和 S. Winograd。《通过算术级数进行矩阵乘法》。J. Symb. Comput.，9(3)：251–280，1990。doi:10.1016/S0747-7171(08)80013-2。

[DDS22] P. Dutta、P. Dwivedi 和 N. Saxena。《揭开深度为 3 的代数电路边界的奥秘》。载于《2021 年 IEEE 第 62 届年度计算机科学基础研讨会（FOCS）》，第 92–103 页。IEEE，2022。doi:10.1109/FOCS52979.2021.00018。[Der22] H. Derksen。《张量的 G-稳定秩与帽集问题》。《代数与数论》，16(5):1071–1097，2022。doi:10.2140/ant.2022.16.1071。[DGI+22] P. Dutta、F. Gesmundo、C. Ikenmeyer、G. Jindal 和 V. Lysikov。《通过初等对称多项式研究边界复杂度》。arXiv:2211.07055，2022。[DHO+16] J. Draisma、E. Horobeţ、G. Ottaviani、B. Sturmfels 和 R. R. Thomas。《代数簇的欧几里得距离次数》。《计算数学基础》，16:99–149，2016。doi:10.1007/s10208-014-9240-x。[DMS22] C. De Lazzari、H. J. Motwani 和 T. Seynnaeve。《一致矩阵乘积态的线性张成》。《对称性、可积性与几何：方法与应用》（SIGMA），18:099，2022。doi:10.3842/SIGMA.2022.099。[DMZ22] H. Derksen、V. Makam 和 J. Zuiddam。《标量乘法到一般张量的子秩与最优约化》。arXiv:2205.15168，2022。[EH16] D. Eisenbud 和 J. Harris。《3264 及其相关：代数几何第二课程》。剑桥大学出版社，剑桥，2016。[Eis05] D. Eisenbud。《Syzygy 的几何》，《数学研究生教材》第 229 卷。Springer-Verlag，纽约，2005。[EU23] H. Eisenmann 和 A. Uschmajew。《实秩二张量与秩一张量之间的最大相对距离》。《纯粹与应用数学年刊》，202(2):993–1009，2023。doi:10.1007/s10231-022-01268-w。[Fis06] T. A. Fisher。《由 Pfaffian 定义的亏格一曲线》。2006。可见 https://www.dpmms.cam.ac.uk/~taf1000/papers/genus1pf.pdf。[FO14] S. Friedland 和 G. Ottaviani。《奇异向量组的数量与张量最佳秩一近似的唯一性》。《计算数学基础》，14(6):1209–1242，2014。doi:10.1007/s10208-014-9194-z。[FS94] J. E. Fornaess 和 N. Sibony。《高维复动力系统 I》，第 201–231 页。第 222 号，1994。[Ges16] F. Gesmundo。《迭代矩阵乘法的几何方面》。《代数学杂志》，461:42–64，2016。doi:10.1016/j.jalgebra.2016.04.028。[GGIL22] F. Gesmundo、P. Ghosal、C. Ikenmeyer 和 V. Lysikov。《次数受限的强度分解与代数分支程序》。载于《第 42 届 IARCS 年度软件技术与理论基础会议（FSTTCS 2022）》，《莱布尼茨国际信息学论文集》（LIPIcs）第 250 卷，第 20:1–20:15 页，德国达格施图尔，2022。Schloss Dagstuhl – 莱布尼茨信息学中心。doi:10.4230/LIPIcs.FSTTCS.2022.20。[GIP17] F. Gesmundo、C. Ikenmeyer 和 G. Panova。《几何复杂性理论与矩阵幂运算》。《微分几何及其应用》，55:106–127，2017。doi:10.1016/j.difgeo.2017.07.001。[GKKS13] A. Gupta、P. Kamath、N. Kayal 和 R. Saptharishi。《算术电路：深度三处的鸿沟》。《计算复杂性电子讨论会》（ECCC），20:26，2013。doi:10.1109/FOCS.2013.68。[GLW18] F. Gesmundo、J. M. Landsberg 和 M. Walter。《矩阵乘积态与量子最大流/最小割猜想》。《数学物理杂志》，55(10):102205，2018。[GO22] F. Galuppi 和 A. Oneto。《通过胖点碰撞证明割簇非缺陷性》。《数学进展》，409:108657，2022。doi:10.1016/j.aim.2022.108657。[Gro06] D. Gross。《有限维量子系统的 Hudson 定理》。《数学物理杂志》，47(12):122107，2006。doi:10.1063/1.2393152。[Har92] J. Harris。《代数几何：入门课程》，《数学研究生教材》第 133 卷。Springer-Verlag，纽约，1992。[HJMS22] R. Homs、J. Jelisiejew、M. Michałek 和 T. Seynnaeve。《远离 Coppersmith–Winograd 张量的矩阵乘法复杂度界》。《纯粹与应用代数学杂志》，第 107142 页，2022。doi:10.1016/j.jpaa.2022.107142。[HS04] M. Haiman 和 B. Sturmfels。《多分次 Hilbert 概形》。《代数几何杂志》，13:725–769，2004。[IP17] C. Ikenmeyer 和 G. Panova。《几何复杂性理论中的矩形 Kronecker 系数与复合运算》。《数学进展》，319:40–66，2017。doi:10.1016/j.aim.2017.08.024。[JM22] J. Jelisiejew 和 T. Mańdziuk。《饱和理想的极限》。arXiv:2210.13579，2022。

[KMZ20] S. Kopparty、G. Moshkovitz 和 J. Zuiddam。《张量的几何秩与矩阵乘法的子秩》。载于第 35 届计算复杂性会议（CCC 2020），LIPIcs 第 169 卷。Leibniz 国际信息学会议论文集，第 35:1–35:21 页，德国达格施图尔，2020 年。Schloss Dagstuhl–Leibniz 信息学中心。doi:10.4230/LIPIcs.CCC.2020.35.[Koz18] K. Kozhasov。《张量的完全实特征构形》。SIAM 应用代数几何杂志，2(2):339–347，2018 年。doi:10.1137/17M1145902.[KS22] M. Kummer 和 R. Sinn。《M 曲线的双曲割线簇》。纯粹与应用数学杂志，2022(787):125–162，2022 年。doi:10.1515/crelle-2022-0012。[Lan12] J. M. Landsberg。《张量：几何与应用》，数学研究生系列第 128 卷。美国数学学会，罗得岛州普罗维登斯，2012 年。[Lan17] J. M. Landsberg。《几何与复杂性理论》，剑桥高等数学研究丛书第 169 卷。剑桥大学出版社，英国剑桥，2017 年。[LM04] J. M. Landsberg 和 L. Manivel。《Segre 簇割线簇的理想》。计算数学基础，4(4):397–422，2004 年。doi:10.1007/s10208-003-0115-9。[LM18] J. M. Landsberg 和 M. Michałek。《矩阵乘法边界秩的一个 $2n^2-\log(n)-1$ 下界》。国际数学研究通知，(15):4722–4733，2018 年。doi:10.1093/imrn/rnx025。[LO13] J. M. Landsberg 和 G. Ottaviani。《Veronese 簇及其他簇的割线簇方程》。纯粹与应用数学年鉴，192(4):569–606，2013 年。doi:10.1007/s10231-011-0238-6。[LO15] J. M. Landsberg 和 G. Ottaviani。《矩阵乘法边界秩的新下界》。计算理论，11(11):285–298，2015 年。doi:10.4086/toc.2015.v011a011。[LS22] B. Lovitz 和 V. Steffan。《稳定子秩界定的新技术》。Quantum，6:692，2022 年。doi:10.22331/q-2022-04-20-692。[LST22] N. Limaye、Srinivasan S. 和 S. Tavenas。《针对低深度代数电路的超多项式下界》。载于 2021 年 IEEE 第 62 届计算机科学基础年会（FOCS），第 804–814 页。IEEE，2022 年。doi:10.1109/FOCS52979.2021.00083。[LU06] A. Laface 和 L. Ugaglia。《关于一类特殊线性系统 $\mathbb{P}^3$》。美国数学会汇刊，358(12):5485–5500，2006 年。doi:10.1090/S0002-9947-06-03891-8。[Mań22] T. Mańdziuk。《射影空间情形下点理想极限的识别》。线性代数及其应用，634:149–178，2022 年。doi:10.1016/j.laa.2021.11.003。[MRS22] C. Meroni、K. Ranestad 和 R. Sinn。《四维空间中曲面的凸包》。arXiv:2209 01151，2022 年。[MS01] K. D. Mulmuley 和 M. Sohoni。《几何复杂性理论 I：一种研究 P 与 NP 问题及相关问题的方法》。SIAM 计算杂志，31(2):496–526（电子版），2001 年。doi:10.1137/S009753970038715X。[MS08] K. D. Mulmuley 和 M. Sohoni。《几何复杂性理论 II：迈向类簇之间嵌入的显式障碍》。SIAM 计算杂志，38(3):1175–1206，2008 年。doi:10.1137/080718115。[Nag59] M. Nagata。《关于希尔伯特的第 14 个问题》。美国数学杂志，81(3):766–772，1959 年。doi:10.2307/2372927。[NC00] M. A. Nielsen 和 I. L. Chuang。《量子计算与量子信息》。剑桥大学出版社，英国剑桥，2000 年。[One22] A. Oneto。《张量分解与经典代数几何》，2022 年。可访问：https://agates.mimuw.edu.pl/index.php/agates/introductory-school。[Orfrm[o]–4] R. Orús。《张量网络实用导论：矩阵乘积态与投影纠缠对态》。物理学年鉴，349:117–158，2014 年。[Ott09] G. Ottaviani。《关于三次多项式华林问题的一个不变量》。名古屋数学杂志，193:95–110，2009 年。doi:10.1017/S0027763000026040。[Pal06] F. Palatini。《关于其 $S_h(h+1)$-割线未能充满环境空间的代数曲面》。都灵皇家科学院学报，41:634–640，1906 年。[PGVWC07] D. Perez-Garcia、F. Verstraete、M. M. Wolf 和 J. I. Cirac。《矩阵乘积态表示》。量子信息与计算，7(5):401–430，2007 年。doi:10.26421/QIC7.5-6-1。[PSV22] S. Peleg、A. Shpilka 和 B. L. Volk。《稳定子秩的下界》。Quantum，6:652，2022 年。doi:10.22331/q-2022-02-15-652。[QL17] L. Qi 和 Z. Luo。《张量分析：谱理论与特殊张量》。SIAM，2017 年。[QPG21] H. Qassim、H. Pashayan 和 D. Gosset。《魔态稳定子秩的改进上界》。Quantum，5:606，2021 年。doi:10.22331/q-2021-12-20-606。

[RS11a] K. Ranestad 和 F.-O. Schreyer. 关于对称形式的秩. J. Algebra, 346:340–342, 2011. doi:10.1016/j.jalgebra.2011.07.032. [RS11b] K. Ranestad 和 B. Sturmfels. 一个簇的凸包. Notions of Positivity and the Geometry of Polynomials, pages 331–344, 2011. doi:10.1007/978-3-0348-0142-3_18. [RS12] K. Ranestad 和 B. Sturmfels. 关于空间曲线的凸包. Advances in Geometry, 12(1):157–178, 2012. doi:10.1515/advgeom.2011.021. [Sco08] G. Scorza. 三维簇 S_r ($r \geq 7$) 的确定，其中其 S_3 切平面两两相切. Rend. Circ. Mat. Palermo, 25:193–204, 1908. [Sev01] F. Severi. 关于四维空间中一般曲面的非正常二重点及其表观三重点. Rend. Circ. Mat. Palermo, 15(2):33–51, 1901. [Sey22] T. Seynnaeve. 矩阵乘积态、几何与不变理论. arXiv:2212.13806, 2022. [Sod20] L. Sodomaco. 部分对称秩一张量簇的距离函数. 博士论文，意大利佛罗伦萨大学, 2020. [ST16] W. F. Sawin 和 T. Tao. 关于张量“切片秩”的笔记，2016. 参见 https://terrytao.wordpress.com/2016/08/24/notes-on-the-slice-rank-of-tensors/. [Ste23] V. Steffan. 张量分解：量子信息中的理论与应用. 博士论文，丹麦哥本哈根大学，2023. [STG+19] P. Silvi, F. Tschirsich, M. Gerster, J. Jünemann, D. Jaschke, M. Rizzi 和 S. Montangero. 张量网络文集：多体量子晶格系统的模拟技术. SciPost Physics Lecture Notes, 8, 2019. [Str87] V. Strassen. 相对双线性复杂度与矩阵乘法. J. Reine Angew. Math., 375/376:406–443, 1987. doi:10.1515/crll.1987.375-376.406. [SWVC08] N. Schuch, M. M. Wolf, F. Verstraete 和 J. I. Cirac. 利用算符串和蒙特卡罗张量缩并模拟量子多体系统 . Phys. Rev. Lett., 100(4):040501, 2008. doi:10.1103/PhysRevLett.100.040501. [Tei22] E. Teixeira Turatti. 奇异向量元组及其几何. 博士论文，意大利佛罗伦萨大学，2022. [Ter21] A. Terracini. 关于两个问题：G. Scorza 和 F. Palatini 所研究的若干类曲面的确定问题，第 6 卷. 1921. [Tod92] S. Toda. 捕获行列式计算复杂度的算术电路类. IEICE Trans. Inf. Syst., 75(1):116–124, 1992. [Val79] L. G. Valiant. 代数中的完备性类. 收录于第 11 届 ACM 计算理论研讨会论文集，STOC ’79, pages 249–261, New York, 1979. ACM. doi:10.1145/800135.804419. [VC17] P. Vrana 和 M. Christandl. 从 Greenberger-Horne-Zeilinger 份额中提纯纠缠. Comm. in Math. Ph., 352(2):621–627, 2017. doi:10.1007/s00220-017-2861-6. [Ven23] E. Ventura. 张量及其代数，2023. 参见 https://agates.mimuw.edu.pl/images/notes_and_reports/Ventura_Tensors_and_their_algeb

ras.pdf。

[VWPGC06] F. Verstraete、M. M. Wolf、D. Perez-Garcia 和 J. I. Cirac。投影纠缠对态的临界性、面积律与计算能力。《物理评论快报》，96(22):220601，4，2006 年。doi:10.1103/PhysRevLett.96.220601。[WZ22] A. Wigderson 和 J. Zuiddam。《渐近谱：理论、应用与扩展》。可通过以下网址获取：https://staff.fnwi.uva.nl/j.zuiddam/papers/convexity.pdf，2022 年。

(FULVIO GESMUNDO)德国萨尔布吕肯萨尔大学电子邮箱地址:
gesmundo@cs.uni-saarland.de