arXiv:2304.10620v1 [math.GT] 20 Apr 2023

通过伪阿诺索夫流的端周期映射

MICHAEL P. LANDRY、YAIR N. MINSKY 和 SAMUEL J. TAYLOR

Abstract. 我们证明，任意无限型曲面的无环面端周期映射，都可以由纤维化双曲 3-流形中的深度一叶状结构构造得到，这一过程逆转了 Thurston 的一个著名构造。该构造几乎可以与典范悬挂流横截进行，因此我们能够直接从纤维化结构中恢复此类映射的 Handel–Miller 层状结构。我们还将有限亏格情形下拓扑熵、周期点增长率与曲线交数增长率之间的关系推广到这一情形。固定流形并改变深度一叶状结构，我们便得到 Cantwell–Conlon 叶状结构锥的描述，并证明这些锥上的熵函数是连续且凸的。

Contents

1. 引言 12. 背景 63. spA 代表元的存在性 104. 多汇点—源点动力学 155. 不变层状结构与拓扑熵 276. 旋绕伪阿诺索夫映射的伸缩因子 347. 叶状结构锥与熵函数 428. 与 Handel–Miller 理论的联系 45参考文献 48

1. Introduction

设 L 是一个具有有限多个端且无边界的无限型曲面。同胚 $g\colon L \to L$ 若满足以下条件，则称其为 **端周期的**：在 L 的每个端在 g的某个幂作用下均为吸引的或排斥的；若它不固定任何本质有限多重曲线（模同伦），则称其为 **无环面性**（精确定义见第 2.1 节）。

这类映射自然出现在 Thurston 关于纤维化紧 3-流形的研究中：一个纤维S 可以绕着一个足够良好的曲面 Σ “旋绕”，从而产生一种叶状结构，其中 Σ 是一个紧叶，其补集由非紧曲面 L的平行副本纤维化。因此，这种纤维化的单值化映射是 L上的端周期映射；当 M 是双曲的时，该映射必定无环面性。

本文通过旋转操作逆转这一过程：在适当的双曲纤维化三维流形中，从某种纤维化得到任意阿托罗德端周期映射。更重要的是，由此得到的叶状结构横截于一个伪阿诺索夫流（如 Fried 所示 [Fri79]），而该流的稳定叶状结构和不稳定叶状结构在 L（见定理 A

本研究部分得到 NSF 博士后奖学金 DMS-2013073、NSF 基金 DMS-2005328、DMS-2102018 以及斯隆基金会的资助。

和 定理 B）。我们将此类构造的返回映射称为 旋绕伪阿诺索夫（*spA*）映射。

这一构造带来若干推论：

• 我们直接从伪阿诺索夫结构中恢复了 Handel–Miller 的动力学层状结构。参见 定理 F 和 [Fen92、Fen97、CC99、CCF19]。• 我们确定了旋绕伪阿诺索夫映射的动力学生长率：在所有与其同伦的端周期映射中，spA 映射使周期点的指数增长率达到最小。此外，这一增长率等于曲线在迭代下交数的指数增长率，其对数则是 spA 映射（按适当方式定义的）拓扑熵。参见 定理 C。• 端周期映射的紧化映射环面是一个带边界的流形 N，它可以承载多种深度一叶状结构，其紧叶为 ∂N。这些叶状结构由 Cantwell–Conlon 的 叶状结构锥 参数化；这与 Thurston 范数的纤维化面上的锥类似。通过旋转构造，可以明确表述这种类比；我们证明，叶状结构锥恰好是 Thurston 纤维锥经由包含映射拉回 N 到某个纤维化流形 M (定理 D)。由此可知，拓扑熵在每个叶状结构锥上都是连续凸函数（定理 E）。

1.1. 纤维面理论的动机。设 M 是一个闭双曲流形，其上有到圆的纤维化。 M 到圆的纤维化中的每个纤维 S 都由其同调类确定（反之亦然）；该同调类是某个 $H^1(M$ 中整数元素的庞加莱 ′对偶；$\mathbb{R})$ 称为纤维化类。 M 的各种纤维化由 Thurston 范数组织起来。这是向量空间 $H^1(M$ 上的范数 x；$\mathbb{R})$ 其单位球 $B_x = B_x(M)$ 是一个有限面多面体，具有如下性质：存在一组以 B_x 的顶维面为底的开锥，称为纤维化锥；每个纤维化锥 $\mathcal{C}$ 中的本原整数点都是纤维化类，因此对应于 M 到圆的某种纤维化中的一个纤维。反过来，每个纤维化类都位于纤维化锥 [Thu86] 的内部。

Fried 后来从**伪阿诺索夫悬挂流** $\varphi = \varphi_{\mathcal{C}}$ 的角度重新诠释了 Thurston 的理论；该流 $\mathcal{C}$ 在同伦和重新参数化意义下是唯一确定的 [Fri79]。每个纤维曲面 S 对偶于 $\mathcal{C}$ 中的一个类，并且同伦于该流的截面 φ，也就是说，它与流横截，并且与每条轨道相交无穷多次；相应的首次回归映射 S 是其单值化的伪阿诺索夫代表元。

由于任何纤维化类 α in $\mathcal{C}$ 都会确定一个伪阿诺索夫映射首次回归映射 $f\colon S \to S$，其对应的截面为 S of φ，我们可以将 α 赋值为 f的伸展因子的对数，即其熵，并将该量记为 ent(α)。Fried 证明，这一赋值可扩展为函数 ent: $\mathcal{C} \to (0, \infty)$，它连续、凸，并且在 $\mathcal{C}$ [的边界处趋于无穷]。McMullen 进一步拓展了 Fried 的结果，证明 ent 还具有实解析性和严格凸性 [。此后，对熵函数性质的研究在纤维化锥和伪阿诺索夫映射伸展因子的研究中都占据了重要地位 [。

在边界处。上述讨论的结构仅适用于纤维曲面，即代表纤维化锥内部中类的曲面。然而，在介绍其范数的文章中，Thurston 解释了一个代表纤维化锥 Σ 边界中的类的紧曲面 C的几何意义。回忆一下， Σ 是**紧的**，如果它没有零调分支且它是范数最小的，即 $x([\Sigma]) = -\chi(S)$。根据 [Thu86，第 121], 页的注释，存在叶状结构 $\mathcal{F}$，其 M 以 Σ作为紧叶的集合

使得将叶状结构限制在 $M \setminus \Sigma$ 上是一个以 S^1为底空间的纤维化。特别地， $\mathcal{F}$是 M的一个紧的、余定向的、深度一叶状结构。

我们这里的工作部分受到以下问题的启发：理解 Thurston 的叶状结构与典范伪阿诺索夫悬挂流 $\varphi_{\mathcal{C}}$之间的相互作用。首先，用动力学爆破 φ (见 第 2.2 节）替换 $\varphi_{\mathcal{C}}$ 后（该操作仅在其奇异轨道处对其进行修改），我们可以对其作同痕变换 Σ ，使其与 φ正向横截。这是我们的强横截曲面定理（定理 2.3）的推论；该定理强化了 Mosher 的一项结果，该结果证明了此类横截曲面在同调类 $[\Sigma]$中的存在性。

接下来，对于任意一个 φ 的截面 S （即相关纤维化锥中任意一个纤维曲面，在同伦意义下），我们可以将 S 绕 Σ 旋绕，从而得到一个无限型曲面 L ，该曲面与 φ 横截，与每条流线在正向和反向上都相交无穷多次，并且仅在 Σ 上积聚；参见第 2.3 节。因此，沿流 φ 存在一个定义良好的首次回归映射$f\colon\ L \to L$ ；我们将通过这种构造得到的任意此类映射称为旋绕伪阿诺索夫映射（更正式的定义见定义 3.1）。由此立即可知， $M \setminus \Sigma$ 可以被识别为 f 的映射环面，因此继承了由 L 纤维构成的叶状结构。随后，通过将 Σ 的各个分支作为叶附加进来，即可得到 M 上的叶状结构 $\mathcal{F}$ 。根据构造，叶状结构 $\mathcal{F}$ 与 φ 横截。

旋绕伪阿诺索夫映射 $f\colon\ L \to L$ 从流 φ继承了额外的结构。由于 φ 具有不变的不稳定／稳定奇异叶状结构， $W^{u/s}$, 它们的交集 $\mathcal{W}^{u/s} = L \cap W^{u/s}$ 是一对 f–不变的 L奇异叶状结构。此外， φ 沿其周期轨道的扩张／收缩动力学，在 f 的周期点处施加了相应的动力学（详见 第 4 节）。

这种结构是上述 spA 映射性质（并将在下文更正式地详细阐述）的基础。

大映射类群的研究动机。 近期，人们开始关注大映射类群的研究，即无限型曲面的映射类群。其中一个重要方面是理解大映射类群的元素在多大程度上存在类似 Nielsen–Thurston 的分类（例如见 [MCG，问题 1。1]）。从这个角度来看，对于端数有限的曲面，至少在这种情形下，无限型曲面上的旋绕伪阿诺索夫映射为无环端周期映射提供了这样的标准形代表元。对于这类映射，定理 C 的第二项回答了 [MCG，问题 1。5]。

我们还指出，无环面端周期映射在近期研究中发挥着核心作用；这些研究将其映射环面的双曲几何与组合不变量联系起来 [FKLL21，FKLL23]。

1.2. 主要结果。 受有限型映射类的 Nielsen–Thurston 理论启发，我们可以问，哪些同胚 $L \to L$ 同伦于 spA 映射。我们的结论是，显而易见的必要条件同时也是充分条件：

定理 A。 *端周期同胚 $g\colon\ L \to L$ 同伦于一个 spA 代表元 $f\colon\ L \to L$ ，当且仅当它是无环面的。*

参见 定理 3.2和 定理 3.3。

该证明展示了如何根据 g 的紧化映射环面 N ，构造一个闭双曲流形 M ，其上带有伪阿诺索夫悬挂流 φ ，以及一个嵌入 $N \to M$，将 L 映射到 M 上深度一叶状结构 $\mathcal{F}_L$ 的一个叶；该叶状结构与 φ 的动力学爆破横截。所需的 spA 映射 $f\colon\ L \to L$ 随后即为到叶 L 的首次回归映射 $\mathcal{F}_L$。

.....的构造 M 和 φ 具有相当大的灵活性，因此可以对定理 A作出各种推广。特别是（根据定理 4.2），

定理 B. 一个无环端周期同胚映射 $g\colon\ L \to L$ 同伦于一个 *spA* 代表元 $f\colon\ L \to L$，该代表元与伪阿诺索夫悬挂流真正横截。

也就是说，可以调整构造，使其无需动力学爆破。我们将这样的映射称为“spA$^+$”——参见定义 3.4。

对于任意同胚 $g\colon\ L \to L$，我们将其**增长率** $\lambda(g)$ 定义为其周期点的指数增长率：

$$\lambda(g) = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\#\mathrm{Fix}(g^n)},$$

其中，$\mathrm{Fix}(g)$ 表示 g 的不动点集合。下面的定理给出了 spA 映射增长率的多种刻画，推广了关于有限型曲面上的伪阿诺索夫同胚的已知结果。在定理的表述中，$i(\alpha,\beta)$ 表示曲线 α 和 β 的几何交数。

定理 C (伸展因子的刻画)**.** 设 $f\colon\ L \to L$ 是 *spA*。那么

(1) $\lambda(f) =$ 下确界$_{g\simeq f}\,\lambda(g)$，遍历所有与其同伦的端周期映射 g。*(2)* $\lambda(f)$ $=$最大值$_{\alpha,\,\beta}$上极限$_{n\to\infty}\ \sqrt[n]{i(\alpha,\,f^n(\beta))}$，其中 α,β 是 L 上的本质简单闭曲线。*(3)* $\log\,\lambda(f)$ 是 f 在（唯一的）最大不变紧集上的限制映射的拓扑熵。

参见定理 5.1、推论 6.2以及定理 6.4。

由于 定理 C 将 $\lambda(f)$ 与伪阿诺索夫映射的曲面同胚的伸展因子联系起来，我们将 $\lambda(f)$ 称为 **伸展因子**，即 spA 映射f。

我们在此指出，定理 C 中的第一项可由一个更强的结果推出：如果 $g\colon\ L \to L$是端周期映射，并且同伦于 spA 映射 f，那么对于任意一个 f–周期点（其周期为 n），都存在一个 Nielsen 等价的 g–周期点，其周期也为 n。详情请见 第 6.1 节 。从这个意义上说，在同伦的端周期映射中，spA 映射的动力学最为紧密。

叶状结构锥与熵。 正如闭流形 M 可能有多种纤维化方式，缝合流形 N也可能如此——在适当的意义下。将这些叶状结构表示为$H^1(N)$，便得到 Cantwell–Conlon 的叶状结构锥。具体而言，$H^1(N)$ 中的一个类**若**是某个纤维化的对偶类，$N \smallsetminus \partial N \to S^1$ 且其纤维叶状结构通过附加 N 延拓到 ∂N，则称该类为叶状类。这种叶状结构称为适配于的深度一叶状结构 N；参见第 2.1 节。

Cantwell 和 Conlon 证明，$H^1(N)$ 中的叶状类构成有限多个开有理多面体锥的并集中的整数点，每个这样的锥称为**叶状结构锥**，属于 N [CC99、CCF19]。这也可以作为下一个结果的推论得出：

定理 D（所有叶状结构均由旋绕得到）。存在一个闭双曲3维流形 M 以及一个嵌入 $i\colon\ N \to M$，使得态射 $i^*\colon\ H^1(M) \to H^1(N)$将 M中边界包含 $[\partial_+ N]$的每个纤维化锥映至 N的一个叶状结构锥，而且 N 的每个叶状结构锥都可由此方式得到。

因此，适用于 N 的每个深度一叶状结构，都是通过使 M的纤维围绕 $\partial_\pm N$旋转而得到的。

此外，对于固定的 N 的叶状结构锥 $\mathcal{C}$，存在一个半流 $\varphi_{\mathcal{C}}$，它是将 M上的伪阿诺索夫悬挂流限制而得到的，因此每个具有 $[\mathcal{F}] \in \mathcal{C}$ 且适用于 N的深度一叶状结构 $\mathcal{F}$ 都与 $\varphi_{\mathcal{C}}$横截。

参见 定理 7.1和 推论 7.2。

在整理了 N 能够纤维化为有限个多面体锥的各种方式，并定义了与这些锥中每个本原整点相关联的伸展因子之后，我们接下来将解释当叶状结构发生形变时，伸展因子如何变化（参见定理 7.3）：

定理 E （熵）。 对于每个叶状结构锥 $\mathcal{C}$，存在一个连续凸函数$\mathrm{ent}\colon \mathcal{C} \to [0,\infty)$，使得对于任意叶状类 $[L] \in \mathcal{C}$，

$$\mathrm{ent}([L]) = \log\left(\textit{stretch factor of the spun pseudo-Anosov } f_L\right).$$

如前所述，在经典的闭纤维化流形情形中，相应的熵函数还具有额外性质：它是实解析的，并且在锥的边界处趋于无穷大。有趣的是，在这里这两种更强的性质都不一定成立，因为 N 中的本质环带（它们由单值化的稳定曲线/直线$L \to L$产生）可能造成阻碍。

通过结合 定理 E 作者先前的工作 [LMT21]，还可以看出，纤维化锥上的熵函数与沿横截曲面切割后得到的叶状结构锥上的熵函数之间存在其他联系。详情见第 7.3 节。

不变层状结构与 *Handel–Miller* 理论。 最后，我们说明这与研究端周期映射的一种早期方法之间的联系。20 世纪 90 年代初，Handel 和 Miller 提出了一套理论，通过使用固定一对典范不变测地叶层的代表元来理解端周期映射 $\Lambda^{\pm}{}_{\mathrm{HM}}$，并以固定的双曲度量为基础；这类似于有限型情形下研究伪阿诺索夫理论的 Casson–Bleiler [CB88] 方法。尽管作者没有将其写成正式文献，但 Fenley [Fen92、Fen97] 以及 Cantwell–Conlon [CC99]，的相关著作中均有不同阐述，而权威性的完整论述见 [CCF19]。参见第 8 节 了解更多背景。

<escape>最后一个定理指出，对于任意 spA 映射 $f\colon L \to L$，Handel–Miller 层状结构的奇异版本 $\Lambda^{\pm}{}_{\mathrm{HM}}$ 均作为其不变叶状结构的子层状结构出现 $\mathcal{W}^{u/s}$，从这个意义上说，每个 spA 映射都是一个「奇异的」Handel–Miller 代表元（参见 定理 8.4）。</escape>

定理 F (spA 是 HM)。 *spA* 映射 f 的不变奇异叶状结构 $\mathcal{W}^{u/s}\colon L \to L$ 包含不变奇异子层状结构 $\Lambda^{\pm}$，它们在 $\widetilde{L}$ 的双曲边界中确定与 *Handel–Miller* 层状结构 $\Lambda^{\pm}{}_{\mathrm{HM}}$相同的端点。

子层状结构 $\Lambda^{\pm}$ 的 $\mathcal{W}^{u/s}$ 是 f 同痕类的拓扑不变量，对于计算 f的拓扑熵至关重要，如 第 5 节所述。关于 定理 F 的更精确表述及更多细节，请参见 第 8 节。从这个意义上说，spA 映射为无环端周期映射提供了一种替代性的、独立的结构理论，该理论依赖于对伪阿诺索夫流的研究，而非 Handel–Miller 理论。

1.3. **致谢**。 感谢 Chris Leininger 提出一个问题，引导我们思考伪阿诺索夫映射伸展因子的极限及其拓扑意义。我们也感谢 JohnCantwell 和 Larry Conlon 就叶状结构锥和端周期映射进行的有益讨论，并感谢 Chi Cheuk Tsang 和 Marissa Loving 对早期

稿件提出的意见。M.L. 感谢奥伯沃尔法赫数学研究所（Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach）在本项目最后阶段提供了理想的工作环境。

2. Background

这里我们简要汇集一些研究端周期映射和伪阿诺索夫流所需的背景知识。

2.1. 端周期映射、深度一叶状结构与缝合流形。设 L 是一个可定向、连通的无限型曲面，具有有限个端且无边界。若 $g\colon L \to L$ 是一个同胚，则 L 的一个端 e 若存在一个邻域 $U \subset L$，使得对于某些 $n \geqslant 1$、$g^n(U) \subset U$ 和 $\bigcap_{i\geqslant 1} g^{in}(U) = \varnothing$，则称其为**吸引的**（或正的）。若该端 e 对 g^{-1} 而言是吸引的，则称其为**排斥的**（或负的）。如果 g 的每个端都是吸引的或排斥的，则称其为**端周期的**。在本文中，我们还要求曲面没有平面端。

如第 1 节所述，如果 g 在同伦意义下不存在不变的本质有限多重曲线，则称其为**无环的**。下面的引理给出了无环映射的一个简单性质，该性质将在后文中发挥作用。

引理 2.1. 设 $g\colon L \to L$ 是一个端周期映射，且 α 是 L中的一条本质闭曲线。假设 $\{\alpha、g(\alpha)、g^2(\alpha)、\dots\}$ 中的每个元素都同伦进入 L的某个固定紧子集。那么 g 不是无环面的。

证明。在 L 上固定一个双曲度量，并令 α_i 为 $g^i(\alpha)$的测地收紧。若 L 的一个带测地边界的紧子曲面 S 满足某个点之后的所有 α_i 都位于 S中，则称它为“ α的g-汇点”。假设保证这样的曲面存在；显然，如果 S 是一个 g-汇点，那么将其边界收紧为测地线后得到的 $g(S)$ 也是如此。

两个 g-汇点的交集在边界收紧后，是一个 g-汇点。因此，存在一个极小的 g-汇点，我们称之为 K。由于 K 是极小的，$K \subset g(K)$ 在同伦意义下相同。但由于它们同胚，因此同伦。于是，K 的边界给出了不变多曲线，表明 g 不是无环面的。□

端周期映射的紧化映射环面。在本文中，我们所说的**缝合流形**是一个紧致、定向的 3-流形 N，其每个边界分支都带有余定向（在其他文献中，这被称为缝合流形 $(M,\ \gamma)$ 其中$\gamma = \varnothing$）。我们记作 $\partial N = \partial_+ N \sqcup \partial_- N$，其中 $\partial_+ N$ 表示从 N 向外余定向的边界分支，而 $\partial_- N$ 表示向内余定向到 N的边界分支。缝合流形这一术语对我们很方便，但我们不会用到该理论的太多内容。

设 N 为一个缝合流形，$\mathcal{F}$ 为 N上的余定向余维一叶状结构，$\mathcal{F}_0$ 表示其紧叶集合。若 $\mathcal{F}|_{N\smallsetminus\mathcal{F}_0}$ 定义了 $N \smallsetminus \mathcal{F}_0$ 到 S^1上的纤维化，则叶状结构 $\mathcal{F}$ 具有**深度**一。当 $\partial N \neq \varnothing$时，本文中 N 上的所有叶状结构都将**适合于** N，其含义是 $\partial N = \mathcal{F}_0$作为余定向曲面。一般而言，我们所考虑的每个深度一叶状结构都是**紧的**，即每个叶都与一条定向相容的横截曲线或正则嵌入弧相交。

以下定理见 [CC17，命题 6。21]，另见 [CC93，定理 1。1]。陈述中请注意，适配于缝合流形的深度一叶状结构 $\mathcal{F}$ N会在 中诱导一个 $H^1(N)$，即由纤维化确定的对偶类 $N \smallsetminus \partial N \to S^1$。

定理 2.2 (Cantwell–Conlon)。设 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{F}'$ 是适配于缝合流形 N的紧叶深度一叶状结构，并在 $H^1(N)$上诱导相同的类。那么， $\mathcal{F}$和 $\mathcal{F}'$可通过一个在 $N \setminus \partial_\pm N$上光滑且在 $\partial_\pm N$上保持不变的连续同伦相互同伦。

适用于缝合流形的深度一叶状结构与紧化的端周期映射的映射环面之间存在重要的对应关系，现将对此进行说明。更多内容请参见 [Fen97，第 3], [CCF19节，引理 12。5], 或参见更为详尽的论述[FKLL21，第 3]节。

设 $g\colon\ L \to L$ 是端周期的。 g 的映射环面为 $L \times [0,\ 1]/(x,1) \sim (f(x),0)$。这个映射环面自然带有一个定向一维叶状结构，称为悬挂流，它由 $\{p\} \times [0,\ 1]$ 在 $L \times [0,\ 1]$ 上的叶状结构诱导而来；我们将这一叶状结构的叶称为悬挂流的轨道。

映射环面是非紧的，但可以通过在悬挂流中逃离紧集的轨道的每个端点附加一个理想点，得到一种自然的紧化。由端周期性可知， g 在 L 中那些在 g的迭代下逃离紧集的点集上适当不连续地作用；对于 g^{-1}的迭代，情况也类似。由此可见，理想点的并自然构成一个不连通曲面，每个分支对应于 L的一个端的 g-轨道。将这个曲面粘接上去后，我们得到一个带边界的紧流形，称为 g的**紧化映射环面**，记作 N_g。

∂N_g 的各个分支都具有自然的余定向：对应于轨道负端的分支朝内余定向，对应于轨道正端的分支朝外余定向。朝外和朝内的边界分支之并分别记作 $\partial_+ N_g$ 和 $\partial_- N_g$。

对我们而言，一个重要的事实是 g 是阿托罗多的，当且仅当 N_g 是阿托罗多的 [FKLL21，引理 3。4]。由于 L 的端都不是平面，因此 $\partial_\pm N_g$ 的每个分支的亏格至少为 2。

存在一个自然余定向的深度一叶状结构 $\mathcal{F}_L$ ，定义在 N_g 上，其叶为非紧致（即深度一）曲面 $L \times \{t\}$ 以及 $\partial_+ N_g$的各个分支。非正式地说， L 的正端绕着 $\partial_+ N_g$ 螺旋缠绕，而负端则绕着 $\partial_- N_g$螺旋缠绕。这赋予了N_g 缝合流形的结构。该叶状结构是紧的 [FKLL21，引理 3。3], 因此特别地， $\partial_+ N_g$ 和 $\partial_- N_g$ 是紧的，即它们在 $H_2(N_g)$ [Thu86]中使 Thurston 范数最小。

2.2. **伪阿诺索夫流与动力学爆破**。 本文中，我们仅考虑 3-流形 M 上的伪阿诺索夫流 φ ，这些流是**圆形的**，即经过重新参数化后，等同于某个伪阿诺索夫同胚的悬挂流。这里的一个优势在于，我们所需的关于 φ 的所有结构性质，都可以从伪阿诺索夫同胚众所周知的结构性质中推导出来。例如， φ 的不稳定/稳定不变叶状结构 $W^{u/s}$ ，就是伪阿诺索夫单值化映射的不稳定/稳定叶状结构的悬挂。

在处理伪阿诺索夫流 φ 时，稍微放宽定向曲面 Σ 正向横截于 φ这一概念可能会有所帮助，由此得到称为“近似横截性”的概念。为此，我们将简要讨论对奇异轨道进行动力学爆破。动力学爆破和近似横截性由 Mosher 在[Mos90]中引入。

流 $\varphi^\sharp$ 是 φ 的**动力学爆破**，如果它是通过在 φ 的某些奇异轨道邻域内扰动 φ 而得到的，具体方式如下。我们将奇异轨道 γ 替换为有限树 T 上同胚 g 的悬挂 A，即 $A = T \times I/g$。我们可以识别

T 与 A 和横截圆盘 D的交集。对于一条 e 周期为 n 的边，g^n 应固定 e 的端点，并在 $\mathrm{int}(e)$上无不动点地作用。 T的各边与 D 同 γ的交集（其中 包含奇异叶），共同构成一棵更大的树T，位于 D中。我们按照点首次返回至 e 的移动方向，为 e 在 T 中定向。我们要求 T的每个顶点周围，边的方向交替向外和向内。参见 图 1。

悬挂 A 是一个 $\varphi^\sharp$-不变的环带复形，而 $\varphi^\sharp$ 与 φ 半共轭，其对应映射将 A 压缩到 γ，除此之外是一一对应的。生成 φ 和 $\varphi^\sharp$ 的向量场仅在被爆破轨道周围的一个小邻域内不同。复形 A 中的每个环带称为 **爆破环带**。爆破环带的两个边界分支是 $\varphi^\sharp$ 的周期轨道。在环带内部， $\varphi^\sharp$ 的轨道从一个边界分支螺旋至另一个边界分支。

稳定叶状结构 $\varphi^\sharp$ 是一个奇异叶状结构，其叶恰好是半共轭映射（该映射将各个环带复形压缩）下稳定叶状结构 φ 的原像。不稳定叶状结构 $\varphi^\sharp$亦然。因此，若 H 是 φ的一片稳定叶，且包含一条 γ 的奇异轨道 φ，该轨道经爆破后得到 $\varphi^\sharp$，那么 $\varphi^\sharp$中与 H 对应的稳定叶将包含所有压缩到 γ的爆破环带。因此，受动力学爆破影响的 $\varphi^\sharp$ 稳定叶和不稳定叶会沿着共有的爆破环带相切（见图 1）。

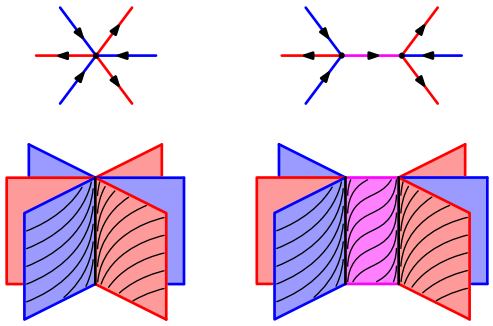

FIGURE 1. 三叉奇异轨道的简单动力学爆破。上方显示了爆破前后与横截圆盘的交集。下方显示了爆破前后与三维球的交集。在此例中，相关的环带复形是一个单独的环带，以粉色显示，它同时属于图示的稳定叶和不稳定叶。动力学爆破在组合结构上可能比这更复杂；例如，参见 图 2。

我们称 Σ 与 φ 是**几乎横截**的，如果存在 φ 的一个动力学爆破 $\varphi^\sharp$，使得 Σ 与 $\varphi^\sharp$正向横截。我们也称 $\varphi^\sharp$ 为一个**几乎伪阿诺索夫流**。因此，如果 Σ 与 $\varphi^\sharp$横截，那么 Σ与 φ几乎横截。

设 Σ 是一个与几乎伪阿诺索夫流 $\varphi^\sharp$正向横截的紧曲面，该流由伪阿诺索夫流 φ经动力学爆破得到。设 a 是 $\varphi^\sharp$的一个爆破环带。由于 $\Sigma \cap a$ 是紧的，它由以下之一组成：连接 ∂a 各分支的若干弧，或位于 $\mathrm{int}(a)$ 中的若干圆（见 图 2）。若 $\Sigma \cap a$ 由弧组成或为空，则可将 a 压缩，从而得到一个“爆破程度较低”的流，而 Σ也与之横截。因此，若对于每个爆破环带 $\varphi^\sharp$，**与** Σ 的交集 a都是非空的圆的并，则称 Σ 相对于 a 为最小爆破。

类似地，若 $\mathcal{F}$ 是与 $\varphi^\sharp$横截的深度一叶状结构，则称 $\varphi^\sharp$ 相对于 $\mathcal{F}$ **最小爆破**，如果不存在 $\varphi^\sharp$ 的爆破环带 a 使得 $\mathcal{F}|_a$ 是由正则嵌入的弧构成的叶状结构。注意，对于 $\mathcal{F}$， $\varphi^\sharp$ 为最小爆破，当且仅当对于 $\mathcal{F}_0$，它也是最小爆破。事实上，若 a 是一个爆破环带，且 $\mathcal{F} \cap a$ 不是由弧构成的叶状结构，则其中包含一条闭叶；由于 $\mathcal{F}$是深度一叶状结构，该闭叶必为 $\mathcal{F}_0 \cap a$的一个分支。

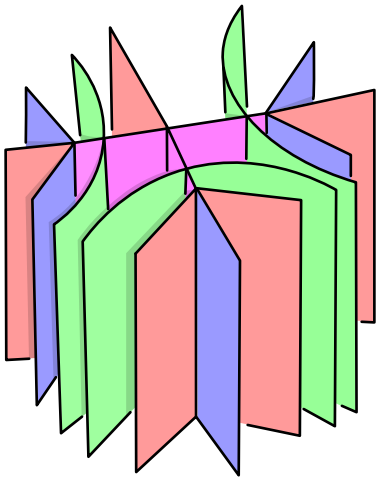

FIGURE 2. 一个动力学爆破的五叉奇异轨道的局部图像，以及与爆破后的流横截的部分曲面（绿色）。在这种情况下，曲面与爆破后的环带的交集将是 3 个圆。

我们构造 spA 映射的一个关键步骤用到了以下定理，它是 [LMT23] 中主要结果的一个特例。

定理 2.3（强横截曲面定理）。设 M 是一个带有圆形伪阿诺索夫流 φ 的闭定向3维流形。对于一个定向曲面 $\Sigma \subset M$，在同伦意义下， Σ 几乎处处与 φ 横截，当且仅当 Σ 是紧致的，且与 φ 的每条闭轨道的交数均非负。

定理 2.3 的“若”部分较为困难，证明如下。与 φ 相关联的是一个偏转三角剖分，其 2-骨架是 $M - U$ 中一个余定向分支曲面，其中 U 是 φ 的奇异轨道的一个小正则邻域。这是 M 中的一个部分分支曲面，按 [Lan22] 的定义（见第 6.2.1 节）。若 Σ是一个与 φ 的闭轨道交数均非负的紧致曲面，则可应用该文中的技巧，将 Σ 同伦变形为由该部分分支曲面承载；这意味着它在 $M - U$ 中被承载（按分支曲面的通常意义），并以受控方式与 U 相交。该部分分支曲面与 φ 正向横截（[LMT21，定理 5.1]），且它与 ∂U 的交集很容易理解。由此，我们便可根据 $\Sigma \cap U$ 给出的数据，找到一个与 Σ 横截的 φ 动力学爆破。

2.3. **旋转构造**。 我们介绍叶状结构中的一种标准构造的特殊情形，该构造见 [Cal07，例 4。8]。我们将此操作称为**旋转** （请注意，Calegari 将其称为“螺旋化”）。

设 M 是一个配备流 φ 的闭定向 3-流形。假设 $S \subset M$ 是 φ 的一个截面，也就是说，它是一个与 φ 正向横截并与每条轨道相交的闭定向曲面。由此可知， $M \setminus\setminus S$ 同胚于 $S \times I$，其中可将 I-纤维取为 $M \setminus\setminus S$ 上由 φ 的轨道诱导的叶状结构。进一步假设， $\Sigma \subset M$ 是另一个闭定向曲面，它同时与 S 和 φ 横截，并且 Σ 的任何分支都不同伦于 S 的任何分支。

令 $\Sigma \times [-1,\ 1]$ 为 M 中 Σ 的一个小管状邻域，其中每条 $\{p\} \times [-1,\ 1]$纤维都是 φ 的一个轨道段。令

$$\overline{\Sigma} = \bigcup_{|n|>0} \Sigma \times \left\{\frac{1}{n}\right\}.$$

令 L 为 $S \smallsetminus \Sigma$ 与 Σ的定向切割粘合和，并将其平滑处理，使之与 φ 横截。

那么 L 是一个非紧曲面。此外， $(M \smallsetminus \Sigma) \setminus\setminus L$ 与 $L \times [0,\ 1]$同胚，其中每个 $\{p\} \times [0,\ 1]$ 都是 φ的一个轨道段。因此，我们可以用乘积叶状结构 $L \times (0,\ 1)$ 填充 $M - (\Sigma \cup L)$，从而得到 M 上的叶状结构 $\mathcal{F}$。由于 S 是一个截面，且没有任何分支与 Σ 的某个分支同伦，这意味着 $S \cap \Sigma$ 在 Σ的每个分支中都是同调非平凡的。进而，这意味着 L的端会围绕 Σ的各分支“螺旋”； Σ 的各分支是 $\mathcal{F}$ 唯一的紧叶，而 $\mathcal{F}$ 的非紧叶在 S^1 上定义了一个纤维化 $M \smallsetminus \Sigma$ 。因此， $\mathcal{F}$ 是 M 上的紧致深度一叶状结构。

注意， $N = M \setminus\setminus \Sigma$ 自然地构成一个缝合流形，其中 $\partial_{\pm} N$的各个分支由 φ赋予余定向，而 $\mathcal{F}$ 则诱导出一个适用于 N的紧致深度一叶状结构。我们通常仍将 N 上由 $\mathcal{F}$给出的这一叶状结构称为.....，并称其为绕$\partial_{\pm} N$对 $N \cap S$ 进行旋转的结果。

3. Existence of spA representatives

我们首先对本文的主要研究对象进行形式化定义。

定义 3.1 (旋绕伪阿诺索夫)。 如果存在双曲3维流形 M 上的深度一叶状结构 $\mathcal{F}$ 以及相对于 $\mathcal{F}$ 最小爆破的横截圆形近伪阿诺索夫流 φ，使得 L 是 $\mathcal{F}$ 的一叶，且 f 是由 φ诱导的首次回归映射的某个幂，则称端周期映射 $f\colon L \to L$ 为旋绕伪阿诺索夫 （或***spA***）。

定义 3.1包括第 1.1 节中描述的映射，这些映射是通过旋转有限型曲面的伪阿诺索夫同胚得到的；本节构造的 spA 映射则来自对此构造的一般化。例如，参见注 3.14。

本节的主要定理给出了定理 A的“若”方向：

定理 3.2 (spA 代表元存在)。 每个无环面端周期映射都同伦于一个旋绕伪阿诺索夫映射。

定理 3.2 将直接由一个更为详细的结果推出（定理 3.3），下面我们来陈述该结果。设 $g\colon\ L \to L$ 是一个端周期映射，且 N_g 是它的紧化映射环面。回顾一下，按照构造，N_g 带有一个深度一叶状结构$\mathcal{F}_L$，其紧叶为 $\partial_{\pm} N_g$，而其深度一叶与 L平行。我们称$\mathcal{F}_L$为**与** L相关联的深度一叶状结构。

定理 3.3。 设 $g\colon\ L \to L$ 是一个无环面、端周期映射，其紧化映射环面为 $N = N_g$。则存在

- 一个双曲纤维化3维流形 M，
- 一个作用在 M 上的伪阿诺索夫悬挂流 $\varphi^\flat$，以及
- 一个嵌入 $N \to M$ 和对 $\varphi^\flat$ 的一次动力学爆破 φ，使得深度一叶状结构$\mathcal{F}_L$ 延拓为 M 的深度一叶状结构，并且相对于该叶状结构，φ 横截且经过最小爆破。

因此，由 φ 确定的首次回归映射 $f\colon\ L \to L$ 是一个与 g 同伦的旋绕伪阿诺索夫映射。

spA 映射 $f\colon\ L \to L$ 由 定理 3.3 给出的称为 **spA代表** 的 g。我们注意到，所构造的流形 M 和流 $\varphi^\flat$ 相当灵活，这是该理论的一项优势。例如，我们还给出对 定义 3.1 的一个自然强化：

定义 3.4 (spA^+)。端周期映射 $f\colon\ L \to L$ 是***spA***$^+$，如果存在一个圆形伪阿诺索夫流 φ，定义在双曲3-流形 M 上，并存在一个与 φ 横截的深度一叶状结构 $\mathcal{F}$，使得 L是 $\mathcal{F}$ 的一片深度一叶，且 f 是由 φ诱导的首次回归映射的幂。

也就是说，映射 $f\colon\ L \to L$ 是 spA^+，当且仅当无需进行动力学爆破即可使 $\mathcal{F}$ 与其正向横截 φ。我们将在 定理 4.2 中证明，每个无环面端周期映射都同伦于一个 spA^+ 映射，方法是证明 M 在 定理 3.3 （或在 定义 3.1）中可以选取得使 $\mathcal{F}$ 与一个圆形（真正的）伪阿诺索夫流横截。

注 3.5（spA 结构）。每个 spA 映射 $f\colon\ L \to L$ 都配有定义 3.1 中的流形 M、叶状结构 $\mathcal{F}$ 和流 φ。此外，紧化映射环面 $N = N_f$ 也可以（如定理 3.3 所述）恢复为 $M \setminus\!\setminus \mathcal{F}_0$ 中包含叶 L的分支，其中 $\mathcal{F}_0$ 表示 $\mathcal{F}$的紧叶（深度为零的叶）。一般来说，所得映射 $N \to M$ 可能会将 $\partial_\pm N$的分支识别起来，但可以通过将其紧叶替换为带标准叶状结构的 I-丛来修改叶状结构 $\mathcal{F}$。经过此修改后，$N \to M$ 是一个嵌入。我们始终假设情况如此，并将数据 M、$\mathcal{F}$、φ、N称为 spA 映射 $f\colon\ L \to L$的 spA 结构。

3.1. **交界类和螺旋邻域**。固定一个端周期映射 $g\colon\ L \to L$。令 $N = N_g$ 为其紧化映射环面，并带有相应的紧致深度一叶状结构 $\mathcal{F} = \mathcal{F}_L$。令 $\mathcal{L} = \mathcal{L}_g$ 为由 g 的悬挂流在 N 上诱导的横截的一维定向叶状结构。我们有时将 $\mathcal{L}$ 称为 N 上的半流。注意，$\mathcal{F}$ 由 $\mathcal{L}$ 余定向。

叶状结构 $\mathcal{F}$ 唯一确定其对偶类 $\xi \in H^1(N)$，该对偶类为每条定向闭曲线赋予其与 L 的带符号交集数。将 ξ 拉回到 $H^1(\partial N)$ 称为与 $\mathcal{F}$相关联的 $j \in H^1(\partial N)$ **交界类**，而将 j限制在 ∂N 的每个分支 Σ 上称为 Σ的交界类。Σ 的交界类的一个 **实现** 是 Σ 中的一组余定向本质简单曲线，它们在 H^1 中表示该交界类，并且具有如下性质：不存在任何子集是 Σ 的某个补子曲面的边界，且其余定向无论指向外侧还是内侧。

注记 3.6. 由于 Σ 是闭的，交界类（或任意上同调类）都可以由一条余定向曲线来实现。

分支 Σ 的**螺旋邻域** U 是Σ的一个领圈邻域，由 $\mathcal{L}$的弧所叶状化；其外边界分支为 Σ，其内边界

分支是一个曲面 Σ_U，它同时横截 $\mathcal{L}$ 和 L。例如，参见 [CC93，第 3] 节，或 [Fen92，第 4] 节。注意， $\Sigma_U \cap L$ 表示在沿着 $\mathcal{L}$ 纤维将 Σ_U 与 Σ 识别后， Σ 上的交界类，并采用 L上的余定向来确定余定向。此外，在对 Σ_U 作同伦以去除 Σ_U 与 L之间的乘积区域后，我们可以假设 $\Sigma_U \cap L$ 实现了 Σ上的交界类。一般而言，一个螺旋邻域是由 $\partial_\pm N$的每个分支各自的螺旋邻域组成的互不相交的集合。

给定一个螺旋邻域 U 的 $\partial_\pm N$ 我们可以沿着其纤维将其压缩 $\mathcal{L}$，使得$L \setminus$的内部(U)被映射为一个正则嵌入的余定向曲面 $L_U \subset N$，其边界连同所诱导的余定向，在 $\partial_\pm N$的每个分支中表示交界类。更准确地说， L_U由 $L \setminus$的内部(U)沿流动 $L \cap \Sigma_U$进入 $\partial_\pm N$而得到，该流动发生在 U内；随后将所得曲面在边界相对固定的条件下稍作等 isotopy，使其趋向 $\partial_\pm N$，从而其内部横截于 $\mathcal{L}$。见图3。



FIGURE 3. 通过将 L 的螺旋推进到 $\partial_\pm N$中来生成 L_U。

由构造可知， L_U 与 ξ 对偶，且其内部正向横截于 $\mathcal{L}$。应将 L_U 理解为由 L 通过“将螺旋推进到 $\partial_\pm N$中”而得到。螺旋邻域 U 决定了有多少螺旋被推进到 $\partial_\pm N$ 中；以下著名引理表明，通过适当地选择 U，交界类的任意实现 j 都可以作为 L_U的边界出现。参见例如 [Gab87，引理0。6] 其中证明了一个更一般的表述。

引理3.7。 对于交界类 $j \in H^1(\partial_\pm N)$ 的任意实现 m，存在一个螺旋邻域 U，使得 $\partial L_U = m \subset \partial_\pm N$。

最后，如果正则嵌入曲面 L_U 的内部与半流 $\mathcal{L}$ 的每条轨道相交，我们就称其为**预纤维**。容易看出，对于任意 L_U，存在一个螺旋邻域 $U' \subset U$，使得 $\partial L_{U'} = \partial L_U$，且 $L_{U'}$ 是预纤维。通俗地说， $L_{U'}$ 可以通过从 $\partial_\pm N$ 的每个分支中“剥离”另一层 L 得到。

3.2. 向 h–双重的扩展。 令 $h\colon \partial_\pm N \to \partial_\pm N$ 为一个逐分支同胚。 N 的 **h–双重** 是流形 $M = M(N, h)$ 它通过取 N 的两个副本，并利用 h 将它们的边界粘合起来而得到。在考虑上述三元组 $(N, \mathcal{F}, \mathcal{L})$ 时， M 自带一个诱导的紧致深度一叶状结构以及横截的定向一维叶状结构，分别仍记为 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{L}$；它们延拓了 N 的两个副本上的相关叶状结构。

让我们更精确地说明 h–双的构造。令 $N^\downarrow$ 表示将 N 上 $\partial_\pm N$ 的余定向反转后得到的缝合流形。因此，存在由恒等映射 $N \to N^\downarrow$诱导的识别$\sigma_\pm\colon \partial N_\pm \to \partial N^\downarrow_\mp$。缝合流形 $N^\downarrow$ 自带一个深度一叶状结构 $\mathcal{F}^\downarrow$ 和一个定向一维叶状结构 $\mathcal{L}^\downarrow$，其中它们的余定向和定向分别已被反转。然后我们通过映射 $\sigma_\pm \circ h$将 N 粘合到 $N^\downarrow\colon \partial_\pm N \to \partial N^\downarrow_\mp$，并将所得流形称为 $M = M(N, h)$。由

构造过程中，叶状结构 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{F}^{\downarrow}$ 结合起来，在 M 上形成一个紧的、余定向的深度一叶状结构，我们仍将其记为 $\mathcal{F}$。该叶状结构与定向一维叶状结构 $\mathcal{L} \cup \mathcal{L}^{\downarrow}$ 正向横截，我们仍将其记为 $\mathcal{L}$。我们可以在 $\partial_{\pm} N$ 的一个邻域内对 $\mathcal{L}$ 进行光滑化，同时保持与 $\mathcal{F}$ 的横截性，并通过参数化，在 M 上得到一个与 $\mathcal{F}$ 正向横截的流。

注记 3.8. The h–double $M = M(N, h)$ 只取决于缝合流形 N和 h。因此，任何适配于 N （以及横截半流）的深度一叶状结构，都可通过该构造自动延拓到 M 。

我们将 N 与其在 M 中的像等同，该像来自此构造。

命题 3.9. 若 $h\colon \partial_{\pm} N \to \partial_{\pm} N$ 使每个交界类的符号反转（即 $h^* j = -j$在 $H^1(\partial_{\pm} N)$中），那么，对于任意一个螺旋邻域 U ，它是 $\partial_{\pm} N$ 的邻域，且 L_U 是预纤维，都存在一个闭的余定向曲面 S，位于 $M = M(N$中，$h)$，使得

（1） S 与 M上延拓流 $\mathcal{L}$ 的每条轨道都有正的横截交集；（2） S 与 $\partial_{\pm} N \subset M$横截相交；（3） $S \cap N$ 与 L_U适当同伦。

注 3.10。 对于命题 3.9，可以取 h 为任意保向同胚，其在 $\partial_{\pm} N$ 的每个分支上的限制都以 $-I$ 的方式作用于 H_1。特别地，双曲对合具有这一性质。

证明。 固定 $\partial_{\pm} N$ 的一个螺旋邻域 U，并考虑 $\partial_{\pm} N$ 中交界类 j 的实现 $m = \partial L_U$。首先注意到

$$-j = \sigma_{\pm}^*(j^{\downarrow})$$

这由以下事实可知： $\mathcal{F}^{\downarrow}$ 是 $\mathcal{F}$ ，只是其余定向相反；也就是说，在 $N \cong N^{\downarrow}$的识别下，由 $\mathcal{F}^{\downarrow}$确定的 H^1中的类恰好就是 $-j$。现在，关于 h 的假设意味着

$$h^* \circ \sigma_{\pm}^*(j^{\downarrow}) = h^*(-j) = j.$$

这意味着，余定向像 $m^{\downarrow} = \sigma_{\pm} \circ h(m)$ 是交界类 $j^{\downarrow}$ 的一种实现。

现在，根据引理3.7，存在一个螺旋邻域 V，使得 $\partial_{\pm} N^{\downarrow}$ 的正则嵌入曲面 $L_V^{\downarrow}$ 在 $\partial N_{\pm}^{\downarrow}$ 中的边界等于 $m^{\downarrow}$ ，并且 L_V 是一个预纤维。因此，在 h双重 M中， L_U 和 $L_V^{\downarrow}$ 的边界以相容的余定向相互识别。我们将 S 定义为 $L_U \bigcup L_V^{\downarrow}$的并集。由于 L_U和 $L_V^{\downarrow}$的内部均与扩展流 $\mathcal{L}$ 正向横截，并且它们的余定向在边界处一致，因此我们可以在 $\partial_{\pm} N$ 的一个邻域内对 S 进行光滑化，使其与 $\mathcal{L}$ 和 $\partial_{\pm} N$正向横截。参见图4。由于 L_U 是一个预纤维， S 与 M上扩展流 $\mathcal{L}$ 的每条轨道都相交。□

由于 S 与 $\mathcal{L}$的每条轨道都有正的横截交集，流形 $M \backslash\backslash S$ 是一个由 $\mathcal{L}$的线段所形成叶状结构的乘积 I 丛。也就是说，存在定义良好的首次回归映射 $S \to S$ ，它确定了 M 在 S^1 上的纤维化，纤维为 S。

备注 3.11 (旋转 S 回到 $\mathcal{F}$)。 根据构造，旋转曲面 S 中得到的 命题 3.9 关于 $\partial_{\pm} N$ 会重新产生叶状结构 $\mathcal{F}$。

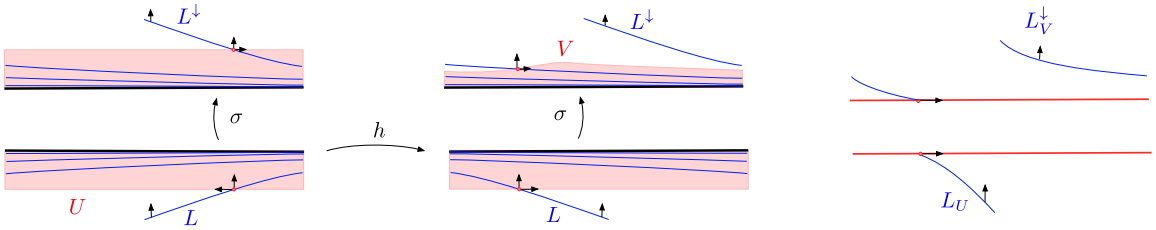

FIGURE 4. 生成横截曲面 $S = L_U \bigcup L_V^{\downarrow}$。

3.3.双曲流形与圆形伪阿诺索夫流。 回顾一下，由于g: $L \to L$ 是无环面的，其紧化映射环面 $N = N_g$ 也是无环面的，并且 $\partial_{\pm} N$ 的每个分支都是亏格至少为 2 的闭曲面。

引理 3.12. 对于 N 如上所述，粘合映射 h （满足命题 3.9）可以选取得使得 $M(N,h)$ 具有双曲结构。

证明。 我们首先考虑 $N = S \times [0、 1]$ 的特殊情形。在这里，若 h_1 是 h 在 $\partial_+ N = S \times 1$ 上的限制，且 h_0 是 h 在 $\partial_- N = S \times 0$ 上的限制，则 $M(N, h)$ 是 $h_0 h_1$ 的映射环面: $S \to S$，当且仅当 $h_0 h_1$ 是伪阿诺索夫映射时，它才是双曲的[Thu98，Ota01]。

否则，JSJ 理论 [Jac80] 给出适当的本质子曲面 Y_+ 属于 $\partial_+ N$ 和 Y_- 属于$\partial_- N$，使得每个本质环带 A 在 N 中都可以通过同痕变换，使其满足 $\partial A \cap \partial_+ N \subset Y_+$ 和$\partial A \cap \partial_- N \subset Y_-$。因此，如果 h的选取使得 $Y_{\pm}$中任意曲线的像都不与 $Y_{\pm}$同伦，那么 $M(N, h)$ 就是无环面型的，因而根据 Thurston 的双曲化定理（例如参见 [Kap01]），它是双曲的。

由此，很容易构造一个粘合映射 h 使得 $M(N, h)$ 是双曲的，并且对于该映射 命题 3.9成立。例如， h 可以取为：在每个分支上，它是双曲对合与一个伪阿诺索夫同胚的高次幂的复合，并且该伪阿诺索夫同胚在 H_1上作用平凡。□

现在我们回到定理 3.3的背景中，其中 g: $L \to L$ 是端周期且无环面的，而 $N = N_g$ 是其紧化映射环面。设 h: $\partial_{\pm} N \to \partial_{\pm} N$ 是任意一个满足命题 3.9 和引理 3.12条件的逐分支同胚，并设 $M = M(N, h)$ 为相关的 h–双重体。如第 3.2 节所示，存在一个固定的嵌入 $N \to M$，使得 $\mathcal{F} = \mathcal{F}_L$ 和 $\mathcal{L}$ 可延拓至 M。

在固定这一结构后，我们转而证明定理 3.3。

定理 3.3 的证明。令 S 为由命题 3.9 得到的正则嵌入曲面。由于 S 与 $\mathcal{L}$ 在 M上的每条轨道都有正向横截交集， S 是 M 到圆上的纤维化中的一个纤维，且类 $[S]$ 属于锥 $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} \subset H^1(M)$ 的内部；该锥中的类在 $\mathcal{L}$ 的同调方向上均非负（详见 [Fri79]）。由构造可知， $\partial_{\pm} N$ 也与 $\mathcal{L}$ 正向横截，因此 $[\partial_{\pm} N]$ 也包含于 $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$中。事实上，除非 N 本身是一个乘积，否则 $[\partial_{\pm} N]$ 位于该锥的边界。注意，由于 $\partial_{\pm} N$ 是紧 taut 叶状结构 $\mathcal{F}$的紧叶之并， $\partial_{\pm} N$是紧的。

由于 M 是双曲的，单值化映射 $S \to S$ 同伦于一个伪阿诺索夫同胚。通过悬挂该单值化映射的伪阿诺索夫代表元，我们得到

一个定义在 M 上的伪阿诺索夫流 φ，它在同伦和重新参数化意义下唯一，并且与 S横截。

根据 Fried [Fri79，定理 14。11], 对于 $\mathcal{C}_\varphi \subset H^1(M)$ 在 φ 的同调方向上取非负值的类所成的锥，等于包含 $[S]$的纤维化锥的闭包，并且 $\mathcal{C}_\mathcal{L} \subset \mathcal{C}_\varphi$。因此，我们还可得 $[\partial_\pm N]$ 属于该锥 $\mathcal{C}_\varphi$，所以 $\partial_\pm N$与 φ的每条闭轨都有非负交数。由于 $\partial_\pm N$ 也是紧致的，定理 2.3 意味着 $\partial_\pm N$ 与 φ几乎横截，差一个同伦。

令 $\varphi^\sharp$ 为相应的最小动力学膨胀，并作适当同伦，使其与 $\partial_\pm N$正向横截。该同伦将 S 变为 $\varphi^\sharp$的一个截面 S'。如注记 3.11 所述，通过将 S绕 $\partial_\pm N$旋转，可得到 M上的叶状结构 $\mathcal{F}$。若记 $\mathcal{F}'$为通过将 $\varphi^\sharp$–截面 S' 绕 $\varphi^\sharp$–横截曲面 $\partial_\pm N$旋转而在 M 上得到的叶状结构，则可得到 M 上的横截、紧致、深度一叶状结构 $\mathcal{F}'$。下一个引理说明 $\mathcal{F}$ 与 $\mathcal{F}'$ 同伦。证明这一点后，我们可以对 M 作同伦，使 $\mathcal{F}$ 与流 $\varphi^\sharp$正向横截，从而完成定理的证明。□

只需证明以下引理，而它可由定理 2.2容易推出。

引理 3.13。设 S 和 S' 是 M 中同伦的纤维，并假设 Σ 是相应纤维化锥边界中的一个紧致曲面。那么，将 S 和 S' 绕 Σ 旋转所得的叶状结构 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{F}'$ 在 M中同伦。

证明。设 $N_1, \dots, N_k$是 $M \setminus\setminus \Sigma$的各个分支，每个分支都是一个缝合流形，并配备了两个紧致的深度一叶状结构 $\mathcal{F}_i, \mathcal{F}'_i$。由于 S'和 S同伦，对于每个 i，与 $\mathcal{F}_i$ 和 $\mathcal{F}'_i$ 相关的 $H^1(N_i)$ 中的类相等。因此，根据定理 2.2，$\mathcal{F}_i$可通过一个在 $\partial_\pm N_i$上保持不动的同伦，在 N_i 中同伦至 $\mathcal{F}'_i$。于是，这些同伦在 M 中拼接起来，给出一个将 $\mathcal{F}$ 变为 $\mathcal{F}'$的环境同痕，证明完毕。□

注 3.14 (旋转与去螺旋化)。定理3.3 的证明表明，叶状结构 $\mathcal{F}$ 在 h–双重 M 上，是通过沿 S 旋转截面 $\partial_\pm N$得到的（相差一个同伦）。同样，受限叶状结构 $\mathcal{F}$ 在 N 上，是通过围绕 $S \cap N$ 旋转正则嵌入曲面 $\partial_\pm N$得到的。

逆转这一过程，命题 3.9中的论证表明，通过为 $\mathcal{F}$ 在 M 中的每个紧叶选择一个螺旋邻域（换言之，为 $\partial_\pm N$ 在 N 中以及 $N^\downarrow$中选择螺旋邻域），可以构造一个（不唯一的）曲面 S，使其成为 φ的截面。我们将这一过程称为**去螺旋化**。

需要指出的是，由于存在一个基本的上同调障碍，任意闭流形上的每个深度一叶状结构并非都能通过去螺旋化变为纤维化：每个紧叶都关联着两个交界类，它们分别来自从两侧向其螺旋延伸的叶；当且仅当这两个交界类相同时，该叶状结构才能通过去螺旋化实现这一转变。

4. Multi sink-source dynamics

本节旨在将 spA 映射 $f\colon L \to \tilde{L}$ 的周期点行为与提升 $\tilde{f}$ 在万有覆盖 $\tilde{L}$ 及其紧化 $\tilde{\mathbb{D}} = \tilde{L} \cup \partial \tilde{L}$ 上的作用动力学联系起来，其中紧化是利用适当的双曲度量定义的。spA 映射自伪阿诺索夫悬挂流的不变叶状结构继承了一对不变叶状结构，其扩张半叶和收缩半叶与无穷远圆上的作用相互作用（完整定义见下文）。

若同胚 $h\colon S^1 \to S^1$ 具有**多重汇源动力学**，则称其具有该性质，当且仅当它有有限个 $k \geqslant 4$ 不动点，这些不动点在吸引的和排斥的之间交替出现。

定理 4.1。 设 $f\colon L \to L$ 为 *spA*，且设 $f\colon L \to L$ 为 f的一个提升。则 f具有一个不动点 $\tilde{p} \in L$，当且仅当它存在某个幂 f^n，其在 ∂L 上的作用具有多重汇源动力学。此外，在此情况下，f^n 固定 $\tilde{p}$ 处的半叶，其吸引的/排斥的点等于扩张的/收缩半叶的端点。

<escape>这推广了紧曲面上伪阿诺索夫映射的一些众所周知的性质，但在我们的情形中，还需要处理若干复杂问题。由于曲面仅与伪阿诺索夫流几乎横截，稳定叶状结构和不稳定叶状结构的结构更难处理；特别是，它们并非处处横截。要理解无穷远圆上的局部动力学，还需要做更多工作，尤其是要证明圆上的汇点/源点实际上也是闭圆盘上的汇点/源点（见引理 4.9）。</escape>

该定理的一个应用是对定理 B的一个证明，我们在此重新陈述如下：

定理 4.2。 每个无环面、端周期映射都同伦于一个 spA^+ 映射。

本节总结：在第 4.1 节中，我们通过阐释其在周期性半叶的悬挂可能性，分析了 L的稳定叶状结构和不稳定叶状结构在 N的二维叶状结构中的行为。在第 4.2 节中，我们回顾了 Fenley 和 Cantwell-Conlon 关于 L 上的双曲度量及其如何赋予万有覆盖$\sim L$ 一个典范的无穷远圆的结果，以及关于该度量下叶状结构的叶的拟测地线性质的结果。

在第 4.3 节中，我们证明引理 4.9 和推论 4.10 它们给出了周期半叶端点在无穷远处的汇点/源点性质。

In S第 4.4 节我们证明命题 4.11，它给出了定理 4.1 .

在第 4.5 节中，我们将应用目前所获得的结果来证明定理 4.2关于 spA 的$^+$ 表示。最后，我们将在第 4.6 节中应用这些结果来证明定理 4.1的另一个方向，该方向将在命题4.15中陈述。

在本节中，我们固定一个旋绕伪阿诺索夫映射 $f\colon L \to L$，以及一个 spA 结构（如注 3.5 中所述），记为 M，$\mathcal{F}$，φ，N，其中 M，$\mathcal{F}$，φ均如 定义 3.1 所述，且 $N \subset M$ 是 f的紧化映射环面。此外，我们将 N 上诱导的半流记为 φ_N。为简便起见，在本节中我们常将闭曲面 $\partial_\pm N$ 记为 $\partial_\pm$，并注意到它包含在 $\mathcal{F}_0$ 的紧叶 $\mathcal{F}$之中。

<escape>由于 φ 相对于 $\mathcal{F}$是最小爆破的，因此对于每个爆破环带 A，$\mathcal{F}_0 \cap A$均非空，且由有限条曲线组成，这些曲线在 M 中与 A的核心同伦。特别地，爆破环带边界上的任何闭轨都不与 $\mathcal{F}_0$相交。参见 图 5。</escape>

4.1. **周期半叶与环带**。 圆形流 φ具有不变的稳定奇异叶状结构和不稳定奇异叶状结构，我们分别将其记为 W^s 和 W^u。在 N上存在一个诱导半流 φ_N；我们将沿着 $\partial_\pm$切割 W^s和 W^u后得到的、由 φ_N保持不变的叶状结构分别记为 W^s_N和 W^u_N。最后，我们将 $f\colon L \to L$的不变**稳定叶状结构和不稳定叶状结构**分别定义为 $\mathcal{W}^s = L \cap W^s$和 $\mathcal{W}^u = L \cap W^u$。根据构造，$\mathcal{W}^u$ 和 $\mathcal{W}^s$在 f的紧化映射环面 N中悬挂，分别得到 W^u_N和 W^s_N。

若 p 是 f 的周期点，则从 p 发出的 $\mathcal{W}^u$ 和 $\mathcal{W}^s$ 的半叶在 f的某个幂作用下保持不变，我们称它们为 f的**周期半叶**。包含在膨胀环带中的周期半叶称为**膨胀半叶**。我们指出，$\mathcal{W}^u$ 和 $\mathcal{W}^s$ 在 L 上横截，但膨胀半叶处除外；膨胀半叶是两种叶状结构共有的。无论如何，f 的每个周期半叶 ℓ 不是**收缩的** 就是**扩张的**，这取决于对 f 取正幂还是负幂迭代时，ℓ 上的点是否被吸引到其周期点 p。

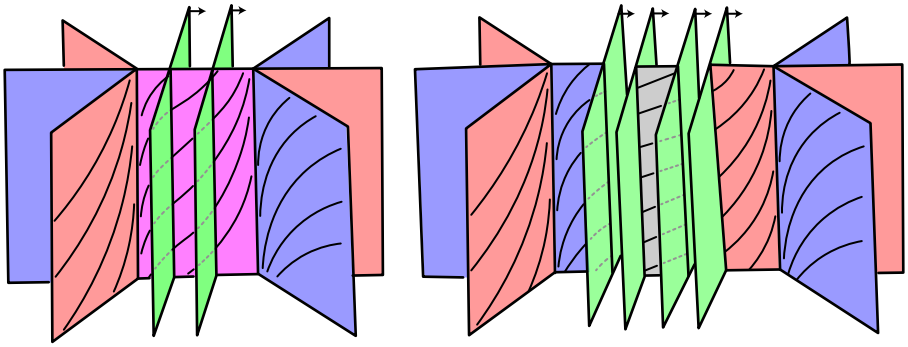

FIGURE 5.左图：两个 $\mathcal{F}_0$ （绿色）部分与一个爆破环带（粉色）相交。右图：沿 $\mathcal{F}_0$切割后的结果， $\partial_+(M\backslash\backslash\mathcal{F}_0)$ 和 $\partial_-(M\backslash\backslash\mathcal{F}_0)$由边界余定向标示。爆破环带在 $M\backslash\backslash\mathcal{F}_0$中产生两条周期性半叶，从技术上说，它们既是稳定的也是不稳定的。然而，其中一条半叶是扩张的（蓝色，接触$\partial_+(M\backslash\backslash\mathcal{F}_0)$），另一条是收缩的（红色，接触 $\partial_-(M\backslash\backslash\mathcal{F}_0)$）。沿$\mathcal{F}_0$ 切割还会产生一条环带叶，它与 $\partial_+(M\backslash\backslash\mathcal{F}_0)$ 和 $\partial_-(M\backslash\backslash\mathcal{F}_0)$相接触，且不是周期性的（灰色）。

本小节的主要目标是引理4.3，它限制了这类半叶的渐近行为。

如果 e 是 L 的一个端，我们称子集 $A\subset L$ **累积于** e，如果 e 的每个邻域都与 A有非空交集。如果对于 e 的每个邻域U，都存在一个紧致的 $K\subset A$ 使得 $A\smallsetminus K\subset U$，我们就称 A **逃离** e。

引理4.3。 f 的每个周期半叶都累积于 L的某个端。扩张半叶累积于正端，收缩半叶累积于负端。此外，每个周期膨胀半叶都逃离唯一的一个端。

一旦我们描绘出二维叶状结构 $W_N^{s/u}$ 的半叶图景，这个引理就很容易得证；该叶状结构是由 $\mathcal{W}^{s/u}$的周期半叶悬挂得到的。

如果 $W^{s/u}$或 $W_N^{s/u}$的一片叶分别包含 φ或φ_N 的一条周期轨道，我们就称这片叶为**周期的**。 $W^{s/u}$ 或 $W_N^{s/u}$ 的**周期半叶**是 $H_0\backslash\backslash\{\gamma_i\}$的一个分支，其中$H_0$ 分别是 $W^{s/u}$ 或 $W_N^{s/u}$ 的一片周期叶，而 $\{\gamma_i\}$ 是包含在 H_0中的所有周期轨道的集合。 $W^{s/u}$ 的一条周期半叶是紧致的，当且仅当它是一个爆破环带。

设 H_0 为 $W^{s/u}$的一片周期叶。若 H_0 不包含任何被吹胀的环带，则其中包含唯一一条周期轨道 γ。在这种情况下， $H_0\backslash\backslash\gamma$ 是若干非紧周期半叶的并，每个半叶都是与 γ 相邻的半闭环带，使得其中的流线螺旋式地趋近于或远离 γ，具体取决于H_0 属于 W^s 还是 W^u。若 H_0 包含被吹胀的环带，则这些环带沿其边界以树状结构相互连接，并且非紧半叶附着于这一复形之上（见图 2）。

根据定义，由 H_0 得到的 $W_N^{s/u}$ 的周期叶是 $H_0\backslash\backslash\partial_\pm N$ 中包含周期轨道的分支。根据假设， φ 相对于 $\mathcal{F}$ 是最小爆破的，因此每个与 N 相交的爆破环带都被 $\partial_\pm$ 切开，所以 $W_N^{s/u}$ 的每个周期叶都包含唯一的周期轨道。

若 H 是 $W_N^{u/s}$ 的一个周期半叶，那么我们称 H 是 **收缩的** 或 **扩张的**，如果 H 中的每条流线分别在正向或反向上渐近于 H 的唯一周期轨道。位于爆破环带内的周期半叶（因此既是 W_N^u 又是 W_N^s 的半叶）可以是扩张的或收缩的（见 图 5）。然而，如果任何其他周期半叶是收缩的或扩张的，那么它分别包含在 W^s 或 W^u 的叶中。

下一个引理描述了沿周期轨道切割 $W_N^{s/u}$ 的叶后得到的各个部分，并特别证明了 $W_N^{s/u}$ 的每条周期半叶要么是扩张的，要么是收缩的。

引理 4.4. 设 H_0 是 W^u 或 W^s的一个周期叶。设 C 是 H_0 沿 $\partial_\pm N$ 以及沿包含在 H_0 中的任意周期轨道切割后得到的一个分支，满足 $C \subset N$。若 C 不是圆盘，则它是一个环带，并且属于四种类型之一（如图6所示）：

(1)（紧周期） C 是 $W_N^{u/s}$ 的一条扩张或收缩的周期半叶，其边界上有唯一一条闭轨。其另一条边界分支是 $\partial_\pm$ 中的一条简单闭环，流线与之横截。*(2)*（非紧周期） C 是 $W_N^{u/s}$ 的一条扩张或收缩的周期半叶，其边界上有唯一一条闭轨。 ∂C 的其余部分是 $H_0 \cap \partial_\pm N$的一组正则嵌入直线，流线与之横截。*(3)*（暂态紧致型） ∂C 由两条闭曲线组成，流与∂_+ 和 ∂_- 均横截相交。*(4)*（暂态非紧致型） ∂C 有一个与 $\partial_\pm$之一相交的闭分支，以及一组与另一个相交的弧。如果 C *i*

收缩 *tained in a bl*环带 *lus it has type (1) or (3).*

若 C 是周期性的且扩张（收缩），则 C 中的所有流线都向后（向前）渐近于 γ，而 C 的所有其他边界分支均位于 $\partial_+ N$ （$\partial_- N$）中。

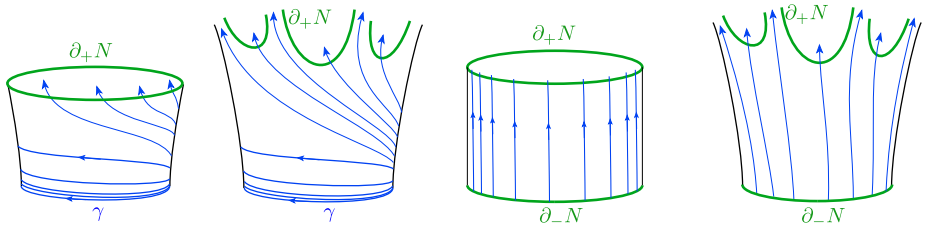

FIGURE 6. $W_N^{s/u}$ 的环形半叶类型。扩张情形下展示了情形 (1)、(2) 和 (4)。

证明。 我们假设 H_0 位于 W^u 中；稳定情形的证明类似。

在 H_0 的每个爆破环带中，流 φ 在两个方向上都渐近于一个边界分支。沿爆破环带与 $\partial_\pm$ 相交处的核心曲线切开后，我们得到类型（1）和（3）的环带。

现在考虑 A 的一个非紧半叶，其中 ∂A 等于一个闭轨 γ。一个标准事实是，紧曲面上伪阿诺索夫微分同胚的不稳定或稳定叶状结构的每个叶的端点在整个曲面上都是稠密的，这意味着 A 在 M 中是稠密的（这里， φ 是通过动力学爆破得到的这一事实并不构成问题）。因此， A 的任何补集为紧集的子集都与 $\partial_\pm$ 有非空交集。

在 $\mathrm{int}(A)$ 上，该流在微分同胚意义下等价于 $S^1 \times \mathbb{R}$ 上的垂直流（其中，向后时间流向 $-\infty$ 螺旋靠近 γ）。根据横截性，与 $\partial_\pm$ 的交集由闭曲线或弧组成，它们分别是从 S^1 或其某个子区间到 $\mathbb{R}$ 的函数图像。注意，这迫使这些弧正则嵌入，并渐近于 $+\infty$ 方向。

由此描述可知，这些交曲线的补集的每个分支要么是圆盘，要么是环带；并且每个环带分支 C 要么在其边界中包含 γ（对应情形 (1) 和 (2)），要么下方由一条 $\partial_\pm$ 的单条闭曲线围成（对应情形 (3) 和 (4)）。

由于任何这样的周期半叶都包含在 N 中，流线从 ∂_- 进入并从 ∂_+ 离开；这就得出了引理的最后一个结论。□

接下来，我们要描述 $W_N^{s/u}$ 的周期半叶与曲面 L 的交集，或者等价地，与 N 的深度一叶状结构 $\mathcal{F}$ 的任一非紧叶的交集。

引理 4.5。设 H 是 $W_N^{u/s}$ 的一个周期半叶。由 $\mathcal{F}$ 确定的纤维化 $\mathrm{int}(N) \to S^1$ 限制为 $\mathrm{int}(H)$ 上的一个纤维化，其中每个纤维都是 $\mathrm{int}(H)$ 与 $\mathcal{F}$ 的某个叶的交集。此外，$L \cap H$ 为以下两种情况之一：

(1)（紧周期）由有限条射线组成，每条射线都与周期边界 γ 横截，并螺旋趋近于对侧边界分支。*(2)*（非紧周期）由有限条射线组成，每条射线都与周期边界 γ 横截，并趋近于其余所有边界分支。

特别地，H 的内部是叶状结构 $\mathcal{W}^{s/u}$在 L中的一个周期半叶的悬挂。当 f 在该半叶上扩张时，其悬挂也扩张；当 f 收缩时，其悬挂也收缩。

反过来，$\mathcal{W}^{s/u}$ 的每个周期半叶的悬挂都会产生 $W_N^{u/s}$ 的一个这样的周期半叶。

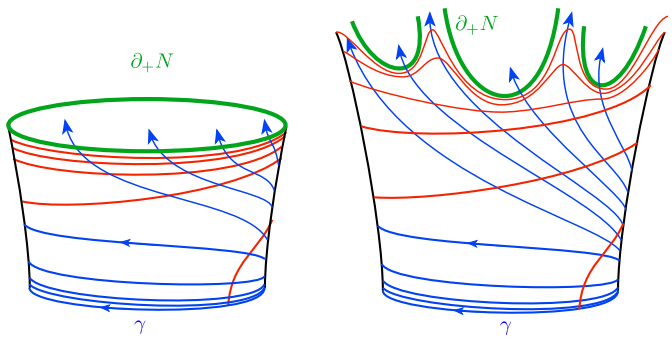

FIGURE 7. $W_N^{u/s}$ 的扩张周期半叶及其与 L 的交点以红色标出。

证明。纤维化映射 $\mathrm{int}(N) \to S^1$限制在半叶 H上时是一个浸没，因为流方向与叶状结构 $\mathcal{F}$横截。$\mathrm{int}(N)$中的每个叶 $F$of $\mathcal{F}$都是 S^1中某个点的原像，因此 $F \cap H$也同样如此。最后，$F \cap H$ 是 H中的流的一个截面，因为 φ_N 的每条向前流射线最终都会返回到 F。这意味着 H 纤维化于 S^1之上，其纤维为 $F \cap H$（不一定连通）。

由于 H 是一个周期半叶，将纤维化限制在（周期性的）边界分支 γ 上得到到 S^1的覆盖映射，因此 $L \cap \gamma$ 是有限个 $k > 0$ 点的并。于是，$L \cap H$具有 k个分支，每个分支都必定是从 γ发出的半叶。设 η是其中一个分支。则 $H \cap \mathrm{int}(N)$是将限制于 η上的 f^k 进行悬挂所得，因此 $\varphi_N|_{\mathrm{int}(H)}$ 的每个轨道都会无限多次返回到 η。由此图景可知，当且仅当 f^k 在 η上扩张/收缩时， H 才扩张/收缩。

假设 H 是扩张的。在这种情况下 $H \cap \partial_- = \varnothing$ 由 引理 4.4 得出。设 ℓ 是 $H \cap \partial_+$ 的任意一个分支，设 $p \in \ell$，并设 γ_p 为 φ_N 终止于 p 的轨道。由于 $\gamma_p \cap$ 内部(N)在正向上与 η 有无穷多次交点，因此我们得出 η 累积于 ℓ。 H 收缩的情形是对称的。

反过来，如果我们悬挂一条半叶，就得到一个环带，它正则嵌入于 N，因此必定是一个周期环带分支，如引理4.4所示。□

引理引理*4.3*的证明。 根据 引理 4.5，任意周期半叶 ℓ 属于 $\mathcal{W}^{u/s}$，都会悬挂成一条周期半叶 H，属于 $W_N^{u/s}$，如 图7所示。当 ℓ 扩张时， H 也扩张，因此 ℓ累积于 ∂_+。就曲面 L而言，这意味着 ℓ 累积于 L的一个正端。当 ℓ 收缩时， H 也收缩，且 ℓ 累积于 ∂_-。

如果 H 包含在一个爆破环带中，则它对应于 (1) 的图7 中的 引理4.4的情形；在该情形下， ℓ 螺旋趋近于 $\partial_\pm$的一个边界分支，这意味着它从唯一的一个端逃逸。□

4.2. **双曲度量、边界和不变叶状结构**。现在，我们需要将 L 的叶状结构 $\mathcal{W}^{u/s}$ 与其双曲几何联系起来。

曲面 L 上的一个**标准**双曲度量是指一种不包含嵌入式双曲半空间的完备双曲度量。假设赋予 L一个标准双曲~度量，使得其万有覆盖 L与双曲平面等距；我们将其~ ~ ~双曲边界记为 ∂L，并将相应的紧化记为 $\mathbb{D} = L \cup \partial L$。

以下事实将至关重要，我们将直接使用，不再赘述：

~(1) 对于任意同胚 $g\colon L \to L$，任意提升 $\tilde{g}\colon L \to L$ 都存在唯一的连续延拓到 $\mathbb{D}$ [CC13，定理 2]，我们继续用 ~ 表示这一同胚，并用 $\tilde{g}$ 表示其在 ∂L 上的限制。(2) 如果 f, $g\colon L \to L$ 是同伦映射，那么它们是同伦的 [CC13，推论 10]；并且 ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~如果 $f, \tilde{g}\colon L \to L$ 是通过将一个同伦提升到 L 而得到的，那么 f 和 $\tilde{g}$ 在 ∂L[上一致 CC13，推论 5]。(3) 如果 σ_1, σ_2 是 L 上的两个标准双曲度量，那么恒等映射在 L 上的任意提升都延拓为一个同胚 $\mathbb{D}_1 \to \mathbb{D}_2$，其中 $\mathbb{D}_i$ 是相对于 σ_i [的 L 的双曲紧化 CCF19，引理 10。1]。

下面的命题给出了我们所需的奇异叶状结构的性质 $\mathcal{W}^{u/s}$, 其中大多数源自 Fenley 的研究 [Fen09]。我们用 $\widetilde{\mathcal{W}}^{u/s}$ 表示 $\mathcal{W}^{u/s}$ 到 $\tilde{L}$的提升。

命题4.6 (叶状结构)。 设 $f\colon L \to L$ 为 *spA*。那么，存在 L 上的一个标准双曲度量，使得 $\widetilde{\mathcal{W}}^{u/s}$ 的叶是一致拟测地的。

~此外，提升到 M的万有覆盖后， L 与一片叶的交集 ~
$W^{u/s}$是连通的，因此是 $\widetilde{\mathcal{W}}^{u/s}$的一条叶。

证明。 首先，此外的陈述恰为 [Fen09，命题4。2] 并且可由 $\mathcal{F}$ 和 φ 的基本结构轻易推出。

接下来，我们回顾一下，由于 M 是双曲的，Candel 证明了 M 允许赋予一种叶向双曲度量，即一种连续变化的度量，并且叶状结构 $\mathcal{F}$ 的每一片叶都具有常曲率 -1 [Can93]。

现在， L 螺旋趋近边界叶，而 $\partial_+ N$ ($\partial_- N$)的每个分支都包含一条闭曲线，这条曲线经由半流来自 L 中的一条闭曲线（即映射 f的“端周期部分”基本域中的一条曲线）。由度量的连续性，这条曲线的正向（反向） f轨道由长度有界的曲线组成。 L 中的所有点都与这些长度有界的曲线之一相距有限，因此 L 上双曲度量的单射半径有上界，特别是该度量是标准的。

最后，设 $\varphi^\flat$ 为通过压缩 φ得到的、作用在 M 上的圆形伪阿诺索夫流。众所周知， $\varphi^\flat$ 的稳定/不稳定叶状结构具有豪斯多夫叶空间（事实上，它们是 $\mathbb{R}$-树）。由于膨胀不会改变稳定/不稳定叶状结构的叶空间， $\widetilde{W}^{u/s}$也同样如此；参见 [Fen09]的第3节末尾的讨论。由于叶状结构 $\widetilde{\mathcal{W}}^{u/s}$ 由交集 $\widetilde{L} \cap \widetilde{W}^{u/s}$, 确定， $\widetilde{\mathcal{W}}^{u/s}$ 的叶空间也都是豪斯多夫的。因此，我们可以应用 [Fen09，定理 C]，得出 $\widetilde{\mathcal{W}}^{u/s}$ 的叶在 $\widetilde{L}$中是一致拟测地的。□

注记 4.7。如果 $g\colon L \to L$ 是端周期的，且 f_1， f_2 都是与 g 同伦的 spA 映射，那么我们可以在 L 上选取一个标准双曲度量，使得提升到万有覆盖后，两者 f_1 和 f_2 的不变叶状结构的叶都是一致拟测地的。

为此，设 $N = N_g$ 是对应于 g 的紧化映射环面，并设 $N \to M_1$和 $N \to M_2$ 是与 f_1 和 f_2 相关的嵌入，如 定理 3.3中所述。按照命题4.6的证明，每个 M_i 都带有叶上的双曲度量 g_i ，且这些度量分别拉回为 N上的连续叶上双曲度量，我们也将其记为 g_i。由 N的连续性和紧致性，比例 g_1/g_2 在 N 上有一致界，因此叶 L 上的双曲度量是双 Lipschitz 等价的。特别地，˜上的两个度量 L 准等距，因此两组不变叶状结构的叶在任一度量下都是一致拟测地的。

我们立即得到以下推论，这也是我们使用 φ 相对于 $\mathcal{F}$ 为最小爆破这一事实的主要之处。

Le˜ ˜ ˜mma 4.8. 令 $f\colon L \to L$ 为 *spA*。任意提升 $f\colon L \to L$ 至多有一个不动点 .

Si由于根据定义，spA 映射的幂仍是 spA， f 的幂也同样如此。

˜˜证明。假设 p、 $q \in L$ 是 f的两个不同不动点。那么它们各自的 $\tilde{\varphi}$–轨道$\tilde{\gamma}_p$ 和$\tilde{\gamma}_q$ 投影为 M中同伦的闭 φ–轨道 γ_p 和 γ_q。若 $\gamma_p = \gamma_q$，则 N 包含一个本质环面，这与假设矛盾。否则，由于圆形伪阿诺索夫流的不同闭轨道从不同伦， γ_p 和 γ_q 是由˜˜W^u与 W^s共享的一片膨胀叶 λ 的闭轨道。提升叶 λ包含 $\tilde{\gamma}_p$和 $\tilde{\gamma}_q$，且根据命题4.6，它与 $\widetilde{L}$ 的交集 ℓ是 $\mathcal{W}^{u/s}$ 的一片（连通）叶，同时包含 p 和 q。设 $\tilde{a}$ 是 $\tilde{\ell}$ 中一条从 p到 q的弧。它在 L 中的像在 φ_N 下悬挂，形成一个包含于 N 内部的环带 $A \subset \lambda$ ，其边界由 γ_p 和 γ_q构成。特别地， A 是一些膨胀环带的并，这些环带不与 $\mathcal{F}$的紧叶相交。这与 φ 相对于$\mathcal{F}$是最小爆破的事实矛盾。□

4.3. **关于 ∂L的**。证明定理 4.1 的第一步是分析局部动力学以及端周期映射到 L的提升。该引理给出了 ∂L 上的不动点成为汇点或源点的条件，不仅适用于边界上的点，也适用于圆盘 $\mathbb{D} = L \cup \partial L$。

引理 4.9。设 $g\colon L \to L$ 是一个端周期映射，固定 $n \geqslant 0$，且 $\xi \in \partial L$ 由 g^n的一个提升 $\tilde{g}^n$ 固定。进一步假设，在 L 中存在一条拟测地射线 $\tilde{r}$，满足 $\tilde{r}_\infty = \xi$，使得其到 L 的投影 r 在 L 的一个吸引的（排斥的）端上聚积。那么，对于 $\mathbb{D}$上的 $\tilde{g}^n$ 作用，ξ 是一个汇点（源点）。

在证明之前，我们需要遵循 [CCF19]给出一个定义。设 $g\colon L \to L$ 是一个端周期映射，且 e 是 L 的一个吸引端，其周期为 q。一个 **g-截面** 是一个紧致的 1-流形J，它是某个端的邻域 U 的边界，该端属于 e L，并满足

- $g^q(U) \subset U$
- $\bigcap_{k \geqslant 0} g^{kq}(U) = \varnothing$.

如果 e 是一个排斥端，则 e 的一个 g-截面定义为 e的一个 g^{-1}-截面。注意，由于 L 没有边界，L 的每个端都有一个连通的 g-截面。

证明。我们可以通过将 $\tilde{r}$ 替换为在 $\mathbb{D}$ 中具有相同端点的测地射线来开始证明，因为投影到 L后，它会累积于相同的端。

令 e 表示 L 的一个正端，使得 r 累积于 e，并假设 e 的周期为q。令 $s =$ 为(n和 q)的最小公倍数，。为 e选取一个连通的 g-juncture j_0，并令 $j_k = g^{ks}(j_0)$。在此证明中，我们用星号上标表示在固定双曲度量下进行测地收紧。例如，j_k^* 是对 j_k进行测地收紧所得的结果。

根据定义，$\{j_k\}$ 逃向 e，因此根据 [CCF19，定理 4。24]，j_0^*，j_1^*，j_2^*，.....也逃向 e。固定 m 充分大的值后，我们可以假设 j_m^* 将的初始点 r 与端 e分开，因此我们可以选取 j_m^* 的一个提升 j_m^*，使其将 $\tilde{r}$ 的初始点与 $\xi = \tilde{r}_\infty$分开。

此处，我们重新定义 $j_0 := j_m^*$ 和 $\tilde{j}_0 = \tilde{j}_m^*$，并像之前一样，设定 $j_k = g^{ks}(j_0)$。请注意，根据定义，$j_0 = j_0^*$ 成立，但 $k > 0$则未必如此。

设 $\tilde{j}_k$ 是由 $\tilde{g}^{ks}(\tilde{j}_0)$ 定义的 j_k 到 $\tilde{L}$ 的提升。我们注意到，每个 $\tilde{j}_k$ 也将 $\tilde{r}$ 的初始点与 ξ分隔开。事实上，若 U_0 是 e 的邻域，其边界为 j_0，而 U_0 是它的提升，其边界为 $\tilde{j}_0$，且其在 $\mathbb{D}$ 中的闭包包含 ξ，那么 $\tilde{U}_k = \tilde{g}^{ks}(\tilde{U}_0)$ 就是 $g^{ks}(U_0)$ 的提升，其边界为 $\tilde{j}_k$，并且其在 $\mathbb{D}$ 中的闭包也包含 $\xi = \tilde{g}^{ks}(\xi)$。此外，由于$g^{ks}(U_0) \subset U_0$，必有 $\tilde{U}_k \subset \tilde{U}_0$。

由于 $\{j_k\}$ 逃向 e，$\{\tilde{j}_k\}$ 必须逃出 $\tilde{L}$ 的紧子集。因此，序列 j_0，j_1，j_2，.....在 $\mathbb{D}$ 中以豪斯多夫意义收敛到一个区间 $I \subset \partial L$。令 I_k 表示闭包 U_k 与 ∂L 的交集，由于这些 U_k 彼此嵌套，必有 $I \subset I_k$。但是，I_k也是由 j_k 的端点所界定的区间，而这些端点与 j_k^* 的端点相同。由于 j_k^* 也逃出 L 的紧子集，我们必有 I 是一个单点。特别地，$\bigcap_{k \geqslant 0} \tilde{g}^{ks}(\widehat{U}_0) = \{\xi\}$，因此就 $\mathbb{D}$ 上的作用而言，ξ 是 $\tilde{g}^n$ 的一个汇点，证毕。□

我们将主要采用 引理 4.9 的以下形式：

推论 4.10. 设 $f\colon L \to L$ 为 *spA*，且 r 是 L 中周期为 n 的扩张（收缩）半叶。设 $\tilde{r}$ 是 r 到 L 的一个提升。令 $\tilde{r}_\infty$ 表示 $\tilde{r}$ 在 ∂L 上的端点，并设 f^n 是 f^n 到 L 的一个提升，使得 $f^n(\tilde{r}) = \tilde{r}$。那么

(a) $\tilde{r}_\infty$ 是 f^n 在 $\mathbb{D}$ 上作用的汇点（源点），且 *(b)* 若 $g\colon L \to L$ 是一个与 f 同伦的端周期映射，并且 $\tilde{g}^n$ 是 g 的一个与提升 f^n 相容的提升，那么 $\tilde{r}_\infty$ 也是 $\tilde{g}^n$ 在 $\mathbb{D}$ 上作用的汇点（源点）。

证明。我们赋予 L 一个标准双曲度量，使得 $\widetilde{\mathcal{W}}^{u/s}$ 的叶均为一致拟测地线（命题4.6）。根据引理4.3，扩张（收缩）半叶$\tilde{r}$ 累积于 L的正（负）端。现在将引理 4.9应用于 f 和 g。□

4.4. **双曲边界上的整体动力学**。现在我们可以证明定理 4.1的一个方向，即 spA 映射的不动点处半叶的动力学决定了相应的无穷远处的动力学。另一方向将在命题4.15中证明。

命题 4.11。设 $f\colon L \to L$ 是一个具有不动点 p的 *spA* 映射。设 $\tilde{p}$ 是 p 到 L的一个提升，设 $\tilde{f}$ 是一个固定 $\tilde{p}$的提升，并设 $n \geqslant 1$使得 f^n固定 $\tilde{p}$处的半叶。那么 f^n在 ∂L 上具有多重汇源动力学，其吸引点/排斥点分别为扩张/收缩半叶的端点。

在给出证明之前，我们需要以下引理。首先，沿用 Fenley 的定义，我们称奇异叶状结构的一个**切片叶**为一条直线，它是两条在共同初始点处相交的半叶的并集。如果两条半叶在其共同初始点周围的半叶圆周序中彼此相邻，则该切片叶称为**叶线**。注意，正则叶都是叶线，而任何非正则切片叶都包含一个奇异点。

引理 4.12。设 $\mathcal{W}$ 为 $\mathcal{W}^u$ 或 $\mathcal{W}^s$，并假设 x、$y \in \partial L$ 不被$\widetilde{\mathcal{W}}$中的任何叶分隔。那么存在一条叶 $\ell \in \mathcal{W}$，使得 $\{x, y\} \subset \partial\ell$。

证明。令 A 为 ∂L 中以 x，y 为端点的两个闭区间之一。

在$\widetilde{\mathcal{W}}$的叶线上定义一个偏序 $\prec_A$：$\ell_1 \prec_A \ell_2$ 如果 ℓ_2 的端点确定了 A 包含由 ℓ_1的端点确定的子区间。利用 命题4.6，显然每条线性链都有一个上界，因此根据 ℓ_A 佐恩引理存在一个极大元。我们声称，ℓ_A 必须连接 x到 y。

令 p 为 ℓ_A 中的任意一点，并令 p_i 为一个收敛于 p 的序列，使得每个 p_i 都包含在 $\mathbb{D}$ 中 ℓ_A 的闭包的、与 A^c 相交的补分支内。令 ℓ_i 为经过 p_i的 $\mathcal{W}$ 的一条$\widetilde{\mathcal{W}}$叶线。那么，ℓ_i 收敛于一条经过 p 的叶线 ℓ'。注意，ℓ' 的端点不在 A 的内部。事实上，ℓ_i 的端点均不包含在 A 中，因为这将与 ℓ_A 的极大性或以下假设相矛盾：$\mathcal{W}$ 中不存在分离 x 和 y 的叶$\widetilde{\mathcal{W}}$。

我们得出结论，存在一条（可能是奇异的）叶 ℓ，它属于 $\mathcal{W}$，并且包含 ℓ_A 和 ℓ'。反设 ℓ_A 在 A 的内部有一个端点 c。如果 ℓ' 在 A 之外有一个端点，那么 ℓ 包含一条分隔 x 和 y 的切片叶，这与假设矛盾。另一方面，如果 ℓ' 连接 x 和 y，那么这与 ℓ_A 的极大性矛盾。由此得出，ℓ_A 在 A 的内部没有端点，因此 $\partial\ell_A = \{x, y\}$。□

命题 *4.11* 的证明。将 f 替换为 f^n之后，我们可以假设 f 固定了 p处的半叶。我们指出，如果 p 处的一片半叶被固定，那么所有半叶都被固定。

设 r 是 $\tilde{p}$ 处的一条扩张半叶。我们将证明，如果 r' 是一条收缩半叶，且它在围绕 $\tilde{p}$ 的循环次序中与 r 相邻，那么最内侧区间 $\sim(r'_\infty, r_\infty) \subset \partial L$ 中的每个点在 f 的正幂作用下都会被吸引到 r_∞，而在负幂作用下则会被吸引到 r'_∞。

属于 f的情形。当 r 是收缩半叶时，情况是对称的，因此这就完成了证明。

有两种情况：

情况 1： r （或 r'）不是膨胀半叶。

注意，当 p 是非奇异的情况下，结论成立。假设 r 不是膨胀半叶； r' 的情况类似。

由于 r 是扩张的，且其内部与 $\mathcal{W}^u$ 横截于 $\mathcal{W}^s$，设 r 是一个半叶的，因此它是一个半叶的。在循环次序中与 r 相邻的收缩半叶（当 p 不是奇异点时，它们是经过 $\tilde{p}$的 $\mathcal{W}^s$ 的仅有半叶），并设 ℓ 为$\mathcal{W}^s$ 的任意一条穿过 r内部的叶线。我们证明，当 $k \to \infty$ 时，端点 $\tilde{f}^k(\partial\ell)$ 收敛于 r_∞；当 $k \to -\infty$时，它们收敛于由 $\{r'_\infty、r''_\infty\}$ 组成的两点集。回顾一下，根据命题4.6， $\widetilde{\mathcal{W}}^{u/s}$ 的叶是一致拟测地的。

首先，由于 ℓ 沿着收敛到 $\tilde{p}$的点与 r 相交。由于 r' 和 r'' 的内部不会遇到 $\widetilde{\mathcal{W}}^s$的奇点， $f^k(\ell)$ 必定收敛到叶线 $r' \cup r''$，因为 $k \to -\infty$，这是 $\mathcal{W}^s$ 中经过 $\tilde{p}$ 且与包含 r的$r' \cup r''$一侧相交的唯一叶线。因此， $\tilde{f}^k(\partial\ell)$ 如所声称的那样收敛到 $\{r'_\infty，r''_\infty\}$，因为 $k \to -\infty$。

其次，由于 ℓ 沿着离开 r_∞，因而收敛到r_∞的点与 r 相交。如果 $\tilde{f}^k(\ell)$ 离开 $\tilde{L}$的紧集，那么叶的序列收敛到 r_∞，从而$\tilde{f}^k(\partial\ell)$ 如所需收敛到 r_∞。否则，由于 $k \to \infty$， $\tilde{f}^k(\ell)$ 收敛到 $\mathcal{W}^s$ 的一片叶 ℓ 中的一条直线，该叶必定以 r_∞ 为端点。设 ℓ' 为包含 $\tilde{p}$ 的 $\mathcal{W}^u$ 的叶（因此也包含作为半叶的 r' 和 r''）。

因此， ℓ 和 ℓ' 是 $\mathcal{W}^s$ 的不同叶，并且在 f作用下保持不变。但这与以下事实矛盾：spA 映射的提升至多固定 $\mathcal{W}^s$ （或 $\mathcal{W}^u$）的一片叶。证明如下：提升 f 延拓为 N的一个甲板变换 τ；由于 $\pi_1 N \to \pi_1 M$ 是单射， τ 也延拓为 M的一个甲板变换。现在， ℓ' 和 ℓ 悬挂后分别得到稳定叶状结构 W^s的叶 R 和 E，它们属于M中的 $\tilde{\varphi}$，并且在 τ作用下保持不变，这意味着它们的闭轨道彼此同伦。由于 φ 在 M中的不同同伦闭轨道包含于 W^s的同一片（必然经过吹胀的）叶中，因此必有 $R = E$；根据命题4.6，交集 $L \cap R$ 是连通的。但它同时包含 ℓ' 和 ℓ，这就产生了矛盾。

情形 2： r 和 r' 都是被吹起的半叶。

在这种情况下， r 和 r' 是 $\mathcal{W}^s$ 与 $\mathcal{W}^u$的半叶。令 $[r_\infty，r'_\infty] \subset \partial L$ 为它们的端点之间的区间，且该区间不包含基于的其他半叶的端点 $\tilde{p}$。根据推论 4.10，在 f 对 $[r_\infty$的作用下， $r'_\infty]$ 满足 r_∞ 是局部吸引子，而 r'_∞ 是局部排斥子。因此，只需证明 $[r_\infty$中没有其他不动点 $r'_\infty]$。

假设为了将证明 f 成立，$(r_\infty，r'_\infty)$ 包含存在一条不动点的叶线 ℓ，其端点位于 $[r_\infty，r'_\infty)$ 中，这将导致矛盾，恰如案例 1 末尾所述（因为 r 和 r' 已由 f固定，且不能与 ℓ位于同一条叶中）。

令 q_1 为距离 r_∞最近的不动点；这样的点存在，因为 f 的不动点集是闭集，而且距离 r_∞ 足够近的任何点都不可能是不动点。首先，假设存在一条 $\widetilde{\mathcal{W}}^s$ 的叶线ℓ，将 r_∞ 与 q_1 分隔开。那么当 $k \to \infty$ 时，极限 $\tilde{f}^k(\ell)$ 是一条 $\tilde{f}$– 不变叶线

$\widehat{\ }$ $\sim\ell$ 属于 $\mathcal{W}^s$，并将 r_∞ 与（r_∞ 中的某个不动点 q 连接起来，r'_∞）（这里我们用到了r'_∞ 是一个局部排斥点这一事实）。如果不存在这样的分隔叶线，那么由引理 4.12 可得 $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$一条 $\mathcal{W}^s$ 的叶线 ℓ，其端点为 r_∞ 和 q_1。如果 ℓ 不被 f 固定，则考虑$\widetilde{\ }$所有连接 r_∞ 与 q 的叶线所构成的族。该集合是闭的且为 f–不变，因此其边界线$\widehat{\ }$是不动的；令 ℓ 为其中一条。接下来的矛盾推导与情形 1 相同。□

因此，根据 推论 4.10 和 命题 4.11 我们可以证明，两个同伦的 spA 映射具有相同的局部动力学。这一点对于第 4.5 节至关重要。

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$**引理 4.13.** 设 $f, f' \colon L \to L$ 是同伦的 *spA* 映射。令 f, f' 为分别对应于 L 的提升，并设 f 固定一个点 $\tilde{p}$ 及其半叶。那么 f' 也固定一个（唯一的）点 $\tilde{q}$ 及其半叶。$\widetilde{\ }$ 在 $\tilde{p}$ 处的半叶与 $\tilde{q}$ 之间存在一一对应关系，该对应由它们在 ∂L上的极限点相同所确定。

此外，位于 $\tilde{p}$ 的半叶 $\tilde{r}$ 在 L 中的像逃逸到一个端 e，当且仅当位于 $\tilde{q}$ 的相应叶 $\tilde{r}'$ 也具有相同性质。

证明将使用以下众所周知的事实。我们给出的证明见 Farb– Margalit [FM12], ，其中该结果归功于 Handel [Han85]。

引理 4.14. 设 $g \colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ 是一个同胚，在 $\partial\mathbb{D}$ 上至少有4 个不动点，每个不动点在 $\mathbb{D}$中都有一个吸引或排斥邻域。那么 g 在内部($\mathbb{D}$)有一个不动点。

证明。 将该映射加倍，得到一个同胚 $Dg \colon S^2 \to S^2$。根据假设，该映射在赤道上至少有 4 个不动点，每个不动点都是吸引的或排斥的，因此 Lefschetz 指数为正。由于 $\chi(S^2) = 2$, 必定存在一个指数为负的不动点。由于这个不动点必然位于赤道之外，我们便在 int($\mathbb{D}$)中找到了 g 的一个不动点。□

引理*4.13*的证明。 根据第 (a) 部分推论 4.10，处每个半叶的端点在 $\mathbb{D}$中都有一个吸引／排斥邻域。根据第 (b)部分，对于$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$的 f'作用，情况也相同。因此，根据引理 4.14， f'有一个不动点 $\tilde{q}$，位于L中。接着，我们将命题 4.11$\widetilde{\ }$应用于 f' 在 $\tilde{q}$，以完成第一个结论的证明。

此外，为了证明该结论，我们应用 备注 4.7，在 L 上选取一个标准度量，使得 L 上两组不变叶状结构的叶都具有一致拟测地提升，提升至$\sim$ $\sim L$。因此， $\tilde{r}$ 和 $\tilde{r}'$ 在 L 中彼此伴行，从而它们的像在 L中也彼此伴行。特别地，一个逃逸 e 当且仅当另一个也逃逸。证明完毕。□

4.5. **spA 代表元的存在性$^+$ 。我们现在证明** 定理 4.2 (引言中的定理 B)， 该定理指出，任意无环端周期映射实际上都同伦于一个 spA$^+$ 映射。

定理 *4.2* 的证明。 证明过程与 定理 3.3 类似，不过现在我们必须证明，对于适当的 $M = M(h, N)$，有 $\varphi^\flat = \varphi$，即 $\partial_\pm N$与圆形伪阿诺索夫流正向横截 φ。我们可以假设 N 不是一个乘积。

首先，选取一个辅助 spA 映射 f_a，如 定理 3.3所述。利用与 f_a相关联的 spA 结构，我们可以考虑 C_1 中曲线的同痕类集合，其中这些曲线是 $\partial_\pm N$ 上奇异叶状结构 $\partial_\pm N \cap W_a^{s/u}$的闭叶。另令 C_2为 $\partial_\pm N$ 中的曲线集合，这些曲线与 N中的本质环带相邻，其两端分别位于 $\partial_- N$和 $\partial_+ N$。令 $C = C_1 \cup C_2$。

现在设 $h \colon \partial_\pm N \to \partial_\pm N$ 为满足命题 3.9且不存在任何 C 被映射到 C中的曲线（在同伦意义下）的逐分支同胚。这可以通过以下方式实现

正如引理 3.12的证明中一样。令 $M = M(h,\ N)$ 为相应的 h–双重（第 3.2 节）。如同引理 3.12，M 是双曲的，我们考虑在 $f^\dagger$ 的证明中构造的 spA 映射定理 3.3。

我们证明 $f^\dagger$ 是 spA$^+$。参照定理 3.3 的证明，只需证明 φ 没有爆破环带，也就是说 $\varphi^\flat = \varphi$。反设存在一个爆破环带 A。沿着 $\partial_\pm$ 切开 A 后，我们如同在引理 4.4 和引理 4.5 中那样，得到对应于图6中情形（1）和（3）的环带。情形（3）在 N 中给出一个本质环带，它与 $\partial_\pm$ 相交于 C_2 的曲线。情形（1）给出 $f^\dagger$ 中一条逃逸（引理4.3）、扩张/收缩半叶的悬挂。我们证明后一种情形与 $\partial_\pm$ 相交于 C_1 的曲线。注意，这并非显而易见，因为 $W^{u/s}$ 和 $W_a^{u/s}$ 是定义在具有不同流的不同流形上的叶状结构。

设 r 是 $f^\dagger$ 的一条逃逸的扩张／收缩半叶。由引理 4.13，存在 f_a 的一条与之对应的逃逸周期半叶 r_a。此外，从 $\partial_\pm N$ 的一个螺旋邻域 U 可以看出，r 和 r_a 在各自的流下的悬挂 H 和 H_a 产生同伦的曲线 $H \cap \partial_\pm N$ 和 $H_a \cap \partial_\pm N$。因此，我们已经证明 $\partial_\pm N \cap A$ 的所有曲线都包含在 C 中。但根据 $M = M(h、\ N)$ 的构造，我们看到 h 将 $\partial_+ N \cap A$ 中的曲线映射到 $\partial_- N \cap A$ 中的曲线，进而将 C 中的曲线映回 C。这与我们对 h 的选择矛盾，并完成证明。□

4.6. **汇点—源点动力学蕴含不动点**。有了定理 4.2，我们便可以完成定理 4.1的证明。剩下的方向陈述如下命题：

命题4.15。设 $f\colon L \to L$ 是 *spA*。假设 f 是到 L 的一个提升，使得对于某个 $n \geqslant 1$，f^n 在 ∂L 上呈现多重汇源动力学。则 f 在 L 中有唯一的不动点 $\tilde{p}$，其半叶由 f^n 保持不变，并且在 $\tilde{p}$ 处扩张/收缩半叶的端点恰好是它在 ∂L中的吸引点/排斥点。

证明。只需证明该不动点 $\tilde{p}$存在（由引理 4.8可知它必然唯一），其余结论便可由 命题 4.11推出。注意，我们不能像之前那样直接使用 引理 4.14 中的 Lefschetz 论证，因为我们的假设并未给出圆盘 $\mathbb{D}$内部的汇点/源点性质，只在其边界上成立。

此外，如果 $\tilde{p}$ 由 f^n保持不变，那么它也必然由 f 保持不变，否则 f^n 将有多个不动点。因此，只需将 f 替换为 f^n，我们现在就这样做。

接下来，根据引理 4.13 我们可以自由地将 f 替换为任意与其同伦的 spA 映射；令 $f^\dagger$ 为一个与其同伦的 spA$^+$ 映射，其存在性由定理 4.2保证。因此，剩下要证明的是：如果一个提升 $\tilde{f}^\dagger$ 在 $\partial\tilde{L}$上具有多重汇源动力学，那么它在 $\tilde{L}$中有一个不动点。我们使用 $f^\dagger$ 是 spA 映射$^+$ 这一点的关键之处在于，其不变叶状结构 $\mathcal{W}^{u/s}$ 在奇点之外是横截的，也就是说不存在膨胀叶。

设 x_1、x_2 是 $\partial\tilde{L}$ 上 $\tilde{f}^\dagger$ 的吸引的不动点。首先，假设它们由 $\mathcal{W}$ 的切片叶 ℓ 连接，其中 $\mathcal{W}$ 表示 $\mathcal{W}^u$ 或 $\mathcal{W}^s$（并令 $\mathcal{W}'$ 表示另一个）。如命题 4.11 的证明中所述，通过选择 ℓ 为连接 x_1、x_2 的 $\mathcal{W}$ 的所有直线族中的一条边界叶，我们可以假设 $\tilde{f}^\dagger(\ell) = \ell$。令 ℓ' 为，例如，$\mathcal{W}'$的任意一条穿过 ℓ 的正则叶。根据多重汇源动力学，当 $k \to \infty$ 时，$(\tilde{f}^\dagger)^{-k}(\ell')$ 的端点收敛于 $\partial\tilde{L}$ 中不同的排斥点 y_1、y_2。因此，我们得到一条 $\tilde{f}^\dagger$-不变的叶线 ℓ''，连接 y_1、y_2，而 L 中的交集 $\ell \cap \ell''$ 正是所需的不动点 $\tilde{p}$。

<escape>现在假设 x_1 和 x_2 并未通过以下任一对象的切片叶相连 $\mathcal{W}^{u/s}$。那么根据 引理 4.12 它们被一个切片叶分隔 ℓ，该切片叶属于 $\mathcal{W}^u$（或属于 $\mathcal{W}^s$）。因为存在</escape>

对于 ℓ 的无穷多种选择，我们可以假设它具有非固定的端点。再次考虑当 $k \to \infty$ 时 $(\widetilde{f^\dagger})^{-k}(\ell)$ 的极限，这些端点收敛到两个不同的排斥的 $\widetilde{\ }$ 点 y_1，$y_2 \in \partial L$，因此它们由其中一个叶状结构的一条叶连接。这样便可归结为前一种情形，只需将 $\widetilde{f^\dagger}$ 替换为 $(\widetilde{f^\dagger})^{-1}$。□

5. Invariant laminations and topological entropy

接下来的两节将阐述定理 C中给出的 spA 映射伸展因子的各种刻画。本节聚焦于 spA 映射的拓扑熵，而下一节将探讨 spA 映射在何种意义上具有动力学最优性。

为此，回顾第 1.2 节中所述，对于任意同胚 $g\colon\ L \to L$，其**增长率**$\lambda(g)$ 是其周期点的指数增长率：

$$\lambda(g) = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\#\mathrm{Fix}(g^n)},$$

其中 $\mathrm{Fix}(g)$ 表示 g的不动点集合。给定一个 spA 映射 $f\colon\ L \to L$，存在一个最大的紧致不变核心动力系统 $C_f \subset L$，定义见第 5.2 节，熵 $\mathrm{ent}(f)$ 定义为 f在 C_f上的限制映射的拓扑熵。本节的主要定理如下：

定理 5.1。若 f是 *spA* 映射，则 $\mathrm{ent}(f) = \log \lambda(f)$。

在此过程中，我们定义了与 spA 映射相关联的典范不变层状结构 $\Lambda^\pm$（f），并证明 C_f 仅取决于 spA 映射的同伦类：两个同伦的 spA 映射具有共轭的核心动力系统（定理 5.3）命题 5.15）。

5.1. **不变层状结构**。令 $f\colon\ L \to L$ 为一个 spA 映射。如果当 $n \to \infty$ 时，点 $x \in L$ 通过 L 的正端离开紧集，则称其为**正向逃逸**；如果当 $n \to -\infty$ 时，$f^n(x)$ 通过 L 的负端离开紧集，则称其为**负向逃逸**。

定义 5.2。令 Λ^+ 为 L 中所有不发生负向逃逸的点的并集，并令 Λ^- 为 L 中所有不发生正向逃逸的点的并集。

我们将 Λ^+ 和 Λ^- 分别称为 **正** 和 **负不变层状结构** 对应于 f。我们将在 定理 5.3 中证明，它们分别是 $\mathcal{W}^u$ 和 $\mathcal{W}^s$中（奇异）子层状结构的支集，从而说明这一术语是合理的。一般而言，奇异叶状结构 $\mathcal{W}$ 的 $\mathcal{W}$子层状结构是由 $\mathcal{W}$的子叶并集构成的闭子集，其中子叶 指的是 $\mathcal{W}$ 中至少两个半叶的并集。注意，每个叶本身都是一个子叶；而不包含 $\mathcal{W}$ 奇异点的子叶则是一条完整的（正则）叶。关于如何由 命题 5.8 精确描述 $\Lambda^\pm$ 如何从 $\mathcal{W}^{u/s}$得到。

现在我们可以陈述本小节的主要定理。

定理 5.3 (不变层状结构)。 对于一个 *spA* 映射 $f\colon\ L \to L$，不变层状结构 $\Lambda^\pm$ 是一对 f–不变的、横截的、处处稀疏的（奇异）层状结构，满足：

(1) $\mathcal{W}^u$ 的每个周期扩张半叶（分别地，$\mathcal{W}^s$的周期收缩半叶）都是 Λ^+ 的半叶（分别地，Λ^-的半叶）；*(2)* $\Lambda^\pm$ 的周期叶集合在 $\Lambda^\pm$中稠密；*(3)* Λ^+ 的每个半叶（分别地，Λ^-的每个半叶）都聚积于 L的正端（分别地，负端）。

证明定理 5.3将在第 5.1.2 节中给出。

我们将在 注 5.17 中观察到，层状结构 $\Lambda^{\pm}$ 只取决于 f 的同痕类，而非 spA代表的具体选择。

5.1.1. 中的层状结构 N。为了证明 定理 5.3，我们回到紧化映射环面 N，它来自 f，以及其半流 φ_N。关于不变叶状结构 的相关记号，请参阅第 4.2 节 $W_N^{u/s} = W^{u/s} \cap N$。

令 W_N^+为所有不与 φ_N相交的 $\partial_- N$轨道的并集，并令 W_N^-为所有不与 φ_N相交的 $\partial_+ N$轨道的并集。对于下一个引理，**周期性膨胀半叶**的 $W_N^{u/s}$ 是 $\mathcal{W}^{u/s}$中周期性膨胀半叶的悬挂。换言之，它是 $W_N^{u/s}$ 的一片叶与 N 中包含 φ_N的一个闭轨的爆破环带的交集中的一个分支。参见 图 5。

引理 5.4. 令 $W_N^{\pm}$ 和 $W_N^{u/s}$ 如上所述。

(a) 令 H 为 W_N^u 的一条叶。下列情况之一成立：• H 不包含周期性的膨胀半叶，此时 H 与 $\partial_- N$ 相交，当且仅当每个 H 上点的反向轨道都与 $\partial_- N$ 相交；或者• H 至少包含一条周期性的膨胀半叶，此时 H 中反向轨道与 $\partial_- N$ 相交的点，恰好是收缩的膨胀半叶内部的点。*(b)* 集合 W_N^+ 是从 W_N^u 中移除• 所得：移除每一条具有如下性质的叶 H ——对所有 $p \in H$，从 p 出发的反向 φ_N-轨道都与 $\partial_- N$ 相交；并移除• 中收缩的开周期性膨胀半叶。

将“W_N^u”替换为“W_N^s”、“*backward*”替换为“*forward*”、“$\partial_- N$”替换为“$\partial_+ N$”，并将“收缩”替换为“扩张”后，陈述 *(a)* 和 *(b)* 仍然成立。

证明。 注意到 (a) 蕴含 (b)，因此我们只需证明 (a)。如果 H 是周期性的，则这可直接由 引理 4.4得到，其中 H 的每个周期半叶都属于类型 (1) 或 (2)。

现在假设 H 不是周期性的，并考虑 φ 上的流 M 及其不稳定叶状结构 W^u。由于 H是 W_N^u的一片非周期 叶，因此它不包含爆破环带的闭轨道。由于爆破环带边界上的闭轨道不与 $\mathcal{F}_0$ 相交（同样参见 图 5），这意味着 H 不与任何爆破环带的闭轨道相交。因此， φ中各点的所有反向 H 轨道在 中 M渐近。下述断言说明， H 中的一条反向轨道与 $\partial_- N$ 相交，当且仅当它们都相交。

断言 5.5。 假设 φ 是紧致 *3*-流形 M 上的一个流，其万有覆盖为 M，$\tilde{\varphi}$ 是 φ 在 M上的提升，并且 Σ 是与 φ正向横截的曲面。假设 $\tilde{x}$、$\tilde{y} \in M$均位于固定提升 Σ 的上方，其中 Σ 是 Σ的一个提升。如果从 $\tilde{x}$ 和 $\tilde{y}$ 出发的向后 $\tilde{\varphi}$-轨道渐近，那么在 $\tilde{\varphi}$ 作用下， $\tilde{x}$ 在向后时间内与 Σ 相交，当且仅当 $\tilde{y}$ 也如此。

The 将“上方”替换为“下方”，并将“向后”替换为“向前”后，结论同样成立。

断言的证明断言 *5.5*。令 N_ε 为 Σ 的一个正则邻域，它由提升一个正则 ε-邻域 Σ得到，其中 ε 足够小，使得 $\tilde{x}$，$\tilde{y} \notin N_\varepsilon$ 且 N_ε 上的流线叶状结构 N_ε 赋予其一个定向区间丛结构，其底空间为 Σ。

设 $\tilde{\gamma}_x$ 和 $\tilde{\gamma}_y$ 分别为从 $\tilde{x}$ 和 $\tilde{y}$ 出发的反向轨道。假设 $\tilde{\gamma}_x$ 与 Σ相交。由于 N_ε 是一个 *I*-丛，$\tilde{\gamma}_x$ 最终位于 Σ 下方且在 N_ε之外。由于其

~来自 $\tilde{x}$ 和 $\tilde{y}$ 的正向轨道是正向渐近的，$\tilde{\gamma}_y$ 也必然最终位于 Σ之下。由于 $\tilde{x}$ 和 $\tilde{y}$ 的作用是对称的，证毕。□

回到我们的叶 H，设 $p,q \in H$，并假设从 p 出发的反向轨道与 $\partial_- N$ 相交。
~ ~ ~设 H 是 H 到 M 的一个提升，并设 $\tilde{p},\tilde{q} \in H$ 分别是 p 和 q 的提升。从 $\tilde{p}$ 出发的反向$\tilde{\varphi}$-轨道与 $\partial_- N$ 的一个分支 Σ 的某个提升 Σ 相交。由于从 $\tilde{p}$ 和 $\tilde{q}$ 出发的反向轨道~渐近，因此根据断言 5.5，它们都必须与 Σ 相交。投影到 M 后可见，从 q 出发的反向轨道必定与 $\partial_- N$ 相交。

情形 w 这里 H 是 W_N^s，对称地可得，证明 引理 5.4。

□

命题 5.6 (层状结构 $W_N^{\pm}$)。这对 $W_N^{\pm}$ 是 $W_N^{u/s}$ 的处处稀疏（奇异）子层状结构，且每条边界叶都包含 φ 的一个闭轨。

~在证明中，我们将使用 φ的流空间，其定义如下。令 M 表示 ~的万有 M覆盖。将提升流的轨道压缩，定义商映射 $\Theta\colon\ M \to \mathcal{O}$，而 $\mathcal{O}$称为 **流空间** φ。根据 Fenley–Mosher [FM01，命题 4.1，4。2],$\mathcal{O}$ 同胚于平面。注意，$W^{u/s}$ 在 $\mathcal{O}$ 中的像是一对奇异叶状结构。

命题 *5.6*的证明。我们将重点讨论 W_N^+，因为 W_N^-的情形类似 ar.

要证明 W_N^+是 W_N^u的子叶状结构，注意到其补集是由以下各点组成的集合：这些点的向后 φ_N-轨道与 $\partial_- N$相交。该集合显然是开集，因此 W_N^+是闭集。根据引理 5.4（b），W_N^+ 是 W_N^u 的子叶的并，因此是一个（奇异）子叶状结构。这里用到了这样一个事实：φ_N 的每个奇异轨道至少界定 2 个收缩半叶和 2 个扩张半叶。

这一点 W^+ 处处稀疏，是因为 φ 在 M 中有一条轨道，其正向和反向都稠密。这条轨道存在，是因为无环面流形上的每个伪阿诺索夫流都是传递的 [Mos92，命题 2。7]。

还需证明，W_N^+ 的每个边界叶都包含 φ的一条闭轨。为此，设 H是 W_N^+的一个边界叶。若令 H_M为 W^u 中包含 H的叶，我们声称，只需证明 H_M 包含 φ的一条闭轨。事实上，对于任意一点$p \in H \subset H_M \cap N$，从 p出发的反向 φ-轨道会趋近于 H_M的一条闭轨。然而，由于 H 是 W_N^+ 的一个叶，经过 p 的反向轨道永远不会与 $\partial_- N$ 相交，因此始终留在 N中。特别地，H 包含 H_M的一条闭轨。

~为了证明 H_M 包含一条闭轨，我们使用投影 $\Theta\colon\ M \to \mathcal{O}$ 从 M 的
~ ~万有覆盖到 φ的流空间 $\mathcal{O}$。首先，设 N 为 N 在 M 中的原像
~ ~的一个分支，并设 H 为包含在 N中的 H 的原像的一个分支。由于 H 是一个
~ ~边界叶，存在 $\partial_- N$ 的一个分支 Σ，以及到 N 边界的一个提升 Σ，使得任意接近 H 的点沿流向后运动时都会与 Σ相交。因此，像
~ ~ ~$\Theta(H)$ 位于 $\Theta(\Sigma)$的边界上。（补充背景：$\Theta(\Sigma)$的拓扑边界是投影叶状结构 [的一组切片叶的并集，见 Fen09，定理 4.1]。）但我们在 [中的~LMT23] 证明了，$\Theta(\Sigma)$ 边界上的每个切片叶都是周期性的。（对于 φ 真正的伪阿诺索夫悬挂流，这一点已由 [CLR94，引理 3.21]证明。）由此可知，H_M 包含一条所需的周期轨道。□

5.1.2. 定理 定理 *5.3* 的证明。接下来只需将 $W_N^{\pm}$ 的性质转化为层状结构 $\Lambda^{\pm}$的性质。

推论 5.7。 设 ℓ 是 $\mathcal{W}^u$的一片叶。则以下情况之一成立：

- ℓ 不包含周期性膨胀半叶，此时 ℓ 包含负向逃逸点，当且仅当 ℓ 中的每个点都是负向逃逸点；或者- ℓ 至少包含一个周期性膨胀半叶，此时 ℓ 中的负向逃逸点恰好是包含在收缩膨胀半叶内部的那些点。

$\mathcal{W}^s$ 的叶也同样如此，只需将“负”替换为“正”，并将“收缩”替换为“扩张”。

证明。 由于 $f\colon\ L \to L$ 是流 φ 作用下到 L 的首次回归映射，且 L的正向（负向）端恰好积聚于 $\partial_+ N(\partial_- N$，我们有 $\Lambda^\pm = W^\pm_N \cap L$。此外， $W^\pm_N$的叶与 f的叶的 $\Lambda^\pm$轨道一一对应，因此推论由引理 5.4得证。 □

推论 5.7 以及 $\Lambda^\pm$ 的定义现在推出以下命题：

命题 5.8. 正不变叶状层 Λ^+ 是通过从叶状结构 $\mathcal{W}^u$ 中移除得到的。

- 其中每个点都是负向逃逸的叶，以及- 收缩的开放周期（膨胀的）半叶。

负不变层状结构 Λ^- 的特征可通过对称替换得到：将“$\mathcal{W}^u$”替换为“$\mathcal{W}^s$”，将“负”替换为“正”，并将“收缩”替换为“扩张”。

证明 定理 *5.3*。 首先，由于 $W^\pm_N$ 是 $W^{u/s}_N$ 的处处稀疏子层状结构，根据 命题 5.6，$\Lambda^\pm = W^\pm_N \cap L$ 是 $\mathcal{W}^{u/s}$的处处稀疏子层状结构。

设 ℓ 是 $\mathcal{W}^u$的扩张周期半叶。根据 引理4.3， ℓ 不会积聚于负端。因此， ℓ不是负向逃逸的，故是 Λ^+的半叶。由于 L 的每个周期点都是$\mathcal{W}^u$至少两个扩张周期半叶的端点，在 Λ^+中也同样如此；换言之， Λ^+没有“单尖奇异叶”。 ℓ 是 $\mathcal{W}^u$ 的收缩周期叶的情形类似，因此第 (1) 项得证。</style}

接下来证明第(3)项。设 r 是 Λ^+的一条半叶。注意， r 不会积聚于 L的负端，因为它不包含负向逃逸点。反设 r 不会积聚于正端。那么 r 包含在一个紧集 $K_1 \subset L$中，因此积聚于 Λ^+的一个子层状集 L_1。由于 $L_1 \subset \Lambda^+$，当 $n \to -\infty$时，$f^n(L_1)$始终位于一个固定的紧集 K_2中，因此它趋于一个紧的、 f不变的子层状集 $L_2 \subset \Lambda^+$。 L_2 在 φ 作用下的悬挂包含于$N \subset M$的内部，这与 $W^{u/s}$的所有半叶在 M中稠密这一事实矛盾（如引理4.3 的证明所示）。

仍需证明 $\Lambda^\pm$ 的周期叶是稠密的。由于 $\Lambda^\pm$ 处处稀疏，边界叶在每个其中都稠密，因此只需知道每个边界叶都是f–周期的。设 ℓ 是（例如） Λ^+的一个边界叶。那么，在 φ_N 作用下 ℓ 的悬挂是 H W^+_N 的一个边界叶。根据命题 5.6， H 包含一个周期轨道 γ，因此其交集 $\gamma \cap L$ 包含一个 f–周期点，位于 ℓ中。这就得到结论 (2)，证明完毕。 □

注记 5.9 （ $\Lambda^\pm$的周期叶）。 由上述论证可知， $\Lambda^\pm$ 的 f周期叶包含 f周期点。也就是说，如果 $f^n(\ell) = \ell$ 对于 ℓ $\Lambda^\pm$的一片叶，那么ℓ 包含 f^n的一个（唯一）不动点。事实上，ℓ 在半流下的悬挂是一片叶 H，它属于 $W^{u/s}$的一片周期叶H_M。如证明

命题 5.6，若 H 是 W_N^+（分别是 W_N^- 的一片叶，则沿流向后（分别向前）跟随 H 上的一点，我们始终处于 $H \subset N$ 中，并到达 φ的一条周期轨道。将这条轨道与 ℓ 相交，即得到所需的 f周期点。

注 5.10（关于不变测度 $\Lambda^{\pm}$）。 Fenley 的一个例子 [Fen97], 以及定理 8.4表明， $\Lambda^{\pm}$ 并不总能承认具有满支集的射影不变横截测度。刻画何时存在这样的横截测度将会很有意思。

5.2. **spA 映射的拓扑熵**。接下来，我们为每个 spA 映射 $f\colon\ L \to L$关联其**核心动力系统** C_f:

$$C_f = \{x \in L : (f^n(x))_{n\in\mathbb{Z}} \text{ is bounded in } L\}.$$

由于 f 是端周期的， C_f 恰好是既不正向逃逸也不负向逃逸的点集。用符号表示，$C_f = \Lambda^+ \cap \Lambda^-$。

引理 5.11. 核心 C_f 是 f–不变的紧集，并且包含任何其他 f–不变的紧集。

我们将 **熵** 定义为 spA 映射 f 的熵，记作 ent(f)，即限制映射 $f|_{C_f}\colon C_f \to C_f$的拓扑熵。关于伪阿诺索夫映射这一相关情形下拓扑熵的背景知识，参见 [FLP79，Expos´e 10]。

<escape>**注释 5.12**。 拓扑熵通常（且定义明确地）针对紧致空间上的映射进行定义，但也存在若干推广。例如，C´anovas 和 Rodr´ıguez 将一般映射的拓扑熵定义为其在紧致不变子集 [CR05] 上的限制映射的拓扑熵的上确界。根据这一(f)定义，熵在 引理 5.11 下保持不变。</escape>

L 上的端周期映射是一种**平移**，如果 L 中的每个点都同时是正向逃逸点和负向逃逸点。以下引理刻画了 spA 映射中的平移。

引理 5.13. 令 $f\colon\ L \to L$ 为 *spA*。以下各项等价:

(1) Λ^+ 或 Λ^- 其中之一为空，*(2)* Λ^+ 和 Λ^- 均为空，*(3)* f 没有周期点，*(4)* C_f 为空，*(5)* f 是一个平移。

证明。 任何周期点都有有界轨道，因此 (4) 蕴含 (3)。每个周期点都包含在 Λ^+ 和 Λ^-的叶中，并且根据定理 5.3 的周期叶在 $\Lambda^{\pm}$中稠密，因此 (3) 蕴含 (2)。显然，(2) 蕴含 (1)，而 (1) 蕴含 (4)，因为$C_f = \Lambda^+ \cap \Lambda^-$ 如上所述。因此，(1) 至 (4) 等价。

为完成证明，我们注意到 (2) 和 (5) 等价，因为 $\Lambda^+ = \varnothing$ 和 $\Lambda^- = \varnothing$ 当且仅当 L 中的每个点都同时正向逃逸和负向逃逸，即 f 是一个平移。□

为了证明 定理 5.1，我们回顾 Bowen 所得到的事实 [Bow71，定理 17], : 如果 $S\colon\ X \to X$ 和 $T\colon\ Y \to Y$ 是映射，并且 $F\colon\ X \to Y$ 是连续、满射、等变的，并且具有有限纤维，那么 S 和 T 的拓扑熵相等。特别地，共轭系统具有相同的拓扑熵。

下一个命题表明，spA 映射的核心动力系统自然共轭于某个伪阿诺索夫同胚在一个闭不变子空间上的限制。

命题 5.14。 设 $f\colon L \to L$ 是一个 *spA* 映射，其关联的闭流形为 M，且圆形流为 φ *(注 3.5)*，使得存在一个截面 S，它是 φ 经去旋转得到的（注 *3.14*）。若 $F\colon S \to S$ 是 S 的首次回归映射，那么 $f\colon C_f \to C_f$ 与 F 在某个闭的不变子空间上的限制共轭。

证明。由于 S 是通过去螺旋化获得的，因此存在一个沿流线进行的同伦，将$S \cap N$ 映射到 L的一个紧子曲面 L'，且该同伦的支集包含在 $\partial_{\pm} N$ 的一个螺旋邻域 U 内（见第3.1节）。按照第3节的记号， $S \cap N = L_U$ 和$L' = L \setminus U$。由于 U 由流段构成叶状结构，因此沿流段将 $L' \subset L$ 变形为 $S \cap N \subset S$的同伦支集远离 C_f。在此设置下， $C_f \subset S$，且 f与 F 一致，因为二者都是沿 φ到 C_f 的返回映射。□

接下来我们证明，核心动力系统不依赖于 spA代表的选取。换言之，它与 f 的同痕类有典范对应关系。

命题 5.15。 若 $f_1, f_2\colon L \to L$ 是同伦的 *spA* 映射，则它们的核心动力系统共轭。

证明中，我们需要关于核心的更多结构。首先，关于 $\tilde{L}$到 $\tilde{L}$的 $\tilde{\Lambda}^{\pm}$ $\Lambda^{\pm}$ 的提升端点，有如下引理：

引理 5.16。 $\tilde{\Lambda}^{\pm} \subset \tilde{L}$ 的每个切片叶都由其在 $\partial\tilde{L}$,~ ~中的端点唯一确定，而 Λ^+ 和 Λ^- 的叶不共享端点。

此外，若 ℓ_1 和 ℓ_2 是（例如） Λ^+ 的叶，且共享一个无穷远端点，那么它们会共享一个以奇点为基点的周期半叶。

证明。我们先证明上述“此外”部分。设 ℓ_1 和 ℓ_2 是 $\tilde{\Lambda}^+$ 中共享端点 $p \in \partial\tilde{L}$的不同叶。只需证明它们共享一个半叶，因为共享半叶的不同叶是奇异的，而 Λ^+ 中的所有奇点都是周期性的：若 s 是 Λ^+ 的奇点，则当 $n \to -\infty$ 时， $f^n(s)$ 始终处于 L 的一个紧集内，因此最终成为周期性的。若 ℓ_1 和 ℓ_2 不共享半叶，则可如下导出矛盾：由于层状结构 Λ^+ 处处稀疏， $\tilde{\Lambda}^+$ 还存在一条端点为 p的边界叶线 ℓ 。由于边界叶是周期性的（命题 5.6）， p 本身在某个 $\tilde{f}^k$下是不动的。若 ℓ_1, ℓ_2 也都在 $\tilde{f}^k$下是不动的，那么结论成立，因为它们都包含 $\tilde{f}^k$的唯一不动点。否则，在 $\tilde{f}^k$下迭代 ℓ_1, ℓ_2中的任一个，都会产生一条叶线，其在 $\Lambda^+ \subset L$ 中的像会任意接近一个负端，这与定理 5.3矛盾。

~其余断言现在很容易得出。若 ℓ_1 和 ℓ_2 是 Λ^+ 的切片叶，且端点相同，那么 $\ell_1 = \ell_2$，因为它们在两条奇异半叶上重合，并且每个叶至多包含~一个（必为周期性的）奇异点（引理 4.8）。最后，若一条 ℓ^+ 的叶 Λ 与~的一条叶共享一个端点，那么它们在 ℓ^- 上的Λ投影将会并行前进。但这同样与 L 定理 5.3的相矛盾。□

接下来回顾一下，双重边界 $\partial^2\tilde{L}$ 定义为圆 $\partial\tilde{L}$ 上不同点对在对合 $(x, y) \mapsto (y, x)$下的商空间。层状结构 $\Lambda^{\pm}$确定了闭的、两两不连结的、 $\pi_1(L)$–不变子集 $\partial^2(\Lambda^{\pm}) \subset \partial^2\tilde{L}$ ：这些子集由 $\tilde{\Lambda}^{\pm} \subset \tilde{L}$中叶线的端点（见第 4.4 节）构成。根据引理 5.16，~我们可以不再区分 Λ 的一条叶线与其在$\partial^2(\Lambda^{\pm})$中对应的点。由于 $\Lambda^{\pm}$ 是 f-不变的， $\partial^2(\Lambda^{\pm})$ 在由 f的任意一个提升 ~ ~所诱导的同胚下保持不变；我们仍将该同胚记为 f。

定义

$$\widetilde{\Lambda}_{\pitchfork} = \{(l^+, l^-) \in \partial^2(\Lambda^+) \times \partial^2(\Lambda^-) : l^+ \text{ and } l^- \text{ link in } \partial\widetilde{L}\},$$

并注意到 $\Lambda_{\pitchfork}$ 是 $\pi_1(Y)$ 不变的，且对于 f的每个提升都 $f(\Lambda_{\pitchfork}) = \Lambda_{\pitchfork}$。事实上， $\Lambda_{\pitchfork}$ 存在一个到 L中核心原像 C_f 的自然等变满射。为此，定义映射 $\Lambda_{\pitchfork} \to C_f$，将每个 $(l^+,\ l^-)$ 映到交集 $l^+ \cap l^-$中的唯一点。根据定义，该映射显然是满射；在 $\widetilde{\mathcal{W}}^{\pm}$的叶状结构图表中考察可知，该映射也是连续的。因此，由等变性，它下降为一个连续满射映射，该映射将 f 在 $\Lambda_{\pitchfork} = \Lambda_{\pitchfork}/\pi_1(L)$ 上诱导的作用与 f 在 C_f上的作用共轭。

事实上，映射的纤维 $\Lambda_{\pitchfork} \to C_f$ 很容易确定（例如参见 Casson–Bleiler[CB88，引理 6。2]）。特别是，一旦注意到映射的纤维 $\Lambda_{\pitchfork} \to C_f$ 生成了一个等价关系 $\sim$，该关系完全由 $\Lambda_{\pitchfork}$ 决定，而且这些纤维的大小有一致上界。

在此设置下，我们给出

证明命题 *5.15*。 由上述讨论，每个 spA 映射 f_i 确定了一个子空间 $\partial^2(\Lambda_i^{\pm}) \subset \partial^2\widetilde{L}$，其中周期叶线是稠密的。然而，根据 引理 4.13，这些层状结构的周期叶线集合相等，因此 $\partial^2(\Lambda^{\pm}) := \partial^2(\Lambda_1^{\pm}) = \partial^2(\Lambda_2^{\pm})$。由于映射 f_1、 f_2 是同伦的，相容提升在上的作用相同，∂L 因此 f_1、 f_2 在 $\Lambda_{\pitchfork}$ 上的作用相同：$= \Lambda_{1\pitchfork} = \Lambda_{2\pitchfork}$。 最后，因子映射 $\Lambda_{\pitchfork} \to C_{f_1}$ 和 $\Lambda_{\pitchfork} \to C_{f_2}$ 按照上述讨论作出完全相同的识别。因此，核 C_{f_1} 和 C_{f_2} 共轭，正如所要求的。 □

备注 5.17 （层状结构的不变性）。 我们记录如下事实，该事实由命题 5.15的证明推出：如果 f_1 和 f_2 是同伦的 spA 映射，那么它们各自的不变层状结构 $\Lambda_1^{\pm}$ 和 $\Lambda_2^{\pm}$ 是同伦的（它们具有相同的测地收紧，并且它们与各自的测地收紧之间的差异由受控的挤压造成）。

现在我们使用 命题 5.14， 命题5.15，以及伪阿诺索夫同胚的符号动力学来给出

定理 5.1 的证明。根据命题 5.15，只需对任意一个与之同伦的 spA 映射证明该定理；根据定理 4.2，我们可以选择 f 为 spA$^+$。也就是说，如果我们考虑与 f 相关联的 spA 结构，如注 3.5 中所述，那么流 φ 是 M 上一个真正的伪阿诺索夫悬挂流。我们进一步假设 M 是按照定理 4.2 的证明中所述构造的一个 h– 双重体，这样叶状结构 $\mathcal{F}$ 就可以解旋为 φ 的一个截面 S；参见注 3.14。特别地，由命题 5.14 得到的首次回归映射 $F\colon\ S \to S$ 是一个真正的伪阿诺索夫同胚。令 C 为 S 的闭 F–不变子空间，且它与 C_f 共轭；只需证明 $F|_C$ 的熵等于其不动点增长率的对数。

令 $\sigma\colon\ \Sigma \to \Sigma$ 为与 $F\colon\ S \to S$的马尔可夫分割相关联的有限型子移位，如 [FLP79, Expos´e 10] 中所构造。符号编码 $\theta\colon\ \Sigma \to S$ 是一个半共轭映射，具有如下性质：其纤维的大小一致有界。因此，受限编码 $\theta|_{\theta^{-1}(C)}\colon\ \theta^{-1}(C) \to C$也具有同样性质。由于有限型子移位的熵等于其不动点增长率的对数 [Bow70], ，只需证明 $\theta^{-1}(C) \subset \Sigma$ 具有有限型。

根据 Fried [Fri87，第 492], 页，只需证明子系统 $C \subset S$ 是孤立的，也就是说，它有一个开邻域 U使得 $C = \bigcap_{i\in\mathbb{Z}} F^i(U)$。这可由我们的拓扑设置轻易得出：首先，重新参数化流 φ，使得 $F\colon\ S \to S$ 是时间为 1 的回归映射

映射，并在 M 上任取一个度量。接下来注意到， $C \subset S$恰好是满足以下性质的 F–不变闭集：经过其中各点的流线从不与 $\Sigma = \partial_{\pm} N$ 相交（此处使用的是命题 5.14 和注 3.5 中的记号）。 φ–横截曲面 Σ有一个由流线段构成的 ε–领圈；我们选择 $U \subset S$的一个开邻域，使得对每个 $u \in U$，都存在一个 $c \in C$，满足 $d(\varphi_t(u), \varphi_t(c)) \leqslant \varepsilon/2$（对 $t \in [-1, 1]$）。为证明 $C = \bigcap_{i \in \mathbb{Z}} F^i(U)$，注意到任意 $x \in \bigcap_{i \in \mathbb{Z}} F^i(U)$ 都满足：对所有 $t \in \mathbb{R}$， $d(\varphi_t(x), \varphi_t(C)) \leqslant \varepsilon/2$。但是，由于对所有 t， $\varphi_t(C) \subset N$， $\varphi_t(C)$ 都不会与 Σ 的 ε–领圈相交（因为这样的点必然逃离 N）。因此，$\varphi_t(u)$ 不会与 Σ 相交，故 $u \in C$，如所需。证明完毕。□

6. Stretch factors of spun pseudo-Anosov maps

在本节中，我们通过证明 定理 C 来完成证明：spA 映射在所有同伦的端周期映射中使增长率最小（推论 6.2），并且对于一个 spA 映射 f， $\lambda(f)$等于曲线在迭代下交数的增长率（定理 6.4）。

综上，这就是我们将 $\lambda(f)$ 称为 spA 映射 $f\colon L \to L$ 的**伸展因子**的依据。

6.1. **不动点的增长率**。在第 4 节建立了所需结构之后，以下定理的证明可以仿照伪阿诺索夫同胚的情形进行。例如，参见 [FM12，定理 14。20]。

定理 6.1. 设 $f\colon L \to L$ 是一个旋绕伪阿诺索夫映射。那么对每个 $n \geqslant 1$，同胚 f 在所有同伦的端周期同胚中，周期为 n 的周期点数量最少。

证明概要。设 g 是另一个与 f同伦的端周期映射。证明的思路是说明：对于 f 的任意一个周期为 n 的周期点 x， g 都有一个周期相同的 Nielsen 等价周期点 y，其周期为 n。这里，如果存在提升$\sim\tilde{x}$ 和 $\tilde{y}$ 到 L，使得 f^n 和 g^n 的相容提升分别固定 $\tilde{x}$ 和 $\tilde{y}$，那么称 x 和 y 是 Nielsen 等价的。注意， f 的任意两个周期点都不可能 Nielsen 等价，因为根据引理 4.8，$\tilde{f}^k$ 的每个提升至多固定一个点。因此，由此可知，Nielsen 等价确定了一个从 f 的周期为 n 的周期点到 g的周期为 n 的周期点的单射。

为此，设 x 是 f 的一个周期为 n的周期点。为简化记法，将 f （以及 g）替换为 f^n （以及 g^n），这样 x 现在是不动点。设 $\tilde{x}$ 是$\tilde{}$ x 的一个提升，设 f 是 f 的一个提升，且固定 $\tilde{x}$。根据命题 4.11，存在一个 $k \geqslant 1$，使得 $\tilde{f}^k$ 在 ∂L上呈现多重汇源动力学；因此， g的相容提升 $\tilde{g}$ 的 k次幂也如此。先假设 $k = 1$。那么根据引理 4.9，$\tilde{g}$ 在 ∂L 上的每个不动点，对于在 $\mathbb{D}$上的作用，都是吸引的/排斥的。因此，根据引理 4.14，$\tilde{g}$ 在 L中有一个不动点$\sim\tilde{y}$。若 $k \geqslant 2$，则注意到 $\tilde{g}$ 不固定 ∂L上的任何点。然后，参照引理 4.14 的$\tilde{}$证明，同伦映射 $D\tilde{g}$ 和 Df 在赤道$\tilde{}$上没有不动点，且 Lefschetz 指数相同。但 f 的唯一不动点具有负指数，因此$D\tilde{g}$，从而 $\tilde{g}$必须在 L中有一个固定 $\tilde{y}$ 点。

证明 x 和 y 具有相同周期的证明现在完全仿照 [FM12，定理 14。20]。证明至此完成。□

以下推论现在显然成立：

推论 6.2。如果 $f\colon\ L \to L$ 是 *spA*，则

$$\lambda(f) = \inf_{g \simeq f} \lambda(g),$$

其中，下确界取遍所有与 f 同伦的端周期映射。

特别地，$\lambda(f)$ 对于 *spA* 映射 f 仅取决于 f 的同伦类 .

备注 6.3。目前尚不清楚推论 6.2 在 g 可在所有同伦的（不一定是端周期的）同胚中变化时，是否仍然成立。

6.2. **伸展因子与交数的增长**。接下来，我们转向对伸展因子的如下纯拓扑刻画。

定理 6.4。设 f 是一个旋绕伪阿诺索夫映射。那么

$$\lambda(f) = \max_{\alpha,\beta} \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{i(\beta, f^n(\alpha))}, \tag{1}$$

其中，最大值取遍所有本质简单闭曲线的同痕类。

回顾一下，如果 α 和 β 是 L中的简单闭曲线，那么 $i(\alpha,\ \beta)$ 表示它们的几何交数，即在 α 和 β 在各自同痕类中变化时，交点数的最小值。特别地，显然 式（1）右端仅取决于 f的同伦类。

注 6.5。我们将证明 定理6.4，使用一个不变火车轨道 $\mathcal{V}$ 对于 $f\colon\ L \to L$ （见 第6.2.3节）。在有限型情形中，伪阿诺索夫映射的类似交集性质可以利用与不变测地叶状结构相关联的奇异平坦度量来证明。虽然在我们的情形中，这一结构不一定存在（见注5.10），但仍然可以使用类似的思想来探索一种有趣的方法。

定理 6.4 的证明将在接下来的几个小节中展开。由定理 4.2 和推论 6.2，我们可以假设 $f\colon\ L \to L$ 是定义 3.4 中所定义的 spA^+ 映射。参照注 3.5 中的 spA 结构，叶状结构 $\mathcal{F}$ 以 L 为深度一叶，并与 M 上的伪阿诺索夫流 φ 横截。我们还假设，如构造所示（见注 3.11 ），$\mathcal{F}$ 是通过绕横截曲面 $\Sigma = \partial_+ N$ 旋转 φ 的截面 S 得到的。最后，我们假设 f 至少有一个周期点，因此 $\lambda(f) \geqslant 1$ 也如此；否则，根据引理 5.13，定理 6.4 中的等式成立。

6.2.1. 一些倾斜组合结构。为了证明 定理 6.4 我们需要一些组合工具。

回顾一下，与 φ 相关联的是流形 M 的偏转三角剖分 τ ，该流形是通过从 M [中移除 φ 的奇异轨道而得到的 Ago11, Gu´e16]。 τ 的 2-骨架是 M 中的一个分支曲面 ，它与 φ 横截（[LMT21, 定理 5.1]）；此外，将 M 替换为奇异轨道的管状邻域 U 的补集后，我们得到 τ的紧致模型，并将其视为 M中的部分分支曲面 $\tau^{(2)}$。详情参见 [Lan22, LMT23]。

与 τ 相关的还有一个**不稳定分支曲面**，记作 B^u （参见 [LMT20，第5.2节。1] 或 [Lan22，第3节。3]）。该分支曲面的特征是，它与 τ拓扑对偶，并且它与每个 τ-面 F 的交集是一条轨道，其唯一的分岔点指向 F 中对于τ而言位于正下方四面体的 F唯一最顶端边。由此可知， B^u位于单个

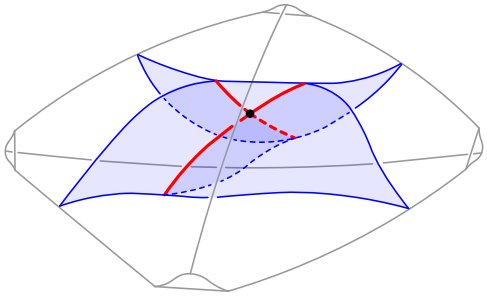

FIGURE 8. 位于单个 τ 四面体中的不稳定分支曲面 B^u 部分。分支轨迹以红色标出。

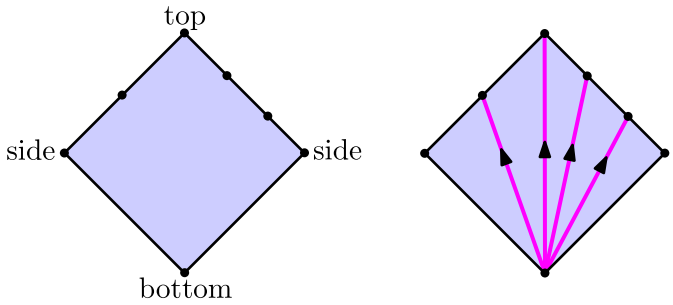

FIGURE 9. 左： B^u 的一个扇区，其侧边、顶部和底部的点均已标注。右：处于对偶位置的流图 Φ 中对应的部分。

τ-四面体看起来像是单个轨道折叠移动的悬挂。参见图8，其中 B^u 的1-骨架以红色标出；请注意，有两条分支直线在四面体中心的一个“ 三重点”处交叉。

现在我们描述一些关于 B^u 的组合性质，这些性质是在 [LMT20的第 4]节中发展起来的。严格来说，这些组合性质是针对一个相关的分支曲面 B^s发展起来的，但可以通过反转 τ-面的余定向，在这两个分支曲面之间进行转换。

B^u 的扇区与矩形同胚。设 s 为一个 B^u-扇区。那么， s 的边继承自对偶图 Γ 的定向；该图是与 τ的面对偶的有向图，并自然地等同于 τ的 1-骨架。 B^u有一个唯一的角是源点，我们称之为 s 的底点；另有一个唯一的汇点，我们称之为 s的顶点。剩下的两个角称为侧点。在 s中，侧点分别与顶点和底点相连。 ∂s 中包含 s 顶点和底点的两个侧点的补集，分别是 s的顶部和底部。底点是 s底部中唯一的三重点，而 s 的顶部可以包含任意数量的三重点。见图 9 左侧。

B^u 在 M 中的补区域是“带尖点的实心环面”。也就是说，每个补区域都微分同胚于一个带有 n个尖点的圆盘的映射环面，其中的微分同胚由一个微分同胚给出。数目 n等于补区域核心处奇异 φ轨道的棱数，因此特别地， $n \geqslant 3$。

与 τ 相关联的最终对象是（**不稳定**）**流图** Φ，其定义如下：它的顶点是 τ的边，并且对于每个 τ-四面体，都存在一条有向 Φ-边，从底部的 τ-边指向顶部的 τ-边，以及与相应的轨道折叠操作相关的两条赤道 τ-边（例如，参见图 10）。当 Φ 嵌入于

M 以这种方式，我们称其处于**标准位置**。还有一种我们将使用的位置，称为 Φ ，叫作**对偶位置**。在对偶位置，每个三重点处都有一个顶点，该三重点属于 B^u （即 Γ的顶点），并且对于每个 B^u-扇区 s ，在 s 中有一条有向边，从 s 的底部三重点指向每个不是侧顶点的三重点。参见图 9的右侧。在对偶位置，每条 Φ-边都与 2-骨架 $\tau^{(2)}$正向横截。

从 Φ 开始，处于标准位置时，我们可以通过相对于 Φ 向下同伦变形，将其置于对偶位置，这里参照 τ [LMT20，截面 4]。

6.2.2. 在 $\partial_+ N$ 上的位置承载与倾斜轨迹 由于 Σ 横截于伪阿诺索夫流 φ， Σ 以如下方式被部分分支曲面 $\tau^{(2)}$ 承载：经过一次同伦后， Σ 与管状邻域 U 相交于横截于 φ的经向圆盘中，除此之外则包含在一个 I-纤维化邻域中 τ ，其中它横截于纤维；这些纤维可以取为流的线段。这可由 定理 2.3 的一个加强版本推出，该版本证明于 [LMT23]。

Σ 与不稳定分支曲面 B^u 的交集是在 Σ上的一种（不稳定）**veeringtraintrack** $\mathcal{V}_\Sigma$。由于前文讨论的 B^u 的补区域结构，这些补区域 $\Sigma \setminus\setminus \mathcal{V}$是带有 $n \geqslant 3$的尖点 n边形。

所携带的 Σ 位置并不唯一。正如 [Lan19，命题 45] 所述，我们可以选择Σ 处于“最低”位置。在这样的位置，轨道 $\mathcal{V}_\Sigma$ 没有大分支，也就是两个分岔点都朝内的分支——大分支表示一次对角交换，可将 Σ 移至更低的位置。我们固定 Σ 始终处于这一位置。

由于 Σ 和 S 都由 τ携带，我们可以绕着 Σ 旋转 S ，从而得到叶状结构 $\mathcal{F}$，其叶按上述意义由 τ 携带。特别地， L 由 τ 携带，因此我们可以像对 Σ所做的那样，在 L 上定义相应的不稳定轨道 $\mathcal{V}$ 。

断言 6.6。 Σ 中的任意本质曲线 c 都可以经过同伦变为与 $\mathcal{V}_\Sigma$横截，且 $\Sigma \setminus\setminus (\mathcal{V}_\Sigma \cup c)$中不存在双边形。

断言*6.6*的证明。 我们略述该断言的证明，适用于任意轨道 τ ，其补区域为 n边形（$n \geqslant 3$），且没有大分支。这种轨道携带有限条闭曲线，我们称之为汇点 τ，以及唯一的测地叶层 λ ，其中每个汇点 τ对应一条闭叶。由于没有大分支，汇点在 τ 中彼此不相交。每条非紧叶的两端都 λ 螺旋趋近于一条闭叶，而每条闭叶两侧都有非紧叶以一致的方向螺旋趋近。我们可以对 τ 作同伦，使其汇点与 λ的闭叶重合。注意，通过在汇点的一个小邻域内作同伦，沿螺旋方向旋转 τ 的汇点，我们可以任意精确地用 λ 逼近 τ。

对于任意一条不与汇点同伦的简单闭曲线 c ，其测地代表元c^* 与 λ 横截，并且 $c^* \cup \lambda$ 的所有补区域均具有非正指标。若 c 与汇点同伦，则我们可以将 c^* 沿一个方向稍微推离汇点，以达到相同的结果。现在，按照上文所述进行旋转同伦，我们可以假设 $c^* \cup \tau$的每个补区域都对应于 $c^* \cup \lambda$ 的一个指标相同的补区域，从而排除双边形。□

注 6.7。 由于 L 是通过旋转得到的， L 的端中的轨迹 $\mathcal{V}$ 是轨迹 $\mathcal{V}_\Sigma$的一个半覆盖。于是，一个简单的覆盖论证表明，任何深入 L 端足够远的曲线 c ，都可以经过同伦调整，使其与 $\mathcal{V}$ 横截且没有补双边形。

沿着 Σ 切割不稳定流图。 令 Φ 为嵌入在 M 中、处于对偶位置的 τ 的不稳定流图。

令 η 为与 Σ 对偶的上同调类。令 $\Phi\backslash\backslash\Sigma$ 表示从 Φ 中去除那些（在我们的嵌入中）穿过 τ 的面、且这些面携带正权重的 Σ 的边后所得的集合。接着，令 $\Phi|\eta$ 为 $\Phi\backslash\backslash\Sigma$ 的动力学核心，即由包含在有向圈中的边所组成的子集。我们注意到，$\Phi|\eta$ 包含 Φ 的所有与 η 配对为 0 的有向圈。

令 Φ_N 为 $\Phi|\eta$ 中包含于 N 的子图。

6.2.3. 不变量倾斜轨道与增长率。论证将依赖于以下构造，我们将在下文证明其合理性。

(1) 映射 $f\colon L \to L$ 通过将 L 推过 $\mathrm{int}(N)\backslash\backslash L$ 中的四面体，并注意到每一步都是轨道上的一次折叠操作，直到最终轨道由 f 映回 $\mathcal{V}$，从而确定一个轨道折叠映射 $f_{\mathcal{V}}$: $\mathcal{V} \to \mathcal{V}$。(2) 令 G_f 为折叠映射 $f_{\mathcal{V}}$ 的转移图。也就是说，G_f 的顶点是 $\mathcal{V}$ 的分支；对于每个分支 b，映射 $f_{\mathcal{V}}$ 将其映为一个分支序列，而 G_f 中每当该序列出现分支 c 时，都会有一条从 b 指向 c 的有向边。当 $f_{\mathcal{V}}$ 将 b 同胚地映到单个分支 c 时，我们得到一条从 b 发出的边，该边终止于 c，称之为简单边。(3) G_f 配备了一个嵌入 $h_1\colon G_f \to N$。(4) h_1 与映射 $h_2\colon G_f \to \Phi$ 同伦；该映射具有“单调性”，即 G_f 的每条边要么被压缩到 Φ 的一个顶点，要么以保向方式映到 Φ 中的一条有向路径。(5) h_2 给出了 G_f 中的正圈与 Φ_N 中的正圈之间的一个双射，因此 G_f 中一个圈的边数等于其像与 L 的交数。

有了 G_f 后，我们将增长率 $\mathrm{gr}_{G_f}(1)$ 定义为长度为 n 的有向圈的指数增长率，其中长度仅指边的数量（即每条边的长度为一）。关于这一点，我们的主要命题是

命题 6.8. $\lambda(f) = \mathrm{gr}_{G_f}(1)$.

在描述构造的第（1–5）步之后，我们将证明这一命题。

我们首先描述折叠映射 $f_{\mathcal{V}}$。由于 M 以纤维 S 为纤维，因此存在某个倍数 mS，它被 2-骨架 $\tau^{(2)}$ 完全承载。由于 L 是通过将 S 围绕 Σ 旋转而得到的，我们便得到（必要时扩大 m）一列平行副本组成的圈 $L = L_0$，L_1，……，$L_m = L$，这些副本均为 L 的副本，且每个副本都由 τ 承载，使得相邻两个副本之间恰好有一个四面体。从 L_i 到 L_{i+1}（模 m）的过程对轨道$\mathcal{V}_i = L_i \cap B^u$施加一次折叠操作。将这些映射复合，得到映射 $f_{\mathcal{V}}\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}$。这就完成了第（1）步。

第 (2) 部分给出了 G_f 的定义。

我们如下得到第 (3) 部分的映射 $h_1\colon G_f \to N$：

将 L_i 的并集以承载位置实现于 M 中 τ 的 2-骨架的纤维化正则邻域 $\mathcal{N}$ 内。为清晰起见，我们在打孔流形中进行讨论，因此每个叶 L_i 都被奇异轨道打孔，并允许一个理想三角剖分：对于偏转三角剖分的每个胞腔 c（面或边），令 $\mathcal{N}(c)$ 为穿过 c 的 $\mathcal{N}$ 的纤维之并。由此，我们得到 L_i 的一个理想三角剖分，其胞腔是 L 与每个 $\mathcal{N}(c)$ 的交集的分支。

在 L_i 与 L_{i+1}之间有一个四面体，t_i 使得 L_i 沿着其底面穿过，而 L_{i+1} 沿着顶面穿过。折叠移动如图 10所示。我们可以构造一个中间图 G_i，将 L_i 中的三角剖分边连接到 L_{i+1}中的相应边。外部

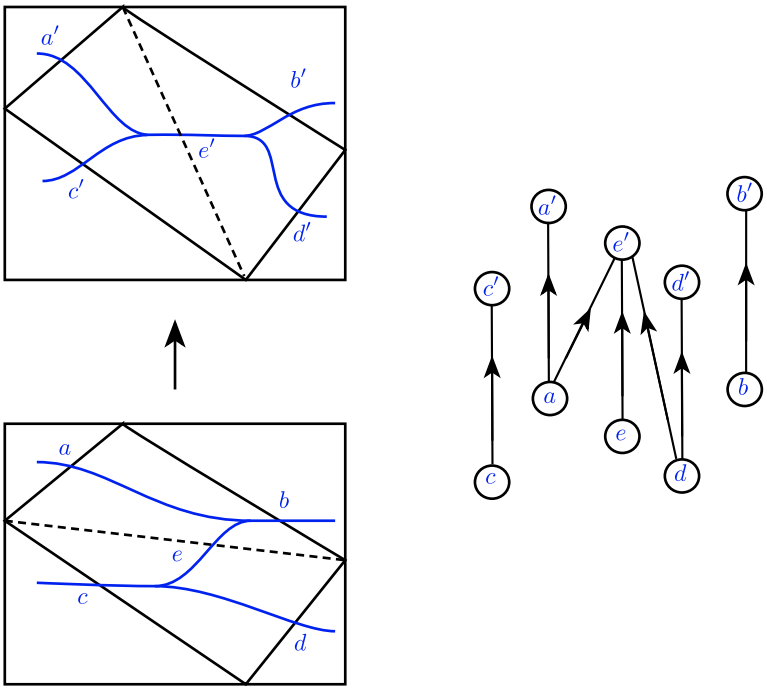

FIGURE 10. 跨越单个四面体的折叠映射会在其中产生边 G_f

t_i的有向边沿着 $\mathcal{N}$ 的竖直纤维，从 L_i 的一条三角剖分边映射到其上方的平行副本。 G_i 内部有这样的竖直边，以及表示折叠的附加边，如图所示。

现在， G_f 的每条边都对应于 G_i 的并集中一条从 L_0 返回自身的有向路径。这就得到了在第 (3) 部分中描述的映射 $h_1\colon G_f \to N$ 。

现在我们观察到，终止于 e' 中的图 10 的三条边对应于该四面体的流图 Φ 中的边，这里使用的是 Φ 处于标准位置时的定义。图中的每条竖直 G_i 边（以及该四面体之外的任何边）都包含在某个乘积区域 $\mathcal{N}(e)$ 中，该区域对应某条边 e。因此，中间图 G_i的每条边要么映射到 Φ 的一条边，要么被压缩到 Φ的一个顶点。沿着映射 h_1，将 G_f 的边映射为沿着 G_i 的路径，并结合此映射到 Φ，我们得到映射 h_2。注意，在 Φ的对偶位置嵌入中，每个顶点都从其对应的τ 边向下移动到其下方四面体的内部。这是一个同伦，因此可见最终映射 h_2 与 h_1同伦。这就证明了第 (4) 部分。

还需说明第（5）点，即 G_f 的圈与 Φ 的圈之间的对应关系。根据 h_2 的构造，G_f 的每个有向圈都会映射到 Φ 的一个有向圈。此外，由于 h_2 和 h_1 同伦，且 h_1 映射到 Σ 的补集，因此对于 G_f 的每个圈 c ， $h_2(c)$ 与 Σ 的交数均为 0。由于 Φ 与 Σ 正向横截，这意味着 $h_2(c)$ 位于 $\Phi|\eta$ 中。最后， G_f 中的每个圈都与 L 有非平凡交集，因此像圈位于 Φ_N 中。

反过来，给定 Φ_N 中的有向圈 c ，我们必须找到一个映射到它的 G_f 中的圈。注意， c 与 L 必有正交点，因为 N 由 L 纤维化而成。我们将通过沿着 c 与 L 的交点切割 c ，在 G_f 中得到这个圈；但首先我们考察局部图景。

设 r 是 Φ_N 所经过的一条边。于是 r 起始于四面体 t_-的内部，其中顶边 e_- 与 r的初始顶点重合。它横截穿过 τ 的 2-骨架，最终进入四面体 t_+；其中 e_- 要么是它的底边，要么是两条侧边之一。经过轻微的同伦变形，我们可以使 r 在 t_- 中直接穿过 U 的一个小邻域 e_-，然后从那里进入 t_+。见 图 11。

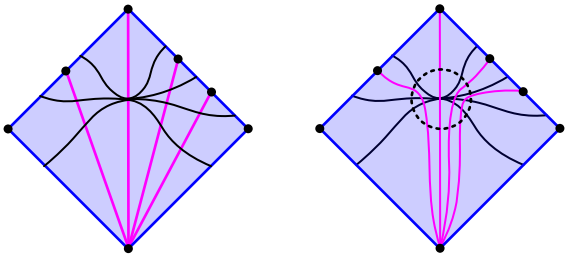

FIGURE 11. 在性质 (5) 的证明中，我们按图示对流图的边进行同伦变形。虚线圆表示一条 τ-边的小邻域与一个扇区的交集。

注意，在其所携带的位置上， Σ不会与 r 相交，因为 r 是 Φ_N的一条边。不过，r 可能与穿过 U的 L 的一部分相交，而且对于至少一条 c 经过的此类r，这种情况必定会发生。因此，将 r 沿其与 L 的交点切开，可得到 U 中的一列线段；这些线段在 U 内同伦于图 G_f 的简单边（在其 h_1嵌入中），随后还有一条边，我们将其认作原来的 r。

因此，若现在沿修改后的 c 与 L的所有交点将其切开，我们会得到一列列简单的 $h_1(G_f)$ 边，其间穿插着若干列 Φ_N 边，这些边对应于 $h_1(G_f)$的非简单边。这样的分解给出了 G_f中的一个圈 c'，其 h_2 像为c。此外， c' 中的边数等于 $c \cap L$中的点数。由此证明了第 (5) 点。

我们现　在给出命题 6.8的证明。首先，根据 [LMT21，定理 7。1] 我们知道

$$\lambda(f) = \mathrm{gr}_{\Phi_N}(\xi),$$

其中 $\xi \in H^1(N)$ 是与 L对偶的上同调类。事实上，图 Φ 编码了流 [LMT21，定理 6。1] 而 $\Phi|\eta$ 的有向圈与避开 Σ的流轨道一一对应。将其限制到 Φ_N，便得到穿过 L的流轨道，因此 ξ记录了与其中每个流轨道关联的 f-轨道的规模。

因此，命题 6.8可由等式

$$\mathrm{gr}_{\Phi_N}(\xi) = \mathrm{gr}_{G_f}(1),$$

这是上述第 (5) 项的推论：它在 G_f 和 Φ_N 的圈之间给出了一个双射，因此，对 G_f 的每条边恰好计数一次的同调类会映射到 ξ。

6.2.4. 完成定理 6.4的证明。 设 $w_{ij}^{(n)}$ 表示分支 e_i 在$\mathcal{V}$ 下映射覆盖分支e_j $(f_{\mathcal{V}})^n$的次数。该数量也等于 n 中从顶点 G_f 到顶点 e_i 长度为e_j的有向路径数。注意，对每个 i 和 $n \geqslant 1$，$\sum_j w_{ij}^{(n)}$ 均为有限值；类似地，对每个 j 和 $n \geqslant 1$， $\sum_i w_{ij}^{(n)}$ 均为有限值。

根据以下观察，我们的下一个论断显而易见：f 的端周期性意味着， $\mathcal{V}$ 中除有限多个分支外，其余分支均被 $f_{\mathcal{V}}$ 同胚地映射到

$\mathcal{V}$ 的其他分支。这意味着 G_f 的每个端都具有一个与射线同胚的邻域。

断言 6.9。

$$\mathrm{gr}_{G_f}(1) = \max_i \limsup_{n\to\infty} \left(\sum_j w_{ij}^{(n)} \right)^{1/n}. \tag{2}$$

概述。 如上所述，存在一个有限子图 G'，使得 G_f 的每个补分支都是一条有向射线。于是，等式 (2)的两边在将 G_f 替换为 G' 时均保持不变（也就是说，此时等式右边计算的是 G'中的有向路径）。但是，对于有限图而言，等式 (2) 是众所周知的，参见例如 [McM15，引理 3。1]。 □

现在，证明定理 6.4 （该定理从拓扑上刻画了伸展因子）所需的全部要素都已准备就绪。

定理 6.4 的证明。令 α 和 β 为 L上的任意曲线。固定 β 在 L 上的同伦类的一个代表元 b，使其与 $\mathcal{V}$ 的分支横截；并令 α的同伦类中一个包含于轨迹 $\mathcal{V}$内（不一定由其承载）的代表元为 a。这样的代表元存在，是因为 $\mathcal{V}$ 的补区域是n-边形。令 a_n为 a在取 $f^n(a) \subset f^n(\mathcal{V})$并将其折回 $\mathcal{V}$后的像，并注意到 $i(\beta, f^n(\alpha)) \leqslant \#(b \cap a_n)$。

重新对 $\mathcal{V}$ 的分支重新编号后，我们假设 a 遍历分支 $c_1e_1, \ldots, c_ke_k$，其中 c_i 为正整数重数。设 d_j 为 b 与 e_j 的交点数。那么

$$\#(b \cap a_n) = \sum_j d_j \sum_{i=1}^{k} w_{ij}^{(n)} c_i.$$

结合上述内容与 断言 6.9 以及 命题 6.8 我们得出结论：

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} i(\beta, f^n(\alpha))^{1/n} &\leqslant \limsup_{n\to\infty} \#(b \cap a_n)^{1/n} \\
&= \limsup_{n\to\infty} \left(\sum_j d_j \sum_{i=1}^{k} w_{ij}^{(n)} c_i \right)^{1/n} \\
&\leqslant \max_i \limsup_{n\to\infty} \left(\sum_j w_{ij}^{(n)} \right)^{1/n} \\
&\overset{6.9}{=} \mathrm{gr}_{G_f}(1) \\
&\overset{6.8}{=} \lambda(f),
\end{aligned}$$

因此

$$\max_{\alpha,\beta} \limsup_{n\to\infty} i(\beta, f^n(\alpha))^{1/n} \leqslant \lambda(f). \tag{3}$$

现在我们旨在证明 方程 (3) 的逆命题。设 C 是 G_f的一个增长率为 $\lambda(f)$的递归分支。这个子图 C之所以存在，是因为 $\lambda(f) = \mathrm{gr}_{G_f}(1)$ 根据 命题 6.8成立，并且有向图的增长率总是由某个递归分支达到的。

我们可以如下找到一条由 $\mathcal{V}$ 承载的曲线 α，它穿过 C 的一个顶点所对应的 $\mathcal{V}$ 的每条分支。设 $\mathcal{V}$ 是 C 的一个顶点所对应的分支。那么

在 $f^n(e)$ 中的训练路径最终会穿过与 C 相关联的每一条分支（也可能穿过其他分支）。通过对 C 中某个顶点所对应的 $\mathcal{V}$ 分支进行手术（该顶点被某条 $f^n(e)$ 多次穿过），我们可以找到一条由 $\mathcal{V}$ 承载且穿过该 $\mathcal{V}$ 分支的闭曲线。这条曲线可能不是嵌入的，但我们可以消除所有交点，从而得到一条嵌入的多重曲线。对这条多重曲线的某个分支反复应用 f 足够多次，即可得到一条穿过与 C 对应的每一条分支的简单闭曲线。令 α 为这条曲线。

接下来，注意到 $f^n(\alpha)$ 在 L 中不可能在同伦意义下最终包含于任何紧集，依据引理 2.1，它最终会穿过一个正的接合处 β。由断言 6.6 和注 6.7，我们可以选取 β 使其与 $\mathcal{V}$ 横截，且不存在补集双边形。特别地，所有被承载的曲线 $f^n(\alpha)$ 相对于 β 都处于最简位置，因此它们的几何交数可通过计算交点得到。

为完成证明，重新编号，使得 e_1、……、e_ℓ 是 C 的顶点，并将其与 $\mathcal{V}$ 中对应的分支相对应；每条分支都被 α 以正权重遍历c_1、……、c_ℓ。另令 $e_{\ell+1}$、……、e_m 为与 β相交的分支，并令 d_i 为当 $\ell < i \leqslant m$时， β 与 e_i 的交点数。（注意，我们不假设 (e_i) 位于 $i > \ell$的 C中。）我们还用符号 e_i 表示 G_f中对应的顶点。

$f^n(\alpha)$ 与 β 相交这一事实意味着，对于某个固定的 $k > \ell$，在 G_f 中存在一条有向路径 p ，从 C 的一个顶点通向 e_k。对于这个固定的 k，从 C 的顶点 e_i 通向 e_k 的每条长度为 n 的路径，都会为 $i(\beta$贡献 $c_i d_k$ 个交点 $f^n(\alpha))$。然后

$$i(\beta, f^n(\alpha)) \geqslant \sum_{i=1}^{\ell} w_{ik}^{(n)} c_i d_k,$$

因此，只需应用以下事实：

$$\limsup_{n\to\infty} \left(\sum_i (A^n)_{ik} \right)^{\frac{1}{n}} \geqslant \lambda,$$

当 C 是有向图中增长率为 λ 、转移矩阵为 A的一个分支时， k是该图中从 C的某个顶点可达的固定顶点，并且求和遍历 C的所有顶点。由于选择 C 时满足 $\lambda = \lambda(f)$，证明得证。□

7. Foliation cones and entropy functions

7.1. **通过纤维锥得到叶状结构锥**。 在 [CC99中， CC17], Cantwell 和 Conlon 证明，如果 N 是一个缝合流形，且其存在一个适配于 N的紧、深度一叶状结构，并且 $\partial_\pm N$ 的每个分支都具有负欧拉示性数，那么在 $H^1(N)$中存在有限个互不相交的开凸多面体锥，称为**叶状结构锥**，使得每个锥的整点恰好是叶状类。另见 [CCF19，第 13]节。这里，我们回顾第 1.2 节中的内容：如果 $H^1(N)$ 中的一个类是某个适配于 N的深度一叶状结构的对偶，则该类是叶状的；根据定理 2.2， 每个深度一叶状结构都由其上同调类唯一确定，精确到同伦。

本节将证明，对于此处讨论的无环缝合流形，可以将 N 的叶状结构锥完全理解为某个闭三维流形的纤维锥的拉回。我们强调，这一方法直接基于 Thurston 的纤维面理论，独立发展了 Cantwell–Conlon 叶状结构锥理论的许多内容 [Thu86]和 Fried[Fri。

定理 7.1（叶状结构锥）。 设 N 是一个无环缝合流形，且 $\partial_{\pm}N$ 的每个分支都是亏格至少为2的闭曲面。那么存在一个闭双曲3-流形 M及一个嵌入 $i\colon\ N \to M$，满足：$H^1(N)$ 中的一个类是叶状的，当且仅当它是 $i^*\colon\ H^1(M) \to H^1(N)$ 下某个纤维化类的拉回，且该纤维化类属于一个与 $i(\partial_+N)$相邻的纤维锥。

因此，

$$\{i^*(\mathcal{C})\colon \mathcal{C}\ \textit{is a fibered cone of}\ M\ \textit{containing}\ [i(\partial_+N])\}$$

恰好是 $H^1(N)$ 的叶状结构锥集合。

注意，由此可立即得出，叶状结构锥只有有限多个，且每个都是有理多面体的，因为纤维锥也具有这一性质 [Thu86]。此外，与注 3.14中一样，每个适用于 N 的深度一叶状结构都由 M 经过旋转所得。

为证明定理 7.1，我们利用第 3.2 节的结果构造流形 M 。设 $h\colon\ \partial_{\pm}N \to \partial_{\pm}N$ 是一个逐分支同胚，它在 $H^1(\partial_{\pm}N)$ 上作用为 -1（或者至少作用于由所有交界类张成的锥上），并且使得h的双重覆盖 $M = M(N,h)$ 是双曲的（见引理 3.12）。与之前一样，我们将 N 与其在 M中的像等同，并令 $\mathcal{C}_1,\dots,\mathcal{C}_k$为包含 $[\partial_+N]$的 M的纤维锥。（注意，在 $H^1(M)$ 中$[\partial_+N] = [\partial_-N]$。）每个锥 $\mathcal{C}_i$都对应于 M的一个伪阿诺索夫流 φ_i，且 $\partial_{\pm}N$ 与该流几乎横截。我们将每个 φ_i 替换为其最小动力学爆破，使其与 $\partial_{\pm}N$横截。

证明。 首先注意，若 ξ 是包含于 $\mathcal{C}_i$中的一个纤维类，则它由一个纤维曲面 S 代表，该曲面是流 φ_i的一个截面。正如在定理 3.3的证明中那样， S可以绕 $\partial_{\pm}N$ 旋转，从而产生一个横截于 φ_i的紧致深度一叶状结构 $\mathcal{F}$ 。因此， $\mathcal{F}$ 在 N 上的限制代表叶状类 $i^*(\xi)$。

反过来，设 α是 $H^1(N)$中的一个叶状类，由深度一叶状结构 $\mathcal{F}$代表。对于M 如上固定的 命题 3.9适用于叶状结构 $\mathcal{F}$ ，因此结合注 3.14 可知，存在一个 φ_i–截面 S ，它属于 M，且其纤维化锥的边界包含$[\partial_+N]$，使得将 S绕 $\partial_{\pm}N$旋转后得到叶状结构 $\mathcal{F}$，差一个同伦。因此， α 是 S 中对偶于 M的类的拉回。

我们注意到，以上结果表明，存在一个适用于 N 的紧致深度一叶状结构，当且仅当存在一个包含 $[\partial_+N]$ 于其边界上的 M 的纤维锥。

为了完成证明，还需证明 i^* 将每个纤维锥映射到一个叶状结构锥上。若非如此，由于纤维锥的像覆盖叶状结构锥，便存在两个不同的纤维锥，它们的拉回在 $H^1(N)$中相交。在这种情况下，存在 N 的一个叶状结构，因此 M，它对于 φ_i和 φ_j均为 $i \neq j$ 的横截结构。但这样一来，我们便可像上文那样对该叶状结构进行去旋绕处理（另见 注 3.14），从而得到一个正向横截于 φ_i 和 φ_j 且与每条轨道相交的曲面，这就产生了矛盾。 □

以下推论将叶状结构锥的整类刻画为由叶状结构表示的类，而这些叶状结构横截于一个（真正的）伪阿诺索夫流的限制。

推论 7.2。 闭流形 M 在 定理 7.1 中可以构造为，使得与纤维锥 $\mathcal{C} \subset H^1(M)$ 相关联的伪阿诺索夫流 φ包含 $[i(\partial_+N)]$并与 $i(\partial_{\pm}N)$横截。叶状结构锥 $i^*(\mathcal{C})$ 的整点恰好是由深度一叶状结构表示的点，这些叶状结构与受限半流 φ_N横截。

证明。 这基本上已在 定理 7.1的证明中确立， φ 不过当时是伪阿诺索夫流的动力学吹起。可是，应用 定理 4.2的证明可知，可以选择 $h\colon\ \partial_{\pm}N \to \partial_{\pm}N$使得流 φ在 $M = M(N$ 上 $h)$与 $\partial_{\pm}N$ 横截，且为真正的伪阿诺索夫流。事实上，可以令h 在每个分支上都取为双曲对合与某个固定的、在 H_1 上作用平凡的伪阿诺索夫同胚的足够高次幂的复合（见 引理 3.12）。必要时取更大的幂，可知 M 可以选取为使得每个 φ_i 都与 $\partial_{\pm}N$ 横截，其中这些（有限多个）纤维锥均在边界上包含 $[i(\partial_+N)]$ 。 □

7.2. **叶状结构锥的熵函数**。 固定 N 如定理 7.1所述，并令 $\mathcal{C} \subset H^1(N)$ 为其一个叶状结构锥。对于每个与 $\mathcal{F}$相适配的深度一叶状结构 N，令 $h_{\mathcal{F}}\colon\ L \to L$ 表示其单值化映射（在同伦意义下定义），其中 L 是$\mathcal{F}$的一个深度一叶。令 $\lambda([\mathcal{F}])$表示 $h_{\mathcal{F}}$的任意 spA 代表的伸展因子。由推论 6.2和定理 2.2可知，该因子仅取决于类 $[\mathcal{F}] \in H^1(N)$。

定理 7.3。 设 N 是一个缝合流形，使得 $\partial_{\pm}N$ 的每个分支都是亏格至少为2的闭曲面，并设 $\mathcal{C} \subset H^1(N)$ 是 N的一个叶状结构锥。那么函数

$$[\mathcal{F}] \mapsto \log \lambda([\mathcal{F}])$$

将深度一叶状结构映射为其单值化的伸展因子的对数的函数可延拓为凸连续函数$\mathrm{ent}\colon\ \mathcal{C} \to [0, \infty)$。

证明。设 M 和 φ 如推论 7.2 所述。注意，对于任意满足 $\xi = [\mathcal{F}] \in \mathcal{C}$ 且具有深度一叶 L的 $\mathcal{F}$，在 φ_N 作用下到 L 的首次回归映射是一个 spA 映射 $f\colon\ L \to L$。因此，$\lambda([\mathcal{F}]) = \lambda(f)$ 恰好是 $\mathrm{gr}_{\varphi_N}(\xi)$，即相对于类$\xi$而言， φ_N的闭轨道增长率。按照 [LMT21]的术语， ξ 是强正的，因为它是 M 中一个纤维化类的拉回（定理 7.1）。因此， [LMT21，定理 8.1、9.1] 以及 [LMT21，注 9.2]表明，$\mathrm{ent}_{\varphi_N}(\xi) = \log(\mathrm{gr}_{\varphi_N}(\xi))$ 在 $\xi \in \mathcal{C}$上定义了一个连续凸函数。□

7.3. 作为伪阿诺索夫映射极限的 spA 映射及伸缩因子的积聚。设 M 是一个闭的双曲纤维化流形，设 $\mathcal{C} \subset H^1(M)$ 是一个纤维化锥，其对应的伪阿诺索夫悬挂流为 φ。

设 α_i 为 $\mathcal{C}$ 内部的一列本原整类，每个整类都表示一个带有首次回归映射 f_i 的截面 S_i；我们将 $\lambda(\alpha_i) = \lambda(f_i)$ 定义为伪阿诺索夫映射 f_i 的伸展因子。

在 [LMT21，定理 9。10], 我们刻画了来自单个纤维化锥的所有伸展因子的极限集 $\mathcal{C}$，从而回答了 Chris Leininger 提出的问题。这里我们证明，所有此类极限本身都是旋绕伪阿诺索夫映射的伸展因子：

定理 7.4. 在上述设定下，如果 $\lambda(\alpha_i) \to \lambda > 1$，那么 λ 是一个 *spA* 映射 $f\colon\ L \to L$ 的伸展因子。

此外，存在一个面 $\mathcal{C}' \subset \partial\mathcal{C}$，使得对于 $\mathcal{C}'$ 的相对内部中的任意本原整数 η， L 均可选为 M 的一个深度为一的叶状结构的叶，该叶状结构是通过绕着一个曲面 Σ 旋转 M 的一个纤维曲面而获得的，其中 Σ 与 η 对偶，并且几乎横截于 φ。

注意，如果 η 和 α 分别是 $\partial\mathcal{C}$ 和 $\mathrm{int}(\mathcal{C})$中的本原整类，那么$\alpha_i = \alpha + i\eta$ 对于 $i \in \mathbb{N}$，只要 φ 中有无限多个 η–零（见 [LMT21、推论 9.8 和引理 9。11]）。这里，轨道 γ 是 η–零的，当且仅当 $\eta(\gamma) = 0$。

证明。对于 $\alpha \in \mathrm{int}(\mathcal{C})$ 和 $\eta \in \mathcal{C}$，令 $\mathbf{gr}_\varphi(\alpha;\eta)$ 表示相对于 α 的 φ 的 η–零闭轨道的增长率。

命题 9.11 的证明 [LMT21] 表明，经过转到一个子序列后，存在一个子面 $\mathcal{C}'$，位于 $\mathcal{C}$ 的边界上，使得对于任意位于 η 的相对内部中的本原整数 $\mathcal{C}'$，序列 $\mathbf{gr}_\varphi(\alpha_i;\eta)$ 最终为常数，并且

$$\lambda(\alpha_i) = \mathrm{gr}_\varphi(\alpha_i) \to \mathrm{gr}_\varphi(\alpha;\eta),$$

其中 α 对于 α_i 足够大的 i，等于某个 [LMT21，命题 9.11] 的证明仅明确针对从 M 中移除 φ的奇异轨道后得到的流形给出，但实质上相同的证明也适用于此处。

现在令 Σ 为一个与 η 对偶且几乎横截于 φ 的曲面（定理 2.3），并令$\varphi^\sharp$ 为 φ 的一个与 Σ 横截的动力学爆破。此外，令 S 为 φ（因此也是 $\varphi^\sharp$）的一个截面，且与 α对偶；令 $\mathcal{F}$ 为 M 的 $\varphi^\sharp$–横截叶状结构，它由绕 Σ旋转 S得到。如果沿 Σ切开 M，我们得到一个由流形 N_1、.. .、N_k 组成的不交并，其上诱导的叶状结构 $\mathcal{F}_1$、. . .、 $\mathcal{F}_k$ 分别横截于半流φ_{N_1}、. . .、 φ_{N_k}。

由于 η–零轨道 $\varphi^\sharp$ 恰好是缺少 Σ 的轨道，因此包含于某个 N_i 中，我们得到

$$\begin{aligned}\mathrm{gr}_\varphi(\alpha;\eta) &= \mathrm{gr}_{\varphi^\sharp}(\alpha;\eta)\\ &= \max_i \mathrm{gr}_{\varphi_{N_i}}(\alpha)\\ &= \max_i \lambda(f_i),\end{aligned}$$

其中， f_i 是 $\mathcal{F}_i$ 的深度一叶 L_i 上的 spA 返回映射。由此完成证明。 □

8. Connection to Handel–Miller theory

在本节中，我们将此处发展的旋绕伪阿诺索夫映射的结构与 Handel–Miller 理论联系起来。

8.1. Handel–Miller 基础。设 $g\colon\ L \to L$ 是一个端周期映射。在 L 上固定一个标准双曲度量，并为 L 的所有端圈选择 g-截断线系统（见第 4.3 节）。在 [CCF19] 中证明了，负向 g-截断线的测地收紧趋向于一个测地叶层 Λ^+ HM；同样，正向g-截断线的测地代表趋向于一个测地叶层 Λ^- HM。叶层 Λ^+ HM 和 Λ^- HM 分别称为正、负 Handel–Miller 叶层。这些叶层彼此横截。此外，根据 [CCF19，推论 4.72] $\Lambda^\pm$ HM 不依赖于截断线的选择；根据 [CCF19，推论 10.16]， $\Lambda^\pm$ HM 在 L 的环境同痕意义下不依赖于标准双曲度量的选择。

下面我们将使用的 $\Lambda^\pm{}_{\mathrm{HM}}$ 的一个性质是，例如 $\Lambda^+{}_{\mathrm{HM}}$ 的每一片叶都在正端累积，因此会与正的 g 截面相交。

根据 [CCF19，定理 4.54], g 与一个端周期映射 $h\colon\ L \to L$ 同伦，其中该映射置换紧化的 g-节界集，并保持 $\Lambda^\pm{}_{\mathrm{HM}}$ 不变。该映射 h 称为**Handel– Miller 映射**，有时也称为 g 的同痕类的**Handel–Miller 代表**。尽管 h 并非唯一确定，但其在 $\Lambda^+{}_{\mathrm{HM}} \cap \Lambda^-{}_{\mathrm{HM}} \subset L$ 上是唯一确定的。

令 $\mathcal{U}_+$ 为 L 中在 h 的迭代下逃向 L 正端的所有点构成的集合， $\mathcal{U}_-$ 为在 h^{-1} 的迭代下逃向 L 负端的点构成的集合。我们分别称 $\mathcal{U}_+$ 和 $\mathcal{U}_-$ 为正、负**逃逸集**。根据 [CCF19，引理 4.71]、 $\Lambda^+{}_{\mathrm{HM}} = \partial\mathcal{U}_-$ 和 $\Lambda^-{}_{\mathrm{HM}} = \partial\mathcal{U}_+$。

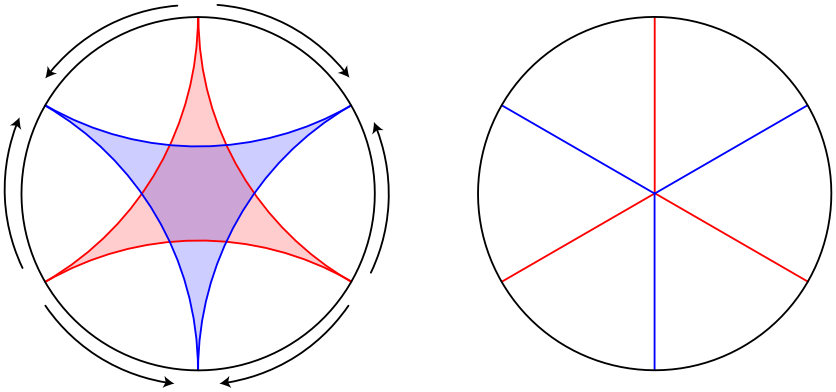

FIGURE 12. 左图：两个对偶主区域到 L 的提升，以及一个固定两个提升后的主区域的端的 f 的幂的提升的作用的边界动力学。右图： $\Lambda^{\pm}$ 的奇异叶的相应提升。

设 $\mathcal{P}_+ = L - (\Lambda^+{}_{\text{HM}} \cup \mathcal{U}_-)$，对称地，设 $\mathcal{P}_- = L - (\Lambda^-{}_{\text{HM}} \cup \mathcal{U}_+)$。$\mathcal{P}_+$或 $\mathcal{P}_-$ 的一个分支分别称为正主区域或负主区域。负主区域是 h^{-1} 的正主区域，反之亦然。

主区域的结构在 [CCF19第 5.3、6.1–64]节中有详细阐述。在我们感兴趣的情形中，当 L 无边界且 h 是无环的时，情况尤其简单，并且与闭曲面上的伪阿诺索夫映射所发生的情形直接类似。我们将简述在这些假设下的结构，并从现在起一直采用这些假设。

每个正主区域 P_+ 都同胚于一个开圆盘，并且任意一个提升 $\tilde{P}_+$ 至 $\tilde{L}$ 有覆盖 L 是一个具有有限条边、顶点位于 ∂L内部的多边形。该提升 $\tilde{P}_+$ 具有一个对偶提升 $\tilde{P}_-$，对应于一个负主区域，其顶点位于 ∂L上，并与那些 $\tilde{P}_+$ 的顶点交替排列（见图 12）。对 h 的一个提升取适当的幂，可使其保持两个对偶多边形的顶点不变。该提升在无穷远圆上的动力学如下：

引理 8.1。设 $h\colon L \to L$ 是一个 *Handel-Miller* 无环端周期映射。设 P_+ 是 h 的一个正主区域的提升，其对偶提升负主区域为 P_-。假设 $\tilde{h}^p$ 是 h 的某个幂到 L 的提升，并且保持 P_+，因而也保持 P_-，以及它们的所有顶点。那么 $\tilde{h}^p$ 在 ∂L 上的作用是多汇点-源点型，其中源点恰为 P_- 的顶点 $\tilde{}$，汇点则为 P_+的顶点。

引理 8.1 由命题 6.9(ii) 和推论 6.13 [CCF19] 得出，因为在我们的设定中，主区域的提升在无穷远圆上具有有限多个理想顶点。

8.2. **旋绕伪阿诺索夫映射是 Handel–Miller 映射**。我们在本命题中汇总 Handel–Miller 映射所需的其余性质：

命题 8.2。设 $h\colon L \to L$ 是一个具有不变层状结构 $\Lambda^{\pm}{}_{\text{HM}}$ 的 *Handel–Miller* 映射。那么，$\Lambda^{\pm}{}_{\text{HM}}$ 的周期叶的集合在 $\Lambda^{\pm}{}_{\text{HM}}$中稠密。

如果 $\tilde{h}\colon \tilde{L} \to \tilde{L}$ 是 h 的某个幂的任意提升，且该提升固定了 $\tilde{L}$上的一个点 $\tilde{q}$，那么 $\tilde{q}$ 要么包含于某个主区域的提升的闭包中，要么满足以下条件：$\tilde{q}$ 是 $\tilde{L}$中 $\tilde{h}$ 的唯一不动点，它是两条叶 $\ell^{\pm} \subset \tilde{\Lambda}^{\pm}{}_{\text{HM}}$的交点，而 $\partial\ell^{\pm} \subset \partial\tilde{L}$ 是

$\tilde{}$ $\tilde{}$ $\tilde{}$ ∂L上 h^p 的不动点恰好就是这些点，其中 p 是使 h^p固定 $\ell^{\pm}$的端的最小自然数。

证明。根据 [CCF19，命题 5。12], 与 $\Lambda^{\pm}{}_{\text{HM}}$ 相邻的叶 $\mathcal{U}_{\mp}$ 在 $\Lambda^{\pm}{}_{\text{HM}}$ 中稠密。根据 [CCF19，定理 6，5], 每一片这样的叶都是周期性的。这就证明了第一个断言。

对于第二个断言，注意到 $\tilde{q}$的投影尤其不可能落在负向逃逸集内。根据主区域的定义，我们有 $L = \mathcal{P}_+ \cup \mathcal{U}_- \cup \Lambda^+{}_{\text{HM}}$，因此可以得出， $\tilde{q}$ 必定位于某个主区域的提升的闭包中，或位于 $\Lambda^+{}_{\text{HM}}$的某片叶的提升中。我们指出，这两种情况并不互斥，因为正主区域由 $\Lambda^+{}_{\text{HM}}$的叶围成。

$\tilde{}$因此，只需考虑这样的情形： $\tilde{q}$ 位于 $\Lambda^+{}_{\text{HM}}$ 的一片提升叶 ℓ^+ 中，并且该叶不 位于某个提升主区域的边界上。

令 p为满足以下条件的最小自然数： $\tilde{}$ h^p固定 ℓ^+的两个端。令 $\tilde{\sigma}$ 为 L 中与 ℓ^+相交的一个正 h分界线$\tilde{}$的提升。由于 h 是 Handel–Miller 型，且 h^p 固定ℓ^+的端，在 $\tilde{h}^{-p}$ 的迭代下， $\tilde{\sigma}$ 必定从 ℓ^- 的一侧收敛到 $\tilde{\Lambda}^-{}_{\text{HM}}$ 的一条叶。对 h^p进行迭代时， $\tilde{\sigma}$ 必定收敛到 ∂L中的一个点，因为它在 L中的像在 h的迭代下逃向 L 的正端。实际上，该序列收敛到 ℓ^+ 的边界点，该点与 $\tilde{\sigma}$相交，并且位于 ℓ^+ 的同一侧。

令 $\tilde{\sigma}'$ 为另一条提升后的 h分界线，它与 ℓ^+ 在 ℓ^- 的相对一侧相交，就像 $\tilde{\sigma}$一样。于是 $\tilde{}$ $\tilde{}$在 h^{-p}的迭代下， $\tilde{\sigma}'$ 收敛到 ℓ_1^- 的一条叶，该叶属于 $\Lambda^-{}_{\text{HM}}$。根据 [CCF19，推论 6，15], 必有 $\ell^- = \ell_1^-$，否则 ℓ^+ 将围住一个主区域的提升。这迫使 $\tilde{q}$ 成为 $\ell^+ \cap \ell^-$中的唯一点。

此外，上文构建的提升后的 h-分岔点图景表明，在$\sim$ $\sim L$ 中，每个点在 h^{-p} 的迭代作用下，其极限均为 $\tilde{q}$ 或 ∂L中ℓ^- 的一个边界点。因此， $\tilde{q}$ 是 h^p的唯一不动点。关于 ∂L 上动力学的陈述也由此得出。□

注 8.3。 命题 8.2 在不假设 h 是无环面的情况下仍然成立，但此时主区域的提升比第 8.1 节中所呈现的图景更为复杂。

回顾第 5.2 节，若 Λ 是 L上的一个（可能奇异的）层状结构，则 $\partial^2(\Lambda)$表示通过取 $\pi_1(L)$的 $\partial^2\tilde{L}$ 边界而得到的$\tilde{}$ $\tilde{}$中叶线的 $\Lambda \subset L$。注意，若层状结构是非奇异的，那么每片叶都是正则的，因而也是一条叶线。

定理 8.4。 假设 $f\colon\ L \to L$ 是一个 *spA* 映射，且 h 是一个同伦的 *Handel–Miller* 映射。那么作为 $\partial^2\tilde{L}$的 $\pi_1(L)$–不变子空间，

$$\partial^2(\Lambda^{\pm}) = \partial^2(\Lambda^{\pm}_{\text{HM}}).$$

证明。结合命题 8.2 和定理 5.3 ，只需证明 $\partial^2(\Lambda^{\pm})$ 和$\partial^2(\Lambda^{\pm}{}_{\text{HM}})$ 具有相同的周期点集合（即在 f 的同伦类的某个幂的提升下不动的点）。

$\tilde{}$ $\tilde{}$设 ℓ 是 Λ^+ 或 Λ^-的一条周期叶线。根据备注 5.9，存在一个 $n \geqslant 1$、 f^n的一个提升 $\sim$ $\sim f^n$ 以及一个点 $\tilde{p} \in \ell$，使得f^n 固定 p并保持 ℓ不变。根据命题 4.11， $f^n\tilde{}$ $\tilde{}$ $\tilde{}$在 ∂L上具有多重汇源动力学。设 h 为 h 的对应提升，使得 h 和$\sim$ $\sim f$ 在 ∂L上具有相同的作用。推论 4.10 和引理 4.14 遂推出 h^n 固定 L中的一个$\tilde{}$点 $\tilde{q}$。根据命题 8.2，要么 $\tilde{q}$ 是唯一这样的点，因此我们看到 ℓ 的端点必与经过 $\tilde{q}$的 $\Lambda^{\pm}{}_{\text{HM}}$ 叶的端点重合；要么 $\tilde{q}$ 位于闭包中。

主区域的提升。在后一种情况下，引理 8.1 表明，ℓ 的端点由 $\widetilde{\Lambda}^{\pm}{}_{\mathrm{HM}}$ 的一片叶共享，该叶在 $\widetilde{h}^n$ 下保持不变。这表明$\partial^2(\Lambda^{\pm}) \subset \partial^2(\Lambda^{\pm}{}_{\mathrm{HM}})$.

反之，ℓ 若是（比如说）$\Lambda^{+}{}_{\mathrm{HM}}$的一条周期叶，那么命题 8.2 给出一个周期点 $\tilde{q}$，它包含于 ℓ 中，也包含于 $\Lambda^{-}{}_{\mathrm{HM}}$的一条周期叶 ℓ^{-} 中，因此 $\ell \cap \ell^{-} = \tilde{q}$。事实上，若 ℓ 不围成一个提升的主区域，那么无需多言；若 ℓ围成一个提升的主区域，那么 $\tilde{q}$ 和 ℓ^{-}有两种可能的选择。

Let $\widetilde{h}$ 是 h 和 $n \geqslant 1$ 的一个提升，使得 $\widetilde{h^n}$ 同时固定 ℓ 和 ℓ^{-}。然后引理 4.9表明，对于 h^n 在 $\mathbb{D}$ 上的作用以及 f^n 在 $\mathbb{D}$上的作用，ℓ 的端点是汇点，而 ℓ^{-} 的端点是源点。因此，我们可以再次应用引理 4.14，得出 f^n有一个不动点 $\tilde{p}$，其中 f 是 f的 h–相容提升。注意，由于$\widetilde{f^n}$在 $\partial\widetilde{L}$中具有非空不动点集，因此 f^n 必定固定 $\widetilde{\Lambda}^{\pm}$从 $\tilde{p}$出发的半叶。因此，根据命题 4.11，存在 $\widetilde{\Lambda}^{+}$ 和 $\widetilde{\Lambda}^{-}$ 的叶，其端点分别是 $\widetilde{f^n}$的作用的汇点和源点。这表明$\partial^2(\Lambda^{\pm}{}_{\mathrm{HM}}) \subset \partial^2(\Lambda^{\pm})$。□

定理 8.4 给出了 spA 与 Handel–Miller 代表元之间的精确关系。特别地，旋绕伪阿诺索夫映射 $f\colon L \to L$ 保持这对奇异层状结构$\Lambda^{\pm}$；根据 定理 8.4，它们是 $\Lambda^{\pm}{}_{\mathrm{HM}}$ 的奇异版本，是通过将主区域捏缩为奇异叶而得到的（见 图 12）。正是在这个确切意义上，可以将 spA 映射视为“奇异的” Handel–Miller 映射。

注 8.5。 Handel–Miller 理论更一般地适用于端周期映射 $f\colon L \to L$其中 $\partial L \neq \varnothing$，只要 ∂L 的每个非紧分支都连接一个正端和一个负端，且不包含任何周期点；参见 [CCF19, 假设 3]。若能将 spA 映射理论推广到涵盖这种情形，将会很有意思。可能的困难包括：需要将借鉴 Fenley 工作的 (1) 命题4.6 [Fen09], 推广到有边界的情形；此外，若要推广 定理 7.1，就需要一个有边界曲面的同胚，它将每个交界类映到其负类。

References

[Ago11] Ian Agol, *Ideal triangulations of pseudo-Anosov mapping tori*, 《三维中的拓扑与几何》, **560**（2011）, 1–17。[Bow70] Rufus Bowen, *Topological entropy and axiom a*, 《纯数学研讨会论文集》, 第14卷, 1970年, 第23–41页。[Bow71], *Entropy for group endomorphisms and homogeneous spaces*, 《美国数学学会汇刊》**153**（1971）, 401–414。[Cal07] Danny Calegari, *Foliations and the geometry of 3-manifolds*, 《牛津数学专著》, 牛津大学出版社, 2007年。[Can93] Alberto Candel, *Uniformization of surface laminations*, 《高等师范学校科学年鉴》**26**（1993）, 第4期, 489–516。[CB88] A. J. Casson和S. A. Bleiler, *Automorphisms of surfaces after Nielsen and Thurston*, 剑桥大学出版社, 1988年。[CC93] J Cantwell和L Conlon, *Isotopy of depth one foliations*, 《国际叶状结构几何研究研讨会与工作坊论文集》, 东京, World Scientific Singapore, 1993年, 第153–173页。[CC99] John Cantwell和Lawrence Conlon, *Foliation cones*, 《几何与拓扑专论》**2**（1999）, 35–86。[CC13], *Hyperbolic geometry and homotopic homeomorphisms of surfaces*, 《Geometriae Dedicata》**177**（2013）, 27–42。[CC17], *Cones of foliations almost without holonomy*, 《几何、动力学与叶状结构2013：纪念Steven Hurder和Takashi Tsuboi六十寿辰》, 日本数学会, 2017年, 第301–348页。

[CCF19] John Cantwell、Lawrence Conlon和Sergio R. Fenley, *Endperiodic automorphisms of surfaces and foliations to appear* 2019 66 219 , , 《遍历理论与动力系统》（），–。[CLR94] Daryl Cooper、DD Long和Alan W Reid, *Bundles and finite foliations*, 《Inventiones mathematicae》118（1994），第1期，255–283。[CR05] JS C´anovas和JM Rodr´ıguez, *Topological entropy of maps on the real line*, 《Topology and its Applications》153（2005），第5–6期，735–746。[Fen92] S´ergio R Fenley, *Asymptotic properties of depth one foliations in hyperbolic 3-manifolds*, 《微分几何学杂志》36（1992），第2期，269–313。[Fen97] S´ergio R. Fenley, *End periodic surface homeomorphisms and 3-manifolds*, 《Mathematische Zeitschrift》224（1997），第1期，1–24。[Fen09] S´ergio Fenley, *Geometry of foliations and flows I: Almost transverse pseudo-Anosov flows and asymptotic behavior of foliations* **81** 2009 1 89 , 《微分几何学杂志》（），–。[FKLL21] Elizabeth Field、Heejoung Kim、Christopher Leininger和Marissa Loving, *End-periodic homeomorphisms and volumes of mapping tori* 2021 , 即将发表于《Journal of Topology》。（）。[FKLL23] Elizabeth Field、Autumn Kent、Christopher Leininger和Marissa Loving, *A lower bound on volumes of end-periodic mapping tori* 2023 , 即将出版（）。[FLM11] B. Farb、C. J. Leininger和D. Margalit, *Small dilatation pseudo-Anosov homeomorphisms and 3-manifolds* **228** 2011 3, 1466 1502 , 《Adv. Math.》（），2824561第–期。MR[79] FLP A. Fathi、F. Laudenbach和V. Poenaru, *Travaux de Thurston sur les surfaces*, 《Ast´erisque》，第66卷，法国数学学会，巴黎，1979年，Orsay研讨班，附英文摘要。FM01] S´Sergio Fenley和Lee Mosher, *Quasigeodesic flows in hyperbolic 3-manifolds*, 《Topology》40（2001），第3期，503–537。[FM12] Benson Farb和Dan Margalit, *A primer on mapping class groups*, 《普林斯顿数学丛书》，第49卷，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，2012年。[Fri79] David Fried, *Fibrations over S^1 with pseudo-Anosov monodromy*, 《Thurston关于曲面的工作》（由Djun Kim和Dan Margalit译为英文, 《Ast´erisque》，第66–67号，法国数学学会，1979年，第251–266页（英文）。[Fri82] , *Flow equivalence, hyperbolic systems and a new zeta function for flows*, 《Comment. Math. Helv.》57（1982），第1期，237–259。[Fri87] , *Finitely presented dynamical systems*, 《遍历理论与动力系统》7（1987），第4期，489–507。[Gab87] David Gabai, *Foliations and the topology of 3-manifolds. ii*, 《微分几何学杂志》26（1987），第3期，461–478。[Gu´e16] Fran´cois Gueritaud, *Veering triangulations and cannon–thurston maps*, 《J. Topol.》（），第–期。[Han85] Michael Handel, *Global shadowing of pseudo-anosov homeomorphisms*, 《遍历理论与动力系统》5（1985），第3期，373–377。[Hir10] Eriko Hironaka, *Small dilatation mapping classes coming from the simplest hyperbolic braid*, 《Al- gebr. Geom. Topol.》10（2010），第4期，2041–2060。[Jac80] William H Jaco, *Lectures on three-manifold topology*, 第43号，美国数学学会，1980年。[Kap01] Michael Kapovich, *Hyperbolic manifolds and discrete groups*, 第183卷，Springer Science & Business Media，2001年。[KKT13] Eiko Kin、Sadayoshi Kojima和Mitsuhiko Takasawa, *Minimal dilatations of pseudo-anosovs generated by the magic 3–manifold and their asymptotic behavior* **13** 2013 , 《Algebr. Geom. Topol.》（），第6期，3537–3602。[Lan19] Michael Landry, *Stable loops and almost transverse surfaces*, arXiv预印本arXiv:1903.08709（2019）。[Lan22] , *Veering triangulations and the Thurston norm: homology to isotopy*, 《Advances in Mathematics》396（2022），108102。[LM13] Christopher J Leininger和Dan Margalit, *On the number and location of shortgeodesics in moduli space* **6** 2013 1, 30 48 , 《J. Topol.》（），第–期。[LMT20] Michael Landry、Yair Minsky和Samuel Taylor, *A polynomial invariant for veering triangulations* 2008 04836, 2020 , arxiv:。即将发表于《J. Eur. Math. Soc.》（JEMS）。（）。[LMT21] Michael Landry、Yair N. Minsky和Samuel J. Taylor, *Flows growth rates and the veering polynomial* 2107 04066, 2021 , , , arXiv:。即将发表于《Ergod. Theory Dyn. Syst.》，。

[LMT23] , *A strong transverse surface theorem for pseudo-anosov flows.* [MCG] *Aimpl: Surfaces of infinite type, http://aimpl.org/genusinfinity*, [McM00] Curtis T. McMullen, *Polynomial invariants for fibered 3-manifolds and Teichmüller geodesics for foliations* **33** 2000 4, 519 560 , 《法国高等师范学校科学年刊》 () , 第 – 期。[McM15] , *Entropy and the clique polynomial*, 《拓扑学杂志》**8 (2015)**, 第1期, 184–212页。[Mos90] Lee Mosher, *Correction to 'equivariant spectral decomposition for flows with a z-action'*, 《遍历理论与动力系统》**10 (1990)**, 第4期, 787–791页。[Mos92] *Dynamical systems and the homology norm of a* 3 *-manifold I: efficient intersection of surfaces and flows* **65** 1992 3, 449 500 , 《杜克数学杂志》() , 第 – 期。[Ota01] Jean-Pierre Otal, *The hyperbolization theorem for fibered 3-manifolds*, 第7卷, 美国数学学会, 2001年。[Thu86] William P Thurston, *A norm for the homology of 3-manifolds*, 《美国数学学会回忆录》**59 (1986)**, 第339期, 99–130页。[Thu98] , *Hyperbolic structures on 3-manifolds ii: Surface groups and 3-manifolds which fiber over the circle* , , arXiv预印本 math/ 9801045 1998 ( )。

Department of Mathematics, Washington University in Saint Louis
Email address: mlandry@wustl.edu

Department of Mathematics, Yale University
Email address: yair.minsky@yale.edu

Department of Mathematics, Temple University
Email address: samuel.taylor@temple.edu