arXiv:2304.10652v1 [econ.TH] 20 Apr 2023

严格正联盟博弈的偏序及风险厌恶与合作之间的联系

Jian Yang

新泽西州纽瓦克市罗格斯大学商学院管理科学与信息系统系，
邮编 07102

2023年4月

摘要

我们研究具有严格正值的联盟博弈。这类博弈的个体理性分配有清晰的分数解释。包括长期存在的核心以及近期由 Yang [13]，提出的其他稳定性概念在内，许多概念都可以用这种分数模式重新表述。后一种模式允许对博弈进行某种排序，我们称之为“向心性”意义上的排序，并据此推导出博弈稳定解中一种清晰可描述的变化。当联盟的价值基于随机结果以及一个共同的正齐次奖励函数（该函数刻画参与者从其份额中获得的效用）时，上述联系有助于解释为何风险厌恶往往会促进合作。

关键词：联盟博弈；稳定性；偏序；风险厌恶；合作**JEL 分类号：**C71

1 引言

面对律师加入公司、手工作坊组成行会、国家结成联盟这些现象，人们不禁会想，或许这些合作背后的一个主要驱动力是规避风险的本能，而这种本能可能与人们平均而言追求更多利润的欲望一样原始。本研究的最终目的是在联盟博弈的形式化框架下，提供一些具体证据来支持这一推测。Yang和Li [12] 已经进行过这样的尝试。可能由于他们关注的是传统的核心概念，而其非空性附带诸多条件，因此所得结果不如预期般清晰。

Yang [13] 最近提出了一些稳定性概念，这些概念具有普适性，即所有博弈都存在被这些概念视为稳定的解；同时，它们也与核心的弱化形式相兼容，尽管并非直接与核心本身相兼容。其中一种弱化形式是弱核心。传统核心中的成员需要抵御那些有利于某些甚至仅一个子联盟的单边变更企图，而弱核心则要求成员只需抵御那些有利于所有参与方的破裂企图。这种一致阻挡原则被应用于一种弱稳定性概念 $\mathbb{S}^{-}$，该概念不仅涉及分配向量 $\vec{x}$（这在核心概念中早已如此），还涉及划分$\mathcal{P}$，即将大联盟 N 划分为若干组成联盟 C的方式。当然， $\mathcal{P}$ 不一定是完全合并划分 $\{N\}$，后者是传统上关注的中心。毕竟，任意博弈的“自然静止状态”可能在某种程度上呈现分散状态。

在此，我们利用这些稳定性概念，沿着Yang和Li [12]此前确立的同一研究方向继续推进。暂且不论技术细节，就连“更多合作”这一概念本身也经历了一般化。此前，它意味着核心的扩大，而核心本身并不总是非空的；如今，它意味着向稳定划分中“更加整合”的一端迈进。对于弱情形，稳定划分始终存在，并且在每一种此类划分下，稳定分配的可选范围都会扩大。在这一过程中，我们发现，将分配视为分数 f 而非绝对值 x更为方便。

当我们局限于满足 $|C| = 1$ 的严格正值博弈 $v(C)$ 时，这种分数视角才成立。虽然这对不少应用而言并非大碍，但我们仍希望未来的研究能够帮助消除各种正性限制。现在，针对稍加限制的博弈，我们提出一种称为“向心性”的偏序。按照该偏序排名较高的博弈，其比率 $v(C^2)/v(C^1)$ 会更高。

当 $C^1 \subseteq C^2$ 时；参见后文的图1。我们的逻辑脉络是

$$\text{Risk Aversion} \implies \text{Centripetality} \implies \text{Consolidation / Cooperation.} \tag{1}$$

不过，我们先推导（1）中的第二个联系。

当 Yang 的 [13] 分裂抗性和融合抗性概念以当前的分数模式重新表述时，向心性序将发挥明确的作用。在这里，一个解 $(\mathcal{P},\ f)$由一个划分 $\mathcal{P}$ 和一个分数分配 $f \equiv (f(i))_{i\in N}$ 组成，其中每个 C部分 $f|_C \equiv (f(i))_{i\in C}$都提供了一个分配方案，用于分配相应的价值 $v(C)$。分裂抗性分为强、中、弱三种。例如，若不存在任何分裂产物 $\mathcal{P}'$ 属于 $\mathcal{P}$，能使所有相关参与者都严格地更满意，那么给定的配对便是弱分裂抗性的。融合抗性可以对称地定义。后者无需加上“弱”或这三种形容词中的任何一种，是因为表面上听来对称的分裂与融合之间存在根本的不对称；我们稍后会对此作出解释。现在，弱核心中的一个成员 $\vec{x}^*$，若

以分数形式重新诠释为某个 f^*，可以理解为使 $(\{N\},\ f^*)$具有弱分裂抗性的成员。当然，任何 $(\{N\},\ f)$ 本身就具有融合抗性。

我们的主要结果定理1表明，当博弈沿向心性序上升时，给定的解（$\mathcal{P},\ \vec{f}$）将更“容易”具有弱类别和强类别的裂分抗性，而更“难以”具有融合抗性。由于对于给定博弈而言，更为分散的划分本来就更“容易”具有裂分抗性而非融合抗性，而更为整合的划分则更“容易”具有融合抗性而非裂分抗性，因此，更强向心性的总体影响是使稳定解变得“更加整合”；请参见后文的图2。对于已经是完全合并划分的 $\{N\}$而言，向心性的增强会使任一类别的核心更“可能”出现，并且在核心非空时，使其规模“更大”；参见推论1，其中讨论了这一点以及对称的、最为分散的情形。

我们将略去Yang的 [13] 中等类别，因为与弱类别和强类别不同，它似乎不会导出上述单调比较静态结果。在完成式（1）中的第二个联系之后，我们转向第一个联系。在这一部分中，假设每个联盟C 都与一个随机结果 $\Phi(C)$相关联，并且所有参与者都使用同一个正齐次奖励函数 R 来评估其从分配给自己的份额中获得的效用。于是，该联系可以针对两种情形建立。

在第一种情形中，每个 $\Phi(C)$ 都与 C-参与者各自输入之和确定成比例，这些输入独立同分布；此外，R 等于期望值减去某个 $\bar{r}$ 倍的标准差。参与者会变得更加厌恶风险】【。

当 $\bar{r}$ 增加时，风险厌恶程度也随之增加。在第二种情形中，随机结果 $\Phi(C)$通过其分位数函数来表示，这些分位数函数满足某些条件，反映出较大联盟的尾部相对较小； R 反映了条件风险价值的混合。当风险水平上的混合密度 $\bar{\mu}$ 以似然比意义递增时，参与者的风险厌恶程度会更高。对于这两种情形，我们证明了“风险厌恶会增强向心性”；参见命题1和命题2。随后，如式(1)所示，定理1和推论1将成为连接更高风险厌恶与更多合作的桥梁。

除Yang和Li [12], 之外，似乎没有多少其他研究尝试将联盟的形成归因于风险态度。一些研究确实将随机性引入合作博弈；例如，参见Charnes和Granot [2][3][4], 、Suijs等人 [10], 以及Suijs和Borm [9]。然而，据我们所知，这些研究并未涉及参与者风险态度的变化。由Wilson [11] 开启的关于信息不对称的文献也可能与此相关；例如，参见Allen和Yannelis [1], 、Forges、Minelli和Vohra [5], 以及Myerson [8]。我们当前的模型尚未涉及这样一种现象：不同参与者拥有关于某个影响价值的状态的不同信号。

我们希望未来的研究能够进一步完善（1）中的两条联系。一方面，如果能够去除价值严格为正的要求，将是理想的；另一方面，还可以考虑更一般、更广泛的风险厌恶情形。本文目前的结构如下。我们分四节建立第二条联系：第2节介绍分式形式；第3节在当前的分式框架下重新阐述Yang的 [13]稳定性概念；第4节详细介绍向心性序，并推导其关于合并与合作的主要结果；第5节研究进一步的含义。（1）中的第一条联系针对两种情形建立，我们分别在第6节和第7节中加以论述。最后，本文在第8节作结。

2 分式形式

我们考虑传统的可转移效用（TU）博弈 $(N, \vec{v})$，其中 N 是有限参与者集合，其非空子集（即联盟）构成集合 $\mathscr{C}(N)$；此外， $\vec{v} \equiv (v(C))^{C\in\mathscr{C}(N)}$ 表示联盟价值向量。这里唯一的限制是，每个 $v(\{i\})$ 都属于 $\Re_+$（正实数集合），并且每个 $v(C)$（对于 $|C| \geq 2$ ）都属于 $\Re_{++}$（严格正实数集合）。为方便起见，用 $\mathscr{V}_{++}(N)$ 表示所有严格正博弈构成的集合；基本上，它就是 $\prod_{i\in N} \Re_+ \times \prod_{C\in\mathscr{C}(N)\ |C|\geq 2} \Re_{++}$。

由于总能在不改变核心非空性等重要性质的情况下，将普通博弈转化为严格正博弈，因此大多数作者不会认为这一限制很苛刻。那么，我们来关注一个 $\vec{v} \in \mathscr{V}_{++}(N)$。通常，个体理性且有效的分配 $\vec{x} \equiv (x(i))_{i\in N}$ 应满足

$$x(i) \geq v(\{i\}) \text{ for every } i \in N \quad \text{and} \quad \sum_{i\in N} x(i) = v(N).$$

由于 $v(\{i\}) \geq 0$ 且 $v(N) > 0$ 当 $|N| \geq 2$ 时，对分配的另一种理解是某个正向量 $f \equiv (f(i))_{i\in N}$，其中 $\sum_{i\in N} f(i) = 1$；事实上，$f(i) = 1$ 当 $N = \{i\}$ 且 $f(i) = x(i)/v(N)$ 对每个 $i \in N$，当 $|N| \geq 2$ 时，将有助于实现这一转变。

因此，定义 t 由个体理性且有效的分数分配构成的集合 $\partial(N, \vec{v})$ 为

$$\begin{cases} \{1\} & \text{when } |N| = 1, \\ \left\{\vec{f} \equiv (f(i))_{i\in N} \in \prod_{i\in N}[v(\{i\})/v(N), 1] : \sum_{i\in N} f(i) = 1\right\} & \text{when } |N| \geq 2. \end{cases} \tag{2}$$

与 Yang [13], 类似，我们不仅关注大联盟，也更一般地关注基于划分的稳定解。令 $\mathscr{P}(N)$ 表示参与者 N 所能形成的划分集合。每个划分 $\mathcal{P} \in \mathscr{P}(N)$ 都具有 $\{C_1, ..., C_p\}$ 的形式，其中 C_k 是 $\mathscr{C}(N)$ 中互不重叠的成员，它们共同构成大联盟 N。令

$$\mathscr{F}(N, \vec{v}, \mathcal{P}) \equiv \prod_{C\in\mathcal{P}} \partial(C, \vec{v}|_{\mathscr{C}(C)}), \tag{3}$$

即该划分中满足可行性要求的分数分配方案集合：这些方案具有个体理性，且对于每个组成联盟 $C \in \mathcal{P}$，子方案 $\vec{f}|_C \equiv (f(i))_{i\in C}$ 对 C 是有效率的。在 (3) 中，每个 $(C, \vec{v}|_{\mathscr{C}(C)})$ 显然指由参与者集合 C 和收益向量 $\vec{v}|_{\mathscr{C}(C)} \equiv (v(C'))_{C'\in\mathscr{C}(C)}$ 组成的严格正子博弈。

注 $\mathscr{F}(N, \vec{v}, \{N\}) = \partial(N, \vec{v})$。对于至少全分裂划分 $\mathcal{P} \equiv \{\{i\} : i \in N\}$，式 (3) 的可行集 $\mathscr{F}(N, \vec{v}, \mathcal{P})$ 非空，因为它包含全一向量 $\vec{1}$。我们将以下集合视为博弈 $(N, \vec{v})$ 的解的可行集：

$$\mathscr{Q}(N, \vec{v}) \equiv \bigcup_{\mathcal{P}\in\mathscr{P}(N)} \{\mathcal{P}\} \times \mathscr{F}(N, \vec{v}, \mathcal{P}). \tag{4}$$

根据（2）至（4），当对于划分中的每个组成联盟 C，$\vec{f}$ 的 C 部分 $\vec{f}|_C \equiv (f(i))_{i\in C}$ 构成一个用于分配该联盟价值的个体理性方案时，划分—分配对 $(\mathcal{P}, \vec{f})$ 将被视为可行。注意 $(\mathcal{P}, \vec{1}) \in \mathscr{Q}(N, \vec{v})$，因此后者始终非空。

分数模式下的传统核心，可以理解为那些在某种意义上使划分—分配对 $(\{N\}, \vec{f})$ 稳定的向量$\vec{f}$，显然

$$\mathbb{F}^{+}(N,\vec{v}) \equiv \left\{ \vec{f} \in \partial(N,\vec{v}) :\ v(N) \cdot \sum_{i\in C} f(i) \geq v(C), \quad \forall C \in \mathscr{C}(N) \backslash \{N\} \right\}. \tag{5}$$

为方便起见，我们仍在 (5) 中加入一些不等式，尽管这些不等式已被 (2) 中的个人理性要求所涵盖，因而是冗余的。

3 划分—分配对的稳定性

（5）所体现的理念仍可能受到质疑。考虑 Yang [13] 中的一个例子。假设爱丽丝与鲍勃的婚姻不幸，他们的女儿卡萝尔夹在两人中间。按照旧有理念，只要爱丽丝和女儿此后过得明显更好，爱丽丝完全可以脱离当前联盟并带走卡萝尔，而无需考虑鲍勃的福祉。现实可能更为复杂。很可能，除非鲍勃的婚后生活也得到妥善保障，否则他会竭力阻止爱丽丝和卡萝尔离开。这促使我们放宽（5）的要求。

注意，它将 $\mathbb{F}^{+}(N,\vec{v})$ 等同于

$$\left\{ \vec{f} \in \partial(N,\vec{v}) :\ \forall C \in \mathcal{P} \text{ we have } v(N) \cdot \sum_{i\in C} f(i) \geq v(C),\ \ \forall \mathcal{P} \in \mathscr{P}(N) \backslash \{\{N\}\} \right\}. \tag{6}$$

根据（6），要使分数向量 $\vec{f}$ 在传统意义下稳定，就必须在所有联盟 C（或者等价地，在任意非 $\{N\}$ 划分中的所有组成联盟）中，抵御 $\vec{f}|_C \equiv (f(i))_{i\in C}$ 对 $v(C)$ 的抵抗。然而，基于爱丽丝、鲍勃和卡萝尔的故事，将（6）放宽为以下分数形式的弱核心，或称弱分数核心 $\mathbb{F}^{-}(N,\vec{v})$，或许更为合理：

$$\left\{ \vec{f} \in \partial(N,\vec{v}) :\ \exists C \in \mathcal{P} \text{ so that } v(N) \cdot \sum_{i\in C} f(i) \geq v(C),\ \ \forall \mathcal{P} \in \mathscr{P}(N) \backslash \{\{N\}\} \right\}. \tag{7}$$

根据（7），对于每个非$\{N\}$ 划分，只需在一个代表联盟中具有相同的抵抗力，f 便能在我们所说的弱意义上稳定。想想{鲍勃} 在这段并不幸福、但在现实生活中或许能够维持的婚姻中所发挥的稳定作用。

就两者都纵容自利的子联盟挟持其他所有人而言，(6)和(7)颇为相似。它们的区别仅在于指导原则：应该珍视一种“尚未获得时难以争取”的状态，还是一种

“一旦拥有便难以割舍”的稳定状态。根据(6)，任何一个现存的、担忧与他人共处时未来处境的参与者子联盟，都可能破坏各方合并为大联盟的进程；根据(7)，任何一个担忧独自一人时自身命运的参与者子联盟，都可能阻止已经形成的大联盟分裂。

根据 Yang [13], ，还存在一种合理的折中方案，即中间核心 $\mathbb{F}^0(N,\ \vec{v})$。由于它似乎不会产生与其弱对应形式和强对应形式相同的单调比较静态结果，因此我们在此不予介绍。现在，正如根据 (6) 和 (7) 可能预期的那样，确实可以证明：

$$\mathbb{F}^+(N,\vec{v}) \subsetneq \mathbb{F}^-(N,\vec{v}). \tag{8}$$

现在，让我们超越那些只关注大联盟的（$\{N\},\ \vec{f}$），其中 $\vec{f}$ 属于某个核心的情形，转而探讨一般的稳定解（$\mathcal{P},\ \vec{f}$），在这种情况下，$\mathcal{P}$ 绝不仅仅是 $\{N\}$。遵循（6）和（7）的思想，当一个解（$\mathcal{P},\ \vec{f}$）属于（4）的 $\mathscr{Q}(N,\ \vec{v})$ 时，若其在一定程度上具有分裂抗性，同时也具有融合抗性，我们便认为该解对于博弈（$N,\ \vec{v}$）具有一定程度的稳定性。

首先，令 $\mathscr{I}(N,\mathcal{P})$ 表示 $\mathcal{P}$ 的向下分裂邻域，其中每个成员 $\mathcal{P}'$ 都由 $\mathcal{P}$ 的组成联盟的子联盟构成。此外，令 $\mathscr{U}(N,\mathcal{P})$ 表示 $\mathcal{P}$ 的向上融合邻域，其中每个成员 $\mathcal{P}'$ 都由 $\mathcal{P}$ 的组成联盟的并集构成。例如，$\mathscr{I}(\{1,2,3\},\{\{1\},\{2,3\}\})$ 只包含一个成员，即全分裂划分$\mathcal{P} \equiv \{\{1\},\{2\},\{3\}\}$；与此同时，$\mathscr{U}(\{1,2,3\},\{\{1\},\{2,3\}\})$ 也只包含一个成员，即完全合并划分 $\{N\} \equiv \{\{1,2,3\}\}$。

由于有一点细微之处需要强调，我们先给出解 $(\mathcal{P},\vec{f}) \in \mathscr{Q}(N,\vec{v})$ 的弱分裂抗性。对于博弈 $(N,\vec{v})$，这意味着对任意 $\mathcal{P}' \in \mathscr{I}(N,\mathcal{P})$，

$$\exists C' \in \mathcal{P}'\backslash\mathcal{P} \quad \text{so that} \quad \sum_{C\in\mathcal{P} \text{ and } C\supsetneq C'} v(C)\cdot\sum_{i\in C'} f(i) \geq v(C'). \tag{9}$$

根据 (9)，任何进一步拆分弱抗分裂对 $(\mathcal{P},\ \vec{f})$ 的尝试，都应受到至少一个受影响的子联盟 C' 提出的异议。要求 $C' \notin \mathcal{P}$ 可确保存在的 C' 是严格意义上的子联盟。当 $\mathcal{P}$ 恰好为 $\{N\}$ 时，向下分裂邻域 $\mathscr{I}(N,\ \{N\})$ 中任意划分 $\mathcal{P}'$ 的一个组成联盟 C' 本身不会是 N。此时，要求 $C' \in \mathcal{P}'\backslash\{N\}$ 就与 $C' \in \mathcal{P}'$ 相同。这或许有助于我们看出，(7) 与 (9) 是一致的。

请注意，存在一个 o 只有一个联盟 C 同时满足 $C \in \mathcal{P}$ 和 $C \supsetneq C'$：即唯一的联盟

它严格包含 $C' \in \mathcal{P}' \setminus \mathcal{P}$。因此，(9) 完全可以表示为

$$\exists C' \subsetneq C \text{ so that } v(C) \cdot \sum_{i \in C'} f(i) \geq v(C'), \qquad \forall C \in \mathcal{P} \text{ with } |C| \geq 2. \tag{10}$$

根据当前定义中的（9），或者说仅依据（10），对于给定划分 $\mathcal{P}$中的任意组成部分 C，至少存在一个严格子联盟 C'，留在 C 中是有利的。

按照（6）的思路，当一个 $(\mathcal{P}, \vec{f}) \in \mathscr{Q}(N, v)$ 强抗分裂时，

$$\forall C' \subsetneq C \text{ we have } v(C) \cdot \sum_{i \in C'} f(i) \geq v(C'), \qquad \forall C \in \mathcal{P} \text{ with } |C| \geq 2. \tag{11}$$

分裂不仅会影响目标子联盟中的参与者，也会影响那些其参与可能被视为非自愿的参与者；与此同时，合并只涉及目标超联盟中的参与者。我们可以将传统核心理解为容忍分裂所造成附带损害的概念，而将弱核心理解为不容忍此类损害的概念。但对于合并而言，并不存在可称之为附带损害的情况。因此，让我们只考虑一种简单的融合抗性。

对于任何严格合并 $\mathcal{P}$ 的组成联盟的 C'，可能存在多个满足 $C \in \mathcal{P}$ 和 $C \subsetneq C'$ 的 C：正是它们的并集有助于形成 C'。因此，每个 $\rightarrow \sum_{i \in C} f(i) = 1$，这是由于 $(\mathcal{P}, f)$ 的可行性以及定义（2）至（4）。因此，我们可以将融合抗性表示为：对于任何 $\mathcal{P}' \in \mathscr{U}(N, \mathcal{P})$,

$$\forall C' \in \mathcal{P}' \setminus \mathcal{P} \quad \text{we have} \sum_{C \in \mathcal{P} \text{ and } C \subsetneq C'} v(C) \geq v(C'). \tag{12}$$

当前的 (12) 意味着，通过将给定划分 $\mathcal{P}$ 中的某些组成联盟 C 合并为任意一个严格超联盟 C'，C' 中没有任何参与者能够在不损害该超联盟中其他任何参与者利益的情况下，使自身严格受益。与两种分裂抗性不同，融合抗性是一种完全由 $\mathcal{P}$ 决定的性质。

4 向心性偏序

由于当前分式形式与传统形式并无实质性差异，我们可以沿用 Yang [13] 中的许多概念。然而，最终有助于我们在严格正博弈之间建立有意义偏序关系的，正是这种新形式。

对于任意 $v \in \mathscr{V}_{++}(N)$，将 (4) 的 $\mathbb{Qi}^{\pm}(N, \vec{v}) \subset \mathscr{Q}(N, \vec{v})$ 定义为满足 (10) 或 (11) 所述抗分裂意义的解 $(\mathcal{P}, \vec{f})$ 的集合。根据这些定义，解 $(\mathcal{P}, f)$ 的稳定性等同于其属于

$$\mathbb{S}^{\pm}(N, \vec{v}) \equiv \mathbb{Q}^{\mathrm{i}\pm}(N, \vec{v}) \cap \mathbb{Q}^{\mathrm{u}}(N, \vec{v}). \tag{13}$$

此外，将 $\mathbb{Qu}(N,\vec{v}) \subset \mathscr{Q}(N,\vec{v})$ 定义为满足 (12) 所述抗合并意义的解 $(\mathcal{P},\vec{f})$ 的集合。后者的 $\vec{f}$-独立性意味着存在某个 $\mathbb{Pu}(N,\vec{v})$，使得

$$\mathbb{Q}^{\mathrm{u}}(N,\vec{v}) = \bigcup_{\mathcal{P}\in\mathbb{P}^{\mathrm{u}}(N,\vec{v})} \{\mathcal{P}\} \times \mathscr{F}(N,\vec{v},\mathcal{P}). \tag{14}$$

式（2）至（4）附近的定义以及式（10）至（12）附近的定义，促使我们在严格正博弈之间引入一种偏序。给定 $\vec{v}^1$，$\vec{v}^2 \in \mathscr{V}_{++}(N)$，当 $\vec{v}^1$ 比 $\tilde{v}^2$的向心性弱时，我们记作 $\vec{v}^1 \leq_{\mathrm{cp}} \vec{v}^2$ 或 $\vec{v}^2 \geq_{\mathrm{cp}} \vec{v}^1$，其中

$$\frac{v^1(C^2)}{v^1(C^1)} \leq \frac{v^2(C^2)}{v^2(C^1)}, \qquad \forall C^1, C^2 \in \mathscr{C}(N) \text{ with } C^1 \subseteq C^2. \tag{15}$$

我们可以约定式（15）满足 $0/0 = 1$, $a/0 = +\infty$ 对 $a > 0$成立，而 $+\infty = +\infty$则用于容纳 $|C^i| = 1$ 和 $v^j(C^i) = 0$ 对 i，$j = 1$，2 的可能性。图1展示了这一向心性序。

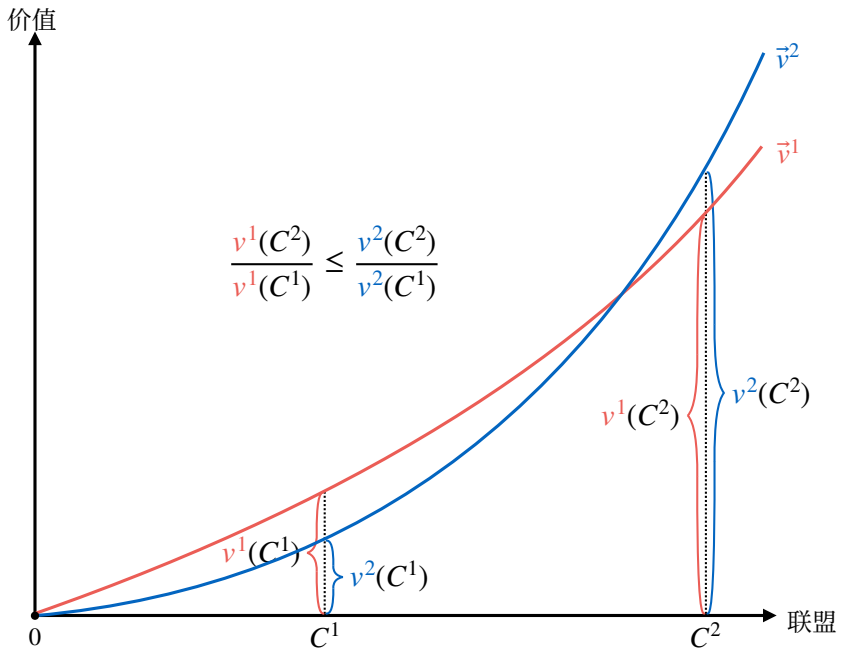

图1：向心性序示意图

从图1可以看出，$\vec{v}^1 \leq_{\mathrm{cp}} \vec{v}^2$ 反映了 $\vec{v}^1$对较小集合的偏好增强，以及$\tilde{v}^2$对较大集合的偏好增强。如果确实如此，我们就应预期一个解

对 $(\mathcal{P},\ \vec{f})$ 在 $\vec{v}^1$ 下具有抗分裂性，在 $\tilde{v}^2$ 下也应保持这种性质；对称地，一个在 $\vec{v}^2$ 下具有抗合并性的解对 $(\mathcal{P},\ \vec{f})$，在 $\vec{v}^1$下也应保持这种性质。

Yang和Li [12] 也定义了一个同名的向心性。在那项以核心为中心的研究中，它指的是较弱的版本，即 $C^2 = N$。它的含义也要有限得多。除了局限于传统核心之外，它也未能像本文这样清晰地引出式（1）的第二个联系。从Yang和Li[12], 的定理3或许可以看出，其中的向心性与风险厌恶的一种特殊版本密切交织。相比之下，得益于Yang [13]近期取得的进展，我们关于当前版本向心性的主张将会清晰明了。

定理1 假设 $\vec{v}^1, \vec{v}^2 \in \mathscr{V}_{++}(N)$ 按照式 *(15)* 的意义满足 $\vec{v}^1 \leq_{cp} \vec{v}^2$。那么，

$$\partial(N, \vec{v}^1) \subseteq \partial(N, \vec{v}^2);$$

$$\mathscr{F}(N, \vec{v}^1, \mathcal{P}) \subseteq \mathscr{F}(N, \vec{v}^2, \mathcal{P}), \qquad \forall \mathcal{P} \in \mathscr{P}(N);$$

$$\mathscr{Q}(N, \vec{v}^1) \subseteq \mathscr{Q}(N, \vec{v}^2);$$

$$\mathbb{Q}^{i\pm}(N, \vec{v}^1) \subseteq \mathbb{Q}^{i\pm}(N, \vec{v}^2);$$

$$\mathbb{P}^{u}(N, \vec{v}^1) \supseteq \mathbb{P}^{u}(N, \vec{v}^2).$$

定理1的证明： 对于第一个断言，假设 $\vec{f} \in \partial(N,\ \vec{v}^1)$。由 (2)，当 $|N| = 1$ 时，我们有 $\vec{f} = 1 \in \partial(N,\ \vec{v}^2)$。当 $|N| \geq 2$ 时，我们必有 $\sum_{i\in N} f(i) = 1$，并且每个 $f(i) \geq v^1(\{i\})/v^1(N)$。但根据 (15)，后者高于 $v^2(\{i\})/v^2(N)$。因此，每个 $f(i) \geq v^2(\{i\})/v^2(N)$ 也成立。所以，$\vec{f} \in \partial(N,\ \vec{v}^2)$。这与 (3) 一起将推出第二个断言，而第二个断言与 (4) 一起将导出第三个断言。

对于第四个断言，我们首先假设 $(\mathcal{P}, \vec{f}) \in \mathbb{Q}i\text{-}(N, \vec{v}^1)$。根据 (10)，这意味着对于任意 $C^2 \in \mathcal{P}$ 满足 $|C^2| \geq 2$，都存在 $C^1 \subsetneq C^2$ 使得

$$v^1(C^1) \leq v^1(C^2) \cdot \sum_{i\in C^1} f(i). \tag{16}$$

由于（15）成立，（16）将意味着

$$v^2(C^1) \leq v^1(C^1) \cdot \frac{v^2(C^2)}{v^1(C^2)} \leq v^1(C^2) \cdot \sum_{i\in C^1} f(i) \cdot \frac{v^2(C^2)}{v^1(C^2)} = v^2(C^2) \cdot \sum_{i\in C^1} f(i). \tag{17}$$

但对于任意给定的 C^2，存在一个如 C^1 所指定的量以维持式 (17)，这恰好意味着 $(\mathcal{P}, \vec{f}) \in \mathbb{Q}i\text{-}(N,\ \vec{v}^2)$。注意，$\sum_{i\in C^1} f(i) > 0$ 可以推导出来，但在此并非必要。我们

至此，我们已完成弱裂变情形下的推导。鉴于式 (10) 与式 (11) 之间的相似性，强裂变情形也可以采用类似的方法处理。

对于关于 $\mathbb{P}\mathrm{u}(N,\ \cdot)$ 包含关系的最后一个论断，假设 $\mathcal{P}\in\mathbb{P}\mathrm{u}(N,\ \vec{v}^{2})$ 满足式（14）。根据式（12），这意味着

$$v^{2}(C^{2})\leq\sum_{C^{1}\in\mathcal{P}\text{ and }C^{1}\cap C^{2}\neq\emptyset}v^{2}(C^{1}),\tag{18}$$

对于任意 $\mathcal{P}'\in\mathscr{U}(N,\mathcal{P})$ 和 $C^{2}\in\mathcal{P}'\backslash\mathcal{P}$，将 (15) 应用于 (18) 将得到

$$\begin{aligned}v^{1}(C^{2})&=v^{2}(C^{2})\cdot[v^{1}(C^{2})/v^{2}(C^{2})]\\&\leq\textstyle\sum_{C^{1}\in\mathcal{P}\text{ and }C^{1}\cap C^{2}\neq\emptyset}v^{2}(C^{1})\cdot[v^{1}(C^{2})/v^{2}(C^{2})]\leq\sum_{C^{1}\in\mathcal{P}\text{ and }C^{1}\cap C^{2}\neq\emptyset}v^{1}(C^{1}).\end{aligned}\tag{19}$$

但是，对于任意的 $\mathcal{P}'\in\mathscr{U}(N,\ \mathcal{P})$ 和 $C^{2}\in\mathcal{P}'\backslash\mathcal{P}$，(19) 确切地意味着 $\mathcal{P}\in\mathbb{P}\mathrm{u}(N,\ \vec{v}^{1})$。 ∎

在 Yang [13], 中，存在一个建立在中度核心概念$\mathbb{F}^{0}$之上的中度稳定性概念 $\mathbb{S}^{0}$ 。弱稳定性 $\mathbb{S}^{-}$ 的普适性是通过 $\mathbb{S}^{0}$的普适性实现的。然而，这一中度概念似乎并不具备定理1所揭示的单调比较静态结果，这仅仅是因为 $a_{1}/b_{1}\leq a_{2}/b_{2}$ 和 $c_{1}/d_{1}\leq c_{2}/d_{2}$ 并不必然导出 $(a_{1}+c_{1})\ /\ (b_{1}+d_{1})\ \leq\ (a_{2}+c_{2})\ /\ (b_{2}+d_{2})$；例如，$1/1<8/7$ 和 $2/1<5/2$; 然而，$(1+2)\ /\ (1+1)\ =3/2>13/9=\ (8+5)\ /\ (7+2)$。

需要回顾的是，在对分配的理解中，从绝对形式到分数形式的转换，对于考察某一特定博弈的稳定性而言，可以被视为非必要的。然而，在比较不同博弈时，从定理1的证明中可以看出，这种转换对于得出明确的单调性结论而言是相当不可或缺的。

关于该定理本身，还可以说得更多。

5 主要结果的进一步推论

为了进一步理解定理1的推论，我们概述一下 Yang 关于围绕 (10) 到 (12) 的稳定性的主要结果 [13] 。

Fo对于一个划分 $\mathcal{P}\in\mathscr{P}(N)$，令修补后的分数核心 $\mathbb{F}\mathrm{i}^{\pm}(N,\ \vec{v},\ \mathcal{P})$ b e

$$\prod_{C\in\mathcal{P}}\mathbb{F}^{\pm}(C,\vec{v}|_{\mathscr{C}(C)})\equiv\left\{\vec{f}\in\mathscr{F}(N,\vec{v},\mathcal{P}):\ \vec{f}|_{C}\in\mathbb{F}^{\pm}(C,\vec{v}|_{\mathscr{C}(C)}),\ \forall C\in\mathcal{P}\right\},\tag{20}$$

其中，每个 $\mathbb{F}^{\pm}(C,\ \vec{v}|_{\mathscr{C}\ (N)})$ 都是在（6）或（7）中定义的相应子博弈（$C,\ \vec{v}|_{\mathscr{C}(N)}$）的分数核心。接着，定义

$$\mathbb{P}^{\mathrm{i}\pm}(N,\vec{v})\equiv\left\{\mathcal{P}\in\mathscr{P}(N):\ \mathbb{F}^{\mathrm{i}\pm}(N,\vec{v},\mathcal{P})\neq\emptyset\right\}.\tag{21}$$

Yang [13]证明了

$$\mathbb{Q}^{\mathrm{i}\pm}(N,\vec{v}) = \bigcup_{\mathcal{P}\in\mathbb{P}^{\mathrm{i}\pm}(N,\vec{v})} \{\mathcal{P}\}\times\mathbb{F}^{\mathrm{i}\pm}(N,\vec{v},\mathcal{P}). \tag{22}$$

此外，为 (14) 定义的 $\mathcal{P}$-集也满足

$$\mathbb{P}^{\mathrm{u}}(N,\vec{v}) = \{\mathcal{P}\in\mathscr{P}(N):\ \tilde{w}(N,\vec{v},\mathcal{P})\geq\tilde{w}(N,\vec{v},\mathcal{P}'),\ \forall\mathcal{P}'\in\mathscr{U}(N,\mathcal{P})\}. \tag{23}$$

结合 (13)、(14) 和 (22)，可得

$$\mathbb{S}^{\pm}(N,\vec{v}) = \bigcup_{\mathcal{P}\in\mathbb{P}^{\mathrm{i}\pm}(N,\vec{v})\cap\mathbb{P}^{\mathrm{u}}(N,\vec{v})} \{\mathcal{P}\}\times\mathbb{F}^{\mathrm{i}\pm}(N,\vec{v},\mathcal{P}). \tag{24}$$

由 (8) 和 (20) 可推得

$$\mathbb{F}^{\mathrm{i}+}(N,\vec{v},\mathcal{P})\subseteq\mathbb{F}^{\mathrm{i}-}(N,\vec{v},\mathcal{P}). \tag{25}$$

将 (25) 代入 (21)，不难看出

$$\mathbb{P}^{\mathrm{i}+}(N,\vec{v})\subseteq\mathbb{P}^{\mathrm{i}-}(N,\vec{v}). \tag{26}$$

根据 (24) 至 (26)，我们必然有以下关系：

$$\mathbb{S}^{+}(N,\vec{v})\subseteq\mathbb{S}^{-}(N,\vec{v}). \tag{27}$$

由于中间概念 $\mathbb{S}^{0}$ 已具有普遍性，由 (27) 可得

$$\mathbb{S}^{-}(N,\vec{v})\neq\emptyset, \qquad \forall\vec{v}\in\mathscr{V}_{++}(N). \tag{28}$$

另一方面，很容易证明，基于核心的强稳定性 $\mathbb{S}^{+}$ 并非普遍成立。此外，还有以下兼容性：

$$\begin{aligned}\mathbb{S}^{\pm}(N,\vec{v})\cap[\{\{N\}\}\times\partial(N,\vec{v})] &= \mathbb{Q}^{\mathrm{i}\pm}(N,\vec{v})\cap[\{\{N\}\}\times\partial(N,\vec{v})]\\ &= \{\{N\}\}\times\mathbb{F}^{\pm}(N,\vec{v}).\end{aligned} \tag{29}$$

现在我们重新考察第4节中关于变更 $\vec{v}$的比较静态分析。设$\vec{v}^{1}\leq_{\mathrm{cp}}\vec{v}^{2}$如式（15）所定义。那么，根据（21）和（22），我们可以从定理1得出

$$\mathbb{P}^{\mathrm{i}\pm}(N,\vec{v}^{1})\subseteq\mathbb{P}^{\mathrm{i}\pm}(N,\vec{v}^{2}); \tag{30}$$

此外，对于任意的 $\mathcal{P}\in\mathbb{P}^{\mathrm{i}\pm}(N,\vec{v}^{1})\subseteq\mathbb{P}^{\mathrm{i}\pm}(N,\vec{v}^{2})$,

$$\mathbb{F}^{\mathrm{i}\pm}(N,\vec{v}^{1},\mathcal{P})\subseteq\mathbb{F}^{\mathrm{i}\pm}(N,\vec{v}^{2},\mathcal{P}). \tag{31}$$

由于当 $\mathcal{P}'$ 本身位于 $\mathcal{P}$ 的向下分裂邻域中时， $\mathscr{I}(N,\mathcal{P}') \subset \mathscr{I}(N,\mathcal{P})$，因此，(10) 到 (11) 会使“更加分散”的划分更容易具有分裂抵抗性；此外，(12) 会使“更加集中的”划分更容易具有合并抵抗性。

当 $\mathcal{P}$ 恰好是完全合并划分 $\{N\}$时，(31)将传达 $\mathbb{F}^{\pm}(N,\ \vec{v}^1) \subseteq \mathbb{F}^{\pm}(N,\ \vec{v}^2)$所表达的“更多合作”这一信息。 $+$情形则体现了Yang和Li以核心为中心的主题，即 $\mathbb{F}^{+}(N,\ \vec{v}^1) \subseteq \mathbb{F}^{+}(N,\ \vec{v}^2)$。结合(30)，我们当前的论述具有更一般的意义，还涉及向划分中“更加整合”的一端转移。将这些初步理解与定理1结合起来，我们便可以得到图2所描绘的两个博弈下各类实体的关系，这两个博弈按照向心方向排列。

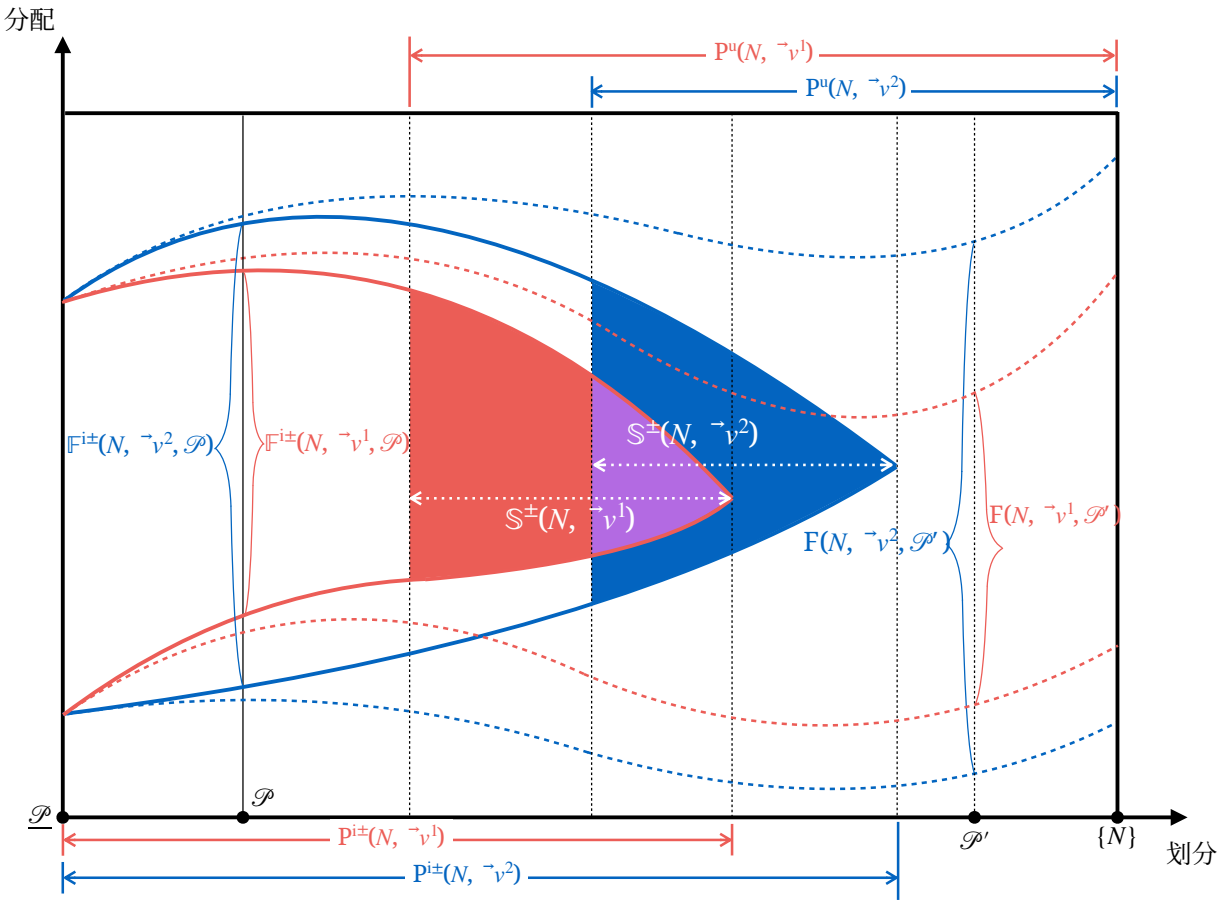

图2　　：两个有序博弈下各类实体的示意图

我们意识到，对于全分裂划分 $\mathcal{P}$，要么 $\mathscr{F}(N,\vec{v}^i,\mathcal{P})$ 恰有一个成员 $\vec{1}$；此外，对于某些划分 $\mathcal{P}$， $\mathscr{F}(N,\vec{v}^i,\mathcal{P})$ 可能为空。而且，划-

划分绝非完全有序，集合 $\mathbb{P}\mathrm{i}^{\pm}(N,\vec{v}^{\prime})$和 $\mathbb{P}\mathrm{u}(N,\vec{v}^{\prime})$也不一定是连通的。我们还画出了 $\mathbb{S}^{\pm}(N,\vec{v}^{\prime})$非空的一种情况。强概念 $\mathbb{S}^{+}$可能并非如此。尽管如此，图2反映了定理1以及式(30)和(31)。从图中可以看出，当底层博弈变得更趋心力时，稳定解往往会“更加稳固”。

在一个极端情况下，当 $\mathbb{Q}\mathrm{i}^{\pm}(N,\vec{v}^{1})$ 延伸至“最右侧”的角落时，就会出现 $\vec{f}\in\mathbb{F}^{\pm}(N,\vec{v}^{1})$；后者当然会被范围更广的 $\mathbb{Q}\mathrm{i}^{\pm}(N,\vec{v}^{2})$ 所涵盖，同时也会自动被任何 $\mathbb{Q}\mathrm{u}(N,\vec{v}^{2})$ 所涵盖。因此，$\vec{f}\in\mathbb{F}^{*}(N,\vec{v}^{2})$ 也同样如此。在对称但鲜少被探讨的另一端，我们还可以从图中看出，由全分裂划分$\mathcal{P}$ 和全一向量 $\vec{1}$ 组成的这一对，是 $\mathscr{F}(N,\vec{v},\mathcal{P})$ 的唯一成员；当$(N,\vec{v}^{2})$ 稳定时，它对于$(N,\vec{v}^{1})$ 也会是稳定的。更严格地说，这两个观察结果都可以借助定理1加以验证。

推论1 假设 $\vec{v}^{1},\vec{v}^{2}\in\mathscr{V}_{++}(N)$ 满足（*15*）意义下的 $\vec{v}^{1}\leq_{cp}\vec{v}^{2}$，那么，

$$\mathbb{F}^{\pm}(N,\vec{v}^{1})\subseteq\mathbb{F}^{\pm}(N,\vec{v}^{2});$$

$$(\underline{\mathcal{P}},\vec{1})\in\mathbb{S}^{\pm}(N,\vec{v}^{2})\quad\Longrightarrow\quad(\underline{\mathcal{P}},\vec{1})\in\mathbb{S}^{\pm}(N,\vec{v}^{1}).$$

推论1的证明：假设 $\vec{f}\in\mathbb{F}^{\pm}(N,\ \vec{v}^{1})$。根据（29），这等价于

$$\mathbb{Q}^{\mathrm{i}\pm}(N,\vec{v}^{1})\cap\left[\{\{N\}\}\times\partial(N,\vec{v}^{1})\right]=\{\{N\}\}\times\mathbb{F}^{\pm}(N,\vec{v}^{1})\ni(\{N\},\vec{f}).\tag{32}$$

现在，定理1指出，$\partial(N,\ \vec{v}^{1})\subseteq\partial(N,\ \vec{v}^{2})$，且 $\mathbb{Q}\mathrm{i}^{\pm}(N,\ \vec{v}^{1})\subseteq\mathbb{Q}\mathrm{i}^{\pm}(N,\ \vec{v}^{2})$。因此，上述式（32）等价于

$$\{\{N\}\}\times\mathbb{F}^{\pm}(N,\vec{v}^{2})=\mathbb{Q}^{\mathrm{i}\pm}(N,\vec{v}^{2})\cap\left[\{\{N\}\}\times\partial(N,\vec{v}^{2})\right]\ni(\{N\},\vec{f}).\tag{33}$$

因此，$f\in\mathbb{F}^{\pm}(N,\ \vec{v}^{2})$ 也成立。

接下来，假设 $(\underline{\mathcal{P}},\vec{1})\in\mathbb{S}^{\pm}(N,\vec{v}^{2})$。根据 (10) 到 (11)，已经可以确定的是

$$(\underline{\mathcal{P}},\vec{1})\in\mathbb{Q}^{\mathrm{i}\pm}(N,\vec{v}^{1})\cap\mathbb{Q}^{\mathrm{i}\pm}(N,\vec{v}^{2})\tag{34}$$

鉴于 (13)、(14) 和 (34)，

$$\underline{\mathcal{P}}\in\mathbb{P}^{\mathrm{u}}(N,\vec{v}^{2}).\tag{35}$$

由于定理1指出 $\mathbb{P}\mathrm{u}(N,\vec{v}^{2})\subseteq\mathbb{P}\mathrm{u}(N,\vec{v}^{1})$，因此 (35) 将意味着

$$\underline{\mathcal{P}}\in\mathbb{P}^{\mathrm{u}}(N,\vec{v}^{1}).\tag{36}$$

根据 (13)、(14) 和 (34)，上述 (36) 相当于 $(\mathcal{P},\ \vec{1}) \in \mathbb{S}^{\pm}(\underline{N},\ \vec{v}^{1})$。 ∎

借助定理1和推论1，我们由此完成了(1)中的第二个联系，即从“向心性”到“联合／合作”。

6 从风险厌恶到后续内容

对于式 (1) 第二个关联的应用，设存在一个概率空间 $(\Omega\ \mathscr{G}, p)$。对于定义在该空间上的任意随机变量 Y，记$\int_{\Omega} Y(\omega)\cdot p(d\omega)$为 $\mathbb{E}[Y]$。此外，设 $\mathbb{L}^2$ 为满足 $\mathbb{E}[|Y|^2] < +\infty$ 的随机变量 Y 所构成的空间。假设每个联盟 C 都与一个随机结果 $\Phi(C) \in \mathbb{L}^2$相关联。此外，假设所有参与者共享一个奖励函数$\tilde{R} : \mathbb{L}^2 \to \Re_{++}$，该函数具有正齐次性，即

$$\tilde{R}(f \cdot Y) = f \cdot \tilde{R}(Y), \qquad \forall f \geq 0,\ Y \in \mathbb{L}^2. \tag{37}$$

对于一个联盟 C，每个 $\vec{f} \equiv (f(i))_{i\in C}$ 都构成一种分配方案，用于分配联盟的收益，而该方案是在收益实际实现之前就已达成一致的。注意，在联盟 $C \ni i$ 中，无论采用何种份额 $f(i)$，玩家 i 的收益均为 $R(f(i)\cdot\Phi(C))$，根据（37），这仅仅是 $f(i)\cdot R(\Phi(C))$。那么，我们现在可以将当前情形理解为一个联盟博弈 $(N, \vec{v})$，其中 $\vec{v} \equiv (v(C))^{C\in\mathscr{C}(N)}$ 满足

$$v(C) \equiv \tilde{R}(\Phi(C)), \qquad \forall C \in \mathscr{C}(N). \tag{38}$$

对于两个特殊情形，我们可以将定理1和推论1应用于博弈（$N, \vec{v}$）。

在第一种情况下，我们假设参与者 $i \in N$ 拥有相互独立且同分布的输入 $\Theta(i) \in \mathbb{L}^2$，其共同均值为 $\bar{\mu} \equiv \mathbb{E}[\Theta(i)] > 0$，共同标准差为 $\bar{\sigma} \equiv \sqrt{\mathbb{E}[\Theta(i)^2] - (\mathbb{E}[\Theta(i)])^2} > 0$。每个联盟 $C \in \mathscr{C}(N)$ 也与某个 ~~$\phi(C) \in \Re_{++}$~~ 相关联，因此

$$\Phi(C) \equiv \phi(C) \cdot \sum_{i\in C} \Theta(i). \tag{39}$$

当所有 $\phi(\{i\})$ 都等于一时，我们可以将式（39）中的每个 $\phi(C)$ 理解为对所有参与者个人贡献总效应的某种放大器。当$\phi(C) > 1$ 这通常可能发生在 C 不太大时，可以说，参与者通过联合组成 C，能够取得超出各自贡献总和的成果，这归因于

某些协同效应；当 $\phi(C) < 1$ 这可能发生在 C 过大时，内部摩擦或组织复杂性最终可能会抵消任何规模经济。

在某些 $\bar{r} \in [0, \bar{\mu}/\bar{\sigma}$ 下，我们假设奖励 R 满足

$$\tilde{R}(Y) \equiv \mathbb{E}[Y] - \bar{r} \cdot \sqrt{\mathbb{E}[Y^2] - (\mathbb{E}[Y])^2}, \qquad \forall Y \in \mathbb{L}^2. \tag{40}$$

对于任意参数 $\bar{r}^k$ （ $k = 1$，2），我们用 $\tilde{R}^k$ 表示由（40）得出的奖励函数，再用 $\vec{v}^k$ 表示由（38）和（39）得出的价值向量。

命题 1 对于通过（*38*）至（*40*）定义的博弈 （N， $\vec{v}^k$），其中 $k = 1$，2，当 $\bar{r}^1 \leq \bar{r}^2$ 时，我们有（*15*）。

命题 1 的证明： 根据（38）至（40）的描述，

$$v^k(C) = |C| \cdot \bar{\mu} - \bar{r}^k \cdot \sqrt{|C|} \cdot \bar{\sigma}, \qquad \forall C \in \mathscr{C}(N),\ k = 1, 2. \tag{41}$$

对于 C^1， $C^2 \in \mathscr{C}(N)$，且 $C^1 \subseteq C^2$，我们有 $|C^2| \geq |C^1| \geq 1$。但结合 $0 \leq \bar{r}^1 \leq \bar{r}^2 < \bar{\mu}/\bar{\sigma}$ 这一事实，就会得到

$$\frac{|C^2| \cdot \bar{\mu} - \bar{r}^1 \cdot \sqrt{|C^2|} \cdot \bar{\sigma}}{|C^1| \cdot \bar{\mu} - \bar{r}^1 \cdot \sqrt{|C^1|} \cdot \bar{\sigma}} \leq \frac{|C^2| \cdot \bar{\mu} - \bar{r}^2 \cdot \sqrt{|C^2|} \cdot \bar{\sigma}}{|C^1| \cdot \bar{\mu} - \bar{r}^2 \cdot \sqrt{|C^1|} \cdot \bar{\sigma}}. \tag{42}$$

鉴于（41），上述（42）实际上就是（15）。 ∎

将定理1、推论1和命题1结合起来，我们当然会得出“厌恶风险促进合作”这一结论。

我们在（40）中的奖励函数确实是分布不变的。与其使用 $\Phi(C)$，我们不妨使用 $k(C)$ 来刻画联盟，其中每个 $k(C)$ 都是相应 $\Phi(C)$ 的累积分布函数的逆函数：

$$\tilde{k}(C, \alpha) \equiv \inf\{\phi \in \Re :\ p(\Phi(C) \leq \phi) \geq \alpha\}, \qquad \forall \alpha \in [0, 1].$$

令 $\mathscr{K}$ 表示所有此类分位数函数构成的空间。我们可以将奖励函数视为某个 $\tilde{r}$: $\mathscr{K} \to \Re_{++}$，而不是 $\tilde{R} : \mathbb{L}^2 \to \Re_{++}$。那么，我们可以采用以下形式来替代 (38)：

$$v(C) \equiv \tilde{r}(\tilde{k}(C)), \qquad \forall C \in \mathscr{C}(N). \tag{43}$$

尽管对于上述情形而言并没有太大帮助，但我们发现，式（43）对于另一种涉及不同结果和奖励构成的情形更为有用。

7 另一个分布不变性定律

~ ~在此，我们假设每个 $k(C,\ \cdot)$ 都是连续的，并且只要$\alpha > 0$, 每个 $k(C,\ \alpha)$ 都严格为正。对于整个结果分位数向量 $(\tilde{k}(C))_{C\in\mathscr{C}(N)} \in \mathscr{K}^{\mathscr{C}\ (N)}$，我们假设

$$\frac{\tilde{k}(C^2,\alpha^2)}{\tilde{k}(C^1,\alpha^2)} \leq \frac{\tilde{k}(C^2,\alpha^1)}{\tilde{k}(C^1,\alpha^1)}, \qquad \forall C^1, C^2 \in \mathscr{C}(N) \text{ with } C^1 \subseteq C^2 \text{ and } 0 < \alpha^1 \leq \alpha^2 < 1. \quad (44)$$

根据（44），与较小联盟 C^1 相比，较大联盟 C^2 的 α 分位数会相对较高，因为随着 α 变小（例如从 10% 降至 1% ）；参见图 3 中的示例。

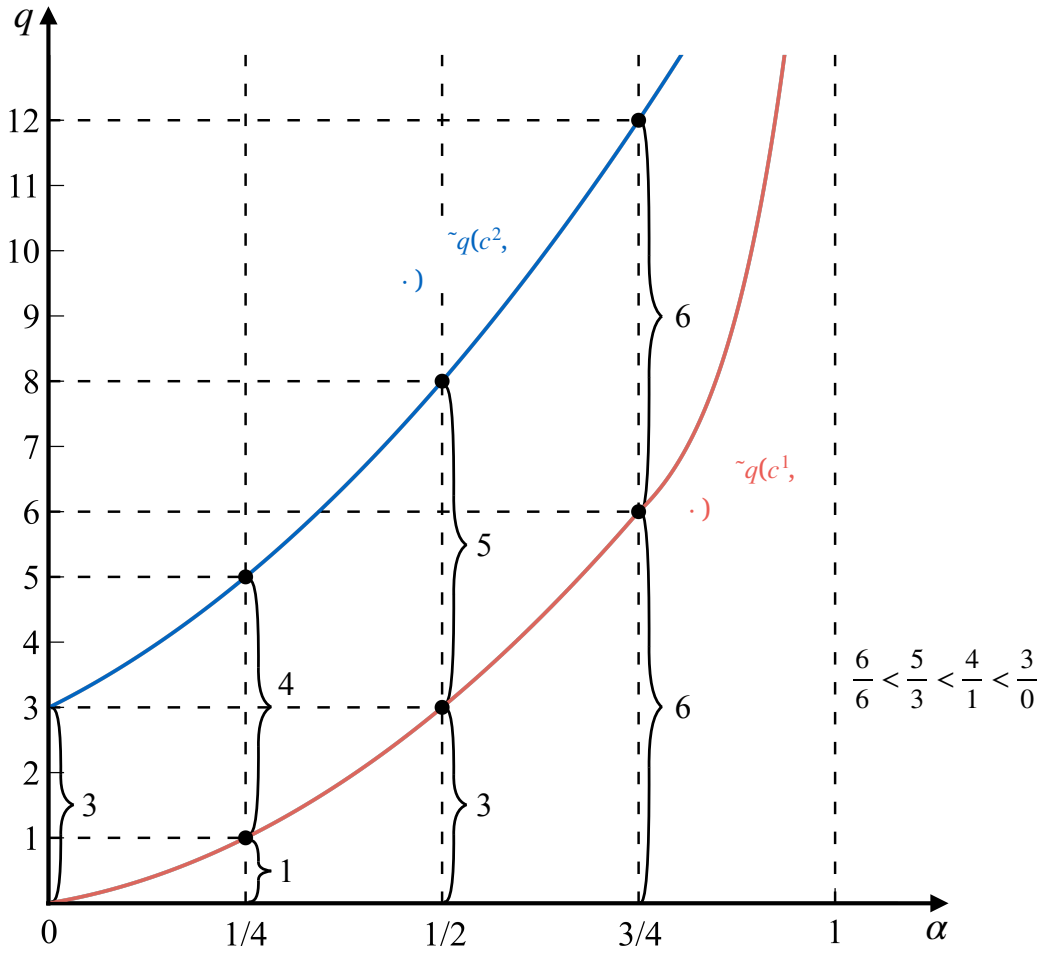

图 3：分位数函数示例

从图 3 可以清楚看出，式 (44) 是一种表述方式，说明较大的联盟所包含的下行风险相对较小。例如，当 $\Phi(C)$ 均匀分布于某个

$\underline{\phi}(|C|) > 0$ 和某个高于 $\phi(|C|)$ 的 $\phi(|C|)$ 之间时，我们会得到

$$\tilde{k}(C,\alpha) = (1-\alpha)\cdot \underline{\phi}(|C|) + \alpha \cdot \overline{\phi}(|C|).$$

那么，(44)将意味着 $\phi(s)/\phi(s)$随着联盟规模 $\overline{s} = 1, 2, \ldots$的增加而减少。这仅仅意味着，随着联盟 C 的扩大，其随机结果 $\Phi(C)$从相对意义上来说会变得“更加不分散”，这一点可由收缩的$\phi(|C|)/\phi(|C|)$来刻画。与之前的独立输入情形非常相似，只是表达方式不同，这在某种程度上反映了更大联盟让其参与者的极端情况彼此抵消的能力有所增强。

对于在 (43) 中使用的奖励函数 $\tilde{r}$，我们令其由 $[0,1]$ 上连续且严格为正的概率密度函数 $\bar{\mu}$ 参数化，使得

$$\tilde{r}(k) \equiv \int_0^1 \bar{a}(k,\alpha)\cdot\bar{\mu}(\alpha)\cdot d\alpha, \qquad \forall k \in \mathscr{K}, \tag{45}$$

其中，$\bar{a}(\cdot,\alpha)$ 是按如下方式定义的 α 水平条件风险价值】【。

$$\bar{a}(k,\alpha) \equiv \frac{1}{1-\alpha}\cdot\int_0^{1-\alpha} k(\beta)\cdot d\beta, \qquad \forall k \in \mathscr{K},\ \alpha \in [0,1). \tag{46}$$

如果不再考虑当前只涉及单个 $\bar{\mu}$ 的情形，而是令函数 $\tilde{r}(\cdot)$ 等于对一组 $\mathcal{M}$ $\bar{\mu}$ 取值的 (45) 式右端的最小值，那么我们讨论的就是一般的、分布不变的相干风险度量；参见 Kusuoka [7]。

我们的 (45) 和 (46) 尚未达到如此一般的程度。不过，它们足以刻画风险厌恶。在 (46) 中，随着 α 增大，奖励 $\bar{a}(\cdot,\ \alpha)$ 会聚焦于更窄的区间 $[0,1-\alpha]$，该区间对应于 k 所反映的随机结果中定义得更窄的最差 $(1-\alpha)$ 部分；在 (45) 中，随着 $\bar{\mu}$ 更多地向较大的 α 值偏移，所得的 $\tilde{r}(\cdot)$ 仍会更加关注随机结果的较低端。

对于我们接下来主要依赖 Karlin 和 Rinott 的 [6] 保持性结果（该结果与对数超模性有一定关联）进行的推导，采用似然比意义来表达 $\bar{\mu}$ 的位移会更加方便。当 $\bar{\mu}^1 \leq_{\text{lr}} \bar{\mu}^2$ 时，我们考虑

$$\frac{\bar{\mu}^1(\alpha^2)}{\bar{\mu}^1(\alpha^1)} \leq \frac{\bar{\mu}^2(\alpha^2)}{\bar{\mu}^2(\alpha^1)}, \qquad \forall 0 < \alpha^1 \leq \alpha^2 < 1. \tag{47}$$

对于任意参数 $\bar{\mu}^k$ 和 $k = 1, 2$，我们将 $\tilde{r}^k$ 记为由 (45) 和 (46) 得到的奖励函数，并将 $\vec{v}^k$ 记为由 (43) 和 (44) 得到的价值向量。

命题 2 对于通过式 *(43)* 至 *(46)* 为 $k = 1、2$定义的博弈$(N, \vec{v}^k)$，当 $\bar{\mu}^1 \leq_{lr} \bar{\mu}^2$ 时，我们根据式 *(47)* 可得 *(15)*。

命题 2 的证明： 固定某个满足 $C^1 \subseteq C^2$ 的 $C^1,\ C^2 \in \mathscr{C}(N)$。我们首先证明一个中间结果：在条件 (44) 和 (46) 下，

$$\frac{\bar{a}(\tilde{k}(C^2),\alpha^1)}{\bar{a}(\tilde{k}(C^1),\alpha^1)} \leq \frac{\bar{a}(\tilde{k}(C^2),\alpha^2)}{\bar{a}(\tilde{k}(C^1),\alpha^2)}, \qquad \forall 0 < \alpha^1 \leq \alpha^2 < 1. \tag{48}$$

为此，定义 $z_1(\cdot) = z_3(\cdot) = \tilde{k}(C^1,\ \cdot)$ 和 $z_2(\cdot) = z_4(\cdot) = \tilde{k}(C^2,\ \cdot)$。由（44），

$$z_1(\beta) \cdot z_2(\beta') \leq z_3(\beta \vee \beta') \cdot z_4(\beta \wedge \beta'). \tag{49}$$

现在，对任意 $0 < \alpha^1 \leq \alpha^2 < 1$，定义 $g_1(\cdot) = g_4(\cdot) = \mathbf{1}_{(0,1-\alpha^2]}(\cdot)$ 和 $g_2(\cdot) = g_3(\cdot) = \mathbf{1}_{(0,1-\alpha^1]}(\cdot)$。容易看出，

$$g_1(\beta) \cdot g_2(\beta') \leq g_3(\beta \vee \beta') \cdot g_4(\beta \wedge \beta'). \tag{50}$$

结合（49）和（50），可得

$$(z_1 g_1)(\beta) \cdot (z_2 g_2)(\beta') \leq (z_3 g_3)(\beta \vee \beta') \cdot (z_4 g_4)(\beta \wedge \beta'). \tag{51}$$

根据 Karlin 和 Rinott 的定理 2.1，[6]，（51）将推出

$$\left[\int_0^1 (z_1 g_1)(\beta) \cdot d\beta\right] \cdot \left[\int_0^1 (z_2 g_2)(\beta) \cdot d\beta\right] \leq \left[\int_0^1 (z_3 g_3)(\beta) \cdot d\beta\right] \cdot \left[\int_0^1 (z_4 g_4)(\beta) \cdot d\beta\right]. \tag{52}$$

但根据 $f(i)$ 和 $g(i)$ 的定义，（52）就是

$$\frac{\int_0^{1-\alpha^1} \tilde{k}(C^2,\beta) \cdot d\beta}{\int_0^{1-\alpha^1} \tilde{k}(C^1,\beta) \cdot d\beta} \leq \frac{\int_0^{1-\alpha^2} \tilde{k}(C^2,\beta) \cdot d\beta}{\int_0^{1-\alpha^2} \tilde{k}(C^1,\beta) \cdot d\beta}. \tag{53}$$

鉴于（46），上述（53）就意味着（48）。现在令 $z_1(\alpha) = \bar{a}(\tilde{k}(C^1)\ \alpha) \cdot \bar{\mu}^2(\alpha)$，$z_2(\alpha) = \bar{a}(\tilde{k}(C^2)\ \alpha)\ \cdot \bar{\mu}^1(\alpha)$，$z_3(\alpha) = \bar{a}(\tilde{k}(C^2)\ \alpha)\ \cdot \bar{\mu}^2(\alpha)$，以及 $z_4(\alpha) = \bar{a}(\tilde{k}(C^1)\ \alpha)\ \cdot \bar{\mu}^1(\alpha)$。

那么，（47）和（48）合起来便意味着

$$z_1(\alpha) \cdot z_2(\alpha') \leq z_3(\alpha \vee \alpha') \cdot z_4(\alpha \wedge \alpha'). \tag{54}$$

根据 Karlin 和 Rinott 的定理 2.1，[6]，（54）将推出

$$\left[\int_0^1 z_1(\alpha) \cdot d\alpha\right] \cdot \left[\int_0^1 z_2(\alpha) \cdot d\alpha\right] \leq \left[\int_0^1 z_3(\alpha) \cdot d\alpha\right] \cdot \left[\int_0^1 z_4(\alpha) \cdot d\alpha\right]. \tag{55}$$

根据 $f(i)$ 的定义，(55) 仅意味着

$$\frac{\int_0^1 \bar{a}(\tilde{k}(C^2),\alpha) \cdot \mu^1(\alpha) \cdot d\alpha}{\int_0^1 \bar{a}(\tilde{k}(C^1),\alpha) \cdot \mu^1(\alpha) \cdot d\alpha} \leq \frac{\int_0^1 \bar{a}(\tilde{k}(C^2),\alpha) \cdot \mu^2(\alpha) \cdot d\alpha}{\int_0^1 \bar{a}(\tilde{k}(C^1),\alpha) \cdot \mu^2(\alpha) \cdot d\alpha}. \tag{56}$$

鉴于 (45)，上述 (56) 就是

$$\frac{\tilde{r}^1(\tilde{k}(C^2))}{\tilde{r}^1(\tilde{k}(C^1))} \leq \frac{\tilde{r}^2(\tilde{k}(C^2))}{\tilde{r}^2(\tilde{k}(C^1))}. \tag{57}$$

此外，由（43）可知，（57）等同于（15）。 ∎

命题1和命题2都体现了（1）中从“风险厌恶”到“向心性”的第一条联系。命题2为定理1和推论1提供了另一种传达这一观点的途径，即“厌恶风险能够促进合作”。

8 结束语

（1）中的第一条联系仍有待进一步加强。目前，我们讨论了两个截然不同的情形。若能推广这两种情形，甚至更进一步将其统一起来，将会非常有益。此外，分数形式的框架适用于预先确定的分配。当参与者在联盟结果揭晓后可以重新协商各自的份额时，情况可能会更加复杂。（1）中从向心性到合作的第二条联系，或许还能应用于其他与不确定性或风险无关的领域。显然，这一联系本身也值得进一步完善。例如，若能取消严格正值这一限制，将会很有帮助。

参考文献

[1] Allen, B. 和 N.C. Yannelis。2001。《微分信息经济学：导论》。经济理论，18，第263-273页。[2] Charnes, A. 和 D. Granot。1973。《先验解：将凸核解扩展至机会约束博弈》。爱荷华州立大学计算机科学与统计学第七届研讨会论文集，第323-332页。[3] Charnes, A. 和 D. Granot。1976。《联盟与机会约束解在 n人博弈中的应用。I：先验满意核》。应用数学学会应用数学杂志，*31*，第358-367页。[4] Charnes, A. 和 D. Granot。1977。《联盟与机会约束解在 n人博弈中的应用。II：两阶段解》。运筹学，25，第1013-1019页。

[5] Forges, F.、E. Minelli 和 R. Vohra。2002。《交换经济中的激励与核心：综述》。数学经济学杂志，**38**，第1-41页。[6] Karlin, S. 和 Y. Rinott。1980。《测度排序类别及相关的相关不等式。I. 多元全正分布》。多元分析杂志，**10**，第467-498页。[7] Kusuoka, S.。2001。《关于分布不变的相干风险度量》。载于 S. Kusuoka 和 T. Maruyama T.（编），数学经济学进展，**3**，第83-95页，Springer，东京。[8] Myerson, R.B.。2007。《不完全信息博弈中的虚拟效用与核心》。经济理论杂志，**136**，第260-285页。[9] Suijs, J. 和 P. Borm。1999。《随机合作博弈：超可加性、凸性与确定性等价》。博弈与经济行为，**27**，第331-345页。[10] Suijs, J.、P. Borm、A. De Waegenaere 和 S. Tijs。1999。《收益随机的合作博弈》。欧洲运筹学杂志，**113**，第193-205页。[11] Wilson, R.。1978。《经济中的信息、效率与核心》。计量经济学，**46**，第807-816页。[12] Yang, J. 和 J. Li。2020。《具有非确定性收益的合作博弈》。数学经济学杂志，**88**，第123-140页。[13] Yang, J.。2023。《基于划分的联盟博弈稳定性》。工作论文，罗格斯大学。