arXiv:2304.10594v1 [cs.CC] 20 Apr 2023

闭类决策表的确定性与非确定性决策树比较分析

Azimkhon Ostonov 和 Mikhail Moshkov

计算机、电气与数学科学与工程部及计算生物科学研究中心阿卜杜拉国王科技大学（KAUST）沙特阿拉伯图瓦勒 23955-6900{azimkhon.ostonov,mikhail.moshkov}@kaust.edu.sa

摘要。 本文研究了在删除列、更改决策、列置换和列复制操作下封闭的多值决策类。我们研究了这些表的三个参数之间的关系：决策表的复杂度（如果考虑决策树的深度，则决策表的复杂度就是其中的列数）、确定性决策树的最小复杂度以及非确定性决策树的最小复杂度。我们对刻画这些关系的函数进行了粗略分类，并列举了所有可能的七种关系类型。

关键词： 决策表的闭类、确定性决策树、非确定性决策树

1 引言

本文中，我们考虑具有多值决策的决策表闭类，并研究这些表的三个参数之间的关系：决策表的复杂度（如果考虑决策树的深度，那么决策表的复杂度就是其中列的数量）、确定性决策树的最小复杂度，以及非确定性决策树的最小复杂度。

具有多值决策的决策表是一种矩形表，其列以属性命名，行两两不同，且每行都标有一个非空有限决策集合。行被解释为属性值的元组。对于给定的一行，需要从附属于该行的决策集合中找出一个决策。为此，我们可以使用以下查询：选择一个属性，并询问该属性在所考察行中的取值。我们研究基于这些查询的两类算法：确定性决策树和非确定性决策树。对于一个决策表，可以将非确定性决策树理解为表示该表的一组任意真实决策规则的方式，这些规则覆盖所有行。

我们从某种意义上考虑任意的复杂度度量，用以刻画决策树的时间复杂度。其中，我们区分所谓的有界复杂度度量，例如决策树的深度。

具有多值决策的决策表常见于数据分析领域，在该领域中，它们被称为多标签决策表 [7,30,31]。此外，具有多值决策的决策表也常见于组合优化、计算几何和故障诊断等领域，它们被用于表示和探索问题 [2,21]。

决策树 [1,2,8,18,19,26,28] 和决策规则系统 [5,6,10,11,20,21,23,24]被广泛用作分类器、知识表示手段，以及用于解决组合优化、故障诊断等各种问题的算法。决策树和规则是数据分析中最具可解释性的模型之一 [14]。

确定性与非确定性决策树对布尔函数的计算（函数的变量被视为属性）已得到相当深入的研究 [4,12,16,29]。请注意，布尔函数的非确定性决策树的最小深度等于其证书复杂度 [9]。

我们研究在四种运算下封闭的多值决策表类：删除列、更改决策、列置换和列复制。这类集合最自然的例子是由信息系统 [22]生成的决策表闭类。一个信息系统由一个对象集合（论域）和定义在该论域上、取值来自有限集合的属性（函数）集合组成。信息系统上的一个问题由有限个属性指定，这些属性将论域划分为若干非空定义域，并且在每个定义域内，这些属性均具有固定值。每个定义域都关联一个非空有限的决策集合。对于论域中的给定对象，需要从与包含该对象的定义域相关联的集合中找出一个决策。

具有多值决策的决策表以一种自然的方式对应于这个问题：该表的列以所考虑的属性命名，行对应于定义域，并以附加到定义域的决策集合命名。信息系统上的问题所对应的决策表集合构成由该系统生成的闭类。需要注意的是，所有闭类的族本质上比由信息系统生成的闭类族更广。特别地，由两个信息系统生成的两个闭类的并集是一个闭类。然而，一般而言，不存在能够生成该闭类的信息系统。

在不同运算下封闭的各种对象类得到了广泛研究。其中尤其包括在叠置运算下封闭的布尔函数类 [25], 图的次闭类[27],在删除变量和重命名变量下封闭的只读一次布尔函数类 [13], 在取因子下封闭的语言 [3], 等。决策—

策表是一个值得进行数学研究的有趣数学对象，尤其是对闭类决策表的研究。

本文继续研究由 [15] 的工作开启、后因各种原因搁置多年的决策表闭类。在 [15], 中，我们研究了对于在删除列和更改决策运算下封闭的类中的常规决策表，确定性决策树的最小深度以及由贪心算法构造的确定性决策树的深度与属性（列）数量之间的关系。

在本文中，我们研究所谓的 t-对（$\mathcal{C}$, ψ），其中 $\mathcal{C}$ 是一个在所考虑的四种运算下封闭的决策表类，而 ψ 是该类的复杂度度量。如果 ψ 是有界复杂度度量，则称该 t-对为有界的。对于任意决策表 $T \in \mathcal{C}$，我们有三个参数:

– $\psi^i(T)$ – 决策表 T 的复杂度。该参数等于针对表 T 的确定性决策树的复杂度，该决策树按顺序计算与 T 各列关联的所有属性的值。– $\psi^d(T)$ – 针对表 T 的确定性决策树的最小复杂度。– $\psi^a(T)$ – 针对表 T 的非确定性决策树的最小复杂度。

我们研究来自 $\mathcal{C}$ 的决策表中任意两个此类参数之间的关系。例如，考虑参数 $\psi^i(T)$ 和 $\psi^d(T)$。设 $n \in \mathbb{N}$。我们将研究形如 $\psi^i(T) \leq n \Rightarrow \psi^d(T) \leq u$ 的关系，该关系对任意表 $T \in \mathcal{C}$ 都成立。我们最感兴趣的是 u 的最小值。此值（如果存在）等于

$$\mathcal{U}^{di}_{\mathcal{C}\psi}(n) = \max\left\{\psi^d(T) : T \in \mathcal{C}, \psi^i(T) \leq n\right\}.$$

我们还将研究形如 $\psi^i(T) \geq n \Rightarrow \psi^d(T) \geq l$ 的关系。在这种情况下，我们最感兴趣的是 l 的最大值。此值（如果存在）等于

$$\mathcal{L}^{di}_{\mathcal{C}\psi}(n) = \min\left\{\psi^d(T) : T \in \mathcal{C}, \psi^i(T) \geq n\right\}.$$

这两个函数 $\mathcal{U}^{di}_{\mathcal{C}\psi}$ 和 $\mathcal{L}^{di}_{\mathcal{C}\psi}$ 描述了对于来自 $\mathcal{C}$ 的表，参数 $\psi^d(T)$ 的行为如何取决于参数 $\psi^i(T)$ 的行为。

对于参数 $\psi^i(T)$、$\psi^d(T)$ 和 $\psi^a(T)$ 的所有有序对，都有 18 个类似的函数。这 18 个函数很好地描述了所考察参数之间的关系。若能针对所有 t-对和所有受限 t-对，指出这些函数的 18 元组，将会非常有意义。但这是一个非常困难的问题。

在本文中，我们将研究函数类型，而不是函数。对于任意部分函数 f: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$，我们将从集合 $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon\}$ 中为其关联一个类型。例如，如果函数 f 的定义域是无限的，且有上界，那么其类型等于 α。如果函数 f 的定义域是无限的、没有上界，并且不等式 $f(n) \geq n$ 仅对有限个 $n \in \mathbb{N}$成立，那么其类型等于 β，等等。因此，我们将枚举 18-元组

函数类型。这些元组将表示在称为 t-对类型的表中。我们将证明，t-对只有七种可实现的类型，而受限 t-对只有五种可实现的类型。

首先，我们将研究函数类型的 9 元组 $\mathcal{U}^{bc}_{\mathcal{C}^\psi}$, $b, c \in \{i, d, a\}$。这些元组将用称为 t-对的上类型的表来表示。我们将枚举所有可实现的 t-对的上类型和受限 t-对。之后，我们将把针对 t-对的上类型所获得的结果推广到 t-对的类型这一情形。我们还将定义两个 t-对的并的概念，并研究所得 t-对的上类型如何取决于初始 t-对的上类型。

本文基于 [17] 中的工作，该工作针对信息系统上的问题类得出了类似结果。我们将[17] 中的证明推广到来自闭类的决策表情形，并利用本文的一些结果证明具有给定上类型的t-对和有限t-对的存在性。

本文共分为八节。第 2 节介绍基本定义。第 3 节给出与 t-对类型和受限 t-对相关的主要结果。第 4—6 节研究 t-对和受限 t-对的上类型。第 7 节包含主要结果的证明，第 8 节为简短的结论。

2 基本定义

2.1 决策表与闭类

令 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ 为非负整数的集合。对于任意 $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$，令 $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$。集合 $\mathbb{N}$ 的所有非空有限子集构成的集合记为 $\mathcal{P}(\mathbb{N})$。令 F 为一个非空的属性集合（实际上，是属性的名称）。

定义 1. 现在我们定义决策表的集合 $\mathcal{M}_k(F)$。该集合中的任意决策表 T 都是一个矩形表，包含 $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ 列，分别以属性 f_1、……、$f_n \in F$ 标记，其中任何两个以相同属性标记的列都相等。该表的各行两两不同，且填入的数值均来自 E_k。每一行都被解释为属性 f_1、……、f_n 的一个值元组。对于表中的每一行，都附加一个来自 $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ 的集合，并将其解释为该行对应的决策集合。

示例 *1.* 集合 $\mathcal{M}_2(F_0)$ 中的三个决策表 T_1、T_2 和 T_3（其中 $F_0 = \{f_1, f_2, f_3\}$）如图 1 所示。

我们将表 T 对应于以下问题：对于 T 中给定的一行，我们应从附属于该行的决策集合中识别出一个决策。为此，我们可以查询该行各属性的取值。

我们用 $At(T)$ 表示附属于 T 的各列的属性集合 $\{f_1, \ldots, f_n\}$。用 $\Pi(T)$ 表示附属于 T 各行的决策集合的交集，用 $\Delta(T)$ 表示表 T 的行集合。决策来自

$T_1 =$

f_1	f_2	
0	0	$\{1\}$
1	0	$\{2,3\}$
0	1	$\{2\}$
1	1	$\{4\}$

$T_2 =$

f_1	f_2	f_3	
1	0	0	$\{1,2\}$
0	1	0	$\{1,3\}$
0	0	1	$\{4\}$
0	0	0	$\{1,2,3\}$

$T_3 =$

f_1	f_1	f_3	
0	0	0	$\{1,3\}$
1	1	0	$\{1\}$
0	0	1	$\{2\}$
1	1	1	$\{1,2\}$

图 1。 决策表 T_1、 T_2 和 T_3

$\Pi(T)$ 称为 T 的共同决策。如果 $\Delta(T) = \varnothing$ 或 $\Pi(T) \neq \varnothing$，则称表 T 为退化。我们用 $\mathcal{M}_k^c(F)$ 表示来自 $\mathcal{M}_k(F)$ 的退化决策表集合。

示例 *2.* 图 2 展示了两个退化决策表 D_1 和 D_2 。

$D_1 =$

f_1	f_2

$D_2 =$

f_1	f_2	f_3	
1	0	0	$\{1,2\}$
0	1	0	$\{1,3\}$
0	0	0	$\{1,2,3\}$

图 2. 退化决策表 D_1 和 D_2

定义 *2*。表 T 的子表是从 T 中删除若干行后得到的表。令 $\Theta(T) = \{(f, \delta)$: $f \in At(T)$ $\delta \in E_k\}$ 和 $\Theta^*(T)$ 为字母表 $\Theta(T)$ 上包含空字 λ 的所有有限字的集合。令$\alpha \in \Theta^*(T)$。现在我们定义表 T 的一个子表 $T\alpha$。若 $\alpha = \lambda$，则 $T\alpha = T$。令 $\alpha = (f_{i_1}, \delta_1) \cdots (f_{i_m}, \delta_m)$。那么 $T\alpha$ 由 T 的所有行组成，这些行在与列 f_{i_1}、……、 f_{i_m} 的交集中分别具有值 δ_1、……、 δ_m。

示例 *3*。 表 T_1 和 T_2 的两个子表（如图 1 所示）展示在图 3 中。

$T_1(f_1, 1) =$

f_1	f_2	
1	0	$\{2,3\}$
1	1	$\{4\}$

$T_2(f_1,0)(f_2,0)(f_3,0) =$

f_1	f_2	f_3	
0	0	0	$\{1,2,3\}$

图 3. 表 T_1 和 T_2 的子表 $T_1(f_1, 1)$ 和 $T_2(f_1,0)(f_2,0)(f_3,0)$ 如图 1 所示

现在，我们在决策表的集合 $\mathcal{M}_k(F)$ 上定义四种运算：

定义 3. 删除列。我们可以从一个包含至少两列的表 T 中删除任意一列。因此，得到的表可能包含若干组相同行。对于每一组，我们仅保留第一行。

定义 4. 更改决策。在给定的表 T 中，我们可以任意更改附加到各行的决策集合。

定义 5。 列置换。我们可以交换表 T 中的任意两列，包括附加的属性名称。

定义 6。 列复制。对于表 T 中的任意一列，我们都可以在该列旁边添加其副本。

示例 *4*。 图 4 中所示的决策表 T_1'、T_2'、T_1'' 和 T_2''，分别由图 1 中所示的决策表 T_1 和 T_2 通过更改决策、删除列、列置换和列复制操作得到。

$T_1' =$

f_1	f_2	
0	0	$\{1,4\}$
1	0	$\{2,3\}$
0	1	$\{3\}$
1	1	$\{4\}$

$T_2' =$

f_1	
1	$\{1,2\}$
0	$\{1,3\}$

$T_1'' =$

f_2	f_1	
0	0	$\{1\}$
0	1	$\{2,3\}$
1	0	$\{2\}$
1	1	$\{4\}$

$T_2'' =$

f_1	f_2	f_2	f_3	
1	**0**	**0**	**0**	$\{1,2\}$
0	**1**	**1**	**0**	$\{1,3\}$
0	**0**	**0**	**1**	$\{4\}$
0	0	0	0	$\{1,2,3\}$

图 4. 通过分别对图 1 所示的表 T_1 和 T_2 进行更改决策、删除列、列置换和列复制操作，得到决策表 T_1'、T_2'、T_1'' 和 T_2''

定义 7. 设 $T \in \mathcal{M}_k(F)$。表 T 的闭包是一个集合，其中包含且仅包含通过删除列、更改决策、列置换和列复制操作从 T 得到的所有表。我们用 $[T]$表示表 T 的闭包。显然， $T \in [T]$。

定义 8. 设 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{M}_k(F)$。集合 $\mathcal{C}$ 的闭包 $[\mathcal{C}]$ 定义如下： $[\mathcal{C}] = \bigcup_{T \in \mathcal{C}} [T]$。若 $\mathcal{C} = [\mathcal{C}]$，则称 $\mathcal{C}$ 为闭类。特别地，空表集是一个闭类。

例*5.* 现在考虑决策表集合$\mathcal{M}_2(\{f_1, f_2\})$中的闭类 $\mathcal{C}_0$ ，它等于 $[Q]$，其中决策表 Q 如图 5 所示。闭类 $\mathcal{C}_0$ 包含图 6 所示的所有表，以及通过列复制和列置换操作从这些表得到的所有表。

如果 $\mathcal{C}_1$ 和 $\mathcal{C}_2$ 是属于 $\mathcal{M}_k(F)$ 的闭类，那么 $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ 也是一个闭类。我们可以考虑属于不同决策表集合的闭类 $\mathcal{C}_1$ 和 $\mathcal{C}_2$ 。设 $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{M}_{k_1}(F_1)$ 和 $\mathcal{C}_2 \subseteq \mathcal{M}_{k_2}(F_2)$。那么 $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ 是一个闭类，并且 $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \subseteq \mathcal{M}_{\max(k_1,k_2)}(F_1 \cup F_2)$。

$$Q = \begin{array}{|cc|c|}\hline f_1 & f_2 & \\ \hline 1 & 0 & \{1\} \\ 0 & 1 & \{2\} \\ 0 & 0 & \{3\} \\ \hline \end{array}$$

图5。 决策表 Q

$$Q_1 = \begin{array}{|cc|c|}\hline f_1 & f_2 & \\ \hline 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & d_3 \\ \hline \end{array} \qquad Q_2 = \begin{array}{|c|c|}\hline f_1 & \\ \hline 1 & d_4 \\ 0 & d_5 \\ \hline \end{array} \qquad Q_3 = \begin{array}{|c|c|}\hline f_2 & \\ \hline 0 & d_6 \\ 1 & d_7 \\ \hline \end{array}$$

图6。 来自闭类 $\mathcal{C}_0$ 的决策表，其中 $d_1, \ldots, d_7 \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$

2.2 确定性和非确定性决策树

带有根的有限有向树是指恰好有一个节点没有入边的有限有向树。该节点称为根。树中没有出边的节点称为终端节点。既不是根节点也不是终端节点的节点称为工作节点。带有根的有限有向树中的一条完整路径是指从根节点出发并以某个终端节点结束的任意节点和边的序列 $\xi = v_0, d_0, \ldots, v_m, d_m, v_{m+1}$，其中，$d_i$ 是从节点 v_i 出发并进入节点 v_{i+1}的边，$i = 0, \ldots, m$。

定义 9. 集合 $\mathcal{M}_k(F)$ 上的决策树是一个带标记的有限有向树，其根节点至少包含两个节点（根节点和一个终端节点），并具有以下性质：

- 根节点及从根节点引出的边均未标记。
- 每个工作节点都标记有来自集合 F 的属性。
- 从工作节点出发的每条边都标有一个来自 E_k 的数字。
- 每个终端节点都标有一个来自 $\mathbb{N}$ 的数字。

我们用 $\mathcal{T}_k(F)$ 表示在决策表集合 $\mathcal{M}_k(F)$ 上的决策树集合。

定义 10. 来自 $\mathcal{T}_k(F)$ 的决策树称为确定性决策树，如果它满足以下条件：

- 恰有一条边离开根节点。
- 从每个工作节点出发的边都标有彼此不同的数字。

设 Γ 是来自 $\mathcal{T}_k(F)$ 的一棵决策树。用 $At(\Gamma)$ 表示附属于 Γ 的工作节点的属性集合。令 $\Theta(\Gamma) = \{(f, \delta) : f \in At(\Gamma)\ \delta \in E_k\}$。用 $\Theta^*(\Gamma)$ 表示字母表 $\Theta(\Gamma)$ 上所有有限字（包括空字 λ）构成的集合。对于任意完整路径 $\xi = v_0, d_0, \ldots, v_m, d_m, v_{m+1}$（属于 Γ），我们对应一个字 $\pi(\xi)$。若 $m = 0$，则 $\pi(\xi) = \lambda$。设 $m > 0$，并且对于 $i = 1, \ldots, m$，节点 v_i 标记有属性 f_{j_i}，边 d_i 标记有数字

δ_i。于是 $\pi(\xi) = (f_{j_1}, \delta_1) \cdots (f_{j_m}, \delta_m)$。我们用 $\tau(\xi)$ 表示附属于路径 ξ 的终端节点上的数字。我们用 $Path(\Gamma)$ 表示树 Γ 中完整路径的集合。

定义 11. 设 $T \in \mathcal{M}_k(F)$。表T 的非确定性决策树是一个定义在 $\mathcal{M}_k(F)$ 上的决策树 Γ，满足以下条件：

– $At(\Gamma) \subseteq At(T)$。– $\bigcup_{\xi \in Path(\Gamma)} \Delta(T\pi(\xi)) = \Delta(T)$。– 对任意行 $r \in \Delta(T)$ 和任意完整路径 $\xi \in Path(\Gamma)$，若 $r \in \Delta(T\pi(\xi))$，则 $\tau(\xi)$ 属于附属于行 r 的决策集合。

例 *6.* 图 1 所示决策表 T_1 和T_2 的非确定性决策树 Γ_1 和 Γ_2 如图 7 所示。

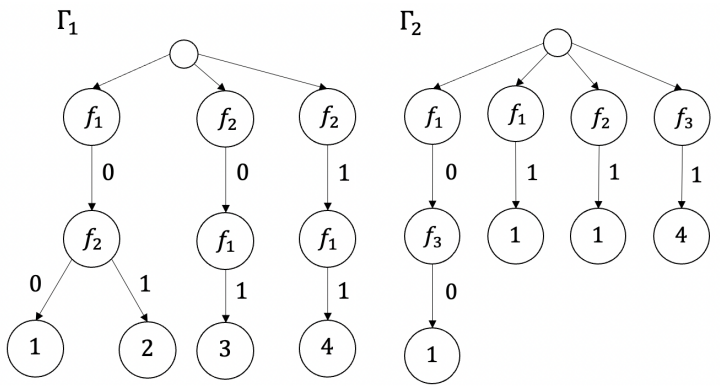


图 7. 图 1 所示决策表 T_1 和 T_2 的非确定性决策树 Γ_1 和 Γ_2

定义 12. 表 T 的确定性决策树是一个关于 $\mathcal{M}_k(F)$的确定性决策树，同时也是表T的非确定性决策树。

示例 *7.* 图 1 所示决策表 T_1和 T_2的确定性决策树 Γ_1'和 Γ_2'如图 8 所示。

2.3 复杂度度量

将 F^* 表示为字母表 F 上包含空字 λ 在内的所有有限字构成的集合。

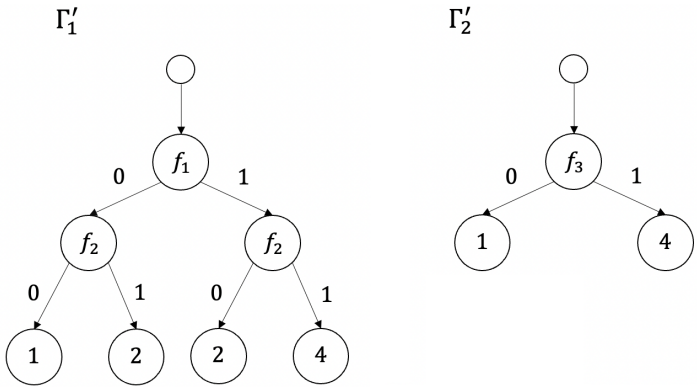


图 8. 图 1 中所示决策表 T_1 和 T_2 的确定性决策树 Γ_1' 和 Γ_2'

定义 13。 定义在决策表集合 $\mathcal{M}_k(F)$ 上的复杂度度量是任意映射 $\psi: F^* \to \mathbb{N}$.

定义 14. 若复杂度度量 ψ 具有以下性质，则称其为有界的：

(a) $\psi(\alpha_1\alpha_2) \leq \psi(\alpha_1) + \psi(\alpha_2)$ 对于任意 α_1、$\alpha_2 \in F^*$ 均成立。***(b)*** $\psi(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) \geq \psi(\alpha_1\alpha_3)$ 对于任意 α_1、α_2、$\alpha_3 \in F^*$ 均成立。***(c)*** 对于任意 $\alpha \in F^*$，不等式 $\psi(\alpha) \geq |\alpha|$ 成立，其中 $|\alpha|$ 是 α 的长度。

我们按以下方式将任意复杂度度量 ψ 扩展到集合 $\mathcal{T}_k(F)$ 上。设 $\Gamma \in \mathcal{T}_k(F)$。则 $\psi(\Gamma) = \max\{\psi(\varphi(\xi)): \xi \in \mathrm{Path}(\Gamma)\}$，其中 $\varphi(\xi) = \lambda$ 若 $\pi(\xi) = \lambda$，且 $\varphi(\xi) = f_1 \cdots f_m$ 若 $\pi(\xi) = (f_1, \delta_1) \cdots (f_m, \delta_m)$。值 $\psi(\Gamma)$ 将称为决策树 Γ 的复杂度。

现在我们考虑一个复杂度度量的例子。令 $w: F \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$。我们按以下方式定义函数 $\psi^w: F^* \to \mathbb{N}$ $\psi^w(\alpha) = 0$ 当 $\alpha = \lambda$ 且 $\psi^w(\alpha) = \sum_{i=1}^{m} w(f_i)$ 当 $\alpha = f_1 \cdots f_m$。函数 ψ^w 是 $\mathcal{M}_k(F)$ 上的有界复杂度度量，称为加权深度。如果 $w \equiv 1$，则函数 ψ^w 称为深度，记作 h。

设 ψ 为 $\mathcal{M}_k(F)$ 上的一个复杂度度量，设 T 为来自 $\mathcal{M}_k(F)$ 的一个决策表，其中各行分别标记有属性 $f_1, \ldots, f_n$。值 $\psi^i(T) = \psi(f_1 \cdots f_n)$ 将被称为决策表 T 的复杂度。我们用 $\psi^d(T)$ 表示该表 T 的确定性决策树的最小复杂度。我们用 $\psi^a(T)$ 表示该表 T 的非确定性决策树的最小复杂度。

2.4 信息系统

令 A 为一个非空集合，令 F 为从 A 到 E_k 的函数所构成的非空集合。

定义 15. 从 F 到 F 的函数称为属性，二元组 $U=(A,F)$ 称为信息系统。

定义 16. 关于 U 的一个问题是任意一个$(n+1)$元组 $z=(\nu,f_1,\ldots,f_n)$，其中 $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, $\nu:\ E_k^n\to\mathcal{P}(\mathbb{N})$，且 $f_1,\ldots,f_n\in F$。

问题 z 可以解释为：对于给定的 $a\in A$，从集合 $z(a)=\nu(f_1(a)\ldots,f_n(a))$ 中搜索至少一个数的问题。我们用 $Probl(U)$ 表示信息系统 U 上的问题集合。

我们将问题 za 决策表 $T(z)\in\mathcal{M}_k(F)$ 对应起来。该表¯具有 n 个列，列标签为属性 $f_1,\ldots,f_n$。当且仅当方程组满足以下条件时，元组 $\delta=(\delta_1,\ldots,\delta_n)\in E_k^n$ 才是表 $T(z)$ 中的一行。

$$\{f_1(x)=\delta_1,\ldots,f_n(x)=\delta_n\}$$

¯有一个来自集合 A 的解。此行标记为决策集合 $\nu(\delta)$。令 $Tab(U)=\{T(z):\ z\in Probl(U)\}$。可以证明，集合 $Tab(U)$ 是一个决策表的闭类。

基于信息系统的决策表闭类是闭类中最自然的例子。然而，闭类的概念本质上更为宽泛。特别是，集合 $Tab(U_1)\cup Tab(U_2)$，其中 U_1 和 U_2 是信息系统，是一个闭类，但通常情况下，我们无法找到一个信息系统 U，使得 $Tab(U)=Tab(U_1)\cup Tab(U_2)$。

2.5 t-对的类型

首先，我们定义 t-对的概念。

定义 17. 一对$(\mathcal{C},\psi)$，其中 $\mathcal{C}$ 是来自$\mathcal{M}_k(F)$的决策表闭类，且 ψ是 $\mathcal{M}_k(F)$上的复杂度度量，称为测试对（简称*t*-对）。如果 ψ 是有界复杂度度量，则 *t*-对 $(\mathcal{C},\psi)$ 称为有界 *t*-对。

设 $(\mathcal{C},\psi)$ 为一个 t-对。对于任意决策表 $T\in\mathcal{C}$，我们有三个参数 $\psi^i(T)$ $\psi^d(T)$ 和 $\psi^a(T)$。现在定义用于描述这些参数之间关系的函数。设 $b,c\in\{i,d,a\}$。

定义 18。我们定义部分函数 $\mathcal{U}^{bc}_{\mathcal{C}\psi}:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 和 $\mathcal{L}^{bc}_{\mathcal{C}\psi}:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$，如下：

$$\mathcal{U}^{bc}_{\mathcal{C}\psi}(n)=\max\left\{\psi^b(T):T\in\mathcal{C},\psi^c(T)\le n\right\},$$
$$\mathcal{L}^{bc}_{\mathcal{C}\psi}(n)=\min\left\{\psi^b(T):T\in\mathcal{C},\psi^c(T)\ge n\right\}.$$

如果值 $\mathcal{U}^{bc}_{\mathcal{C}\psi}(n)$ 是确定的，那么它就是满足 $\psi^c(T)\le n$ 的表 $T\in\mathcal{C}$ 对应的值 $\psi^b(T)$ 的不可改进上界。如果值 $\mathcal{L}^{bc}_{\mathcal{C}\psi}(n)$ 是确定的，那么它就是满足 $\psi^c(T)\ge n$ 的表 $T\in\mathcal{C}$ 对应的值 $\psi^b(T)$ 的不可改进下界。

设 g 是从 $\mathbb{N}$ 到 $\mathbb{N}$的部分函数。我们用 Dom(g) 表示 g的定义域。记 Dom$^+(g)=\{n:\ n\in$ Dom$(g)\ g(n)\ge n\}$，以及 Dom$^-(g)=\{n:\ n\in$Dom$(g)\ g(n)\le n\}$。

定义19。 现在我们定义值 $\mathrm{typ}(g) \in \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon\}$，称为 g 的类型。

– 如果 *Dom(g)* 是一个无限集，且 g 是一个有上界的函数，则 *typ(g)* $= \alpha$。 – 如果 *Dom(g)* 是一个无限集，*Dom*$^+$*(g)* 是一个有限集，且 g 是一个无上界的函数，则 *typ(g)* $= \beta$。 – 如果 *Dom*$^+$*(g)* 和 *Dom*$^-$*(g)* 两个集合都是无限集，则 *typ(g)* $= \gamma$。 – 如果 *Dom(g)* 是一个无限集，且 *Dom*$^-$*(g)* 是一个有限集，则 *typ(g)* $= \delta$。 – 如果 *Dom(g)* 是一个有限集，则 *typ(g)* $= \epsilon$。

例*8.* 可以证明 typ(1) $= \alpha$、typ($\lceil \log_2 n \rceil$) $= \beta$、typ(n) $= \gamma$、typ(n^2) $= \delta$，以及 typ($\frac{1}{\lfloor 1/n \rfloor}$) $= \epsilon$。 ——

定义20. 现在我们定义表 $\mathrm{typ}(\mathcal{C}, \psi)$，称其为 *t*-对 $(\mathcal{C}, \psi)$ 的类型。这是一个具有三行三列的表，其中从上到下的行以及从左到右的列分别标记为索引 i, d, a。对 $\mathrm{typ}(\mathcal{L}^{bc}_{\mathcal{C}\psi})\,\mathrm{typ}(\mathcal{U}^{bc}_{\mathcal{C}\psi})$ 位于索引为 $b \in \{i, d, a\}$ 的行与索引为 $c \in \{i, d, a\}$ 的列的交集处。

3 主要结果

本文研究的主要问题是找出所有类型的 t-对和受限 t-对。这个问题的解描述了决策表的复杂度、其非确定性决策树的最小复杂度以及这些表的确定性决策树的最小复杂度之间所有可能的（按函数类型 $\mathcal{U}^{bc}_{\mathcal{C}\psi}, \mathcal{L}^{bc}_{\mathcal{C}\psi}$，$b, c \in \{i, d, a\}$）关系。现在我们定义七个表:

$$T_1 = \begin{array}{|c|ccc|}\hline & i & d & a \\ \hline i & \epsilon\alpha & \epsilon\alpha & \epsilon\alpha \\ d & \epsilon\alpha & \epsilon\alpha & \epsilon\alpha \\ a & \epsilon\alpha & \epsilon\alpha & \epsilon\alpha \\ \hline\end{array} \quad T_2 = \begin{array}{|c|ccc|}\hline & i & d & a \\ \hline i & \gamma\gamma & \epsilon\epsilon & \epsilon\epsilon \\ d & \alpha\alpha & \epsilon\alpha & \epsilon\alpha \\ a & \alpha\alpha & \epsilon\alpha & \epsilon\alpha \\ \hline\end{array} \quad T_3 = \begin{array}{|c|ccc|}\hline & i & d & a \\ \hline i & \gamma\gamma & \delta\epsilon & \epsilon\epsilon \\ d & \alpha\beta & \gamma\gamma & \epsilon\epsilon \\ a & \alpha\alpha & \alpha\alpha & \epsilon\alpha \\ \hline\end{array} \quad T_4 = \begin{array}{|c|ccc|}\hline & i & d & a \\ \hline i & \gamma\gamma & \gamma\epsilon & \epsilon\epsilon \\ d & \alpha\gamma & \gamma\gamma & \epsilon\epsilon \\ a & \alpha\alpha & \alpha\alpha & \epsilon\alpha \\ \hline\end{array}$$

$$T_5 = \begin{array}{|c|ccc|}\hline & i & d & a \\ \hline i & \gamma\gamma & \gamma\epsilon & \gamma\epsilon \\ d & \alpha\gamma & \gamma\gamma & \gamma\gamma \\ a & \alpha\gamma & \gamma\gamma & \gamma\gamma \\ \hline\end{array} \qquad T_6 = \begin{array}{|c|ccc|}\hline & i & d & a \\ \hline i & \gamma\gamma & \gamma\epsilon & \gamma\epsilon \\ d & \alpha\gamma & \gamma\gamma & \gamma\delta \\ a & \alpha\gamma & \beta\gamma & \gamma\gamma \\ \hline\end{array} \qquad T_7 = \begin{array}{|c|ccc|}\hline & i & d & a \\ \hline i & \gamma\gamma & \gamma\epsilon & \gamma\epsilon \\ d & \alpha\gamma & \gamma\gamma & \gamma\epsilon \\ a & \alpha\gamma & \alpha\gamma & \gamma\gamma \\ \hline\end{array}$$

定理1。 对于任意 *t*-对 $(\mathcal{C}, \psi)$，关系 $\mathrm{typ}(\mathcal{C}, \psi) \in \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7\}$ 成立。对于任意 $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$，存在一个 *t*-对 $(\mathcal{C}, \psi)$ 使得$\mathrm{typ}(\mathcal{C}, \psi) = T_i$。

定理2。 对于任意有限 *t*-对$(\mathcal{C}, \psi)$，关系$\mathrm{typ}(\mathcal{C}, \psi) \in \{T_2, T_3, T_5, T_6, T_7\}$ 成立。对于任意 $i \in \{2, 3, 5, 6, 7\}$，存在一个有限 *t*-对$(\mathcal{C}, h)$，使得$\mathrm{typ}(\mathcal{C}, h) = T_i$。

4种可能的t-对的上类型

我们首先研究 t-对的上类型，它比 t-对类型更简单。

定义 21. 设$(\mathcal{C},\psi)$ 为一个 *t*-对。现在我们定义表 $\mathrm{typ}_u(\mathcal{C},\psi)$，称其为 *t*-对 $(\mathcal{C},\psi)$的上类型。该表包含三行三列，其中行从上到下、列从左到右分别标记为索引 i,d,a。值 $\mathrm{typ}(\mathcal{U}^{bc}_{\mathcal{C}\psi})$ 位于索引为 $b\in\{i,d,a\}$ 的行与索引为 $c\in\{i,d,a\}$的列的交集处。表 $\mathrm{typ}_u(\mathcal{C},\psi)$ 将称为 *t*-对 $(\mathcal{C},\psi)$的上类型。

在本节中，列举了 t-对的所有可能上类型。现在我们定义七个表:

$$t_1=\begin{array}{c|ccc} & i & d & a\\ \hline i&\alpha&\alpha&\alpha\\ d&\alpha&\alpha&\alpha\\ a&\alpha&\alpha&\alpha\end{array}\qquad t_2=\begin{array}{c|ccc} & i & d & a\\ \hline i&\gamma&\epsilon&\epsilon\\ d&\alpha&\alpha&\alpha\\ a&\alpha&\alpha&\alpha\end{array}\qquad t_3=\begin{array}{c|ccc} & i & d & a\\ \hline i&\gamma&\epsilon&\epsilon\\ d&\beta&\gamma&\epsilon\\ a&\alpha&\alpha&\alpha\end{array}\qquad t_4=\begin{array}{c|ccc} & i & d & a\\ \hline i&\gamma&\epsilon&\epsilon\\ d&\gamma&\gamma&\epsilon\\ a&\alpha&\alpha&\alpha\end{array}$$

$$t_5=\begin{array}{c|ccc} & i & d & a\\ \hline i&\gamma&\epsilon&\epsilon\\ d&\gamma&\gamma&\gamma\\ a&\gamma&\gamma&\gamma\end{array}\qquad t_6=\begin{array}{c|ccc} & i & d & a\\ \hline i&\gamma&\epsilon&\epsilon\\ d&\gamma&\gamma&\delta\\ a&\gamma&\gamma&\gamma\end{array}\qquad t_7=\begin{array}{c|ccc} & i & d & a\\ \hline i&\gamma&\epsilon&\epsilon\\ d&\gamma&\gamma&\epsilon\\ a&\gamma&\gamma&\gamma\end{array}$$

命题 1. 对于任意 *t*-对 $(\mathcal{C},\psi)$，关系 $\mathrm{typ}_u(\mathcal{C},\psi)\in\{t_1,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6,t_7\}$ 成立。

命题 2。 对于任意有限 *t*-对 $(\mathcal{C},\psi)$，关系 $\mathrm{typ}_u(\mathcal{C},\psi)\in\{t_2,t_3,t_5,t_6,t_7\}$ 成立。

我们将命题的证明分解为一系列引理。

引理 1. 设 T 是决策表集合 $\mathcal{M}_k(F)$ 中的一个决策表，ψ是定义在 $\mathcal{M}_k(F)$上的复杂度度量。那么不等式 $\psi^a(T)\le\psi^d(T)\le\psi^i(T)$ 成立。

证明。 令表 T 的列标记为属性 $f_1,\ldots\ldots,f_n$。不难为表 T 构造一棵确定性决策树 Γ_0，依次计算属性 $f_1,\ldots\ldots,f_n$ 的值。显然，$\psi(\Gamma_0)=\psi^i(T)$。因此，$\psi^d(T)\le\psi^i(T)$。如果决策树 Γ 是 T 的一棵确定性决策树，那么 Γ 就是 T 的一棵非确定性决策树。因此，$\psi^a(T)\le\psi^d(T)$。

□

设 $(\mathcal{C},\psi)$ 是一个 t-对，$n\in\mathbb{N}$和 $b,c\in\{i,d,a\}$。记号 $\mathcal{U}^{bc}_{\mathcal{C}\psi}(n)=\infty$ 表示集合 $X=\{\psi^b(T):T\in\mathcal{C},\psi^c(T)\le n\}$ 是无限的。记号$\mathcal{U}^{bc}_{\mathcal{C}\psi}(n)=\varnothing$ 表示集合 X 为空。显然，若 $\mathcal{U}^{bc}_{\mathcal{C}\psi}(n)=\infty$，则$\mathcal{U}^{bc}_{\mathcal{C}\psi}(n+1)=\infty$。不难证明以下命题。

引理 2. 设 $(\mathcal{C}, \psi)$ 是一个 *t*-对，且 $b, c \in \{i, d, a\}$。那么

(a) 如果存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $\mathcal{U}^{bc}_{\mathcal{C}\psi}(n) = \infty$，那么 $\mathrm{typ}(\mathcal{U}^{bc}_{\mathcal{C}\psi}) = \epsilon$。

(b) 如果不存在这样的 $n \in \mathbb{N}$，使得 $\mathcal{U}^{bc}_{\mathcal{C}\psi}(n) = \infty$，那么 $\mathrm{Dom}(\mathcal{U}^{bc}_{\mathcal{C}\psi}) = \{n : n \geq n_0\}$，其中 $n_0 = \min\{\psi^c(T) : T \in \mathcal{C}\}$。

设 $(\mathcal{C}, \psi)$ 为一个 t-对，且 $b, c, e, f \in \{i, d, a\}$。记号 $\mathcal{U}^{bc}_{\mathcal{C}\psi} \lhd \mathcal{U}^{ef}_{\mathcal{C}\psi}$ 表示，对于任意 $n \in \mathbb{N}$，以下陈述均成立：

(a) 如果值 $\mathcal{U}^{bc}_{\mathcal{C}\psi}(n)$ 是确定的，那么要么 $\mathcal{U}^{ef}_{\mathcal{C}\psi}(n) = \infty$，要么值 $\mathcal{U}^{ef}_{\mathcal{C}\psi}(n)$ 是确定的，且不等式 $\mathcal{U}^{bc}_{\mathcal{C}\psi}(n) \leq \mathcal{U}^{ef}_{\mathcal{C}\psi}(n)$ 成立。

(b) 如果 $\mathcal{U}^{bc}_{\mathcal{C}\psi}(n) = \infty$，那么 $\mathcal{U}^{ef}_{\mathcal{C}\psi}(n) = \infty$。

设 $\preceq$ 是集合 $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon\}$ 上的一个线性序，使得 $\alpha \preceq \beta \preceq \gamma \preceq \delta \preceq \epsilon$。

引理 3. 设 $(\mathcal{C}, \psi)$ 是一个 *t*-对。那么 $\mathrm{typ}(\mathcal{U}^{bi}_{\mathcal{C}\psi}) \preceq \mathrm{typ}(\mathcal{U}^{bd}_{\mathcal{C}\psi}) \preceq \mathrm{typ}(\mathcal{U}^{ba}_{\mathcal{C}\psi})$ 并且 $\mathrm{typ}(\mathcal{U}^{ab}_{\mathcal{C}\psi}) \preceq \mathrm{typ}(\mathcal{U}^{db}_{\mathcal{C}\psi}) \preceq \mathrm{typ}(\mathcal{U}^{ib}_{\mathcal{C}\psi})$ 对于任意 $b \in \{i, d, a\}$。

证明。根据函数 $\mathcal{U}^{bc}_{\mathcal{C}\psi}$、$b$、$c \in \{i, d, a\}$ 的定义以及引理 1 可知，对于任意 $b \in \{i, d, a\}$，均有 $\mathcal{U}^{bi}_{\mathcal{C}\psi} \lhd \mathcal{U}^{bd}_{\mathcal{C}\psi} \lhd \mathcal{U}^{ba}_{\mathcal{C}\psi}$ 和 $\mathcal{U}^{ab}_{\mathcal{C}\psi} \lhd \mathcal{U}^{db}_{\mathcal{C}\psi} \lhd \mathcal{U}^{ib}_{\mathcal{C}\psi}$。利用这些关系和引理 2，即可得到该引理的结论。□

引理 4. 设$(\mathcal{C}, \psi)$ 是一个 *t*-对，且 $b, c \in \{i, d, a\}$。则

(a) $\mathrm{typ}(\mathcal{U}^{bc}_{\mathcal{C}\psi}) = \alpha$ 当且仅当函数 ψ^b 在闭类 $\mathcal{C}$上有上界。

(b) 若函数 ψ^b 在 $\mathcal{C}$上无上界，则$\mathrm{typ}(\mathcal{U}^{bb}_{\mathcal{C}\psi}) = \gamma$。

证明。 命题 (a) 显然。(b) 设函数 ψ^b 在 $\mathcal{C}$上无上界。可以证明，在这种情况下，等式 $\mathcal{U}^{bb}_{\mathcal{C}\psi}(n) = n$ 对无穷多个 $n \in \mathbb{N}$成立。因此 $\mathrm{typ}(\mathcal{U}^{bb}_{\mathcal{C}\psi}) = \gamma$。□

推论 1. 设$(\mathcal{C}, \psi)$ 是一个 *t*-对，且 $b \in \{i, d, a\}$。则$\mathrm{typ}(\mathcal{U}^{bb}_{\mathcal{C}\psi}) \in \{\alpha, \gamma\}$。

引理 5. 设$(\mathcal{C}, \psi)$ 是一个 *t*-对，且$\mathrm{typ}(\mathcal{U}^{ii}_{\mathcal{C}\psi}) \neq \alpha$。则

$$\mathrm{typ}(\mathcal{U}^{id}_{\mathcal{C}\psi}) = \mathrm{typ}(\mathcal{U}^{ia}_{\mathcal{C}\psi}) = \epsilon.$$

证明。 根据引理 4，我们得出函数 ψ^i 在 $\mathcal{C}$上无上界。设 $m \in \mathbb{N}$。那么存在一个决策表 $T \in \mathcal{C}$，使得不等式 $\psi^i(T) \geq m$ 成立。考虑一个退化决策表 $T' \in \mathcal{C}$，它由 T 得到：将附属于各行的决策集合替换为集合$\{0\}$。显然，$\psi^i(T') \geq m$。设 Γ 为一棵决策树，它由根节点、标记为 0 的终端节点以及连接这两个节点的边组成。可以证明，Γ 是表 T'的一棵确定性决策树。因此，$\psi^a(T') \leq \psi^d(T') \leq \psi(\Gamma) = \psi(\lambda)$。考虑到 m是 $\mathbb{N}$中的任意数，我们得到 $\mathcal{U}^{id}_{\mathcal{C}\psi}(\psi(\lambda)) = \infty$ 以及 $\mathcal{U}^{ia}_{\mathcal{C}\psi}(\psi(\lambda)) = \infty$。根据引理 2，我们得出 $\mathrm{typ}(\mathcal{U}^{id}_{\mathcal{C}\psi}) = \mathrm{typ}(\mathcal{U}^{ia}_{\mathcal{C}\psi}) = \epsilon$。□

例*9*。考虑一个 t-对 $(\mathcal{C}_0,\ h)$，其中 $\mathcal{C}_0$ 是例5中描述的闭类。显然，函数 h^i 在 $\mathcal{C}_0$上无上界，而函数 h^a 和 h^d 在 $\mathcal{C}_0$上有上界。根据引理 4，对于任意 $b \in \{i, d, a\}$，我们得到 typ$(\mathcal{U}^{ab}_{\mathcal{C}_0 h})$ =typ$(\mathcal{U}^{db}_{\mathcal{C}_0 h}) = \alpha$，且 typ$(\mathcal{U}^{ii}_{\mathcal{C}_0 h}) = \gamma$。根据引理 5，typ$(\mathcal{U}^{id}_{\mathcal{C}_0 h})$ = typ$(\mathcal{U}^{ia}_{\mathcal{C}_0 h}) = \epsilon$。因此，typ$_u(\mathcal{C}_0,\ h) = t_2$。

引理 6. 设 $(\mathcal{C}, \psi)$ 是一个 *t*-对。则 $\mathrm{typ}(\mathcal{U}^{ai}_{\mathcal{C}\psi}) \in \{\alpha, \gamma\}$。

证明。利用引理 3 和推论 1，我们得到 typ$(\mathcal{U}^{ai}_{\mathcal{C}\psi}) \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$。由引理 2，Dom$(\mathcal{U}^{ai}_{\mathcal{C}\psi}) = \{n : n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\}$，其中某个 $n_0 \in \mathbb{N}$。令 D =Do m$(\mathcal{U}^{ai}_{\mathcal{C}\psi})$。假设 typ$(\mathcal{U}^{ai}_{\mathcal{C}\psi}) = \beta$。那么存在 $m \in D$，使得对于任意 $n \in D$, $n > m$, $\mathcal{U}^{ai}_{\mathcal{C}\psi}(n) < n$。我们对 n 作归纳证明：对于来自 $\mathcal{C}$ 的任意决策表 T，若 $\psi^i(T) \leq n$，则 $\psi^a(T) \leq m_0$，其中 m_0 =max$\{m, \psi(\lambda)\}$。利用引理 1，我们得出，在条件 $n \leq m$ 下，所考虑的命题成立。假设该命题对某个 n, $n \geq m$ 成立。下面证明该命题对 $n+1$ 也成立。设 $T \in \mathcal{C}$, $\psi^i(T) \leq n+1$，且表 T 的列标记为属性 $f_{i_1}, \ldots, f_{i_k}$。由于 $n+1 > m$，我们得到 $\psi^a(T) \leq n$。设 Γ 是表 T 的一棵非确定性决策树，且$\psi(\Gamma) = \psi^a(T)$。假设在 Γ 中存在一条完整路径 ξ，其中没有工作节点。在这种情况下，由根节点、标记为 $\tau(\xi)$ 的终端节点以及连接这两个节点的边所构成的决策树，是表 T 的一棵非确定性决策树。因此 $\psi^a(T) \leq \psi(\lambda) \leq m_0$。现在假设决策树 Γ 中的每条完整路径都包含一个工作节点。令 $\xi \in$Path(Γ) $\Delta(T\pi(\xi)) \neq \varnothing$, $\xi = v_0, d_0, \ldots, v_p, d_p, v_{p+1}$，并且对于 $i = 1, \ldots, p$，节点 v_i 标记为属性 f_i，边 d_i 标记为数字 δ_i。对决策表 T 进行列置换和列复制操作，得到决策表 T'，使其列标记为属性 $f_1, \ldots, f_p, f_{i_1}, \ldots, f_{i_k}$。通过删除最后 k 列，从 T' 得到决策表 T''。记 T_ξ 为由 T'' 得到的决策表：对于行 $(\delta_1, \ldots, \delta_p)$，将对应的决策集合改为 $\{\tau(\xi)\}$；对于其余各行，改为 $\{\tau(\xi)+1\}$。显然，$\psi^i(T_\xi) \leq n$。利用归纳假设，我们得出存在表 $\tilde{T_\xi}$ 的一棵非确定性决策树 Γ_ξ，使得 $\psi(\Gamma_\xi) \leq m_0$。记 Γ_ξ 为由 Γ_ξ 得到的树，删除其中满足下列条件的所有节点和边：在 Γ_ξ 中不存在一条包含该节点或边的完整路径 ξ'，使得 $\tau(\xi') = \tau(\xi)$。令$\{\xi : \xi \in$Path(Γ) $\Delta(T\pi(\xi)) \neq \varnothing\} = \{\xi_1, \ldots, \xi_r\}$。将 $\tilde{\ }$ $\tilde{\ }$ 棵树 $\Gamma_{\xi_1}, \ldots, \Gamma_{\xi_r}$ 的根节点合并。记得到的树为 G。不难证明，G 是表 T 的一棵非确定性决策树，且 $\psi(G) \leq m_0$。因此，所考虑的命题成立。利用引理 4，我们得出 typ$(\mathcal{U}^{ai}_{\mathcal{C}\psi}) = \alpha$。所得矛盾说明 typ$(\mathcal{U}^{ai}_{\mathcal{C}\psi}) \in \{\alpha, \gamma\}$。□

设 T 是来自 $\mathcal{M}_k(F)$ 的一个决策表。现在我们给出表 T 的参数 $N(T)$ 和 $M(T)$ 的定义。

定义 22。我们用 $N(T)$ 表示表 T 中的行数。

定义 *23.* 设表 T 的列标记为属性 $f_1, \ldots, f_n \in F$。现在定义参数 $M(T)$。若表 T 是退化的，则 $M(T) = 0$. 现在设 T 是非退化表，且 $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_n) \in E_k^n$。那么 $M(T, \delta)$ 是满足以下条件的最小自然数 m：存在属性 $f_{i_1}, \ldots, f_{i_m} \in At(T)$，使得 $T(f_{i_1}, \delta_{i_1}) \cdots (f_{i_m}, \delta_{i_m})$ 是一个退化表。我们将 $M(T) = \max\{M(T, \delta) : \delta \in E_k^n\}$ 记为。

以下结论可由定理 3 立即推出。5 [18]

引理 7。设 T 是来自 $\mathcal{M}_k(F)$ 的一个非空决策表，其中每一行均标记有一个仅包含单个决策的集合。那么

$$h^d(T) \leq M(T) \log_2 N(T).$$

引理 8 $\mathcal{C}$ ψ $\mathcal{U}_{\mathcal{C}\psi}^{ai} = \alpha$ $\mathcal{U}_{\mathcal{C}\psi}^{di} \in$. 设(,) 是一个受限 *t*-对，且 $\{\alpha, \beta\}$ typ() 。则typ() 。

证明。根据引理 4，我们得出结论：存在 $r \in \mathbb{N}$，使得对于任意表 $T \in \mathcal{C}$，不等式 $\psi^a(T) \leq r$ 成立。

设 T 是来自 $\mathcal{C}$ 的非空表，其中各列标有属性 $f_1, \ldots, f_n$ 和 $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_n) \in E_k^n$。现在证明存在属性 $f_{i_1}, \ldots, f_{i_m} \in At(T)$，使得子表 $T(\delta) = T(f_1, \delta_1) \cdots (f_n, \delta_n)$ 等于子表 $T(f_{i_1}, \delta_{i_1}) \cdots (f_{i_m}, \delta_{i_m})$，且若 δ 是 T 的一行，则 $m \leq r$；若 δ 不是 T 的一行，则 $m \leq r + 1$。

令 δ 为 T的一行。我们将附加到行 δ 上的决策集合替换为集合 $\{1\}$，并将附加到 T 其余各行上的决策集合替换为集合 $\{0\}$。我们用 T'表示所得的表。显然，$T' \in \mathcal{C}$。考虑到 $\psi^a(T') \leq r$，且复杂度度量 ψ 具有性质 (c)，不难证明，存在属性 $f_{i_1}, \ldots, f_{i_m} \in At(T') = At(T)$，使得 $m \leq r$，并且 $T'(f_{i_1}, \delta_{i_1}) \cdots (f_{i_m}, \delta_{i_m})$ 仅包含行 δ。由此可得出，$T(\delta) = T(f_{i_1}, \delta_{i_1}) \cdots (f_{i_m}, \delta_{i_m})$。

Let δ 不是 T的一行。我们来证明，存在属性 f_{i_1}、.....、 $f_{i_m} \in At(T)$，使得 $m \leq r + 1$，并且子表 $T(f_{i_1}, \delta_{i_1}) \cdots (f_{i_m}, \delta_{i_m})$为空。如果 $T(f_1, \delta_1)$为空，则所考虑的命题成立。否则，存在 $q \in \{1, \ldots, n-1\}$，使得子表 $T(f_1, \delta_1) \cdots (f_q, \delta_q)$ 非空，但子表 $T(f_1, \delta_1) \cdots (f_{q+1}, \delta_{q+1})$为空。我们用 T' 表示通过删除属性 f_{q+1}、.....、 f_n而从 T得到的表。显然，$T' \in \mathcal{C}$，且$(\delta_1, \ldots\ldots, \delta_q)$是 T'的一行。根据上述已证明的结论，存在属性f_{i_1}、.....、 $f_{i_p} \in \{f_1, \ldots, f_q\}$，使得

$$T'(f_{i_1}, \delta_{i_1}) \cdots (f_{i_p}, \delta_{i_p}) = T'(f_1, \delta_1) \cdots (f_q, \delta_q)$$

以及 $p \leq r$。利用这一事实，可以证明 $T(f_{i_1}, \delta_{i_1}) \cdots (f_{i_p}, \delta_{i_p})(f_{q+1}, \delta_{q+1})$为空，且等于 $T(\delta)$。

设 $T_1 \in \mathcal{C}$。我们将 T_2 记为从 T_1 中删除所有数字均相等的列后得到的决策表。设 T_2 的列标记为

属性 $f_1, \ldots, f_n$。现在考虑决策表 T_3，它是通过修改 T_2 中的决策得到的，使得附加到表 T_3 的每一行的决策集合仅包含一个决策，并且对于任意两个不相等的行，相应的决策都不同。显然， $T_3 \in \mathcal{C}$。不难证明，$\psi^d(T_1) \leq \psi^d(T_2) \leq \psi^d(T_3)$】【。

现在我们证明，对于任意属性 $f \in At(T_3)$，不等式 $\psi(f) \leq r$ 成立。设 T' 表示从 T_3 中删除除标记为属性 f的列以外的所有列后得到的决策表。如果 T_3 中有多个标记为属性 f的列，则我们只保留其中一列。设决策表 T_f 由 T' 得到，方法是将每一行（δ）的决策集合替换为决策集合 $\{\delta\}$。显然， $T_f \in \mathcal{C}$。设 Γ 为表 T_f的一棵非确定性决策树，并且 $\psi(\Gamma) = \psi^a(T_f) \leq r$。由于列 f 包含不同的数值，因此我们有 $f \in At(\Gamma)$。利用复杂度度量 ψ的性质 (b)，可得 $\psi(\Gamma) \geq \psi(f)$。因此， $\psi(f) \leq r$。

考虑到T_3对于任意属性 $f_{i_1}, \ldots, f_{i_m} \in \{f_1, \ldots, f_n\}$，使得 $m \leq r$，且 $T_3(f_{i_1}, \delta_{i_1}) \cdots (f_{i_m}, \delta_{i_m})$ 仅包含行 δ，不难证明这一点。

$$N(T_3) \leq n^r \cdot k^r. \tag{1}$$

根据上述已证明的结论，对于任意 $\delta \in E_k^n$，存在属性 $f_{i_1}, \ldots, f_{i_m} \in \{f_1, \ldots, f_n\}$ 使得 $m \leq r+1$，且 $T_3(f_{i_1}, \delta_{i_1}) \cdots (f_{i_m}, \delta_{i_m}) = T_3(f_1, \delta_1) \cdots (f_n, \delta_n)$。考虑到这一等式，可以证明 that

$$M(T_3) \leq r + 1. \tag{2}$$

利用引理 7 以及不等式 (1) 和 (2)，我们得出结论：存在一个确定性决策树 Γ，用于表 T_3，其复杂度 $h(\Gamma) \leq M(T_3) \log_2 N(T_3) \leq (r+1)^2 \log_2(kn)$。考虑到对于任意属性 $f \in At(T_3)$， $\psi(f) \leq r$，且复杂度度量 ψ 具有性质 (a)，我们得到

$$\psi^d(T_3) \leq (r+1)^3 \log_2(kn).$$

因此， $\psi^d(T_1) \leq (r+1)^3 \log_2(kn)$。考虑到复杂度度量 ψ 具有性质 (c)，我们得到 $\psi^i(T_1) \geq n$。由于 T_1 是来自 $\mathcal{C}$的任意决策表，因此 $\mathrm{Dom}^+(\mathcal{U}^{di}_{\mathcal{C}\psi})$ 是一个有限集合。因此 $\mathrm{typ}(\mathcal{U}^{di}_{U\psi}) \neq \gamma$。利用引理 3 和推论 1，我们得到 $\mathrm{typ}(\mathcal{U}^{di}_{\mathcal{C}\psi}) \in \{\alpha, \beta\}$。

□

（命题 *1* 的证明）。设 $(\mathcal{C}, \psi)$ 是一个 t-对。利用推论 1，我们得出 $\mathrm{typ}(\mathcal{U}^{ii}_{\mathcal{C}\psi}) \in \{\alpha, \gamma\}$。利用推论 1 和引理 3，我们得到 $\mathrm{typ}(\mathcal{U}^{di}_{\mathcal{C}\psi}) \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$。由引理 6 可知，$\mathrm{typ}(\mathcal{U}^{ai}_{\mathcal{C}\psi}) \in \{\alpha, \gamma\}$。

(a) 设 $\mathrm{typ}(\mathcal{U}^{ii}_{\mathcal{C}\psi}) = \alpha$。根据引理 3 和 4，我们得到 $\mathrm{typ}_u(\mathcal{C}, \psi) = t_1$。
(b) 设 $\mathrm{typ}(\mathcal{U}^{ii}_{\mathcal{C}\psi}) = \gamma$ 且 $\mathrm{typ}(\mathcal{U}^{di}_{\mathcal{C}\psi}) = \alpha$。根据引理 3、4 和 5，我们得到 $\mathrm{typ}_u(\mathcal{C}, \psi) = t_2$。

(c) 设 $\mathrm{typ}(\mathcal{U}^{ii}_{\mathcal{C}\psi}) = \gamma$ 且 $\mathrm{typ}(\mathcal{U}^{di}_{\mathcal{C}\psi}) = \beta$。由引理 5 可得 $\mathrm{typ}(\mathcal{U}^{id}_{\mathcal{C}\psi}) = \mathrm{typ}(\mathcal{U}^{ia}_{\mathcal{C}\psi}) = \epsilon$。利用引理 3 和 6，我们得到 $\mathrm{typ}(\mathcal{U}^{ai}_{\mathcal{C}\psi}) = \alpha$。由

这个等式以及引理 4 可得 typ($\mathcal{U}^{ad}_{\mathcal{C}\psi}$) = typ($\mathcal{U}^{aa}_{\mathcal{C}\psi}$) = α。利用等式 typ($\mathcal{U}^{di}_{\mathcal{C}\psi}$) = β、引理 3 和推论 1，我们得到 typ($\mathcal{U}^{dd}_{\mathcal{C}\psi}$) = γ。由等式 typ($\mathcal{U}^{dd}_{\mathcal{C}\psi}$) = γ，typ($\mathcal{U}^{aa}_{\mathcal{C}\psi}$) = α 以及引理 2 和 4 可得 typ($\mathcal{U}^{da}_{\mathcal{C}\psi}$) = ϵ。因此，typ$_u$($\mathcal{C}$, ψ) = t_3。

(d) 令 typ($\mathcal{U}^{ii}_{\mathcal{C}\psi}$) = typ($\mathcal{U}^{di}_{\mathcal{C}\psi}$) = γ 且 typ($\mathcal{U}^{ai}_{\mathcal{C}\psi}$) = α。利用引理 5，我们得到 typ($\mathcal{U}^{id}_{\mathcal{C}\psi}$) = typ($\mathcal{U}^{ia}_{\mathcal{C}\psi}$) = ϵ。由引理 4 可知，typ($\mathcal{U}^{ad}_{\mathcal{C}\psi}$) =typ($\mathcal{U}^{aa}_{\mathcal{C}\psi}$) = α。利用引理 3 和推论 1，我们得到 typ($\mathcal{U}^{dd}_{\mathcal{C}\psi}$) = γ。由此等式可得等式 typ($\mathcal{U}^{aa}_{\mathcal{C}\psi}$) = α，再由引理 2 和引理 4 可知 typ($\mathcal{U}^{da}_{\mathcal{C}\psi}$) = ϵ。因此，typ$_u$($\mathcal{C}$, ψ) = t_4。

(e) 令 typ($\mathcal{U}^{ii}_{\mathcal{C}\psi}$) = typ($\mathcal{U}^{di}_{\mathcal{C}\psi}$) =typ($\mathcal{U}^{ai}_{\mathcal{C}\psi}$) = γ。利用引理 5，我们可得 typ($\mathcal{U}^{id}_{\mathcal{C}\psi}$) = typ($\mathcal{U}^{ia}_{\mathcal{C}\psi}$) = ϵ。利用引理 3 和推论 1，我们得到 typ($\mathcal{U}^{dd}_{\mathcal{C}\psi}$ = $\mathcal{U}^{ad}_{\mathcal{C}\psi}$ = $\mathcal{U}^{aa}_{\mathcal{C}\psi}$ = γ $\{\gamma,\delta,\epsilon\}$ $_u$ $\mathcal{C}$ ψ $\in\{t_5,t_6,t_7\}$ 3, $\mathcal{U}^{da}_{\mathcal{C}\psi}$ $\in$) typ( ) typ( )。利用引理，我们得到 typ( )。因此 typ (,)。□

（命题 *2* 的证明）。设 $(\mathcal{C},\psi)$ 是一个受限的 t-对。考虑到复杂度度量 ψ 具有性质 (c)，并利用引理 4，可得 typ($\mathcal{U}^{ii}_{\mathcal{C}\psi}$) $\neq$ α。因此 typ$_u$($\mathcal{C},\psi$) $\neq$ t_1。利用引理 8，可得 typ$_u$($\mathcal{C},\psi$) $\neq$ t_4。由这些关系和命题 1 可知，该命题的陈述成立。□

5 t-对的可实现上类型

本节将列举所有可实现的 t-对上类型。

命题 3。对于任意 $i\in\{1,2,3,4,5,6,7\}$，存在一个 *t*-对 $(\mathcal{C},\psi)$，使得

$$\mathrm{typ}_u(\mathcal{C},\psi)=t_i.$$

命题 4。对于任意 $i\in\{2,3,5,6,7\}$，存在一个受限的 *t*-对，使得 $(\mathcal{C},h)$

$$\mathrm{typ}_u(\mathcal{C},h)=t_i.$$

这些命题的证明基于针对信息系统 [17] 得到的结果。

设 $U=(A,\ F)$ 为一个信息系统，其中 F 中的属性取值来自 E_k，而 ψ 是定义在 U [17] 上的复杂度度量。注意，ψ 也是定义在决策表集合 $\mathcal{M}_k(F)$ 上的复杂度度量。设 $z=(\nu,\ f_1,\ .....,\ f_n)$ 为 U 上的一个问题。在 [17], 中，问题 z 的三个参数已有定义：$\psi^i_U(z)=\psi(f_1\cdots f_n)$，称为问题 z 描述的复杂度；$\psi^d_U(z)$，即属性来自集合 $\{f_1,\ldots,f_n\}$、能够确定性地解决问题 z 的决策树的最小复杂度；以及 $\psi^a_U(z)$，即属性来自集合 $\{f_1,\ldots,f_n\}$、能够非确定性地解决问题 z 的决策树的最小复杂度。

设 $b,\ c\in\{i,d,a\}$。在 [17], 中定义了部分函数 $\mathcal{U}^{bc}_{U\psi}$：$\mathbb{N}\to\mathbb{N}$：

$$\mathcal{U}^{bc}_{U\psi}(n)=\max\{\psi^b_U(z):z\in Probl(U),\psi^c_U(z)\le n\}.$$

对于数对 (U,ψ)，表 $\mathrm{typ}_{lu}(U,\psi)$ 在 [17] 中定义如下：这是一个具有三行三列的表，其中各行从上到下、各列从左到右分别用索引 i,d,a 标记。值 $\mathrm{typ}(\mathcal{U}_{U\psi}^{bc})$ 位于索引为 $b\in\{i,d,a\}$ 的行与索引为 $c\in\{i,d,a\}$的列的交集处。

现在证明以下命题：

命题 5. 设 U 为一个信息系统，ψ 为 U上的一个复杂度度量。那么

$$\mathrm{typ}_{lu}(U,\psi)=\mathrm{typ}_{u}(Tab(U),\psi).$$

证明。 设 $z=(\nu,f_1,\ldots,f_n)$ 是 U上的一个问题，$T(z)$ 是与该问题对应的决策表。容易看出，$\psi_U^i(z)=\psi^i(T(z))$。可以证明，以非确定性方式求解问题，且只使用集合 $\{f_1,\ldots,f_n\}$ 中的属性的决策树集合（参见[17]中的相应定义），等于表 $T(z)$ 的非确定性决策树集合。由此可得，$\psi_U^a(z)=\psi^a(T(z))$，且 $\psi_U^d(z)=\psi^d(T(z))$。利用这些等式，我们可以证明 $\mathrm{typ}_{lu}(U,\psi)=\mathrm{typ}_u(Tab(U)\ \psi)$。□

该命题使我们能够将针对信息系统 [17] 得到的结果推广到决策表闭类的情形。在下列七个引理中的每一个之前，我们都定义一对 $(U,\ \psi)$，其中 U 是一个信息系统，ψ 是定义在 U 上的复杂度度量。

定义如下一个有序对 (U_1,π)：$U_1=(\mathbb{N},F_1)$，其中 $F_1=\{f\}$ 且$f\equiv 0$，并且 $\pi\equiv 0$。

引理 9. 类型$_u(Tab(U_1)\ \pi)=t_1$。

证明。 根据引理 4.1 [17]，可得 $\mathrm{typ}_{lu}(U_1,\pi)=t_1$。利用命题 5，可得 $\mathrm{typ}_u(Tab(U_1)\ \pi)=t_1$。□

将一对 (U_2,h) 定义如下：$U_2=(\mathbb{N},F_2)$，其中 $F_2=F_1$。

引理 10. $\mathrm{typ}_u(Tab(U_2)\ h)=t_2$.

证明。 由引理 4.2 [17] 可知，$\mathrm{typ}_{lu}(U_2,h)=t_2$。利用命题 5，可得 $\mathrm{typ}_u(Tab(U_2)\ h)=t_2$。□

定义一对 (U_3,h) 如下：$U_3=(\mathbb{N},F_3)$，其中 $F_3=\{l_i:\ i\in\mathbb{N}\setminus\{0\}\}$ 并且，对于任意 $i\in\mathbb{N}\setminus\{0\},j\in\mathbb{N}$，若 $j\le i$，则 $l_i(j)=0$；若 $j>i$，则 $l_i(j)=1$。

引理 11. $\mathrm{typ}_u(Tab(U_3)\ h)=t_3$.

证明。 由引理 4.3 [17] 可知，$\mathrm{typ}_{lu}(U_3,h)=t_3$。利用命题 5，可得 $\mathrm{typ}_u(Tab(U_3)\ h)=t_3$。□

我们将一对 (U_4,μ) 定义如下：$U_4=(\mathbb{N},F_4)$，其中 $F_4=F_3,\mu(\lambda)=0,\mu(l_{i_1}\cdots l_{i_m})=1$若 $m=1$或 $m=2$且 $i_1>i_2,\mu(l_{i_1}\cdots l_{i_m})=$在其他情况下取最大值$\{i_1,\ldots,i_m\}$。

引理 12. $\mathrm{typ}_u(Tab(U_4)\ \mu) = t_4$.

证明。由引理 4.4 [17] 可知，$\mathrm{typ}_{lu}(U_4, \mu) = t_4$。利用命题 5，可得 $\mathrm{typ}_u(Tab(U_4)\ \mu) = t_4$。□

定义一对 (U_5, h) 如下：$U_5 = (\mathbb{N}, F_5)$，其中 $F_5 = \{f_i : i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$，并且对于任意 $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, j \in \mathbb{N}$，若 $i = j$，则 $f_i(j) = 1$；若 $i \neq j$，则 $f_i(j) = 0$。

引理 13。$\mathrm{typ}_u(Tab(U_5)\ h) = t_5$。

证明。由引理 4.5 [17] 可知，$\mathrm{typ}_{lu}(U_5, h) = t_5$。利用命题 5，可得 $\mathrm{typ}_u(Tab(U_5)\ h) = t_5$。□

我们定义一对 (U_6, h) 如下：$U_6 = (\mathbb{N}, F_6)$，其中 $F_6 = F_5 \cup G$,$G = \{g_{2i+1} : i \in \mathbb{N}\}$，并且对于任意 $i \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{N}$，若 $j \in \{2i+1, 2i+2\}$，则$g_{2i+1}(j) = 1$；若 $j \notin \{2i+1, 2i+2\}$，则 $g_{2i+1}(j) = 0$。

引理 14。类型$_u(Tab(U_6)\ h) = t_6$。

证明。由引理 4.6 [17] 可知，$\mathrm{typ}_{lu}(U_6, h) = t_6$。利用命题 5，我们得到 $\mathrm{typ}_u(Tab(U_6)\ h) = t_6$。□

我们将对 (U_7, h) 定义如下：$U_7 = (\mathbb{N}, F_7)$，其中 $F_7 = F_3 \cup F_5$。

引理 15. $\mathrm{typ}_u(Tab(U_7)\ h) = t_7$.

证明。由引理 4.7 [17] 可得 $\mathrm{typ}_{lu}(U_7, h) = t_7$. 利用命题 5，可得 $\mathrm{typ}_u(Tab(U_7)\ h) = t_7$.□

证明（命题 *3*）。命题的结论由引理 9-15 得出。□

证明（命题 *4*）。命题的结论由引理 10、11、13、14 和 15 得出。□

6 两个 t-对的并

本节定义两个 t-对的并，该并也是一个 t-对，并研究其上类型。设 $\tau_1 = (\mathcal{C}_1, \psi_1)$ 和 $\tau_2 = (\mathcal{C}_2, \psi_2)$ 为 t- 对，其中 $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{M}_{k_1}(F_1)$ 且 $\mathcal{C}_2 \subseteq \mathcal{M}_{k_2}(F_2)$。如果满足 $F_1 \cap F_2 = \varnothing$ 且 $\psi_1(\lambda) = \psi_2(\lambda)$，则称这两个 t-对相容 。现在定义一个 t-对 $\tau = (\mathcal{C}, \psi)$，称其为相容 t-对 τ_1 和 τ_2的并。

定义 *24*。闭类 $\mathcal{C}$ 在 τ 中的定义如下：$\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \subseteq \mathcal{M}_{\max(k_1,k_2)}(F_1 \cup F_2)$。复杂度度量 ψ 在 τ 中对任意单词$\alpha \in (F_1 \cup F_2)^*$ 定义如下：如果 $\alpha \in F_1^*$，则 $\psi(\alpha) = \psi_1(\alpha)$；如果 $\alpha \in F_2^*$，则 $\psi(\alpha) = \psi_2(\alpha)$；如果 α 包含来自 F_1 和 F_2 的字母，则 $\psi(\alpha)$可以取自 $\mathbb{N}$的任意值。特别地，如果 $\psi_1 = \psi_2 = h$，则作为 ψ 我们可以使用深度 h。

我们现在考虑 t-对 $\tau = (\mathcal{C}, \psi)$ 的上类型。我们用 $\overset{\frown}{\max}$ 表示线性序 $\alpha \preceq \beta \preceq \gamma \preceq \delta \preceq \epsilon$ 下的最大值函数。

定理 3. 对于任意 $b, c \in \{i, d, a\}$，等式 $\mathrm{typ}(\mathcal{U}^{bc}_{\mathcal{C}\psi}) = \overset{\frown}{\max}(\mathrm{typ}(\mathcal{U}^{bc}_{\mathcal{C}_1\psi_1}), \mathrm{typ}(\mathcal{U}^{bc}_{\mathcal{C}_2\psi_2}))$ 均成立，但以下情况除外：$bc = da$ 且 $\mathrm{typ}(\mathcal{U}^{da}_{\mathcal{C}_1\psi_1}) = \mathrm{typ}(\mathcal{U}^{da}_{\mathcal{C}_2\psi_2}) = \gamma$。在最后一种情况下，$\mathrm{typ}(\mathcal{U}^{da}_{\mathcal{C}\psi}) \in \{\gamma, \delta\}$。

证明. 设 $n \in \mathbb{N}$ 和 $b, c \in \{i, d, a\}$。现在定义值 $M = \max(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2)$，其中 $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}^{bc}_{\mathcal{C}_1\psi_1}(n)$ 和 $\mathcal{U}_2 = \mathcal{U}^{bc}_{\mathcal{C}_2\psi_2}(n)$。$\mathcal{U}_1$ 和 $\mathcal{U}_2$ 的值都取自集合 $\{\varnothing, \infty\} \cup \mathbb{N}$（参见引理 2 之前的定义）。若 $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_2 = \varnothing$，则 $M = \varnothing$。若 $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ 中一个等于 $\varnothing$，另一个等于数值 $m \in \mathbb{N}$，则 $M = m$。若 $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \in \mathbb{N}$，则 $M = \max(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2)$。若 $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ 中至少一个等于 ∞，则 $M = \infty$。

根据部分函数 $\mathcal{U}^{bc}_{\mathcal{C}\psi}(n)$的定义，可得以下等式，其中 $n \in \mathbb{N}$ 和 $b, c \in \{i, d, a\}$：$\mathcal{U}^{bc}_{\mathcal{C}\psi}(n) = \max(\mathcal{U}^{bc}_{\mathcal{C}_1\psi_1}(n), \mathcal{U}^{bc}_{\mathcal{C}_2\psi_2}(n))$。在证明的后续部分，我们将直接使用此等式，不再特别说明。由此等式可得 $\mathrm{typ}(\mathcal{U}^{bc}_{\mathcal{C}_1\psi_1}) \preceq \mathrm{typ}(\mathcal{U}^{bc}_{\mathcal{C}\psi})$ 和 $\mathrm{typ}(\mathcal{U}^{bc}_{\mathcal{C}_2\psi_2}) \preceq \mathrm{typ}(\mathcal{U}^{bc}_{\mathcal{C}\psi})$。现在我们分别考虑两种不同情况：1) $\mathrm{typ}(\mathcal{U}^{bc}_{\mathcal{C}_1\psi_1}) = \mathrm{typ}(\mathcal{U}^{bc}_{\mathcal{C}_2\psi_2})$ 和 2) $\mathrm{typ}(\mathcal{U}^{bc}_{\mathcal{C}_1\psi_1}) \neq \mathrm{typ}(\mathcal{U}^{bc}_{\mathcal{C}_2\psi_2})$。

1) 令 $\mathrm{typ}(\mathcal{U}^{bc}_{\mathcal{C}_1\psi_1}) = \mathrm{typ}(\mathcal{U}^{bc}_{\mathcal{C}_2\psi_2})$】【。

(a)设$\mathrm{typ}(\mathcal{U}^{bc}_{\mathcal{C}_1\psi_1}) = \mathrm{typ}(\mathcal{U}^{bc}_{\mathcal{C}_2\psi_2}) = \alpha$。由于函数 $\mathcal{U}^{bc}_{\mathcal{C}_1\psi_1}$ 和 $\mathcal{U}^{bc}_{\mathcal{C}_2\psi_2}$ 均有上界，因此函数 $\mathcal{U}^{bc}_{\mathcal{C}\psi} = \max(\mathcal{U}^{bc}_{\mathcal{C}_1\psi_1}, \mathcal{U}^{bc}_{\mathcal{C}_2\psi_2})$ 也有上界。由此可得，$\mathrm{typ}(\mathcal{U}^{bc}_{\mathcal{C}\psi}) = \overset{\frown}{\max}(\mathrm{typ}(\mathcal{U}^{bc}_{\mathcal{C}_1\psi_1}), \mathrm{typ}(\mathcal{U}^{bc}_{\mathcal{C}_2\psi_2})) = \alpha$。

(b) 设 $\mathrm{typ}(\mathcal{U}^{bc}_{\mathcal{C}_1\psi_1}) = \mathrm{typ}(\mathcal{U}^{bc}_{\mathcal{C}_2\psi_2}) = \beta$。由 $Dom^+(\mathcal{U}^{bc}_{\mathcal{C}_1\psi_1})$ 和 $Dom^+(\mathcal{U}^{bc}_{\mathcal{C}_2\psi_2})$ 均为有限集可知，$Dom^+(\mathcal{U}^{bc}_{\mathcal{C}\psi})$ 也是有限集。同理可证明，$\mathcal{U}^{bc}_{\mathcal{C}\psi}$ 在 $\mathcal{C}$ 上从上方无界。由此可得 $\mathrm{typ}(\mathcal{U}^{bc}_{\mathcal{C}\psi}) = \overset{\frown}{\max}(\mathrm{typ}(\mathcal{U}^{bc}_{\mathcal{C}_1\psi_1}), \mathrm{typ}(\mathcal{U}^{bc}_{\mathcal{C}_2\psi_2})) = \beta$。

(c) 设 $\mathrm{typ}(\mathcal{U}^{bc}_{\mathcal{C}_1\psi_1}) = \mathrm{typ}(\mathcal{U}^{bc}_{\mathcal{C}_2\psi_2}) = \gamma$。由此可知，函数 ψ^b 在 $\mathcal{C}$ 上从上方无界。根据命题 1 可知，bc 属于集合 $\{ii, di, dd, da, ai, ad, aa\}$。设 $c = b$。利用引理 4，可得 $\mathrm{typ}(\mathcal{U}^{bb}_{\mathcal{C}\psi}) = \gamma$。设 $bc \in \{di, ai, ad\}$。利用引理 3 以及不等式 $\mathrm{typ}(\mathcal{U}^{bc}_{\mathcal{C}_1\psi_1}) \preceq \mathrm{typ}(\mathcal{U}^{bc}_{\mathcal{C}\psi})$ 和 $\mathrm{typ}(\mathcal{U}^{bc}_{\mathcal{C}_2\psi_2}) \preceq \mathrm{typ}(\mathcal{U}^{bc}_{\mathcal{C}\psi})$，可得 $\mathrm{typ}(\mathcal{U}^{bc}_{\mathcal{C}\psi}) = \gamma$。只剩下 $bc = da$ 这一种情况。由于不存在满足 $\mathcal{U}^{bc}_{\mathcal{C}_1\psi_1}(n) = \infty$ 或 $\mathcal{U}^{bc}_{\mathcal{C}_2\psi_2}(n) = \infty$ 的 $n \in \mathbb{N}$，根据引理 2，可得 $Dom(\mathcal{U}^{bc}_{\mathcal{C}\psi})$ 是一个无限集。因此，$\mathrm{typ}(\mathcal{U}^{bc}_{\mathcal{C}\psi}) \neq \epsilon$，进而 $\mathrm{typ}(\mathcal{U}^{bc}_{\mathcal{C}\psi}) \in \{\gamma, \delta\}$。根据命题6，这两种情况都可能发生。

(d) 设 $\mathrm{typ}(\mathcal{U}^{bc}_{\mathcal{C}_1\psi_1}) = \mathrm{typ}(\mathcal{U}^{bc}_{\mathcal{C}_2\psi_2}) = \delta$。由此可知，不存在满足 $\mathcal{U}^{bc}_{\mathcal{C}_1\psi_1}(n) = \infty$ 或 $\mathcal{U}^{bc}_{\mathcal{C}_2\psi_2}(n) = \infty$ 的 $n \in \mathbb{N}$。利用引理 2，我们得出 $Dom(\mathcal{U}^{bc}_{\mathcal{C}\psi})$ 是一个无限集。由于 $Dom^-(\mathcal{U}^{bc}_{\mathcal{C}_1\psi_1})$ 和$Dom^-(\mathcal{U}^{bc}_{\mathcal{C}_2\psi_2})$ 均为有限集，因此 $Dom^-(\mathcal{U}^{bc}_{\mathcal{C}\psi})$ 也为有限集。因此，$\mathrm{typ}(\mathcal{U}^{bc}_{\mathcal{C}\psi}) = \overset{\frown}{\max}(\mathrm{typ}(\mathcal{U}^{bc}_{\mathcal{C}_1\psi_1}), \mathrm{typ}(\mathcal{U}^{bc}_{\mathcal{C}_2\psi_2})) = \delta$。

(e) 令 typ($\mathcal{U}^{bc}_{\mathcal{C}_1\psi_1}$) = typ($\mathcal{U}^{bc}_{\mathcal{C}_2\psi_2}$) = ϵ。由于 $Dom(\mathcal{U}^{bc}_{\mathcal{C}_1\psi_1})$和 $Dom(\mathcal{U}^{bc}_{\mathcal{C}_2\psi_2})$ 都是有限集合，我们得到 $Dom(\mathcal{U}^{bc}_{\mathcal{C}\psi})$也是一个有限集合。因此，typ($\mathcal{U}^{bc}_{\mathcal{C}\psi}$) = $\widetilde{\max}$(typ($\mathcal{U}^{bc}_{\mathcal{C}_1\psi_1}$)，typ($\mathcal{U}^{bc}_{\mathcal{C}_2\psi_2}$)) = ϵ。

2）设 typ($\mathcal{U}^{bc}_{\mathcal{C}_1\psi_1}$) ≠ typ($\mathcal{U}^{bc}_{\mathcal{C}_2\psi_2}$)。记 $f = \mathcal{U}^{bc}_{\mathcal{C}_1\psi_1}$ 和 $g = \mathcal{U}^{bc}_{\mathcal{C}_2\psi_2}$。设 typ($f$) ⪯ typ($g$)。现在我们考虑若干种情况。

(a) 令 typ(g) = ϵ。由此可知，$Dom(g)$ 是一个有限集合。考虑到这一事实，我们得到 $Dom(\max(f,g))$ 也是一个有限集合。因此，typ($\max(f,g)$) = $\widetilde{\max}$(typ(f), typ(g)) = ϵ。稍后我们将假设 typ(g) ≠ ϵ。

(b) 设 typ(f) = α。那么，f 和 g 都是非递减函数，f有上界，而 g 无上界。由此可知，存在 $n_0 \in \mathbb{N}$，使得对于任意 $n \in \mathbb{N}$、$n \geq n_0$，都有 $f(n) < g(n)$。利用这一事实，我们得出，对于 $n \geq n_0$，$\max(f(n)\ g(n)) = g(n)$。因此，typ($\max(f,g)$) = $\widetilde{\max}$(typ(f), typ(g)) = typ(g)。后面我们将假设 typ(f) ≠ α。这意味着我们只需考虑以下数对：(typ(f), typ(g)) ∈{(β,δ), (β,γ), (γ,δ)}。

(c) 设 typ(f) = β，typ(g) = δ。由此可知，$Dom^-(f)$ $Dom^+(g)$ 都是无限集，而 $Dom^+(f)$ $Dom^-(g)$ 都是有限集。考虑到 f 和 g 都是非递减函数，可得存在 $n_0 \in \mathbb{N}$，使得对于任意 $n \in \mathbb{N}$，$n \geq n_0$，均有 $f(n) < g(n)$。因此，typ($\max(f, g)$) = $\widetilde{\max}$(typ(f)，typ(g)) = typ(g) = δ。

(d) 设 typ(f) = β，typ(g) = γ。那么 $Dom^+(\max(f, g))$ 是一个无限集。考虑到 $Dom^-(g)$ 是一个无限集，而 $Dom^+(f)$ 是一个有限集，可得 $Dom^-(\max(f, g))$ 也是一个无限集。因此，typ($\max(f, g)$) = $\widetilde{\max}$(typ(f)，typ(g)) = typ(g) = γ。

(e) 令 typ(f) = γ，typ(g) = δ。由此可知，$Dom^+(\max(f, g))$ 是一个无限集，而 $Dom^-(\max(f, g))$ 是一个有限集。因此，typ($\max(f, g)$) = $\widetilde{\max}$(typ(f)，typ(g)) = typ(g) = δ。□

下一个陈述可由命题 1 和定理 3 直接推出。

推论 2. 设 τ_1 和 τ_2 为相容的 *t*-对，τ 为这些 *t*-对的并集。那么 $\mathrm{typ}_u(\tau)$ 的可能取值位于图 *9* 所示的表中，即标记为 $\mathrm{typ}_u(\tau_1)$ 的行与标记为 $\mathrm{typ}_u(\tau_2)$的列的交集处。

	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7
t_1	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7
t_2	t_2	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7
t_3	t_3	t_3	t_3	t_4	t_7	t_7	t_7
t_4	t_4	t_4	t_4	t_4	t_7	t_7	t_7
t_5	t_5	t_5	t_7	t_7	t_5, t_6	t_6	t_7
t_6	t_6	t_6	t_7	t_7	t_6	t_6	t_7
t_7	t_7	t_7	t_7	t_7	t_7	t_7	t_7

图 9. 两个相容 t-对之并的可能上类型

为完成对 t-对并集的研究，我们证明以下命题。

命题6。 *(a)* 存在相容的 *t*-对 τ_1^1 和 τ_2^1 及其并集τ^1，使得 $\mathrm{typ}_u(\tau_1^1) = \mathrm{typ}_u(\tau_2^1) = \mathrm{typ}_u(\tau^1) = t_5$。

(b) 存在相容的 *t*-对 τ_1^2 和 τ_2^2，以及它们的并集 τ^2，使得$\mathrm{typ}_u(\tau_1^2) = \mathrm{typ}_u(\tau_2^2) = t_5$且 $\mathrm{typ}_u(\tau^2) = t_6$。

证明。 对于 $i \in \mathbb{N}$，我们将图 10 中所示的决策表记为 $F_i = \{a_i, b_i, c_i\}$ 和 G_i。我们研究 t-对 $(\mathcal{T}_i, \psi_i)$，其中 $\mathcal{T}_i$ 是来自 $\mathcal{M}_2(F_i)$ 的决策表闭类，等于 $[G_i]$； ψ_i 是定义在 $\mathcal{M}_2(F_i)$ 上的复杂度度量，其定义如下： $\psi_i(\lambda) = 0, \psi_i(a_i) = \psi_i(b_i) = \psi_i(c_i) = i$且 $\psi_i(\alpha) = i + 1$，如果 $\alpha \in F_i^*$且 $|\alpha| \geq 2$。

$$G_i = \begin{array}{|ccc|c|}\hline a_i & b_i & c_i & \\ \hline 1 & 0 & 0 & \{1\} \\ 0 & 1 & 0 & \{2\} \\ 0 & 0 & 1 & \{3\} \\ \hline \end{array}$$

图 10. 决策表 G_i

现在我们研究函数 $\mathcal{U}^{da}_{\mathcal{T}_i\psi_i}$。由于列复制和列置换操作不会改变确定性决策树和非确定性决策树的最小复杂度，因此我们只考虑更改决策和删除列的操作。

通过这些操作，可以通过以下三种方式从 G_i 得到来自 $\mathcal{T}_i$ 的决策表：a) 仅更改决策，b) 删除一列并更改决策，以及 c) 删除两列并更改决策。图 11 展示了来自 $\mathcal{T}_i$ 的决策表在每种情况下的示例。不失一般性，我们可以只考虑这三个表 $H_1, H_2,$和 H_3。

a) $H_1 = \begin{array}{|ccc|c|}\hline a_i & b_i & c_i & \\ \hline 1 & 0 & 0 & d_1 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ \hline \end{array}$ *b*) $H_2 = \begin{array}{|cc|c|}\hline a_i & b_i & \\ \hline 0 & 0 & d_4 \\ 1 & 0 & d_5 \\ 0 & 1 & d_6 \\ \hline \end{array}$ *c*) $H_3 = \begin{array}{|c|c|}\hline c_i & \\ \hline 0 & d_7 \\ 1 & d_8 \\ \hline \end{array}$

图 11. 来自闭类 $\mathcal{T}_i$ 的决策表，其中 $d_1, \ldots, d_8 \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$

(a) 表 H_1 有三种不同情况：(i) 决策集合d_1, d_2, d_3 两两不相交；(ii) 存在 l, $t \in \{1, 2, 3\}$，使得 $l \neq t, d_l \cap d_t \neq \varnothing$ 和 $d_1 \cap d_2 \cap d_3 = \varnothing$；(iii) $d_1 \cap d_2 \cap d_3 \neq \varnothing$。在第一种情况下， $\psi_i^a(H_1) = i$且 $\psi_i^d(H_1) = i + 1$。在第二种情况下， $\psi_i^a(H_1) = i$ 且 $\psi_i^d(H_1) = i$。在第三种情况下， $\psi_i^a(H_1) = 0$ 且 $\psi_i^d(H_1) = 0$。

(b) 表 H_2有三种不同的情况：(i) 决策集合d_4, d_5, d_6 两两不相交；(ii) 存在 l, $t \in \{4, 5, 6\}$，使得 $l \neq t, d_l \cap d_t \neq$

$\varnothing$和 $d_4 \cap d_5 \cap d_6 = \varnothing$，以及 (iii) $d_4 \cap d_5 \cap d_6 \neq \varnothing$。在第一种情况下， $\psi_i^a(H_2) = i+1$和 $\psi_i^d(H_2) = i+1$。在第二种情况下，视相交的决策集而定，我们有 $\psi_i^a(H_2) = \psi_i^d(H_2) = i+1$或 $\psi_i^a(H_2) = \psi_i^d(H_2) = i$。在第三种情况下， $\psi_i^a(H_2) = 0$ 和 $\psi_i^d(H_2) = 0$。

(c) 表 H_3 有两种不同的情况：(i) $d_7 \cap d_8 = \varnothing$ 和 (ii) $d_7 \cap d_8 \neq \varnothing$。第一种情况下， $\psi_i^a(H_3) = i$ 和 $\psi_i^d(H_3) = i$。第二种情况下，$\psi_i^a(H_3) = 0$ 和 $\psi_i^d(H_3) = 0$。

因此，我们得到，对于任意 $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{U}^{da}_{\mathcal{T}_i \psi_i}(n) = \begin{cases} 0, & n < i, \\ i+1, & n \geq i. \end{cases} \tag{3}$$

设 K 是集合 $\mathbb{N}$ 的一个无限子集。记 $F_K = \cup_{i \in K} F_i$ 和 $\mathcal{T}_K = \cup_{i \in K}[G_i]$。显然， $\mathcal{T}_K$ 是来自 $\mathcal{M}_2(F_K)$ 的决策表的一个闭类。现在我们定义 $\mathcal{M}_2(F_K)$ 上的复杂度度量 ψ_K。令 $\alpha \in F_K^*$。若对于某个 $i \in K$，有 $\alpha \in F_i^*$，则 $\psi_K(\alpha) = \psi_i(\alpha)$。若 α 同时包含来自 F_i 和 F_j 的字母，$i \neq j$，则 $\psi_K(\alpha) = 0$。

令 $K = \{n_j : j \in \mathbb{N}\}$，并令 $n_j < n_{j+1}$ 对任意 $j \in \mathbb{N}$ 成立。我们定义一个函数$\varphi_K : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 如下。令 $n \in \mathbb{N}$。若 $n < n_0$，则 $\varphi_K(n) = 0$。令，对于某个 $j \in \mathbb{N}$， $n_j \leq n < n_{j+1}$。于是 $\varphi_K(n) = n_j$。利用 (3)，可以证明，对于任意$n \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{U}^{da}_{\mathcal{T}_K \psi_K}(n) = \varphi_K(n).$$

利用这一等式，可以证明，如果集合 $\mathbb{N} \setminus K$ 是无限的，则 $\mathrm{typ}(\mathcal{U}^{da}_{\mathcal{T}_K \psi_K}) = \gamma$；如果集合 $\mathbb{N} \setminus K$ 是有限的，则 $\mathrm{typ}(\mathcal{U}^{da}_{\mathcal{T}_K \psi_K}) = \delta$。

记 $K_1^1 = \{3j : j \in \mathbb{N}\}$， $K_2^1 = \{3j+1 : j \in \mathbb{N}\}$ 和 $K^1 = K_1^1 \cup K_2^1$。记作 $\tau_1^1 = (\mathcal{T}_{K_1^1}, \psi_{K_1^1})$、 $\tau_2^1 = (\mathcal{T}_{K_2^1}, \psi_{K_2^1})$ 和 $\tau^1 = (\mathcal{T}_{K^1}, \psi_{K^1})$。可以证明，t-对 τ_1^1 和 τ_2^1 是相容的，且 τ^1 是 τ_1^1 和 τ_2^1 的并。容易证明，$\mathrm{typ}(\mathcal{U}^{da}_{\mathcal{T}_{K_1^1} \psi_{K_1^1}}) = \mathrm{typ}(\mathcal{U}^{da}_{\mathcal{T}_{K_2^1} \psi_{K_2^1}}) = \mathrm{typ}(\mathcal{U}^{da}_{\mathcal{T}_{K^1} \psi_{K^1}}) = \gamma$。利用命题 2，我们得到 $\mathrm{typ}_u(\tau_1^1) = \mathrm{typ}_u(\tau_2^1) = \mathrm{typ}_u(\tau^1) = t_5$。

记 $K_1^2 = \{2j : j \in \mathbb{N}\}$， $K_2^2 = \{2j+1 : j \in \mathbb{N}\}$ 和 $K^2 = K_1^2 \cup K_2^2 = \mathbb{N}$。记 $\tau_1^2 = (\mathcal{T}_{K_1^2}, \psi_{K_1^2})$、$\tau_2^2 = (\mathcal{T}_{K_2^2}, \psi_{K_2^2})$ 和 $\tau^2 = (\mathcal{T}_{K^2}, \psi_{K^2})$。可以证明，t-对 τ_1^2和 τ_2^2是相容的，并且 τ^2是 τ_1^2和 τ_2^2的并。容易证明，$\mathrm{typ}(\mathcal{U}^{da}_{\mathcal{T}_{K_1^2} \psi_{K_1^2}}) = \mathrm{typ}(\mathcal{U}^{da}_{\mathcal{T}_{K_2^2} \psi_{K_2^2}}) = \gamma$以及 $\mathrm{typ}(\mathcal{U}^{da}_{\mathcal{T}_{K^2} \psi_{K^2}}) = \delta$。利用命题 2，我们得到 $\mathrm{typ}_u(\tau_1^2) = \mathrm{typ}_u(\tau_2^2) = t_5$ 以及 $\mathrm{typ}_u(\tau^2) = t_6$。
□

7 定理 1 和定理 2 的证明

首先，我们考虑一些辅助命题。

定义 25. 定义函数 $\rho : \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon\} \to \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon\}$如下： $\rho(\alpha) = \epsilon, \rho(\beta) = \delta, \rho(\gamma) = \gamma, \rho(\delta) = \beta, \rho(\epsilon) = \alpha$。

命题7（命题 5.1 [17]）。设 X 是一个非空集合， $f : X \to \mathbb{N}, g : X \to \mathbb{N}, \mathcal{U}^{fg}(n) = max\{f(x) : x \in X, g(x) \leq n\}$ 且 $\mathcal{L}^{gf}(n) = min\{g(x) : x \in X, f(x) \geq n\}$ 对任意 $n \in \mathbb{N}$均成立。则 $typ(\mathcal{L}^{gf}) = \rho(typ\ (\mathcal{U}^{fg}))$。

利用命题7，我们得到以下结论。

命题8。 设$(\mathcal{C},\psi)$为一个*t*-对，且 $b,c \in \{i,d,a\}$。那么$\mathrm{typ}(\mathcal{L}^{cb}_{\mathcal{C}\psi}) = \rho(\mathrm{typ}(\mathcal{U}^{bc}_{\mathcal{C}\psi}))$。

<*escape*>**推论3**。 令 $(\mathcal{C},\psi)$ 为一个 *t*-对，且 $i \in \{1,\dots,7\}$。那么 $\mathrm{typ}_u(\mathcal{C},\psi) = t_i$ 当且仅当 $\mathrm{typ}(\mathcal{C},\psi) = T_i$。</*escape*>

证明（定理*1*）。该定理的结论由命题1和命题3以及推论3直接得出。□

证明（定理*2*）。该定理的结论由命题2和命题4以及推论3直接得出。□

8 结论

本文旨在比较闭类决策表的确定性与非确定性决策树复杂度。这是一项定性研究：我们考察有限种函数行为类型，以刻画决策表不同参数之间的关系。未来的论文将开展定量研究：我们将研究所考察函数的下界和上界。

致谢

本出版物所报告的研究得到了阿卜杜拉国王科技大学（KAUST）的支持。

参考文献

1. AbouEisha, H., Amin, T., Chikalov, I., Hussain, S., Moshkov, M.：《组合优化与数据挖掘中的动态规划扩展》，智能系统参考丛书，第146卷。施普林格（2019）2. Alsolami, F., Azad, M., Chikalov, I., Moshkov, M.：《多值决策表的决策树、抑制树及规则》，智能系统参考丛书，第156卷。施普林格（2020）3. Atminas, A., Lozin, V.V., Moshkov, M.：因子语言的WQO可判定性。信息与计算 **256**，321–333（2017）4. Blum, M., Impagliazzo, R.：一般预言机与预言机类（扩展摘要）。载于：第28届计算机科学基础年度研讨会，美国加利福尼亚州洛杉矶，1987年10月27日至29日。第118–126页。IEEE计算机学会（1987）5. Boros, E., Hammer, P.L., Ibaraki, T., Kogan, A.：数值数据的逻辑分析。数学规划 **79**，163–190（1997）6. Boros, E., Hammer, P.L., Ibaraki, T., Kogan, A., Mayoraz, E., Muchnik, I.B.：数据逻辑分析的实现。IEEE知识与数据工程汇刊 **12**(2)，292–306（2000）

7. Boutell, M.R., Luo, J., Shen, X., Brown, C.M.：多标签场景分类学习。《模式识别》**37**(9), 1757–1771 (2004) 8. Breiman, L., Friedman, J.H., Olshen, R.A., Stone, C.J.：《分类与回归树》。Wadsworth and Brooks (1984) 9. Buhrman, H., de Wolf, R.：复杂度度量与决策树复杂度：综述。《理论计算机科学》**288**(1), 21–43 (2002) 10. Chikalov, I., Lozin, V.V., Lozina, I., Moshkov, M., Nguyen, H.S., Skowron, A., Zielosko, B.：《数据分析的三种方法——测试理论、粗糙集与数据逻辑分析》，智能系统参考丛书，第41卷。施普林格 (2013) 11. F¨urnkranz, J., Gamberger, D., Lavrac, N.：《规则学习基础》。认知技术，施普林格 (2012) 12. Hartmanis, J., Hemachandra, L.A.：单向函数、鲁棒性与NP完全集合的非同构性。载于：第二届复杂性理论结构年度会议论文集，美国纽约州伊萨卡市康奈尔大学，1987年6月16–19日。IEEE计算机学会 (1987) 13. Lozin, V.V., Moshkov, M.：只读一次布尔函数的关键性质与复杂度度量。《数学与人工智能年刊》**89**(5-6), 595–614 (2021) 14. Molnar, C.：《可解释机器学习：使黑箱模型具有可解释性的指南》。第2版 (2022), christophm.github.io/interpretable-ml-book/ 15. Moshkov, M.：来自闭类的表的条件测试深度。载于：Markov, A.A.（编），《离散分析的组合代数与概率方法》（俄文），第78–86页。高尔基大学出版社，高尔基 (1989) 16. Moshkov, M.：关于计算布尔函数的决策树深度。《基础信息学》**22**(3), 203–215 (1995) 17. Moshkov, M.：确定性与非确定性决策树复杂度的比较分析：局部方法。《粗糙集论丛》**4**, 125–143 (2005) 18. Moshkov, M.：决策树的时间复杂度。《粗糙集论丛》**3**, 244–459 (2005) 19. Moshkov, M.：《确定性与非确定性决策树的比较分析》，智能系统参考丛书，第179卷。施普林格 (2020) 20. Moshkov, M., Piliszczuk, M., Zielosko, B.：《粗糙集中的部分覆盖、约简与决策规则——理论与应用》，计算智能研究丛书，第145卷。施普林格 (2008) 21. Moshkov, M., Zielosko, B.：《组合机器学习——一种粗糙集方法》，计算智能研究丛书，第360卷。施普林格 (2011) 22. Pawlak, Z.：信息系统的理论基础。《信息系统》**6**(3), 205–218 (1981) 23. Pawlak, Z.：《粗糙集——数据推理的理论方面》，理论与决策文库：D辑，第9卷。Kluwer (1991) 24. Pawlak, Z., Skowron, A.：粗糙集基础。《信息科学》**177**(1), 3–27 (2007) 25. Post, E.：《数理逻辑的二值迭代系统》，数学研究年刊，第5卷。普林斯顿大学出版社，普林斯顿—伦敦 (1941) 26. Quinlan, J.R.：《C4.5：机器学习程序》。Morgan Kaufmann (1993) 27. Robertson, N., Seymour, P.D.：图小子图。XX. Wagner猜想。《组合理论杂志B辑》**92**(2), 325–357 (2004) 28. Rokach, L., Maimon, O.：《基于决策树的数据挖掘——理论与应用》，机器感知与人工智能丛书，第69卷。World Scientific (2007) 29. Tardos, G.：查询复杂度，或者为什么通过随机预言机将 $NP^A \cap coNP^A$ 与 P^A 区分开来很困难 A? 《组合学》**9**(4), 385–392 (1989)

30. Vens, C., Struyf, J., Schietgat, L., Dzeroski, S., Blockeel, H.：用于层次多标签分类的决策树。《机器学习》**73**(2), 185–214 (2008) 31. Zhou, Z., Zhang, M., Huang, S., Li, Y.：多实例多标签学习。《人工智能》**176**(1), 2291–2320 (2012)