arXiv:2304.10651v1 [econ.TH] 20 Apr 2023

合作博弈的基于划分的稳定性

杨健

罗格斯大学纽瓦克分校商学院管理科学与信息系统系，新泽西州纽瓦克，邮编 07102

2023年4月

摘要

我们研究合作博弈（即具有可转移效用（TU）的合作博弈）的稳定性。首先，可以弱化核的概念，将变更的阻止限定为仅由多方支持的情形。这一协商一致阻止原则，以及传统核所依据的单边阻止原则和介于两者之间的一种原则，都可以应用于划分—分配对。每个这样的划分—分配对由大联盟的一个划分，以及与之相对应的分配向量构成；该向量的各分量对于给定划分中的不同组成联盟而言，均满足个体理性和效率。对于由此得到的强、中、弱稳定性概念，第一种与核相容：传统核恰好包含那些通过这一强稳定性概念与全合并划分相关联的分配，而该划分仅由大联盟构成。或许更重要的是，后两种中、弱稳定性概念具有普适性。也就是说，无论博弈多么“差”，每个博弈都有其应有的稳定解。此外，还有一种最陡上升法，可引导从任意初始划分收敛到一个中度稳定的划分—分配对。

关键词： 合作博弈；共识阻挡；弱核心；划分；稳定性；贪心算法

JEL 分类代码： C71

1 引言

我们旨在为具有可转移效用（TU）的联盟博弈提供适用范围更广的稳定性概念。这类博弈常用于模拟参与者为实现目标而进行的合作。给定一组 N 参与者，每个博弈都由 $v(C)$ 的取值来刻画，这些取值对应参与者所组成的各种联盟 C。传统的核概念遵循非常直观的帕累托效率原则。遗憾的是，只有一小部分博弈，即平衡的博弈，拥有能够将大联盟所获收益分配给所有参与者、使其满意的核心成员。这似乎与这样一种直觉相悖：大多数乃至所有博弈都应当有“自然的稳定状态”。要让参与者不愿离开这些状态，所需条件或许不必达到帕累托效率所要求的程度。

为了寻找一种适用于所有博弈的普适稳定性概念，我们自然将目光投向划分或联盟结构。与僵化的大联盟相比，划分有几个优势。首先，划分的演变清晰地刻画了某一时间范围内一组参与者的部分特征。此外，这样一组参与者的最终结果可能只是一个包含多个联盟的普通划分，而非仅由大联盟组成的全合并划分。出于这些原因，早在 20 世纪 70 年代，划分便开始受到关注；例如参见 Aumann 和 Dreze [3]。

我们很容易想到，遵循构建核时所采用的相同原则来发展基于划分的稳定性。对于给定的划分—分配对 $(\mathcal{P}, \vec{x})$，其中$\mathcal{P} \equiv \{C_1, ..., C_p\}$ 是大联盟 N的一个划分，且 $\vec{x} \equiv (x(i))_{i \in N}$是相应的分配，满足 $x(i) \geq v(\{i\})$的个体理性以及$\sum_{i \in C_k} x(i) = v(C_k)$的联盟效率，首先应当考虑分裂抵抗性和合并抵抗性。前者意味着，在当前 $\mathcal{P}$遭遇任何分裂尝试后，没有参与者能够在不损害其他任何参与者的情况下，期望获得严格高于当前 $\vec{x}$ 所允许的收益。后者的含义几乎相同，只需将“分裂”替换为“合并”。

然而，为了实现普遍性，我们迄今发现有必要进一步弱化抗分裂概念。对于给定的解 $(\mathcal{P}, \vec{x})$，后者可转述为：对于每个联盟 C'，只要它是 $\mathcal{P}$ 的某个组成联盟的真子集，便有$\sum_{i \in C'} x(i) \geq v(C')$。在许多现实情境中，这或许要求过高。例如，假设 $\mathcal{P}$ 是全合并划分 $\{N\}$。如果仅仅一个参与者群体 $C' \subsetneq N$ 对 $\sum_{i \in C'} x(i) < v(C')$ 感到不满，那么合并为 N 往往不会立即解散。换言之，在支撑核概念的同时，对这种单方面引发的阻止行为的抵抗，或许还有弱化的空间。

自然地，我们会想到转向阻止方式谱系的另一端，即多方支持型阻止。遵循如今已达成共识的共识性阻止原则，现存联盟只有在解散后形成的所有子联盟（而非仅仅一个）都能从这一过程中严格获益时，才应被允许解散。因此，反过来说，当对于构成任意一个 $\mathcal{P}$ 的 “ 分裂至 ” 邻居的至少一个（而非全部） $C' \notin \mathcal{P}$， $\sum_{i \in C'} x(i) \geq v(C')$ 时，我们认为一对 $(\mathcal{P}, \vec{x})$ 具有弱分裂抵抗性。当 $\mathcal{P} = \{N\}$ 时，弱分裂抵抗性将使我们得到属于我们所谓的弱核心的分配 $\vec{x}$ 。如果传统核能够解释为什么美满的婚姻值得长久维持，那么我们的弱核心则可以用来论证为什么某些不幸的婚姻仍可能勉强维持下去。

弱分裂抵抗性和平凡的合并抵抗性是定义弱稳定性概念的两条公理。采用传统核启发的形式来定义分裂抵抗性，再结合相同的合并抵抗性，当然可以形成一种强稳定性概念。此外，还有一种很有用的折中方案。在这里，对于一个（$\mathcal{P}$， $\vec{x}$）对，中等分裂抵抗性仅与$\mathcal{P}$相关；它关注的是收益 $\sum_{C \in \mathcal{P}} v(C)$是否大于由 $\mathcal{P}$的向下裂分邻居产生的相同总和。以 $\mathcal{P} = \{N\}$ 为例。当潜在的向下裂分目标 $\mathcal{P}'$ 中的每个组成联盟都反对这一尝试时，那么 $v(N) \geq \sum_{C \in \mathcal{P}'} v(C)$必然成立。若后者成立，则任何分裂尝试都会遭到至少一个预定子联盟的反对。事实证明，中稳定性的普遍性相对容易验证，进而也能验证弱稳定性的普遍性；参见定理1。

我们还可以从任意划分出发，通过最陡上升法（SAM）找到一个中稳定的组合。我们的中稳定性划分与 Apt 和 Radzik [1]所认定的 $\mathbb{D}_{hp}$-稳定划分一致。不过，他们的稳定性概念只关注各联盟的总收益，并未说明分配给参与者的收益。除 Apt 和 Radzik [1], 之外，我们不知道还有其他关于普遍性的论断，声称所有博弈都各自存在稳定解；更不用说像我们这样通过 SAM 声称稳定解总能从任意起始划分到达的论断了。

当参与者对联盟所允许的备选方案，或仅对联盟本身具有偏好时，基于划分的稳定性只有在附加一定条件的情况下才能实现；参见，例如，Greenberg 和 Weber [10], Demange [8], Banerjee、Konishi 和 Sonmez [4], 以及 Bogomolnaia 和 Jackson [5]。联盟结构也被应用于一些特定情境，例如 Ray 和 Vohra 的研究 [13] ，其中同时涉及联盟内部的合作与联盟之间的竞争，以及 Yi 的研究 [18] ，其采用了划分函数形式（PFF）。对于这些复杂模型，普适性和可及性似乎更加难以实现。关于 PFF，许多研究仍然围绕大联盟展开；参见，例如，Grabisch 和 Funaki [9]以及 Chander [7]。

虽然中稳定性涉及划分收益的局部最优性，但相应的全局最优性应当属于所谓最优联盟结构的范畴。大量文献致力于高效计算和近似这些最优解；例如，参见Sandholm等人 [14] 和 Rahwan等人 [11][12]。我们还注意到文献中有“弱核心”这一名称。据我们所知，它通常表示将传统核定义中的每个 $\sum_{i\in C'} x(i) \geq v(C')$放宽为对某个 $\epsilon > 0$ 的$\sum_{i\in C'} x(i) \geq v(C') - \epsilon$；例如，参见 Askoura [2]。我们的弱概念涉及一个 $\forall$-to-$\exists$ 切换，而不是当前的 0-to-ϵ 放宽。

本文其余部分安排如下：第 2 节介绍模型的基本概念，第 3 节引入其他核概念，第 4 节阐明它们之间的关系。第 5 节提出基于抵御各种分裂与合并尝试的稳定性判据。第 6 节进一步探讨我们的稳定性概念。第 7 节介绍达到中稳定性的 SAM 过程。最后，第 8 节总结全文。

2 基本概念

对于由 $N \equiv \{i_1, ..., i_n\}$ 个参与者组成的集合 $n \equiv |N| = 1, 2, ...$，令 $\mathscr{C}(N)$ 表示N 的非空子集集合，这些子集也称为联盟。在参与者集合N，$\vec{v}$已确定的合作博弈中，$\vec{v} \equiv (v(C))_{C\in\mathscr{C}(N)} \in \Re^{\mathscr{C}(N)}$ 给出特征函数，并有助于刻画该博弈。通常还会默认将其扩展至 $v(\emptyset) = 0$。现在，令博弈中同时满足个体理性和效率的分配集合为

$$\partial(N, \vec{v}) \equiv \left\{ \vec{x} \equiv (x(i))_{i\in N} \in \prod_{i\in N} [v(\{i\}), +\infty) : \sum_{i\in N} x(i) = v(N) \right\}. \tag{1}$$

By (1)，对于每个单参与者博弈，$\partial(\{i\}, v(\{i\})) \equiv \{v(\{i\})\}$ 非空 e.

令 $\mathscr{P}(N)$ 为 参与者 N 的划分空间。每个 $\mathcal{P} \in \mathscr{P}(N)$ 都是某个满足以下条件的 $\{C_1, ..., C_p\}$

- $C_k \in \mathscr{C}(N)$，其中对每个 $k = 1, ... p$,
- $\bigcup_{k=1}^{p} C_k = N$，并且
- $C_k \cap C_l = \emptyset$ 对任意 $k \neq l$ 均成立。

上述内容可概括为

$$\sum_{C\in\mathcal{P}} \mathbf{1}(C \ni i) = 1, \qquad \forall i \in N, \tag{2}$$

组成联盟 C 的划分 $\mathcal{P}$ 应确保每个参与者 i 恰好出现一次。

对于一个划分 $\mathcal{P} \in \mathscr{P}(N)$，其分配集合中的分配既满足个体理性，又在构成联盟 C 内对于博弈 $(N, \vec{v})$ 是有效率的，即为

$$\begin{aligned} \mathscr{X}(N,\vec{v},\mathcal{P}) &\equiv \textstyle\prod_{C\in\mathcal{P}} \partial(C,\vec{v}|_{\mathscr{C}(C)}) \\ &= \left\{\vec{x} \equiv (x(i))_{i\in N} \in \textstyle\prod_{i\in N}[v(\{i\}),+\infty) : \ \sum_{i\in C} x(i) = v(C), \quad \forall C \in \mathcal{P}\right\}. \end{aligned} \tag{3}$$

根据 (1) 和 (3)，$\mathscr{X}(N, \vec{v}, \{N\}) = \partial(N, \vec{v})$。根据 (3)，$\mathcal{P}$中的每个联盟 C 都会通过 $\vec{x}$的到C 投影$\vec{x}|_C \equiv (x(i))$，使其价值 $v(C)$ 在联盟中的参与者 i 之间得到完全均等的分配。令 $\mathcal{P} \equiv \{\{i_1\}, ..., \{i_n\}\}$ 为全分裂划分。根据 (1) 之后的注释，至少有一个 $\mathscr{X}(N, \vec{v}, \mathcal{P})$ 非空，其中唯一的成员是 $\vec{x} \equiv (v(\{i\}))_{i\in N}$。

我们将可行的划分—分配对的集合记为

$$\mathscr{Q}(N,\vec{v}) \equiv \bigcup_{\mathcal{P}\in\mathscr{P}(N)} \{\mathcal{P}\} \times \mathscr{X}(N,\vec{v},\mathcal{P}). \tag{4}$$

注意，(4) 的 $\mathscr{Q}(N, \vec{v})$ 非空，因为其中至少包含 $(\mathcal{P}, \vec{x})$。我们希望确立稳定性概念 $\mathbb{S}$，使得对于任意 $\vec{v} \in \Re^{\mathscr{C}(N)}$——不必是某个特定的、例如平衡的 $\vec{v} \in \Re^{\mathscr{C}(N)}$——每个这样的 $\mathbb{S}$ 都能提供 $\mathscr{Q}(N, \vec{v})$ 的一个非空子集 $\mathbb{S}(N, \vec{v})$。也就是说，我们力求实现“普遍性”，其含义是

$$\mathbb{S}(N,\vec{v}) \neq \emptyset \quad \text{or equivalently} \quad |\mathbb{S}(N,\vec{v})| \geq 1, \qquad\qquad \forall \vec{v} \in \Re^{\mathscr{C}(N)}. \tag{5}$$

另一方面，我们也强调“合理性”。这些概念应满足某些预期；更理想的是，当博弈足够“良好”时，它们应与某些现有概念相容。当对于每个 $\vec{v} \in \Re^{\mathscr{C}(N)}$，$\mathbb{S}'$ 在 $\mathbb{S}'(N, \vec{v}) \subseteq \mathbb{S}(N, \vec{v})$ 时，$\mathbb{S}'$ 将比 $\mathbb{S}$ 更严格。

现有的核概念可能过于强调大联盟 N，或相应地强调全合并划分 $\{N\}$；即使重点确实在于此，它也可能为进一步放宽留下了空间。对于博弈 $(N, \vec{v})$，其传统核为

$$\mathbb{X}^+(N,\vec{v}) \equiv \left\{\vec{x} \in \partial(N,\vec{v}) : \ \sum_{i\in C} x(i) \geq v(C), \quad \forall C \in \mathscr{C}(N)\backslash\{N\}\right\}. \tag{6}$$

根据 (1) 和 (3)，由 (6) 施加的每个 $x(i) \geq v(\{i\})$ 的要求显然是冗余的。在这里以及后文类似的位置，为方便起见，我们也保留此类冗余。

根据 Bondareva [6] 和 Shapley [15]，$\mathbb{X}^+(N, \vec{v})$ 在 (6) 中非空，当且仅当 $(N, \vec{v})$ 是平衡的，即 $v(N)$ 大于

$$\begin{aligned} z^+(N,\vec{v}) \equiv \quad \max \quad & \textstyle\sum_{C\in\mathscr{C}(N)} v(C)\cdot\delta(C) & & \\ \text{s.t.} \quad & \textstyle\sum_{C\in\mathscr{C}(N) \text{ and } C\ni i} \delta(C) = 1 & & \forall i \in N \\ & \delta(C) \in \Re_+ \equiv [0,+\infty) & & \forall C \in \mathscr{C}(N). \end{aligned} \tag{7}$$

当然，只有少数几个 $\vec{v}$ 的 $v(N) \geq z^+(N, \vec{v})$ 属于 (7)。

3 其他核心概念

假设 Alice 想结束与 Bob 的一段不幸福的婚姻。Bob 对家庭福祉贡献甚微，包括没有为抚养他们的女儿 Carol 出多少力。因此，她面临的两难抉择仅仅是在维持现状和带着 Carol 离开 Bob 之间作出选择。

按照（6）的精神，任何一方都可以单方面改变现状。只要Alice和Carol离开Bob后能过得更好，Alice的尝试就会成功。现实中，除非Bob对生活水平急剧下降的担忧得到缓解，否则他可能会竭力阻止两人离开他。无论如何，当预期的改变变得双方同意时，这种脱离就更容易实现；例如，若Alice和Carol在对Bob给予足够补偿、使他能够继续维持原有生活方式后仍能过得更好，便是如此。

更具体地说，假设Alice或Carol单独一人所得为0，因为她们需要彼此；再假设Bob和Carol两人组成一组所得为0，因为Bob没有能力照顾Carol；此外，Alice和Bob两人组成一组所得也为0。

现在，假设在婚姻中，Alice所得为0，Bob为6，Carol为2；Alice和Carol两人组成一组可得6；而Bob单独一人可得4。那么，传统理论会仅仅因为Alice和Carol组成一组是更好的选择，就认定他们的婚姻不稳定。然而，由于Bob认为潜在的离婚会让自己吃亏，他可能会竭尽全力阻挠Alice离开他。

Alice 与 Carol 迅速分开的一个办法，可能是她在结合关系解体后一次性承诺向 Bob 转移支付 3。因此，要让这个（$A=0, B=6, C=2$）不幸福的婚姻破裂，需要存在一个（$AC''=6-3, B''=4+3$）$=(3,7)$ 的外部选择，同时满足 $A+C=0+2<3=AC''$ 和 $B=6<7=B''$。

相比之下，按照旧方式，（$A=0, B=6, C=2$）在（$AC'=6, B'=4$）面前不稳定，只需要满足 $A+C=0+2<6=AC'$。反过来说，旧方式下的稳定性要求现状的所有单边改变都无法阻止。它在 (6) 的 $\mathbb{X}^+(N,\vec{v})$ 中表述为，可改写为

$$\left\{\vec{x}\in\partial(N,\vec{v}):\ \forall C'\in\mathcal{P}'\text{ we have }\sum_{i\in C'}x(i)\geq v(C'),\ \ \forall\mathcal{P}'\in\mathscr{P}(N)\setminus\{\{N\}\}\right\}. \tag{8}$$

根据（8），收益向量 $\vec{x}$ 要在传统意义上保持稳定，$\vec{x}|_{C'}\equiv(x(i))_{i\in C'}$ 就必须抵抗 $v(C')$ 在任何非 $\{N\}$ 划分的所有组成联盟 C' 上的阻止。

阻止 a （8）所倡导的范围比 Alice-Bob-Carol（ABC）故事所体现的仅基于共识的变更更广。

我们来形式化后者在弱核心 $\mathbb{X}^{-}(N,\ \vec{v})$ 中的表述:

$$\left\{\vec{x}\in\partial(N,\vec{v}):\ \exists C'\in\mathcal{P}'\text{ so that }\sum_{i\in C'}x(i)\geq v(C'),\ \ \forall\mathcal{P}'\in\mathscr{P}(N)\backslash\{\{N\}\}\right\}. \tag{9}$$

根据（9），对于每个非-$\{N\}$ 划分，只需在其一个代表性联盟 C' 上具有相同的阻力，即可使 $\vec{x}$ 在我们的弱意义下稳定。

为方便起见，我们将传统的 $\mathbb{X}^{+}(N,\vec{v})$ 称为强核心。从某种意义上说，它赋予任何非 $\{N\}$ 划分中的任一组成联盟过大的否决权，使其能够阻止该划分合并为 $\{N\}$；与此相反，弱核心 $\mathbb{X}^{-}(N,\vec{v})$ 赋予同一联盟过大的否决权，使其能够阻止 $\{N\}$ 分裂为上述非$\{N\}$划分。虽然后者仍符合稳定性的通常含义，即"一种一旦达到就难以离开的状态"，但二者都可能赋予单个联盟过多的权力。

不过，这里存在一种潜在的折中方案。在 ABC故事 中，我们认为，只有在达到转移支付后的 $(AC''=3,B''=7)$ 状态后，$(A=0,B=6,C=2)$ 联盟才能在弱意义上解散。然而，$A+B+C=0+6+2=8<10=6+4=AC'+B'$ 才是这里真正重要的因素。在存在这一严格不等式的情况下，Alice 总能设法找到某种方案，一方面使 Bob 愿意离开，另一方面又能使她和 Carol 离开婚姻后的处境仍然优于留在婚姻中的处境。因此，中间概念应当将 $(A=0,B=6,C=2)$ 联盟视为已经可以解散为 $(AC'=6,B'=4)$ 状态。

形式化地, 让我们定义博弈 $\vec{v}\in\Re^{\mathscr{C}(N)}$ 中划分 $\mathcal{P}\in\mathscr{P}(N)$ 的收益

$$\tilde{w}(N,\vec{v},\mathcal{P})\equiv\sum_{C\in\mathcal{P}}v(C). \tag{10}$$

当然，$\tilde{w}(N,\ \vec{v},\ \{N\})=v(N)$，且 $\tilde{w}(N,\ \vec{v},\ \underline{\mathcal{P}})=\sum_{i\in N}v(\{i\})$。由 (1)、(3) 和 (10),

$$\mathscr{X}(N,\vec{v},\{N\})=\partial(N,\vec{v})\neq\emptyset\quad\Longleftrightarrow\quad v(N)\geq\tilde{w}(N,\vec{v},\underline{\mathcal{P}}). \tag{11}$$

接着，我们将中核 $\mathbb{X}^{0}(N,\ \vec{v})$ 定义为

$$\begin{cases}\partial(N,\vec{v}) & \text{when } v(N)\geq\max_{\mathcal{P}\in\mathscr{P}(N)\backslash\{N\}}\tilde{w}(N,\vec{v},\mathcal{P}),\\ \emptyset & \text{otherwise.}\end{cases} \tag{12}$$

由于 $v(N)\geq\max_{\mathcal{P}\in\mathscr{P}(N)\backslash\{N\}}\tilde{w}(N,\vec{v},\mathcal{P})$ 优于 $v(N)\geq\tilde{w}(N,\vec{v},\mathcal{P})$，因此，(12) 第一行中的集合 $\partial(N,\vec{v})$ 必须非空。正如前文所述，在当前中等意义下，要瓦解大联盟N，所需要做的仅仅是找到一个非-$\{N\}$划分 $\mathcal{P}$，使其收益 $\tilde{w}(N,\vec{v},\mathcal{P})$ 严格高于 $v(N)$。至于 $\mathcal{P}$ 的组成联盟 C 如何通过相互补偿来激励从 $\{N\}$ 向 $\mathcal{P}$ 的转变，我们不再赘述。

4 自然关系

定义（8）至（12）不仅可能导致

$$\mathbb{X}^+(N,\vec{v}) \subsetneq \mathbb{X}^0(N,\vec{v}) \subsetneq X^-(N,\vec{v}), \tag{13}$$

但对于第二个包含关系，也就是更为详细的性质，即.....

$$v(N) \geq \max_{\mathcal{P}\in\mathscr{P}(N)\setminus\{N\}} \tilde{w}(N,\vec{v},\mathcal{P}) \quad\Longrightarrow\quad \mathbb{X}^-(N,\vec{v}) = X^0(N,\vec{v}) = \partial(N,\vec{v}). \tag{14}$$

（13）中的第一个包含关系可概括如下。 g.

命题1 在 *(8)* 的 $\mathbb{X}^+(N,\vec{v})$ 与 *(12)* 的 $\mathbb{X}^0(N,\vec{v})$ 之间，

$$\mathbb{X}^+(N,\vec{v}) \subseteq \mathbb{X}^0(N,\vec{v}), \qquad\qquad \forall \vec{v} \in \Re^{\mathscr{C}(N)}.$$

命题1的证明： 考虑以下线性规划：

$$\begin{array}{rlll} z^0(N,\vec{v}) \equiv & \min & w & \\ & \text{s.t.} & w \geq \tilde{w}(N,\vec{v},\mathcal{P}) & \forall \mathcal{P} \in \mathscr{P}(N) \\ & & w \in \Re. & \end{array} \tag{15}$$

由 (12) 和 (15) 得，

$$v(N) \geq z^0(N,\vec{v}) \quad\Longleftrightarrow\quad \mathbb{X}^0(N,\vec{v}) = \partial(N,\vec{v}) \neq \emptyset. \tag{16}$$

与此同时，(15) 的对偶问题为

$$\begin{array}{rlll} z^0(N,\vec{v}) \equiv & \max & \sum_{\mathcal{P}\in\mathscr{P}(N)} \tilde{w}(N,\vec{v},\mathcal{P}) \cdot \lambda(\mathcal{P}) & \\ & \text{s.t.} & \sum_{\mathcal{P}\in\mathscr{P}(N)} \lambda(\mathcal{P}) = 1 & \\ & & \lambda(\mathcal{P}) \in \Re_+ & \forall \mathcal{P} \in \mathscr{P}(N). \end{array} \tag{17}$$

若能求得 (17) 的一个可行解，就能得到 (7) 的一个可行解：令任意 $C \in \mathscr{C}(N)$ 对应的 $\delta(C) = \sum_{\mathcal{P}\ni C} \lambda(\mathcal{P})$，并注意到 (2)，则对于任意 $i \in N$，我们可以得到

$$1 = \sum_{\mathcal{P}\in\mathscr{P}(N)} \lambda(\mathcal{P}) \cdot \sum_{C\in\mathcal{P}} \mathbf{1}(C \ni i) = \sum_{C\in\mathscr{C}(N)} \mathbf{1}(C \ni i) \cdot \sum_{\mathcal{P}\ni C} \lambda(\mathcal{P}) = \sum_{C\in\mathscr{C}(N) \text{ and } C\ni i} \delta(C). \tag{18}$$

由（18），我们得到（7）的 $z^0(N,\vec{v}) \leq z^+(N,\vec{v})$。因此，

$$\mathbb{X}^+(N,\vec{v}) \neq \emptyset \quad\Longleftrightarrow\quad v(N) \geq z^+(N,\vec{v}) \quad\Longrightarrow\quad v(N) \geq z^0(N,\vec{v}). \tag{19}$$

根据（8），即使 $\mathbb{X}^+(N,\vec{v})$ 非空，它也包含于 $\partial(N,\vec{v})$ 中。因此，（16）和（19）合在一起即可推出所需的包含关系。 ∎

（13）的第一个包含关系的逆命题不成立。我们有一个反例，其中 $\mathbb{X}^+(N,\ \vec{v})=\emptyset$，但 $\mathbb{X}^0(N,\ \vec{v})\neq\emptyset$。

例*1* 考虑 $N=\{1,2,3\}$, $v(\{1\})=v(\{2\})=v(\{3\})=0$, $v(\{1,2\})=v(\{1,3\})=v(\{2,3\})=5$, 以及 $v(\{1,2,3\})=6$。这里，$\{N\}$ 的收益为*6*，高于其他最高仅为*5*的成员，因此处于占优地位；然而，不存在核心成员，因为 $x(1)+x(2)+x(3)=6$ 与 $x(1)+x(2)\geq 5$、$x(1)+x(3)\geq 5$ 以及 $x(2)+x(3)\geq 5$ 相矛盾。

根据其在(9)中的定义，$\mathbb{X}^-(N,\vec{v})$ 包含于 $\partial(N,\vec{v})$ 中。因此，要验证(13)中第二个包含关系的更详细表达式(14)，只需证明以下内容。

命题2 对于 $\mathbb{X}^-(N,\vec{v})$（见*(9)*），

$$v(N)\geq\max_{\mathcal{P}\in\mathscr{P}(N)\setminus\{N\}}\tilde{w}(N,\vec{v},\mathcal{P})\quad\Longrightarrow\quad\partial(N,\vec{v})\subseteq\mathbb{X}^-(N,\vec{v}),\qquad\forall\vec{v}\in\Re^{\mathscr{C}(N)}.$$

命题2的证明： 设 $v(N)\geq\max_{\mathcal{P}\in\mathscr{P}(N)\setminus\{N\}}\tilde{w}(N,\vec{v},\mathcal{P})$。根据(12)后的说明，我们知道 $\partial(N,\vec{v})$ 非空。令 $\vec{x}\in\partial(N,\vec{v})$。由(1)、(10)以及假设可得，

$$\sum_{C\in\mathcal{P}}\sum_{i\in C}x(i)=\sum_{i\in N}x(i)=v(N)\geq\tilde{w}(N,\vec{v},\mathcal{P})=\sum_{C\in\mathcal{P}}v(C),\qquad\forall\mathcal{P}\in\mathscr{P}(N)\setminus\{N\}.\quad(20)$$

对于任意 $\mathcal{P}\in\mathscr{P}(N)\setminus\{N\}$，(20)必然推出存在一个 $C\in\mathcal{P}$ 使得 $\sum_{i\in C}x(i)\geq v(C)$。根据(9)，这意味着 $\vec{x}\in\mathbb{X}^-(N,\vec{v})$。 ∎

式（13）的第二个包含关系的逆命题同样不成立。ABC故事提供了一个反例：$\mathbb{X}^0(N,\vec{v})=\emptyset$，但 $\mathbb{X}^-(N,\ \vec{v})\neq\emptyset$。

例2 考虑以下情形：$N=\{A,B,C\}$, $v(\{A\})=0$, $v(\{B\})=4$, $v(\{C\})=0$, $v(\{A,B\})=0$, $v(\{A,C\})=6$, $v(\{B,C\})=0$，以及 $v(\{A,B,C\})=8$。

注意，$\vec{x}=(0、6、2)$ 属于弱核心。在这一分配方案下，无论如何尝试分裂大联盟 N，都无法让所有由此产生的子联盟严格受益。最具竞争力的替代方案来自划分 $\{\{A,C\},\{B\}\}$。尽管子联盟 $\{A,C\}$ 有强烈动机离开大联盟，参与者 B 却会坚持留下。

另一方面，

$$z^0(N,\vec{v})=\tilde{w}(N,\vec{v},\{\{A,C\},\{B\}\})=6+4=10>8=\tilde{w}(N,\vec{v},\{N\})=v(N).$$

因此，大联盟在这里并未获得最高收益。

在例2中，参与者从划分 $\{\{A,C\},\{B\}\}$开始时，肯定不愿意形成收益更低的大联盟 N 。然而，这不应成为驳斥我们这一弱概念的理由，因为该概念通过维持“难以脱离”的状态，仍然体现了稳定性的本质。反过来说，参与者如何“达到”状态 $\{N\}=\{\{A,B,C\}\}$ 以及分配 $\vec{x}=(0,\ 6,\ 2)$，则不那么重要。我们认为，这种组合足够稳定，原因很简单：一旦达到该状态，任何改变现状的尝试都将受到合理阻止。

另一方面，传统核的指导理念似乎更偏向最优性，即“尚未达到时难以企及”。仅仅是广为采用的术语“阻止”，就已经带有“形成道路上的障碍”这一含义。毕竟，核心成员就是能够克服所有此类障碍的成员，其中包括由孤立的子联盟发起的单方面阻碍。在对以自我为中心的子联盟所持的宽容态度上，(8)和(9)更为相似而非不同。区别仅在于，(8)允许任何一个已满足自身需求、因而只会有所损失的子联盟阻止进一步合并进入 $\{N\}$；与此同时，(9)允许任何一个已满足自身需求、因而只会有所损失的子联盟阻止从 $\{N\}$进一步分裂。

最后，谈到(12)的中核，参照(1)、(10)和(11)后，可以给出另一种表述：

$$\mathbb{X}^0(N,\vec{v})\equiv\left\{\vec{x}\in\partial(N,\vec{v}):\ \sum_{C'\in\mathcal{P}'}\sum_{i\in C'}x(i)\geq\sum_{C'\in\mathcal{P}'}v(C'),\ \ \forall\mathcal{P}'\in\mathscr{P}(N)\backslash\{\{N\}\}\right\}. \tag{21}$$

式（21）的形式实际上与式（8）和式（9）的形式更加一致。由此，式（13）中的包含关系可能会更加明显。

5 种一般稳定性概念

如前所述，我们旨在研究定义于（4）的 $\mathscr{Q}(N,\vec{v})$ 的子集形式的稳定性概念。各种核概念仅仅是与完全合并划分 $\{N\}$ 相结合的概念。另一方面，它们提供了引导我们认识更一般概念的普遍原则。

我们采用某些划分$\mathcal{P}\equiv\{C_1,...,C_p\}$与 $\mathcal{P}'\equiv\{C'_1,...,C'_{p'}\}$之间通常的细化/粗化偏序，并采用倾向于整合的方向。当 $p\geq p'+1$ 且每个 $C'_{k'}$ 都是若干个 C_k的并集时，我们记作 $\mathcal{P}\prec\mathcal{P}'$。换言之，我们可以通过分裂或向下分裂步骤从 $\mathcal{P}'$ 到达 $\mathcal{P}$，也可以通过合并或向上合并步骤从 $\mathcal{P}$ 到达 $\mathcal{P}'$。请注意，一次分裂可能涉及多个组成联盟，且每个这样的联盟可能

被分裂成两个以上的子联盟。只有涉及一次二分分裂时，分裂才会导致 $p = p' + 1$。关于合并也可以作出类似的观察。

给定任意 $\mathcal{P} \in \mathscr{P}(N)$，我们将其向下分裂邻域定义为

$$\mathscr{I}(N, \mathcal{P}) \equiv \{\mathcal{P}' \in \mathscr{P}(N) : \mathcal{P}' \prec \mathcal{P}\}. \tag{22}$$

类似地，我们将其向上合并邻域定义为

$$\mathscr{U}(N, \mathcal{P}) \equiv \{\mathcal{P}' \in \mathscr{P}(N) : \mathcal{P} \prec \mathcal{P}'\}. \tag{23}$$

显然，$\mathscr{I}(N, \{N\}) = \mathscr{P}(N) \backslash \{\{N\}\}$，$\mathscr{U}(N, \{N\}) = \emptyset$，因为全合并划分没有进一步合并的余地，$\mathscr{I}(N, \mathcal{P}) = \emptyset$，因为全分裂划分 $\mathcal{P} \equiv \{\{i_1\}, ..., \{i_n\}\}$没有进一步分裂的余地，而 $\mathscr{U}(N, \mathcal{P}) = \mathscr{P}(N) \backslash \{\mathcal{P}\}$。

在给定价值函数 $\vec{v} \in \Re^{\mathscr{C}(N)}$ 的情况下，式 (8)、(9) 和 (21) 中的各种核定义自然引出了以下按强—中—弱顺序排列的势标准。

定义 1 对于式 *(4)* 的划分—分配对$(\mathcal{P}, \vec{x}) \in \mathscr{Q}(N, \vec{v})$，若对于式 *(22)* 的任意 $\mathcal{P}' \in \mathscr{I}(N, \mathcal{P})$，

$$\forall C' \in \mathcal{P}' \backslash \mathcal{P} \quad we\ have \quad \sum_{i \in C'} x(i) \geq v(C'),$$

根据 *(3)*，右侧也等于 $\sum_{i \in C'} x'(i)$，对任意 $\vec{x}' \in \mathscr{X}(N, \vec{v}, \mathcal{P}')$均成立。

定义 2 *(4)* 的一个划分—分配对 $(\mathcal{P}, \vec{x}) \in \mathscr{Q}(N, \vec{v})$ 在面对$(N, \vec{v})$ 时是中度抗分裂的，当对于 *(22)* 中任意 $\mathcal{P}' \in \mathscr{I}(N, \mathcal{P})$，

$$\sum_{i \in N} x(i) = \sum_{C \in \mathcal{P}} \sum_{i \in C} x(i) = \sum_{C \in \mathcal{P}} v(C) = \tilde{w}(N, \vec{v}, \mathcal{P}) \geq \tilde{w}(N, \vec{v}, \mathcal{P}'),$$

这些等式由 *(2)*、*(3)* 和 *(10)* 得出。

定义 3 *(4)* 的一个划分—分配对 $(\mathcal{P}, \vec{x}) \in \mathscr{Q}(N, \vec{v})$ 在面对$(N, \vec{v})$ 时是弱抗分裂的，当对于 *(22)* 中任意 $\mathcal{P}' \in \mathscr{I}(N, \mathcal{P})$，

$$\exists C' \in \mathcal{P}' \backslash \mathcal{P} \quad so\ that \quad \sum_{i \in C'} x(i) \geq v(C'),$$

根据 *(3)*，对于任何 $\vec{x}' \in \mathscr{X}(N, \vec{v}, \mathcal{P}')$，右侧也为 $\sum_{i \in C'} x'(i)$

whe

.

根据定义 1，任何进一步分裂强分裂抵抗对 $(\mathcal{P}, \vec{x})$ 的尝试，都会遭到所有受影响的子联盟 C' 的反对。这与特殊情形 $\mathcal{P} = \{N\}$ 下 (8) 所表达的含义一致。根据定义 2，与中等分裂抵抗对 $(\mathcal{P}, \vec{x})$ 相关的总收益足够高，能够让参与者拥有一定的资源来抵御进一步分裂。这与 $\mathcal{P} = \{N\}$ 下 (21) 所表达的含义一致。从其最后一个不等式来看，只要已确保 $\vec{x}$ 属于 $\mathscr{X}(N, \vec{v}, \mathcal{P})$，该定义最终只关乎 $\mathcal{P}$。

根据定义 3，任何进一步分裂弱抗分裂对（$\mathcal{P}$， $\vec{x}$）的尝试，都应受到至少一个受影响子联盟 C' 的反对，因为该子联盟既得利益在于维持现状。注意，要求 $C' \notin \mathcal{P}$ 确保了现存的 C' 在严格意义上是一个子联盟。当 $\mathcal{P}$ 恰好为 $\{N\}$ 时，向下裂分邻域 $\mathscr{I}$（N， $\mathcal{P} = \{N\}$）中任意划分 $\mathcal{P}'$ 的一个组成联盟 C' 本身不会是 N。因此，要求 $C' \in \mathcal{P}' \backslash \{N\}$ 仅相当于 $C' \in \mathcal{P}'$。这或许有助于我们理解，式（9）确实与该定义一致。

要使一个非 $\{N\}$ 划分 $\mathcal{P}$ 稳定，它不仅必须抵御向下裂分邻居带来的诱惑，也必须抵御向上合并邻居带来的诱惑。因此，下面的概念顺理成章。

定义4 （*4*）的一个划分—分配对 $(\mathcal{P}, \vec{x}) \in \mathscr{Q}(N, \vec{v})$ 在面对 $(N, \vec{v})$ 时具有融合抵抗性，当对于（*23*）的任意 $\mathcal{P}' \in \mathscr{U}(N, \mathcal{P})$ 和 $C' \in \mathcal{P}' \backslash \mathcal{P}$,

$$\sum_{i \in C'} x(i) = \sum_{C \in \mathcal{P},\, C \subsetneq C'} \sum_{i \in C} x(i) = \sum_{C \in \mathcal{P},\, C \subsetneq C'} v(C) \geq v(C'),$$

其中这些等式由 *(3)* 和 *(4)* 得出。

根据定义4，融合抵抗的一对（$\mathcal{P}$， $\vec{x}$）不应有进一步合并的严格动机，因为由现有联盟组成的任何超联盟 C' 中，都没有参与者能够在不损害他人的情况下从中严格获益。从最后一个不等式来看，只要已知 $\vec{x}$属于 $\mathscr{X}(N, \vec{v}, \mathcal{P})$，这最终就是 $\mathcal{P}$ 本身的一个性质。

现有联盟的分裂会影响所有预定的子联盟，而某些现有联盟的合并则不会影响目标超级联盟之外的其他联盟，至少在我们目前采用联盟形式而非划分形式的框架下是如此。这或许可以解释分裂抵抗性与合并抵抗性之间存在的类型数量差异。对于前者，对“附带损害”的不同态度已经足以合理解释（8）与（9）之间的分歧，而（21）则处于两者之间。然而，对于后者，联盟合并并不会对任何无关方造成附带损害。

现在，设（4）中 $\mathscr{Q}(N,\vec{v})$ 内满足定义 1 的所有可行的划分—分配对 $(\mathcal{P},\vec{x})$ 构成集合 $\mathbb{Qi}^{+}(N,\vec{v})$，满足定义 2 的构成集合 $\mathbb{Qi}^{0}(N,\vec{v})$，满足定义 3 的构成集合 $\mathbb{Qi}_{-}(N,\vec{v})$；此外，设满足定义 4 的所有可行的划分—分配对构成集合 $\mathbb{Qu}(N,\vec{v})$。我们关注的稳定性为

$$\mathbb{S}^{*}(N,\vec{v})\equiv\mathbb{Q}^{\mathrm{i}*}(N,\vec{v})\cap\mathbb{Q}^{\mathrm{u}}(N,\vec{v}),\qquad\qquad\forall\vec{v}\in\Re^{\mathscr{C}(N)},\tag{24}$$

其中，$*$ 可以是 $+$、0或 $-$。显然，它们都由公理驱动。

对于（8）中的核，其依据可用于论证 $\mathbb{S}^{+}$，因为它“兼容强核”。严格来说，我们可以这样理解这一已采用的术语：当且仅当 $\vec{x}$ 是强核的成员时，任何（$\{N\}$，$\vec{x}$）都将是强稳定的。对于中稳定性和弱稳定性概念，也可以作出类似观察。根据定义4，由于 $\mathscr{U}(N,\{N\})=\emptyset$，给定的解对自动具有融合抵抗性；显然，由（8）、（9）、（21）和（24），以及定义1至3可知

$$\begin{aligned}\mathbb{S}^{*}(N,\vec{v})\cap[\{\{N\}\}\times\partial(N,\vec{v})]&=\mathbb{Q}^{\mathrm{i}*}(N,\vec{v})\cap[\{\{N\}\}\times\partial(N,\vec{v})]\\&=\{\{N\}\}\times\mathbb{X}^{*}(N,\vec{v}).\end{aligned}\tag{25}$$

对于这些稳定性概念，我们将证明

$$\mathbb{S}^{+}(N,\vec{v})\subseteq\mathbb{S}^{0}(N,\vec{v})\subseteq\mathbb{S}^{-}(N,\vec{v}),\qquad\qquad\forall\vec{v}\in\Re^{\mathscr{C}(N)};\tag{26}$$

$$\mathbb{S}^{0}(N,\vec{v})\neq\emptyset,\qquad\qquad\forall\vec{v}\in\Re^{\mathscr{C}(N)}.\tag{27}$$

结合（26）和（27），我们知道，不仅中稳定性 $\mathbb{S}^{0}$ 具有普遍性，实际上更宽松的弱稳定性 $\mathbb{S}^{-}$也具有普遍性。

对于确实更严格的强稳定性 $\mathbb{S}^{+}$，例1 也可以作为其并非普遍成立的反例。在该例中，没有任何非$\{N\}$ 划分是融合抵抗的。但如前所示，不存在 N有效且个体理性的分配 $\vec{x}$ 能使这一对 $(\{N\},\vec{x})$ 强分裂抵抗。另一方面，许多 $\vec{x}$都可以使 $(\{N\},\vec{x})$ 中度或弱分裂抵抗。以 $\vec{x}=(2,2,2)$ 为例。尽管参与者1和2可能会为各自的 $\{1,2\}$联盟而鼓动，但知足的参与者3会挫败他们的企图。

尽管仍非普适，这种基于一般-$\mathcal{P}$的概念 $\mathbb{S}^{+}$ 已经较传统的以 $\{N\}$为中心的核概念具备优势。面对任何 $\vec{v}\in\Re^{\mathscr{C}(N)}$，我们相信“真正的参与者”最终都得“安顿在”某个解对 $(\mathcal{P},\vec{x})$ 上。如果这是真的，那么与核相比，$\mathbb{S}^{+}$ 就更有可能模拟现实。例如，当 $N=\{1,2\}$ and$v(\{1\})=v(\{2\})=v(\{1,2\})=1$时，$\mathbb{S}^{+}$会包含 $(\{\{1\},\{2\}\},(1,1))$ 这一自然稳定点；而若坚持采用核，我们将一无所获。

当然，如果能够证明$\mathbb{S}^{0}$ 和 $\mathbb{S}^{-}$ 具有普适性，那就更好了。

6 以普遍性为中心的验证

因此，我们着手验证式 (26) 和 (27)。

首先，给定一个划分 $\mathcal{P}\in\mathscr{P}(N)$，定义修补后的核心如下：

$$\begin{aligned}\mathbb{X}^{\mathrm{i}*}(N,\vec{v},\mathcal{P})&\equiv\textstyle\prod_{C\in\mathcal{P}}\mathbb{X}^{*}(C,\vec{v}|_{\mathscr{C}(C)})\\&=\left\{\vec{x}\equiv(x(i))_{i\in N}\in\Re^{N}:\ \vec{x}|_{C}\in\mathbb{X}^{*}(C,\vec{v}|_{\mathscr{C}(C)}),\quad\forall C\in\mathcal{P}\right\},\end{aligned}\tag{28}$$

其中，$*$ 可以是 $+$、0 或 $-$。根据 (3)、(8)、(9) 以及 (12) 或 (21)，对于任意 $*$，(28) 中的 $\mathbb{X}\mathrm{i}_{*}(N,\ \vec{v},\ \mathcal{P})$ 都是 $\mathscr{X}(N,\ \vec{v},\ \mathcal{P})$ 的子集。由于全合并划分 $\{N\}$ 的特殊性质，以及 (8)、(9)、(12) 和 (28)，当 $*$ 为 $+$、0 或 $-$ 时，$\mathbb{X}\mathrm{i}_{*}(N,\ \vec{v},\ \{N\})=\mathbb{X}^{*}(N,\ \vec{v})$。换言之，修补后的核心是将以 $\{N\}$ 为中心的情形中的“普通”核心扩展到适用于任意划分 $\mathcal{P}$ 的更一般情形。

接下来，定义

$$\mathbb{P}^{\mathrm{i}*}(N,\vec{v})\equiv\left\{\mathcal{P}\in\mathscr{P}(N):\ \mathbb{X}^{\mathrm{i}*}(N,\vec{v},\mathcal{P})\neq\emptyset\right\},\tag{29}$$

其中，$*$ 可以是 $+$、0 或 $-$。基于 (28) 和 (29)，我们将证明

$$\mathbb{Q}^{\mathrm{i}*}(N,\vec{v})=\bigcup_{\mathcal{P}\in\mathbb{P}^{\mathrm{i}*}(N,\vec{v})}\{\mathcal{P}\}\times\mathbb{X}^{\mathrm{i}*}(N,\vec{v},\mathcal{P}),\tag{30}$$

其中，$*$ 可以是 $+$、0 或 $-$。结合 (13)、(28) 和 (29)，拟议的 (30) 将导出

$$\mathbb{Q}^{\mathrm{i}+}(N,\vec{v})\subseteq\mathbb{Q}^{\mathrm{i}0}(N,\vec{v})\subseteq\mathbb{Q}^{\mathrm{i}-}(N,\vec{v}).\tag{31}$$

随后，结合 (24) 和 (31) 可推出 (26)。

此外，还可发现 (29) 中 $\mathbb{P}\mathrm{i}^{0}(N,\ \vec{v})$ 的另一种定义为

$$\left\{\mathcal{P}\in\mathscr{P}(N):\ \tilde{w}(N,\vec{v},\mathcal{P})\geq\tilde{w}(N,\vec{v},\mathcal{P}'),\quad\forall\mathcal{P}'\in\mathscr{I}(N,\mathcal{P})\right\}.\tag{32}$$

对于另一种定义

$$\mathbb{P}^{\mathrm{u}}(N,\vec{v})\equiv\left\{\mathcal{P}\in\mathscr{P}(N):\ \tilde{w}(N,\vec{v},\mathcal{P})\geq\tilde{w}(N,\vec{v},\mathcal{P}'),\quad\forall\mathcal{P}'\in\mathscr{U}(N,\mathcal{P})\right\},\tag{33}$$

我们将证明

$$\mathbb{Q}^{\mathrm{u}}(N,\vec{v})=\bigcup_{\mathcal{P}\in\mathbb{P}^{\mathrm{u}}(N,\vec{v})}\{\mathcal{P}\}\times\mathscr{X}(N,\vec{v},\mathcal{P}).\tag{34}$$

(24)、(30) 和 (34) 的组合将意味着

$$\mathbb{S}^{*}(N,\vec{v})=\bigcup_{\mathcal{P}\in\mathbb{P}^{\mathrm{i}*}(N,\vec{v})\cap\mathbb{P}^{\mathrm{u}}(N,\vec{v})}\mathbb{X}^{\mathrm{i}*}(N,\vec{v},\mathcal{P}),\tag{35}$$

其中，$*$可以是 $+$、0 或 $-$；对于允许出现在并集符号中的 $\mathcal{P}$，所有 $\mathbb{X}\mathbf{i}_*(N,\vec{v},\mathcal{P})$均非空。然而，根据（32）和（33），

$$\mathbb{P}^{\mathrm{io}}(N,\vec{v})\cap\mathbb{P}^{\mathrm{u}}(N,\vec{v})\neq\emptyset, \tag{36}$$

因为任何使 $\tilde{w}(N,\vec{v},\cdot)$ 达到最大值的划分 $\mathcal{P}\in\mathscr{P}(N)$，都必定属于 (36) 的左侧。现在，(35) 和 (36) 合在一起便可推出 (27)。

因此，对 (26) 和 (27) 的验证取决于对 (30)、(32) 和 (34) 的证明。

为证明 (30)，我们只需令 $*$ 为 $+$、0 或 $-$，

$$(\mathcal{P},\vec{x})\in\mathbb{Q}^{\mathrm{i}*}(N,\vec{v})\quad\Longleftrightarrow\quad(\{C\},\vec{x}|_C)\in\mathbb{Q}^{\mathrm{i}*}(C,\vec{v}|_{\mathscr{C}(C)}),\quad\forall C\in\mathcal{P}, \tag{37}$$

从而将划分—分配对 $(\mathcal{P},\vec{x})$ 的各种抗分裂状态与由 $\mathcal{P}$ 的组成联盟 C 构成的配对 $(\{C\},\vec{x}|_C)$ 的抗分裂状态联系起来。为说明这一点，注意到 (25) 中的第二个等式可改写为

$$(\{N\},x)\in\mathbb{Q}^{\mathrm{i}*}(N,\vec{v})\quad\Longleftrightarrow\quad\vec{x}\in\mathbb{X}^{*}(N,\vec{v}). \tag{38}$$

结合 (28)、(37) 和 (38)，可得

$$(\mathcal{P},\vec{x})\in\mathbb{Q}^{\mathrm{i}*}(N,\vec{v})\quad\Longleftrightarrow\quad\vec{x}\in\mathbb{X}^{\mathrm{i}*}(N,\vec{v},\mathcal{P}). \tag{39}$$

但鉴于 (29)，上述 (39) 只是表达 (30) 的另一种方式。现在给出 (37) 的三种情形。所有证明均已移至附录 A。

命题 3 对于任意 $\vec{v}\in\Re^{\mathscr{C}(N)}$，式 *(4)* 的一个划分—分配对 $(\mathcal{P}\equiv\{C_1,...,C_p\},\vec{x})\in\mathscr{Q}(N,\vec{v})$ 根据定义 *1* 是 $(N,\vec{v})$- **强** - 分裂抗性的，当且仅当每个 $(\{C_k\},\vec{x}|_{C_k})$ 根据定义 *1* 都是 $(C_k,\vec{v}|_{\mathscr{C}(C_k)})$-强-分裂抗性的。

命题 4 对于任意 $\vec{v}\in\Re^{\mathscr{C}(N)}$，式 *(4)* 的一个划分—分配对 $(\mathcal{P}\equiv\{C_1,...,C_p\},\vec{x})\in\mathscr{Q}(N,\vec{v})$ 根据定义 *2* 是 $(N,\vec{v})$- **中等** - 分裂抗性的，当且仅当每个 $(\{C_k\},\vec{x}|_{C_k})$ 根据定义 *2* 都是 $(C_k,\vec{v}|_{\mathscr{C}(C_k)})$-中等-分裂抗性的。

命题 5 对于任意 $\vec{v}\in\Re^{\mathscr{C}(N)}$，若 *(4)* 的划分—分配对 $(\mathcal{P}\equiv\{C_1,...,C_p\},\vec{x})\in\mathscr{Q}(N,\vec{v})$ 满足$(N,\vec{v})$-**弱**-分裂抗性，则根据定义 *3*，当且仅当每个$(\{C_k\},\vec{x}|_{C_k})$ 都满足$(C_k,\vec{v}|_{\mathscr{C}(C_k)})$-弱-分裂抗性时，才成立。

命题 4，即 (37) 的中等版本，已经可以用于证明 (32)。该命题讨论的是

$$\begin{aligned}\tilde{w}(N,\vec{v},\mathcal{P}) \geq \max\nolimits_{\mathcal{P}'\in\mathscr{I}(N,\vec{v})}\tilde{w}(N,\vec{v},\mathcal{P}')\\ \iff\quad v(C)\geq\max\nolimits_{\mathcal{P}'\in\mathscr{P}(C)\setminus\{C\}}\tilde{w}(C,\vec{v}|_{\mathscr{C}(C)},\mathcal{P}'),\quad\forall C\in\mathcal{P},\end{aligned}\tag{40}$$

从而将 a $\mathcal{P}$ 相较于向下裂分邻居的优势，与其组成联盟的全合并划分的优势联系起来。结合 (12) 和 (28)，我们的 (40) 将意味着

$$\tilde{w}(N,\vec{v},\mathcal{P})\geq\max_{\mathcal{P}'\in\mathscr{I}(N,\vec{v})}\tilde{w}(N,\vec{v},\mathcal{P}')\quad\iff\quad\mathbb{X}^{\mathrm{i0}}(N,\vec{v},\mathcal{P})\neq\emptyset.\tag{41}$$

鉴于 (29)，我们看到 (41) 意味着 (32)。事实上，(3) 和 (12) 还可进一步推出

$$\mathbb{X}^{\mathrm{i0}}(N,\vec{v},\mathcal{P})\neq\emptyset\quad\iff\quad\mathbb{X}^{\mathrm{i0}}(N,\vec{v},\mathcal{P})=\mathscr{X}(N,\vec{v},\mathcal{P}).\tag{42}$$

与此同时，(34) 只不过相当于

$$(\mathcal{P},\vec{x})\in\mathbb{Q}^{\mathrm{u}}(N,\vec{v})\Longleftrightarrow\mathcal{P}\in\mathbb{P}^{\mathrm{u}}(N,\vec{v}),\tag{43}$$

其中右侧并未对分配 $\vec{x}\in\mathscr{X}(N,\ \vec{v},\ \mathcal{P})$ 施加任何限制，从而将划分—分配对 $(\mathcal{P},\ \vec{x})$ 的融合抵抗状态，仅与 $\mathcal{P}$ 在收益上优于其融合至多邻居联系起来。

命题6 对于任意 $\vec{v}\in\Re^{\mathscr{C}(N)}$，*(4)* 中 $\mathscr{Q}(N,\vec{v})$ 内的一对 $(\mathcal{P},\vec{x})$，按照定义*4*，当且仅当 *(33)* 中的 $\mathcal{P}\in\mathbb{P}\boldsymbol{u}(N,\vec{v})$ 时，便具有 $(N,\vec{v})$-融合抵抗性。

既然（30）、（32）和（34）已得到确认，我们就验证了（26）和（27）。下面总结我们的发现（25）至（27）。

定理1 基于定义*1*和*4*的强稳定性概念 $\mathbb{S}^{+}$ 比基于定义*2*和*4*的中稳定性概念 $\mathbb{S}^{0}$ 更严格，而后者又比基于定义*3*和*4*的弱稳定性概念 $\mathbb{S}^{-}$ 更严格；每个概念都与分别在（*8*）、（*12*）和（*9*）中定义的相应核概念相容；重要的是，后两个稳定性概念具有普适性。

由（22）和（23）可知，只要 $\mathcal{P}\prec\mathcal{P}'$，$\mathscr{I}(N,\ \mathcal{P})\subset\mathscr{I}(N,\ \mathcal{P}')$，且 $\mathscr{U}(N,\ \mathcal{P})\supset\mathscr{U}(N,\ \mathcal{P}')$。因此，根据定义1至4，对于“更分裂”的划分而言，具备分裂抵抗性会“更容易”；对于“更集中的”划分而言，具备融合抵抗性会“更容易”。鉴于此，我们用图1示意性地勾勒出各种实体。

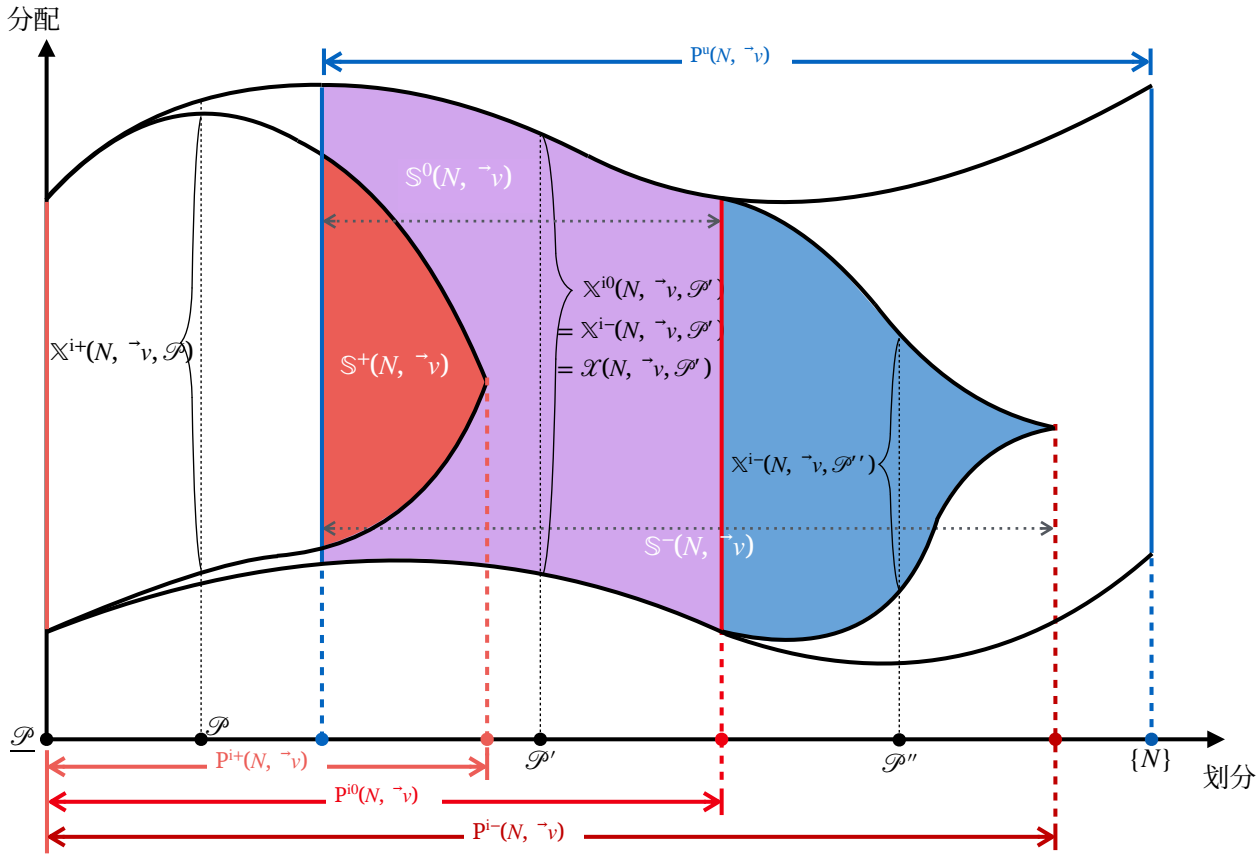

图1：各种实体的示意图

我们知道，对于全分裂划分 $\mathcal{P}$，$\mathscr{X}(N, \vec{v}, \mathcal{P})$恰有一个成员 $\underline{\vec{x}}$，其每个组成部分 $x(i) = v(\{i\})$；我们也知道，对于某些划分 $\mathcal{P}$，$\mathscr{X}(N, \vec{v}, \mathcal{P})$可能为空。尽管如此，为了便于说明，我们在图1中将所有 $\mathscr{X}(N, \vec{v}, \mathcal{P})$都画成相似的“宽度”。此外，划分并非完全有序，集合 $\mathbb{P}\mathrm{i}^{+}(N, \vec{v})$、$\mathbb{P}\mathrm{i}^{0}(N, \vec{v})$、$\mathbb{P}\mathrm{i}_{-}(N, \vec{v})$和 $\mathbb{P}\mathrm{u}(N, \vec{v})$也不一定连通。

我们还为一个非空的 $\vec{v}$ $\mathbb{S}^{+}(N, \vec{v})$绘制了图。对于其他一些 $\vec{v}$，后者可能为空。另一方面，定理1已排除了 $\mathbb{S}^{0}(N, \vec{v})$为空的可能性，更不用说 $\mathbb{S}^{-}(N, \vec{v})$了。在当前的 $\vec{v}$下，即使 $\mathbb{Q}\mathrm{i}_{-}(N, \vec{v})$也与 $\{\{N\}\} \times \partial(N, \vec{v})$没有交集。因此，根据（25），弱核 $\mathbb{X}^{-}(N, \vec{v})$也是空的。反过来说，其他一些 $\vec{v}$或许仍能使强核心 $\mathbb{X}^{+}(N, \vec{v})$非空。

假设某个 $\mathbb{Q}\mathbf{i}_*(N,\ \vec{v})$ 如此“广泛”，以至于包含了图1中对应于全合并划分 $\{N\}$的“最右侧”部分。那么，由于 $\{\{N\}\}\times\partial(N,\ \vec{v})$ 显然是 $\mathbb{Q}\mathbf{u}N,\ \vec{v})$ 的一部分，这便是一个非空的 $\{\{N\}\}\times\mathbb{X}^*(N,\ \vec{v})$ 包含于 $\mathbb{S}^*(N,\ \vec{v})$ 的情形。在此，（25）中涉及的三个集合确实会同时非空。

根据 (29)、(32) 和 (33)，(35) 的 $(\mathcal{P},\ \vec{x})\in\mathbb{S}^0(N,\ \vec{v})$ 当且仅当

(hp) $\mathcal{P}\in\mathbb{P}\mathbf{i}^0(N,\ \vec{v})\cap\mathbb{P}\mathbf{u}(N,\ \vec{v})$，或者用 Apt 和 Radzik 的话说，$[1]$, 是 $\mathbb{D}_{hp}$-稳定的；(x) 此外，(28) 的 $\vec{x}\in\mathbb{X}\mathbf{i}^0(N,\ \vec{v},\ \mathcal{P})$。

Apt 和 Radzik 的稳定性概念 $[1]$ 没有规定 (x) 部分；也就是说，没有规定如何将各自的份额分配给个体支付者。然而，根据例1，即使在 $\mathcal{P}=\{N\}$ 的特殊情况下，这类分配也很重要：当传统核$\mathbb{X}^+(N,\ \vec{v})$ 被不恰当地用于 $\mathbb{X}^0(N,\ \vec{v})\equiv\mathbb{X}\mathbf{i}^0(N,\ \vec{v},\ \mathcal{P}=\{N\})$ 时，未必存在稳定解。

7 通往中度稳定性之路

从任意给定的划分 $\mathcal{P}\in\mathscr{P}(N)$ 出发，沿着一个自然过程，可以到达终端分割 $\mathcal{P}^0\in\mathbb{P}\mathbf{i}^0(N,\ \vec{v})\cap\mathbb{P}\mathbf{u}(N,\ \vec{v})$，然后到达中度稳定集$\mathbb{S}^0(N,\ \vec{v})$中的一对 $(\mathcal{P}^0,\ \vec{x}^0)$。这一过程最适合描述为图中的一系列移动。

注意，$\mathscr{P}(N)$ 可分解为 n 个子集 $\mathscr{P}^1(N)$ $\mathscr{P}^2(N)$ ....., $\mathscr{P}^n(N)$，其中每个 $\mathscr{P}^p(N)$ 都包含满足 $|\mathcal{P}|=p$ 的划分 $\mathcal{P}\in\mathscr{P}(N)$。显然，$\mathscr{P}^1(N)$ 只包含一个成员，即完全合并的 $\{N\}$；$\mathscr{P}^n(N)$ 也如此，其唯一成员是完全分裂的 $\mathcal{P}$。对于介于两者之间的 p，其 $\mathscr{P}^p(N)$ 可能更大。

将 $\mathscr{P}^p(N)$ 视为节点集，我们可以得到一个 n-部图

$\mathscr{G}(N)\equiv(\mathscr{P}^n(N)\ \mathscr{A}^{n-1,n}(N)\ \mathscr{A}^{n,n-1}(N)\ \mathscr{P}^{n-1}(N)\ ...,\mathscr{P}^2(N)\ \mathscr{A}^{1,2}(N)\ \mathscr{A}^{2,1}(N)\ \mathscr{P}^1(N))$, 其中每个 $\mathscr{A}^{p,p+1}(N)$ 包含从 $\mathscr{P}^p(N)$ 出发到 $\mathscr{P}^{p+1}(N)$ 的所有“一步分裂”弧，而每个 $\mathscr{A}^{p+1,p}(N)$ 包含从 $\mathscr{P}^{p+1}(N)$ 出发到 $\mathscr{P}^p(N)$ 的所有“一步合并”弧。每次一步分裂/合并仅涉及一个起始/终止联盟，以及对该联盟进行二分/将两个部分合并为该联盟。图2展示了图 $\mathscr{G}(N)$。

显然，从图2可以看出，$\mathscr{G}(N)$ 是 Sandholm等人 $[14]$ 所称的联盟结构图的有向图版本。我们的有向弧有助于区分向下分裂和向上合并的方向。有关该图 $\mathscr{G}(N)$ 的更多细节，包括其连通性，已在附录 B 中给出。

以下最陡上升法（SAM）虽可通过图中的移动来实现，但能确保在有限步内收敛到 $\mathbb{S}^0(N,\ \vec{v})$ 中的一个点：

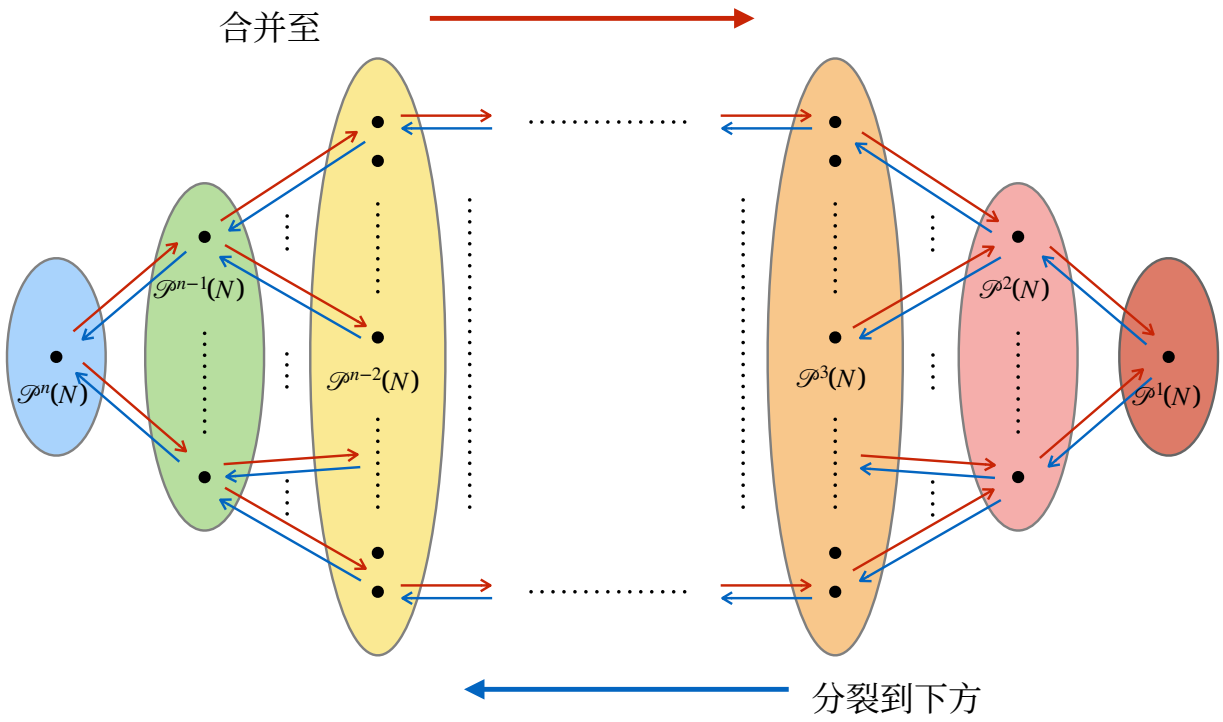

图2： n部图 $\mathscr{G}(N)$ 的示意图

(m) 只要 $\tilde{w}(N,\ \vec{v},\ \mathcal{P}) < \tilde{w}(N,\ \vec{v},\ \mathcal{P}')$，就从任意当前的 $\mathcal{P}$ 移动到一个新的 $\mathcal{P}'$，并选择使 $\mathcal{P}' \in \operatorname{argmax}_{\mathcal{P}'' \in \mathscr{I}(N,\ \mathcal{P}) \cup \mathscr{U}(N,\ \mathcal{P})} \tilde{w}(N,\ \vec{v},\ \mathcal{P}'')$ 的移动，直到无法再进行此类移动为止。

(s)当前的 $\mathcal{P}^0$ 必须同时属于 (29) 或 (32)中的 $\mathbb{P}\mathrm{i}^0(N,\vec{v})$，以及 (33) 中的 $\mathbb{P}\mathrm{u}(N,\vec{v})$。然后，为每个 $C \in \mathcal{P}^0$ 任取一个 $\vec{x}^0|_C \in \mathbb{X}^0(C,\vec{v}|_{\mathscr{E}(C)}) \equiv \partial(C,\vec{v}|_{\mathscr{E}(C)})$，并将它们组装成一个完整的 $\vec{x}^0 \in \mathbb{X}\mathrm{i}^0(N,\vec{v},\mathcal{P}^0) \equiv \mathscr{X}(N,\vec{v},\mathcal{P}^0)$。

如附录 B 所示，SAM 的每个 (m)-步骤都由图 $\mathscr{G}(N)$ 中的若干次移动组成，该图是有限且连通的。由于每个 (m)-步骤都能确保 $\tilde{w}(N,\vec{v},\cdot)$ 严格增加，因此从任意起始 $\mathcal{P}$ 出发，(SAM) 都会在有限个 (m)-步骤后到达其 (s)-步骤。由 (32) 和 (33) 可知，终止的 $\mathcal{P}^0$ 属于 $\mathbb{P}\mathrm{i}^0(N,\vec{v}) \cap \mathbb{P}\mathrm{u}(N,\vec{v})$。根据 (12)、(28) 和 (29)，我们寻找 $\vec{x}^0$ 来补足划分 — 分配对 $(\mathcal{P}^0,\vec{x}^0) \in \mathbb{S}^0(N,\vec{v})$ 必定能够成功。

SAM 绝不会 意味着这始终是一次性的交易。例如，它可以从 $\{\{1,2\},\{3\}\}$

转到 $\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$，然后再转到 $\{\{1\},\{2,3\}\}$。我们推测，在一次 SAM 运行过程中，划分的演变在多大程度上可能模拟现实过程；在现实过程中，参与者可能是萨凡纳的狮子、城市里的律师，或大陆上的行政实体。其他一些细节仍留待附录 B 讨论。

在运行 SAM 的（m）个步骤期间，对于某个特定划分 $\mathcal{P} \equiv \{C_1, ..., C_p\}$，判断 $\mathcal{P} \in \mathbb{Pi}^0(N, \vec{v}) \cap \mathbb{Pu}(N, \vec{v})$ 是否成立，归结为计算通过公式（10）为 $\mathcal{P}' \in \{\mathcal{P}\} \cup \mathscr{I}(N, \mathcal{P}) \cup \mathscr{U}(N, \mathcal{P})$ 定义的各种收益 $\tilde{w}(N, \vec{v}, \mathcal{P}')$，并对其进行比较。由于公式（22）和（23）中定义的邻域规模可能呈组合式增长，因此，适当的整数规划（IP）或动态规划（DP）建模方法可能会有所帮助。可以参考相关研究，例如 Rahman等人 [12] 和 Sandholm等人 [14]。

涉及终端分割 $\mathcal{P}^0$ 的 (s) 步骤包含 $|\mathcal{P}^0|$ 次关联。对于每个 $C \in \mathcal{P}^0$，需要从已知非空的中核 $\mathbb{X}^0(C,\ \vec{v}|_{\mathscr{C}(C)}) \equiv \partial(C,\ \vec{v}|_{\mathscr{C}(C)})$ 中找出一个 $\vec{x}^0|_C$。根据 (1)，线性规划（LP）是一个不错的工具。

因此，$(\mathcal{P}^0,\ \vec{x}^0) \in \mathbb{S}^0(N,\ \vec{v}) \subseteq \mathbb{S}^-(N,\ \vec{v})$，SAM 的最终输出 $(\mathcal{P}^0,\ \vec{x}^0)$ 已经能够抵御各种诱惑，除非这些诱惑过于强烈。首先，任何组成联盟 C 在 $\mathcal{P}^0$ 中都没有进一步合并的动机。其次，对于任何此类 C，若要进一步将其分裂，就必须克服至少一道由心怀不满的子联盟设置的障碍。

8 结论

我们已将传统核概念扩展到其较宽松的形式，即中间核和弱核。即使是最后一种，也可以通过共识阻挡原则加以论证——要成功分裂大联盟，必须获得所有受影响各方的一致同意。从这个角度看，传统核可以被视为允许单边阻挡的核。我们相信，联盟博弈中的大多数（如果不是全部）情形都应有其“自然的稳定状态”，在这种状态下，参与者未必都会最终加入大联盟。因此，我们将这些原则应用于划分—分配对。

因此，我们得到了三种稳定性概念：强稳定性、中稳定性和弱稳定性。强稳定性已经比与之对应的传统核更具包容性；与此同时，中稳定性和弱稳定性赢得了普遍性的桂冠：每个博弈，无论它有多么“差”，都有其应有的稳定解。我们提出了一种求解中稳定解的贪心算法。未来值得探究的是，现实中的演化过程是否会与该算法的运行过程有相似之处。

我们还想知道，是否能够将类似的扩展应用于更一般化或更精细化的概念。

例如，Thrall 和 Lucas 提出的划分函数形式的博弈 [17]，或 Sprumont 提出的人口单调分配方案 [16]。由于传统核与平衡性密切相关，我们自然会质疑弱核心是否也与某种弱平衡性相关。此外，我们的普遍稳定性概念与中间核和弱核心相容，但与传统核不相容。值得探究的是，是否存在既与核相容又能保持普遍性的稳定性概念。

致谢

作者谨向本文早期版本的两位审稿人致谢。他们提出了与此处例1非常相似的反例，驳斥了先前的一项错误主张。当前有关弱核心的概念正是由此而来。

附录

第 6 节的技术细节 A

命题 3 的证明： 对于“如果”部分，假设每个 $(\{C_k\}, \vec{x}|_{C_k})$ 都是 $(C_k, \vec{v}|_{\mathscr{C}(C_k)})$-强抗分裂的。任何 $\mathcal{P}' \in \mathscr{I}(N, \mathcal{P})$ 都必须具有如下形式：$\{C_1^1, ..., C_1^{l_1}, ..., C_p^1, ..., C_p^{l_p}\}$，使得对于每个 $k = 1, ..., p$，$\mathcal{P}'_k \equiv \{C_k^1, ..., C_k^{l_k}\}$ 都是 C_k 的一个划分，因此要么就是 $\{C_k\}$ 本身，要么属于后者的分裂向下邻域 $\mathscr{I}(C_k, \{C_k\})$。

对于任意 $\vec{x}' \in \mathscr{X}(N, \vec{v}, \mathcal{P}')$ 和 $k = 1, ..., p$，由 (3) 可得 $\vec{x}'|_{C_k} \in \mathscr{X}(C_k, \vec{v}|_{\mathscr{C}(C_k)} \mathcal{P}'_k)$。当 $l_k = 1$ 时，$\vec{x}|_{C_k}$ 和 $\vec{x}'|_{C_k}$ 都是 $\mathscr{X}(C_k, \vec{v}|_{\mathscr{C}(C_k)} \{C_k\})$ 的成员。由 (3)，

$$\sum_{i \in C_k} x(i) = v(C_k) = \sum_{i \in C_k} x'(i).$$

另一方面，当 $l_k \geq 2$，从而 $\mathcal{P}'_k \equiv \{C_k^1, ..., C_k^{l_k}\} \in \mathscr{I}(C_k, \{C_k\})$ 时，由假设和定义 1 可得

$$\sum_{i \in C_k^j} x(i) \geq \sum_{i \in C_k^j} x'(i), \qquad \forall j = 1, ..., l_k.$$

根据定义 1，$(\mathcal{P}, \vec{x})$ 必须是 $(N, \vec{v})$-强抗分裂的。

对于“仅当”部分，假设由划分 $\mathcal{P} \equiv \{C_1, ..., C_p\}$ 和其分配向量之一 $\vec{x} \in \mathscr{X}(N, \vec{v}, \mathcal{P})$ 组成的配对 $(N, \vec{v})$ 是强抗分裂的。对于任意 $k = 1, ..., p$，

令 $\{C_k^1,...,C_k^l\}\in\mathscr{I}(C_k,\ \{C_k\})$。现在 $\mathcal{P}'\equiv\{C_1,...,C_{k-1},C_k^1,...,C_k^l,C_{k+1},...,C_p\}$是 $\mathscr{I}(N,\mathcal{P})$ 的一个成员。对于任意 $\vec{x}'\in\mathscr{X}(C_k,\ \vec{v}|_{\mathscr{C}(C_k)}\ \{C_k^1,...,C_k^l\})$，注意到根据 (3)，将 $\vec{x}''\in\Re^N$与 $\vec{x}''|_{C_j}=\vec{x}|_{C_j}$（其中 $j=1,...,\ k-1,\ k+1,...,\ p$）以及 $\vec{x}''|_{C_k^j}=\vec{x}'|_{C_k^j}$（其中 $j=1,...,\ l$）连接起来，所得结果属于 $\mathscr{X}(N,\ \vec{v},\ \mathcal{P}')$。但根据假设和定义 1，

$$\sum_{i\in C_k^j}x(i)\geq\sum_{i\in C_k^j}x''(i)=\sum_{i\in C_k^j}x'(i),\qquad\qquad\forall j=1,...,l.$$

这意味着 $(C_k,\vec{v}|_{\mathscr{C}(C_k)})$-强裂分抗性状态属于 $(\{C_k\},\vec{x}|_{C_k})$。 ∎

命题 4 的证明： 对于"若"部分，假设每个 $\{C_k\}$ 都支配所有更细的划分。(22) 的任意 $\mathcal{P}'\in\mathscr{I}(N,\mathcal{P})$ 都必须具有 $\{C_1^1,...,C_1^{l_1},...,C_p^1,...,C_p^{l_p}\}$ 的形式，其中对每个 $k=1,...,p$，$\mathcal{P}'_k\equiv\{C_k^1,...,C_k^{l_k}\}$ 都是 $\mathscr{I}(C_k,\{C_k\})$ 的成员。因此，

$$\begin{aligned}\tilde{w}(N,\vec{v},\mathcal{P})&=v(C_1)+\cdots+v(C_p)=\tilde{w}(C_1,\vec{v}|_{\mathscr{C}(C_1)},\{C_1\})+\cdots+\tilde{w}(C_p,\vec{v}|_{\mathscr{C}(C_p)},\{C_p\})\\&\geq\tilde{w}(C_1,\vec{v}|_{\mathscr{C}(C_1)},\mathcal{P}'_1)+\cdots+\tilde{w}(C_p,\vec{v}|_{\mathscr{C}(C_p)},\mathcal{P}'_p)\\&=\textstyle\sum_{j=1}^{l_1}v(C_1^j)+\cdots+\sum_{j=1}^{l_p}v(C_p^j)=\tilde{w}(N,\vec{v},\mathcal{P}'),\end{aligned}$$

其中，第一个等式即为 (10)；第二个等式源于同一关系以及完全合并的 $\{C_k\}$ 的特殊性质；不等式则由当前涉及定义 2 的假设得出；第三个等式是由 (10) 和每个 $\mathcal{P}'_k$ 的构成得出的；最后一个等式则由 (10) 和 $\mathcal{P}'$ 的构成得出。由 (32) 可知，这意味着 $\mathcal{P}\in\mathbb{P}\mathrm{i}^0(N,\vec{v})$；等价地说，这意味着 $(\mathcal{P},\vec{x})$ 满足 $(N,\vec{v})$ 的定义 2。

对于"仅当"部分，假设 $\mathcal{P}$ 在收益上支配所有向下裂分邻居。对于任意 $k=1,...,p$，令 $\mathcal{P}'_k\equiv\{C_k^1,...,C_k^l\}$ 为 C_k 的一个划分。考虑 $\mathcal{P}''\equiv\{C_1,...,C_{k-1},C_k^1,...,C_k^l,C_{k+1},...,C_p\}$，它是 $\mathscr{I}(N,\vec{v},\mathcal{P})$的一个成员。于是，

$$\begin{aligned}\tilde{w}(C_k,\vec{v}|_{\mathscr{C}(C_k)},\{C_k\})&=v(C_k)=\tilde{w}(N,\vec{v},\mathcal{P})-v(C_1)-\cdots-v(C_{k-1})-v(C_{k+1})-\cdots-v(C_p)\\&\geq\tilde{w}(N,\vec{v},\mathcal{P}'')-v(C_1)-\cdots-v(C_{k-1})-v(C_{k+1})-\cdots-v(C_p)\\&=v(C_k^1)+\cdots+v(C_k^l)=\tilde{w}(C_k,\vec{v}|_{\mathscr{C}(C_k)},\mathcal{P}'_k),\end{aligned}$$

其中，前两个等式均由（10）以及 $\{C_k\}$ 和$\mathcal{P}$的定义得出，不等式则由假设得出，第三个和第四个等式同样是由（10）以及 $\mathcal{P}''$和 $\mathcal{P}'_k$的定义得出。因此，根据（32），$\{C_k\}\in\mathbb{P}\mathrm{i}^0(C_k,\ \vec{v}|_{\mathscr{C}(C_k)})$；换言之，$(\{C_k\},\ \vec{x}|_{C_k})$ 满足针对 $(C_k,\ \vec{v}|_{\mathscr{C}(C_k)})$ 的定义 2。

∎

命题 5 的证明： 对于"若"部分，假设每个 $(\{C_k\},\vec{x}|_{C_k})$ 都是 $(C_k,\vec{v}|_{\mathscr{C}(C_k)})$- 弱抗分裂。注意，$\mathcal{P}'\in\mathscr{I}(N,\mathcal{P})$ 必须具有 $\{C_1^1,...,C_1^{l_1},...,C_p^1,...,C_p^{l_p}\}$ 的形式

使得对每个 $k=1,...,p$， $\mathcal{P}'_k \equiv \{C_k^1,...,C_k^{l_k}\}$ 都是 C_k 的一个划分，因此要么就是$\{C_k\}$ 本身，要么属于后者的分裂向下邻域 $\mathscr{I}(C_k,\{C_k\})$。

对于任意 $\vec{x}' \in \mathscr{X}(N,\ \vec{v},\ \mathcal{P}')$ 和 $k=1,\ .....,\ p$，由 (3) 可得 $\vec{x}'|_{C_k} \in \mathscr{X}(C_k,\ \vec{v}|_{\mathscr{C}(C_k)}\ \mathcal{P}'_k)$。由于 (22) 的 $\mathcal{P}' \in \mathscr{I}(N,\ \mathcal{P})$ 本身并非 $\mathcal{P}$，因此必有 $l_k \geq 2$，进而对于至少一个 $k=1,\ ...\ ...,\ p$，有 $\mathcal{P}'_k \in \mathscr{I}(C_k,\ \{C_k\})$。对于这个 k，根据假设和定义 3，我们有

$$\sum_{i\in C_k^j} x(i) \geq \sum_{i\in C_k^j} x'(i), \qquad\qquad \exists j=1,...,l_k.$$

因此，根据定义 3，$(\mathcal{P},\ \vec{x})$ 必须是 $(N,\ \vec{v})$-弱抗分裂的。

对于“仅当”部分，假设由一个划分 $\mathcal{P} \equiv \{C_1,...,C_p\}$ 及其一个分配向量 $\vec{x} \in \mathscr{X}(N,\vec{v},\mathcal{P})$ 组成的有序对是 $(N,\vec{v})$-弱抗分裂的。对于任意 $k=1,...,p$，令 $\{C_k^1,...,C_k^l\} \in \mathscr{I}(C_k,\{C_k\})$，从而有 $l \geq 2$。现在，$\mathcal{P}' \equiv \{C_1,...,C_{k-1},C_k^1,...,C_k^l,C_{k+1},...,C_p\}$ 是 $\mathscr{I}(N,\mathcal{P})$ 的一个成员。对于任意 $\vec{x}' \in \mathscr{X}(C_k,\vec{v}|_{\mathscr{C}(C_k)}\ \{C_k^1,...,C_k^l\})$，注意到由 (3) 可知，将 $\vec{x}'' \in \Re^N$ 与以下各项拼接：$j=1,...,k-1$ 对应的 $\vec{x}''|_{C_j} = \vec{x}|_{C_j}$、$k+1,...,p$，以及$j=1,...,l$ 对应的 $\vec{x}''|_{C_k^j} = \vec{x}'|_{C_k^j}$，所得结果属于 $\mathscr{X}(N,\vec{v},\mathcal{P}')$。但是，根据假设、定义 3，以及 $C_1,...,C_{k-1},C_{k+1},...,C_p$ 全都属于 $\mathcal{P}$、因而不计作定义 3 中的 C' 这一事实，

$$\sum_{i\in C_k^j} x(i) \geq \sum_{i\in C_k^j} x''(i) = \sum_{i\in C_k^j} x'(i), \qquad\qquad \exists j=1,...,l.$$

上述 意味着（C_k，$\vec{v}|_{\mathscr{C}(C_k)}$）-弱分裂抵抗性状态（$\{C_k\}$，$\vec{x}|_{C_k}$ ）. ∎

命题6的证明： 对于“若”部分，假设 $\mathcal{P} \equiv \{C_1,...,C_p\}$ 根据定义于 (10) 的 $\tilde{w}(N,\ \vec{v},\ \cdot)$，在合并至多一步的邻居中占优。令 $\mathcal{P}' \equiv \{C'_1,...,C'_{p'}\}$ 为这样的一个邻居。对于任意 $k=1,\ .....p'$，联盟 C'_k 必须是构成 $\mathcal{P}$ 的若干联盟 C_l 的并集。现在，我们通过将这个特定的 C'_k 与所有不和 C'_k 相交的 $\mathcal{P}$-分量 C_l 放在一起，构造 (23) 中的 $\mathcal{P}'' \in \mathscr{U}(N,\ \mathcal{P})$。

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_{l:\ C_l\cap C'_k\neq\emptyset} v(C_l) &= \textstyle\sum_{l=1}^{p} v(C_l) - \sum_{l:\ C_l\cap C'_k=\emptyset} v(C_l) = \tilde{w}(N,\vec{v},\mathcal{P}) - \sum_{l:\ C_l\cap C'_k=\emptyset} v(C_l)\\ &\geq \tilde{w}(N,\vec{v},\mathcal{P}'') - \textstyle\sum_{l:\ C_l\cap C'_k=\emptyset} v(C_l) = v(C'_k),\end{aligned}$$

其中，第一个等式只是一个恒等式，第二个等式由（10）得出，不等式是根据（33）意义下的 $\mathcal{P}$-支配假设得出的，最后一个等式则由（10）以及 $\mathcal{P}''$的构造方式得出。根据定义 4，我们知道（$\mathcal{P}$，$\vec{x}$）是（N，$\vec{v}$）-融合抵抗的。

对于“仅当”部分，假设 $(\mathcal{P} \equiv \{C_1,...,C_p\},\ \vec{x})$ 是 $(N,\ \vec{v})$-融合抵抗的。令 $\mathcal{P}' \equiv \{C'_1,...,C'_{p'}\}$ 为 $\mathscr{U}(N,\ \mathcal{P})$ 的任意一个成员。注意，对于 $k=1,\ .....,\ p'$，每个 C'_k 都将是

恰好由所有与其相交的 C_l 的并集构成。现在

$$\tilde{w}(N,\vec{v},\mathcal{P})=\sum_{l=1}^{p}v(C_l)=\sum_{k=1}^{p'}\sum_{l:\ C_l\cap C'_k\neq\emptyset}v(C_l)\geq\sum_{k=1}^{p'}v(C'_k)=\tilde{w}(N,\vec{v},\mathcal{P}'),$$

其中，第一个等式由（10）得出，第二个等式只是恒等变形，不等式来自假设、定义4以及求和时不等式的保留，最后一个等式同样由（10）得出。因此， $\mathcal{P}\in\mathbb{P}\mathrm{u}(N,\ \vec{v})$ 满足（33）。 ∎

B 第7节的技术细节

与 $\mathscr{G}(N)$ 相关的细节： 我们将 $(\mathcal{P},\ \mathcal{P}')\ \in\mathscr{A}^{p+1,\ p}(N)$ 或等价的 $(\mathcal{P}',\ \mathcal{P})\ \in\mathscr{A}^{p,\ p+1}(N)$ 记为 $\mathcal{P}\prec_1\mathcal{P}'$。对于满足 $p=1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ n-1$ 的 $\mathcal{P}\equiv\{C_1,...,C_p\}\in\mathscr{P}^p(N)$，我们称其为

$$\mathscr{I}_1(N,\mathcal{P})\equiv\{\mathcal{P}'\in\mathscr{P}^{p+1}(N):\ (\mathcal{P},\mathcal{P}')\in\mathscr{A}^{p,p+1}(N)\text{ or equivalently }\mathcal{P}'\prec_1\mathcal{P}\}\qquad(B.1)$$

其一步分裂至该邻域。我们总可以令 $\mathscr{I}_1(N,\ \{\{i_1\},...,\{i_n\}\})\ =\emptyset$。对于满足 $p=n,\ n-1,\ \ldots\ldots,\ 2$ 的 $\mathcal{P}\equiv\{C_1,...,C_p\}\in\mathscr{P}^p(N)$，我们称其为

$$\mathscr{U}_1(N,\mathcal{P})\equiv\{\mathcal{P}'\in\mathscr{P}^{p-1}(N):\ (\mathcal{P},\mathcal{P}')\in\mathscr{A}^{p,p-1}(N)\text{ or equivalently }\mathcal{P}\prec_1\mathcal{P}'\}\qquad(B.2)$$

it单步合并至邻域。我们总可以令 $\mathscr{U}_1(N,\ \{N\})\ =\emptyset$.

由于任何分裂/合并都可通过若干次单步分裂/合并操作实现，因此以下结论可直接由(22)、(23)、(B.1) 和 (B.2) 得出。对于 $p,\ p'=1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ n\ \mathrm{with}p\geq p'+1$，设 $\mathcal{P}\in\mathscr{P}^p(N)$ 且 $\mathcal{P}'\in\mathscr{P}^{p'}(N)$。那么，

$$\mathcal{P}\in\mathscr{I}(N,\mathcal{P}')\Longleftrightarrow\mathcal{P}\prec\mathcal{P}'\Longleftrightarrow\mathscr{U}(N,\mathcal{P})\ni\mathcal{P}'\qquad(B.3)$$

当且仅当存在 $\mathcal{P}_p\equiv\mathcal{P}$、 $\mathcal{P}_{p-1}$、 $\cdots$、 $\mathcal{P}_{p'+1}$、 $\mathcal{P}_{p'}\equiv\mathcal{P}'$，使得对于任意$k=p-1,\ p-2,\ \ldots\ldots,\ p'$，

$$\mathcal{P}_{k+1}\in\mathscr{I}_1(N,\mathcal{P}_k)\Longleftrightarrow\mathcal{P}_{k+1}\prec_1\mathcal{P}_k\Longleftrightarrow\mathscr{U}_1(N,\mathcal{P}_{k+1})\ni\mathcal{P}_k.\qquad(B.4)$$

根据 (B.3) 和 (B.4)， $\mathscr{I}(N,\ \mathcal{P})$ 可理解为通过单步向下分裂弧可到达的、位于$\mathcal{P}$ 左侧的整个分支；与此同时， $\mathscr{U}(N,\ \mathcal{P})$ 可理解为通过单步向上合并弧可到达的、位于 $\mathcal{P}$ 右侧的整个分支。

我们确信，图中的任意部分都可以从其他任意部分到达。

事实 1 n部图 $\mathscr{G}(N)$ 是连通的。

证明： 对于任意的 $\mathcal{P} \equiv \{C_1, ..., C_p\} \in \mathscr{P}^p(N) \subseteq \mathscr{P}(N)$ 和 $\mathcal{P}' \equiv \{C'_1, ..., C'_{p'}\} \in \mathscr{P}^{p'}(N) \subseteq \mathscr{P}(N)$，考虑

$$\mathcal{P}'' \equiv \mathcal{P} \wedge_{(\prec)} \mathcal{P}' \equiv \{C''_1, ..., C''_{p''}\} \in \mathscr{P}^{p''}(N) \subseteq \mathscr{P}(N),$$

使得 $p'' \geq p \vee p'$，并且每个 $C''_{k''}$ 都是某个 C_k 和 $C'_{k'}$ 的非空交集。注意

$$\mathcal{P}'' \in \mathscr{I}(N, \mathcal{P}) \qquad \text{and yet} \qquad \mathcal{P}' \in \mathscr{U}(N, \mathcal{P}'').$$

由于 (B.3) 与 (B.4) 之间的联系，我们可以通过 $\mathcal{P}''$，经过有限步从 $\mathcal{P}$ 到达 $\mathcal{P}'$。对称地，先通过合并使 $\mathcal{P}$ 上升到 $\mathcal{P}'' \equiv \mathcal{P} \vee_{(\prec)} \mathcal{P}'$，再通过分裂下降到 $\mathcal{P}'$，即可完成证明。

■

关于 SAM 的其他细节： 在 SAM 运行期间，收益 $\tilde{w}(N, \vec{v}, \mathcal{P})$ 显然在不断上升。实际上，增幅发生在更细的层面上。

事实 2 假设划分 $\mathcal{P} \equiv \{C_1, ..., C_p\}$ 和 $\mathcal{P}' \equiv \{C_1^1, ..., C_1^{l_1}, ..., C_p^1, ..., C_p^{l_p}\}$ 满足 $\mathcal{P}' \in \textit{argmax}_{\mathcal{P}'' \in \mathscr{I}(N,\mathcal{P})} \tilde{w}(N, \vec{v}, \mathcal{P}'')$，那么 $\tilde{w}(N, \vec{v}, \mathcal{P}') \geq \tilde{w}(N, \vec{v}, \mathcal{P})$ 当且仅当

$$\tilde{w}\left(C_k, \vec{v}|_{\mathscr{C}(C_k)}, \{C_k^1, ..., C_k^{l_k}\}\right) \geq \tilde{w}\left(C_k, \vec{v}|_{\mathscr{C}(C_k)}, \{C_k\}\right), \qquad \forall k = 1, ..., p;$$

另一方面，假设划分 $\mathcal{P} \equiv \{C_1^1, ..., C_1^{l_1}, ..., C_p^1, ..., C_p^{l_p}\}$ *and* $\mathcal{P}' \equiv \{C_1, ..., C_p\}$ 满足 $\mathcal{P}' \in \textit{argmax}_{\mathcal{P}'' \in \mathscr{U}(N,\mathcal{P})} \tilde{w}(N, \vec{v}, \mathcal{P}'')$，那么 $\tilde{w}(N, \vec{v}, \mathcal{P}') \geq \tilde{w}(N, \vec{v}, \mathcal{P})$ 当且仅当

$$\tilde{w}\left(C_k, \vec{v}|_{\mathscr{C}(C_k)}, \{C_k\}\right) \geq \tilde{w}\left(C_k, \vec{v}|_{\mathscr{C}(C_k)}, \{C_k^1, ..., C_k^{l_k}\}\right), \qquad \forall k = 1, ..., p.$$

证明： 对于分裂和合并这两种情况，“如果”部分显然成立，甚至无需使用假设的 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{P}'$ 之间的关系；由 (10) 可得，

$$\tilde{w}\left(N, \vec{v}, \{C_1, ..., C_p\}\right) = \sum_{k=1}^{p} \tilde{w}\left(C_k, \vec{v}|_{\mathscr{C}(C_k)}, \{C_k\}\right),$$

$$\tilde{w}\left(N, \vec{v}, \{C_1^1, ..., C_1^{l_1}, ..., C_p^1, ..., C_p^{l_p}\}\right) = \sum_{k=1}^{p} \tilde{w}\left(C_k, \vec{v}|_{\mathscr{C}(C_k)}, \{C_k^1, ..., C_k^{l_k}\}\right).$$

对于“仅当”部分，我们先处理分裂情形。假设 $\tilde{w}(N, \vec{v}, \mathcal{P}') \geq \tilde{w}(N, \vec{v}, \mathcal{P})$，但对于某些 $k = 1, ..., p$，

$$\tilde{w}\left(C_k, \vec{v}|_{\mathscr{C}(C_k)}, \{C_k^1, ..., C_k^{l_k}\}\right) < \tilde{w}\left(C_k, \vec{v}|_{\mathscr{C}(C_k)}, \{C_k\}\right). \tag{B.5}$$

只有在存在一个 $k' \neq k$ with $l_{k'} \geq 2$ 时，这才是可能的。现在构造一个新的划分 $\mathcal{P}'' \equiv \mathcal{P}' \setminus \{C_k^1, ..., C_k^{l_k}\} \cup \{C_k\}$。注意， $\mathcal{P}''$仍然是 $\mathcal{P}$ 的分裂到邻居。利用（10），我们可以得出

$$\tilde{w}(N, \vec{v}, \mathcal{P}'') = \tilde{w}(N, \vec{v}, \mathcal{P}') - \tilde{w}\left(C_k, \vec{v}|_{\mathscr{C}(C_k)}, \{C_k^1, ..., C_k^{l_k}\}\right) + \tilde{w}\left(C_k, \vec{v}|_{\mathscr{C}(C_k)}, \{C_k\}\right),$$

根据 (B.5)，该值严格大于 $\tilde{w}(N, \vec{v}, \mathcal{P}')$。但这与假设$\mathcal{P}' \in \operatorname{argmax}_{\mathcal{P}'' \in \mathscr{I}(N, \mathcal{P})} \tilde{w}(N, \vec{v}, \mathcal{P}'')$ 相矛盾。因此，对每个$k = 1, \ldots\ldots p$，(B.5) 的反命题都成立。合并情形中的“仅当”部分也可以用类似方法处理。 ∎

根据事实 2，在 SAM 过程中，划分每次只能发生一次分裂或合并。不过需要注意，一次分裂式分裂或一次合并式合并未必只需一步。例如，一个联盟可能分裂成三个或更多子联盟，三个或更多联盟也可能合并为一个超级联盟。

参考文献

[1] Apt, K.R. 和 T. Radzik。2006年。《合作博弈中的稳定划分》。工作论文，阿姆斯特丹大学（荷兰）和弗罗茨瓦夫科技大学（波兰）。[2] Askoura, Y. 2011年。具有连续统参与者的标准式博弈的弱核。《数理经济学杂志》，**47**，第43–47页。[3] Aumann, R.J. 和 J.H. Dreze。1974年。具有联盟结构的合作博弈。《国际博弈理论杂志》，**3**，第217–237页。[4] Banerjee, S.、H. Konishi 和 T. Sonmez。2001年。简单联盟形成博弈中的核。《社会选择与福利》，**18**，第135–153页。[5] Bogomolnaia, A. 和 M.O. Jackson。2002年。享乐型联盟结构的稳定性。《博弈与经济行为》，**38**，第201–230页。[6] Bondareva, O.N. 1963年。线性规划方法在合作博弈理论中的若干应用。《控制论问题》，**10**，第119–139页。[7] Chander, P. 2014年。划分函数博弈的核概念。工作论文，金达尔政府与公共政策学院。

[8] Demange, G. 1994年. 中间偏好与稳定联盟结构. 《数理经济学杂志》, **23**, 第45-58页.[9] Grabisch, M. 和 Y. Funaki. 2012年. 分割函数形式博弈的联盟形成价值. 《欧洲运筹学杂志》, **221**, 第175-185页.[10] Greenberg, J. 和 S. Weber. 1993年. 具有一维备选方案集的稳定联盟结构. 《经济理论杂志》, **60**, 第62-82页.[11] Rahwan, T., S.P. Ramchurn, N.R. Jennings, 和 A. Giovannucci. 2009年. 最优联盟结构生成的随时算法. 《人工智能研究杂志》, **34**, 第521-567页.[12] Rahwan, T., T.P. Michalak, m. Woodbridge, 和 N.R. Jennings. 2015年. 联盟结构生成：综述. 《人工智能》, **229**, 第139-174页.[13] Ray, D. 和 R. Vohra. 1997年. 均衡约束性协议. 《经济理论杂志》, **73**, 第30-78页.[14] Sandholm, T., K. Larson, M. Anderson, O. Shehory, 和 F. Tohme. 1999年. 具有最坏情况保证的联盟结构生成.《人工智能》, **111**, 第209-238页.[15] Shapley, L.S. 1967年. 关于平衡集与核心. 《海军研究后勤季刊》,**14**, 第453–460页.[16] Sprumont, Y. 1990年. 具有可转移效用的合作博弈的人口单调分配方案. 《博弈与经济行为》. **2**, 第378-394页.[17] Thrall, R.M. 和 W. Lucas. 1963年. 分割函数形式的 N人博弈. 《海军研究后勤季刊》, **10**, 第281-298页.[18] Yi, S.-S. 1997年. 具有外部性的稳定联盟结构.《博弈与经济行为》, **20**, 第201-237页.