arXiv:2304.10674v1 [math.RA] 20 Apr 2023

# 关于一类具有幂零扭曲映射的4维3-Hom-Lie代数的性质与分类

Abdennour Kitouni 和 Sergei Silvestrov

摘要 本文旨在研究一类具有幂零扭曲映射α且以八个结构常数为参数的四维3-Hom-Lie代数的性质与分类。本文研究了该类中所有代数的导出级数和中心降序列，并据此将其划分为五个非同构子类。得到了这五类中3-Hom-Lie代数的可解性和幂零性级别。在此基础上，本文在Hom-代数同构意义下对该类中的所有代数进行了分类。本文还依据结构常数和扭曲映射，得到了一般的$(n+1)$维n-Hom-Lie代数以及所研究类中的代数满足乘法性的充要条件。此外，对于该类中的某些代数，本文确定了导出级数和中心降序列的各项是否为弱子代数、Hom-子代数、弱理想或Hom-理想。

关键词：Hom-代数，n-Hom-李代数，分类 2020年数学主题分类：17B61，17A40，17A42，17B30

## 1 引言

Hom-李代数以及更一般的拟Hom-李代数最早由 Hartwig、Larsson 和 Silvestrov 在 [51], 其中一般的拟变形

Abdennour Kitouni 数学与物理系，教育、文化与传播学院，马拉达伦大学，Box883，72123 瑞典韦斯特罗斯。电子邮箱：abdennour.kitouni@mdu.seSergei Silvestrov（通讯作者）数学与物理系，教育、文化与传播学院，马拉达伦大学，Box883，72123 瑞典韦斯特罗斯。电子邮箱：sergei.silvestrov@mdu.se

以及使用更一般的 σ-导子（扭曲导子）对向量场李代数进行离散化，并基于扭曲导子提出了一种构造 Witt 型和 Virasoro 型代数变形的一般方法，这些工作最初受到物理学中 q-变形代数所呈现的 q-变形 Jacobi 恒等式、同调代数的 q-变形版本以及微分演算的离散修改的启发 [7, 34–37, 39–41, 53, 55, 70–72]。一般抽象的拟李代数、拟Hom-李代数和 Hom-李代数的子类，以及它们一般的带色（分次）对应结构，已在 [51, 64–66, 85] 中引入。随后，人们研究了各种 Hom-李可容许代数的类。在 [74] 中，特别是， [74], 引入了 Hom-结合代数，并证明其为 Hom-李可容许的，即使用交换子映射作为新的乘法得到 Hom-李代数；从这个意义上说，它构成了结合代数的自然推广，正如李可容许代数通过以交换子映射为新乘法导出李代数一样。在 [74], 中，还描述了若干其他有趣的 Hom-李可容许代数类，它们推广了某些非结合代数类，同时还给出了有限维 Hom-李代数的例子。Hom-代数结构非常有用，因为给定类型的 Hom-代数结构包含其经典对应结构，并为变形、上同调结构的扩张以及表示开辟了更多可能性。自这些开创性工作以来 [51, 64–67, 74], , Hom-代数结构已发展成为一个广阔而活跃的领域，相关出版物数量不断增加，研究方向也日益多样（例如参见 [8, 29, 48, 63, 64, 68, 75–78, 80, 83, 84, 90, 91] 及其中的参考文献）。

三元李代数最初由 Nambu 在对哈密顿力学的推广中提出 [79]。除 Nambu 力学外，n-Lie代数在物理学中也展现出许多应用。Nambu 力学的数学代数基础由 Takhtajan 在 [86] 中建立。Filippov 在 [49] 中独立引入并研究了 n-Lie代数的结构，Kasymov 在 [56] 中考察了它们的性质。文献 [32, 56, 88] 研究了 n元代数的性质，包括可解性和幂零性。Kasymov 在 [56] 指出，n元乘法使 n-Lie代数的可解性和幂零性存在几种不同的定义，并研究了它们的性质。文献 [15–23, 25, 56] 进一步研究了 n元代数的性质、分类，以及它们与其他结构之间的联系，例如双代数、Yang-Baxter方程和 3-Lie代数的 Manin 三元组。文献 [2–4] 考察了由李代数诱导的3-Lie代数的结构、3-Lie代数的分类，以及其在构造 B.R.S.代数中的应用。文献 [5] 探讨了与 Nambu-Hamilton方程的超空间扩张相关的三元Lie超代数的有趣构造。文献 [33], 研究了 Leibniz n-代数。文献 [42, 82, 87] 建立了 n-Lie代数和 Leibniz n-代数的一般上同调理论。文献 [21, 49, 69] 及许多其他作者考察了有限维n-Lie代数的结构和分类。关于 n-Lie代数理论及其应用的更多细节，参见 [45] 及其中的参考文献。

n元李代数或李代数的 Hom 广义化的分类，既在非常特殊的情形下，也在低维情形下得到了研究。n-Lie

代数在维数不超过 $n+1$、基域特征为 $p \neq 2$ 的情况下已由 Filippov [49] 完成分类。他利用了 $(n+1)$ 维 n-Lie 代数的特殊性质：其括号可以像双线性形式那样用一个方阵表示。所得情形的数量取决于基域的性质；分类列表按导出理想的维数递增排列，其中包括一个幂零代数，以及一类单代数；当基域为代数闭域时，这些单代数彼此同构。其余代数则依具体代数而定，为某个 $2 \leq k \leq n$-可解代数。这些单代数被证明是在 [69] 中唯一的有限维 n-Lie 单代数。Bai、Wang、Xiao 和 An [22] 通过发现并利用特征2下的一个类似结果，完成了特征为 2 的域上 $(n+1)$ 维 n-Lie 代数的分类。Bai、Song和Zhang [21] 利用如下事实，对特征0的代数闭域上的 $(n+2)$ 维 n-Lie 代数进行分类：若一个 $(n+2)$ 维 n-Lie 代数的导出理想维数不为3，则它有一个余维1子代数；由此将大多数情形构造成 Filippov 列出的 $(n+1)$ 维 n-Lie 代数的扩张。在 [31],，Cantarini 和 Kac 对所有单线性紧 n-Lie 超代数进行了分类；结果表明，它们都是 n-Lie 代数。两人通过建立这些代数与一类特殊的传递 $\mathbb{Z}$-分次李超代数之间的双射对应，得到的列表包含四个代表，其中一个是 $(n+1)$ 维向量积 n-Lie 代数，其余三个是无限维 n-Lie 代数。

高维数n-Lie代数的分类仅在某些特定情形下得到研究。度量n-Lie代数，即配备了非退化相容双线性形式的n-Lie代数，已被研究和分类：首先，Ren、Chen和Liang [81] 研究了维数为$n+2$的情形，Geng、Ren和Chen [50],研究了维数为$n+3$的情形；随后，Bai、Wu和Chen [24]研究了维数为$n+k$（其中$2 \leq k \leq n+1$）的情形。该分类基于对Levi分解、中心、各向同性理想及其相关性质的研究。另一个已得到研究的情形是幂零n-Lie代数，具体而言，是2阶幂零n-Lie代数。Eshrati、Saeedi和Darabi [46] 利用 [43,47]中引入的性质，对$(n+3)$维幂零n-Lie代数和$(n+4)$维2阶幂零n-Lie代数进行了分类。类似地，Hoseini、Saeedi和Darabi [52] 对$(n+5)$维2阶幂零n-Lie代数进行了分类。在 [54], 中，Jamshidi、Saeedi和Darabi利用这样一个事实对$(n+6)$维2阶幂零n-Lie代数进行了分类：这类代数模去一个中心元的张成空间后，得到的是$(n+5)$维2阶幂零n-Lie代数，而后者此前已经得到分类。Ataguema、Makhlouf和Silvestrov在[13]中研究了具有对角扭曲映射的3维3-Hom-Lie代数的分类。

n 元代数的 Hom 型推广，例如 n-Hom-Lie 代数以及其他 Lie 型和结合型 n 元 Hom 代数，是在 [13], 中通过一组线性映射对定义恒等式进行扭曲而引入的。对于所有这些映射都相等且为代数同态的特殊情形，已有相关研究，并且已描述如何从同类型的 n 元代数生成 n 元 Hom 代数的例子。关于 n 元 Hom 代数的更多性质、构造方法、例子、表示、上同调和中心扩张，已.....

在 [9, 11, 12, 58, 89, 92] 中进行了研究。这些推广包括推广李型 n 元代数（包括 n 元 Nambu 代数、n 元 Nambu-Lie 代数和 n 元李代数）的 n 元 Hom 代数结构，以及结合型 n 元代数（包括 n 元全结合代数和 n 元部分结合代数）。在 [60], 中，研究了 n 元 BiHom-Lie代数和 BiHom-结合代数的构造。在 [28] 中，研究了 n-BiHom-Lie代数的广义导子。在 [30] 中，研究了乘性 n 元 Hom-Ω色代数的广义导子。在 [1] 中，研究了 Hom-Leibniz 代数和 n元Hom-Nambu-Lie超代数的上同调。在 [73] 中，研究了 n 元 Hom-Nambu 超代数的广义导子和 Rota-Baxter 算子。在 [6] 中，研究了基于 σ-导子和对合构造 3-Hom-Lie代数的方法。 [26] 中研究了乘性 n-Hom-Lie 色代数。

在 [14], Awata、Li、Minic 和 Yoneya 关于 Nambu 括号量子化的研究中，他们提出了一种构造方法：将括号乘法与迹相结合，由 n-Lie 代数诱导出 $(n+1)$-Lie 代数。 [10, 17, 57]研究了这一构造的更多性质，包括可解性和幂零性。 [11, 12], 利用一般 Hom-李代数或 n-Hom-Lie 的括号，以及满足依赖于定义 Hom-李代数或 n-Hom-Lie 代数的扭曲线性映射之条件的类迹线性形式，对这一构造进行了推广。 [27], 展示了一种方法，可从 Hom-李代数的二元乘法和满足特定相容条件的 $(n-2)$-线性函数构造 n 元乘法。[59]研究了 n-Hom-Lie 代数以及由 n-Hom-Lie 代数诱导的 $(n+1)$-Hom-Lie 代数的可解性和幂零性。 [61], 探讨了维数为 $n+1$的 n-Hom-Lie 代数的性质与分类，并以结构常数作为参数，计算了扭曲映射若干特殊情形下的四维 3-Hom-Lie 代数，并按类别列出，着重体现每一类中的自由参数个数。

n-Hom-Lie代数与 n-Lie代数有着根本区别，尤其是在扭曲映射不可逆或不可对角化时。扭曲映射不可逆时，Hom-Nambu-Filippov恒等式的约束会减弱，因为使用扭曲映射核中的元素时，若干项甚至整个恒等式都可能为零。Hom-代数的同构也不同于代数的同构，因为它们不仅需要交织乘法，还需要交织扭曲映射。所有这些都使分类问题变得不同、有趣且丰富，而不能简单地从 n-Lie代数的情形推导得出。本文研究具有幂零扭曲映射 $\alpha$ 的 n-Hom-Lie代数；这尤其意味着 $\alpha$ 不可逆。

据我们所知，此前文献尚未实现4维3-Hom-Lie代数在Hom-代数同构意义下的分类。本文旨在研究一类有趣的4维3-Hom-Lie代数的性质与分类，这类代数具有幂零扭曲映射$\alpha$和作为参数的八个结构常数，即 [61]中给出的 43，$N(2)$，6。所有具有对角扭曲映射的3维3-Hom-Lie代数均已列出。

未分类于[13]。本文所研究的代数是四维的，其扭曲映射属于另一种类型，即幂零扭曲映射。幂零线性映射既不可逆也不可对角化，这使得我们的研究对象与$n$-Hom-Lie代数（具有对角扭曲映射的情形）从根本上不同：当扭曲映射不可逆时，Hom-Nambu-Filippov恒等式的限制性会减弱，因为当恒等式中使用扭曲映射核中的元素时，若干项甚至整个恒等式都可能消失；而当扭曲映射不可对角化时，将其引入恒等式所产生的变化则更加显著。在本工作中，我们对所研究类别的、具有幂零扭曲映射的四维3-Hom-Lie代数的Hom-代数进行了同构意义下的完整分类，计算了该类别中所有3-Hom-Lie代数的导出级数和中心降序列，研究了可解性和幂零性，刻画了其中的乘法的3-Hom-Lie代数，并研究了分类所得Hom-代数中一些选定例子的导出级数和中心降序列各项的理想性质。这些结果增进了对$n$元Hom-代数丰富结构的理解，尤其是对$n$-Hom-Lie代数这一重要类别的理解。这也是迈向四维3-Hom-Lie代数以及一般的$(n+1)$维$n$-Hom-Lie代数完整分类的一步。此外，我们的结果有助于深入研究$n$-Hom-Lie代数的结构、重要性质及其子类。

在第 2 节中，回顾了研究中所用的 $n$-Hom-Lie代数的定义和性质，并根据结构常数和扭曲映射，得到了刻画幂零性的若干新结果，以及一般 $(n+1)$ 维 $n$-Hom-李代数及所研究类中的代数满足乘法性的充要条件。在第 4 节中，研究了该类中所有代数的导出级数和中心降序列，并据此将其划分为五个非同构子类。得到了这五个子类中 3-Hom-Lie代数的可解性和幂零性等级。在第 5 节中，在前几节研究的基础上，将该类中的所有代数按照 Hom-代数同构进行分类。在第 6 节中，针对该类中的部分代数，确定了其导出级数和中心降序列的各项是否为弱子代数、Hom-子代数、弱理想或 Hom-理想。

## 2 n-Hom-Lie代数的定义与性质

本节将介绍我们研究所需的 $n$-Hom-Lie代数的基本定义和性质。本文中，假设所有线性空间均定义在一个 $\mathbb{K}$ 特征0的域$S$ 上线性空间的任意子集，$\langle S\rangle$ 表示 $S$的线性张成。假设所有所考虑代数的元数均大于或等于2。Hom-李代数是李代数的一种推广，最初在研究 [51]-导子时引入。$n$元情形则在 [13]中引入。

定义 1（**[51,74]**）。Hom-李代数 $(A\ [\cdot,\cdot],\alpha)$ 是一个线性空间 $A$，它配备了一个双线性映射 $[\cdot,\cdot]:A\times A\to A$ 以及一个线性映射 $\alpha:A\to A$ 满足，对于所有$x$、$y$、$z\in A$：

$$[x,y]=-[y,x], \qquad \text{Skew-symmetry}$$

$$\sum_{\circlearrowleft(x,y,z)}[\alpha(x),[y,z]]=[\alpha(x),[y,z]]+[\alpha(y),[z,x]]+[\alpha(z),[x,y]]=0. \qquad \begin{matrix}\text{Hom-Jacobi}\\ \text{identity}\\ \text{(cyclic form)}\end{matrix}$$

在 Hom-Lie代数中，根据反对称性，Hom-Jacobi 恒等式等价于

$$[\alpha(x),[y,z]]=[[x,y],\alpha(z)]+[\alpha(y),[x,z]] \qquad \begin{matrix}\text{Hom-Jacobi identity}\\ \text{(Hom-derivation form)}\end{matrix} \tag{1}$$

仅满足 Hom-代数恒等式（1）、而不要求满足反对称性恒等式的 Hom-代数，称为 Hom-Leibniz代数 [65, 74]。因此，Hom-Lie代数是斜对称的 Hom-Leibniz代数。许多 Hom-Leibniz代数并非斜对称，因此也不是 Hom-Lie代数。当扭曲映射是恒等映射 $\alpha=\mathrm{Id}_A$ 在 $A$上时，Hom-Leibniz代数成为（左）Leibniz代数，而 Hom-Lie代数成为李代数。当且仅当映射 $\mathrm{Id}_A$ 属于所有满足恒等式（1）的线性映射 $\alpha$的集合时，Hom-Leibniz代数也是 Leibniz代数，或者 Hom-Lie代数也是李代数。映射 $\mathrm{Id}_A$ 是否属于所有满足恒等式（1）的线性映射 $\alpha$的集合，取决于底层代数。Hom-代数恒等式（1）关于 $\alpha$是代数上线性映射所构成的线性空间中的线性关系，因此，所有满足恒等式（1）的此类 $\alpha$构成代数上线性映射所构成的线性空间的一个线性子空间。许多 Hom-Leibniz代数并非 Leibniz代数，也有许多 Hom-Lie代数并非李代数。

定义 2（ **[51,64]**）。从 Hom-李代数 $\mathscr{A}=(A\ [\cdot,\cdot]_{\mathscr{A}},\alpha)$ 到 Hom-李代数 $\mathscr{B}=(B\ [\cdot,\cdot]_{\mathscr{B}},\beta)$ 的同态是满足以下条件的线性映射 $f:A\to B$，对于所有 $x,y\in A$，

$$f([x,y]_{\mathscr{A}})=[f(x),f(y)]_{\mathscr{B}}, \tag{2}$$

$$f\circ\alpha=\beta\circ f. \tag{3}$$

线性映射 $f:A\to B$ 仅满足条件（2）的称为 Hom-Lie代数的弱态射。

定义 3（ **[29,74]**）。若 Hom-李代数 $(A\ [\cdot,\cdot],\ \alpha)$ 满足 $\alpha$ 是一个代数同态，则称其为乘法的；若 $\alpha$是一个同构，则称其为正则。

定义 4. 一个 n 元 Hom 代数 $(\mathrm{A}\ [\cdot,\ldots,\cdot],\{\alpha_i\}_{1\leq i\leq n-1})$ 是由线性空间 A 和一个 n元运算构成的结构，即一个 n 重线性映射 $[\cdot,\ldots,\cdot]:\mathrm{A}^n\to\mathrm{A}$，以及 $(\mathrm{n}-1)$ 个线性映射 $\alpha_i:\mathrm{A}\to\mathrm{A}\ 1\leq\mathrm{i}\leq\mathrm{n}-1$。如果一个 n 元 Hom 代数.....

是斜对称的，当且仅当其 n 元运算是斜对称的，即对所有 x1, . . . , $x_{n-1}$, y1,... , $y_n \in$A，均满足，

$$[x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)}] = sgn(\sigma)[x_1,\ldots,x_n]. \qquad \text{Skew-symmetry} \tag{4}$$

$n$-Hom-Lie代数是 Hom-Lie代数的一种$n$元推广，推广至满足 Hom-代数恒等式（$n$）的1，其中涉及$n$元乘积和$n-1$ 个线性映射。

定义5（ **[13]**）。n-Hom-Lie代数 (A $[\cdot,\ldots,\cdot]$,$\{\alpha_i\}_{1\le i\le n-1}$) 是一种斜对称 n 元 Hom 代数，对所有 x1,... , $x_{n-1}$, y1,... , $y_n \in$A 均满足

Hom-Nambu-Filippov identity

$$\begin{aligned}&[\alpha_1(x_1),\ldots,\alpha_{n-1}(x_{n-1}),[y_1,\ldots,y_n]] = \\ &\sum_{i=1}^{n}[\alpha_1(y_1),\ldots,\alpha_{i-1}(y_{i-1}),[x_1,\ldots,x_{n-1},y_i],\alpha_i(y_{i+1}),\ldots,\alpha_{n-1}(y_n)].\end{aligned} \tag{5}$$

注1. 若对所有 $1 \le$ i $\le$ n $-$ 1, $\alpha_i = \mathrm{Id}_A$，则得到一个 n-Lie代数 ([49])。因此，n-Lie代数类包含于 n-Hom-Lie代数类中。对于任意线性空间 A，若对所有 x1, . . . , $x_n \in$A 均有 [ x1, . . . , $x_n]_0 = 0$，且给定任意线性映射$\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1}$，则 (A $[\cdot,\ldots,\cdot]_0$,$\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1}$) 是一个 n-Hom-Lie代数。

定义6（**[13,92]**）。n-Hom-Lie代数 $\mathscr{A}$ =(A $[\cdot,\ldots,\cdot]_{\mathscr{A}}$,$\{\alpha_i\}_{1\le i\le n-1}$)和 $\mathscr{B}$ =(B $[\cdot,\ldots,\cdot]_{\mathscr{B}}$, $\{\beta_i\}_{1\le i\le n-1}$)之间的n-Hom-Lie代数态射是满足以下条件的线性映射 f : A $\to$B：对所有 x1, . . . , $x_n \in$A,

$$f([x_1,\ldots,x_n]_{\mathscr{A}}) = [f(x_1),\ldots,f(x_n)]_{\mathscr{B}}, \tag{6}$$

$$f\circ\alpha_i = \beta_i\circ f, \quad \text{for all} \quad 1 \le i \le n-1. \tag{7}$$

仅满足条件 (6) 的线性映射称为 $n$-Hom-Lie 代数的弱态射。

带有 $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{n-1} = \alpha$ 的 n-Hom-Lie代数 (A $[\cdot,\ldots,\cdot]$,$\{\alpha_i\}_{1\le i\le n-1}$) 将记作 (A $[\cdot,\ldots,\cdot]$,$\alpha$)。

定义7（ **[92]**）。一个$n$-Hom-李代数（$A$ $[\cdot,\ldots,\cdot]$， $\alpha$）称为乘法的，如果 $\alpha$是代数同态，并且称为正则的，如果 $\alpha$ 是代数同构。

下面的命题提供了一种从 n-Lie代数和代数同态构造 n-Hom-李代数的方法。该命题最初是在李代数情形下提出的，随后在 [13] 中推广到了 n元情形。 [92]，中给出了这一定理的一个更一般版本，指出 n-Hom-Lie代数范畴在弱态射扭曲下是封闭的。

命题 1（ **[13, 92]**）。设 $\beta$： $\mathscr{A} \to \mathscr{A}$是 n-Hom-Lie 代数 $\mathscr{A}$ =(A $[\cdot,\ldots,\cdot]$, $\{\alpha_i\}_{1\le i\le n-1}$) 的一个弱态射，并将乘法 $[\cdot,\ldots,\cdot]_\beta$ 定义为

$[x_1, \ldots\ldots, x_n]_\beta = \beta([x_1, \ldots, x_n])$。那么，$\left(A\ [\cdot,\ldots,\cdot]_\beta, \{\beta \circ \alpha_i\}_{1\leq i\leq n-1}\right)$是一个 n-Hom-Lie 代数。此外，如果 $(A\ [\cdot,\ldots,\cdot], \alpha)$ 是乘法的，并且 $\beta \circ \alpha = \alpha \circ \beta$，那么$\left(A\ [\cdot,\ldots,\cdot]_\beta, \beta \circ \alpha\right)$是乘法的。

命题1 的以下特例可在 $\alpha = Id_A$时得到。

推论 1. 设 $(A\ [\cdot,\ldots,\cdot])$ 是一个 n-Lie代数，$\beta : A \to A$ 是一个代数同态，并且 $[\cdot,\ldots,\cdot]_\beta$ 由 $[x_1, \ldots, x_n]_\beta = \beta([x_1, \ldots, x_n])$ 定义。则，$\left(A\ [\cdot,\ldots,\cdot]_\beta, \beta\right)$是一个乘法的 n-Hom-Lie代数。

以下定义是将一般代数结构中的标准子代数定义特化到本文所讨论的 n-Hom-Lie代数和 n元斜对称Hom代数的情形。

定义 8. n-Hom-李代数或更一般地，n元斜对称Hom代数 $\mathscr{A} = (A\ [\cdot,\ldots,\cdot]_{\mathscr{A}}, \alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1})$ 的 Hom-子代数是一个 n 元 Hom 代数 $\mathscr{B} = (B\ [\cdot,\ldots,\cdot]_{\mathscr{B}}, \beta_1,\ldots, \beta_{n-1})$，其中 B 是 A 的子空间，并满足对所有 $x1,\ldots, x_n \in B$,

1) $\alpha_i(B) \subseteq B$ for all $1 \leq i \leq n-1$,

2) $[x_1,\ldots,x_n]_{\mathscr{A}} \in B$,

配备 A 上受限的乘法 $[\cdot,\ldots,\cdot]_{\mathscr{B}} = [\cdot,\ldots,\cdot]_{\mathscr{A}}$ 和 B 上的线性映射 $\beta_i = \alpha_i$、$1 \leq i \leq n-1$。

以下定义是对 [29,74,92] 中相应定义向任意$n$元斜对称 Hom-代数的直接推广。

定义 9. n-Hom-李代数或更一般地，n元斜对称 Hom-代数 $(A\ [\cdot,\ldots,\cdot], \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$ 的理想，是满足以下条件的 A 的子空间 I：对于所有 $x1, \ldots, x_{n-1} \in A$，$y \in I$：

1) $\alpha_i(I) \subseteq I$ for all $1 \leq i \leq n-1$.

2) $[x_1,\ldots,x_{n-1},y] \in I$ (or equivalently $[y,x_1,\ldots,x_{n-1}] \in I$).

以下定义是 [59] 中相应定义向任意 n元斜对称Hom代数的直接推广。

定义 10. 设 $(A\ [\cdot,\ldots,\cdot], \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$ 是一个 n-Hom-李代数，或更一般地说，是一个 n 元斜对称 Hom 代数，且 $I$ 是 $A$ 的一个理想。对于 $k \geq 2 \leq n$ 和 $p \in \mathbb{N}$，我们将理想 $I$ 的 $k$-导出级数定义为

$$D_k^0(I) = I \text{ and } D_k^{p+1} = \langle [\underbrace{D_k^p(I),\ldots,D_k^p(I)}_{k}, \underbrace{A,\ldots,A}_{n-k}] \rangle.$$

我们定义 I 的 k-中心下降列为

$$C_k^0(I) = I \text{ and } C_k^{p+1}(I) = \langle [C_k^p(I), \underbrace{I,\ldots,I}_{k-1}, \underbrace{A,\ldots,A}_{n-k}] \rangle.$$

定义11. 设 \((A $[\cdot,\ldots,\cdot],\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1}$)\) 为一个 n-Hom-李代数，或更一般地，设其为一个 n 元斜对称Hom代数，且 \(I\) 为 \(A\) 的一个理想。对于$2 \leq k \leq n$，若存在 $r \in \mathbb{N}$使得 \($D_k^r(I) = \{0\}$ \)（分别地，\($C_k^r(I) = \{0\}$\)），则称理想 \(I\) 为 k-可解（分别地，k-幂零）的，而满足该条件的最小 $r \in \mathbb{N}$ 称为 \(I\) 的 k-可解类（分别地，幂零类）。

以下对应结果的直接推广 [59] 到任意$n$元斜对称Hom代数，可用与 [59] 相同的方法证明，因为证明不涉及Hom-Nambu-Filippov恒等式。

引理1. 设 $\mathscr{A} = (A\ [\cdot,\ldots,\cdot]_A, (\alpha_i)_{1\leq i\leq n})$ 和 $\mathscr{B} = (B\ [\cdot,\ldots,\cdot]_B, (\beta_i)_{1\leq i\leq n})$ 是两个n元斜对称Hom代数，$f : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ 是一个满射n-Hom-Lie代数态射，I是 $\mathscr{A}$的一个理想。那么对于所有的$r \in \mathbb{N}$ 和 $2 \leq k \leq n$:

$$f(D_k^r(I)) = D_k^r(f(I)) \text{ and } f(C_k^r(I)) = C_k^r(f(I)).$$

该引理还表明，若两个n-Hom-Lie代数同构，则它们的导出级数和中心降序列中的各项也分别同构。这也意味着，若两个代数的导出级数或中心降序列存在显著差异，例如对应项的维数不同，那么这两个代数就不可能同构。

引理2 ( **[61]**)。设 A 为线性空间，$[\cdot,\ldots,\cdot]$为 n 线性斜对称映射（$n \geq 2$），且 $\alpha_1$、...、$\alpha_{n-1}$为 A 上的线性映射。若（$n-1$）重线性映射

$$(x_1,\ldots,x_{n-1}) \mapsto [\alpha_1(x_1),\ldots,\alpha_{n-1}(x_{n-1}),d]$$

对所有 $d \in [A \ldots, A]$, 都是斜对称的，则由下式定义的（$2n-1$）重线性映射 H

$$\begin{aligned} H(x_1,\ldots,x_{n-1},y_1,\ldots,y_n) &= [\alpha_1(x_1),\ldots,\alpha_{n-1}(x_{n-1}),[y_1,\ldots,y_n]] \\ &\quad - \sum_{k=1}^{n} [\alpha_1(y_1),\ldots,\alpha_{k-1}(y_{k-1}),[x_1,\ldots,x_{n-1},y_k],\alpha_k(y_{k+1}),\ldots,\alpha_{n-1}(y_n)], \end{aligned}$$

对所有 $x_1$、...、$x_{n-1}$、$y_1$、...、$y_n \in A$，在其前 $n-1$ 个自变量和后 n 个自变量上均为斜对称的。

命题2 ( **[61]**)。设 A 为 n 维线性空间（$n \geq 2$），且 $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ 是 A 的一组基。A 上任意斜对称 n 重线性映射 $[\cdot,\ldots,\cdot]$ 均由给出 $[e_1、\ldots、e_n] = d \in A$ 完全确定。设 $\alpha_1$、...、$\alpha_{n-1}$为 A 上的线性映射。若（$n-1$）重线性映射

$$(x_1,\ldots,x_{n-1}) \mapsto [\alpha_1(x_1),\ldots,\alpha_{n-1}(x_{n-1}),d]$$

若其为斜对称的，则 \((A $[\cdot,\ldots,\cdot],\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1}$)\) 是一个 n-Hom-李代数。

推论 2（**[61]**）。设 A 是一个 n 维线性空间（$n \geq 2$），且 $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ 是 A 的一组基。A 上任意斜对称 n 重线性映射 $[\cdot,\ldots,\cdot]$ 均由给定$[e_1, \ldots, e_n] = d \in A$ 完全确定。对于 A 上任意线性映射 $\alpha$，$(A\ [\cdot,\ldots,\cdot],\ \alpha)$ 都是一个 n-Hom-李代数。

设 (A $[\cdot,\ldots,\cdot]$, $\alpha$) 是一个维数为 $n+1$ 且带有线性映射 $\alpha$ 的 n 元斜对称代数。给定 A 的一组线性基 $(e_i)_{1\leq i\leq n+1}$，线性映射 $\alpha$ 由其矩阵完全确定，该矩阵由 $\alpha$ 在基上的作用确定；斜对称 n 元多重线性括号由 $[e1, \ldots, \widehat{e_i}, \ldots, e_{n+1}]$ 在所有 $1\leq i\leq n+1$ 下的取值完全确定，并由矩阵 $B=(b(i,j))_{1\leq i,\ j\leq n+1}$ 表示，如下所示：

$$[e_1,\ldots,\widehat{e_i},\ldots,e_{n+1}] = (-1)^{n+1+i}w_i, \tag{8}$$
$$w_i=\sum_{p=1}^{n+1} b(p,i)e_p,\ (w_1,\ldots,w_{n+1}) = (e_1,\ldots,e_{n+1})B.$$

命题 3（**[61]**）。设 $\mathscr{A}_1=(A\ [\cdot,\ldots,\cdot]_1,\ \alpha_1)$ 和 $\mathscr{A}_2=(A\ [\cdot,\ldots,\cdot]_2,\ \alpha_2)$ 是由矩阵 $[\alpha_1]$，$B_1$ 和 $[\alpha_2]$，$B_2$ 分别表示的两个（$n+1$）维 n元斜对称Hom代数。Hom-代数 $\mathscr{A}_1$ 和 $\mathscr{A}_2$ 同构，当且仅当存在一个满足以下条件的可逆矩阵 T:

$$B_2=\det(T)^{-1}TB_1T^T,\qquad [\alpha_2]=T[\alpha_1]T^{-1}.$$

命题 4（**[61]**）。设 $(e_i)_{1\leq i\leq n+1}$ 是线性空间 A 的一组基，设 $\sigma$ 是 n 个 $+1$ 元素的集合 $\{1,\ldots,n+1\}$的一个排列，且 $B=(b_{i,\ j})_{1\leq i,\ j\leq n+1}$是表示该基下一个斜对称 n元括号的矩阵，则同一括号在基 $(e_{\sigma(i)})_{1\leq i\leq n+1}$ 下的表示矩阵为矩阵 $\mathrm{sgn}(\sigma)(b_{\sigma^{-1}(i),\ \sigma^{-1}(j)})_{1\leq i,\ j\leq n+1}$。

注 2. ( [61]). 设 (A $[\cdot,\ldots,\cdot]$,$\alpha$) 是一个 $(n+1)$ 维 n-Hom-李代数，B 是表示其括号的矩阵。$D_n^1(A)=[A\ldots,A]$由$\{w1,\ldots,w_{n+1}\}$生成。这意味着 $\mathrm{Rank}(B)=\dim D_n^1(A)$。

如果秩$(B)\leq n$，或者等价地，$\det(B)=0$，那么 $D_n^1(A)$ 的维数至多为 n，这意味着 $D_n^2(A)$ 的维数至多为 1，进而 $D_n^3(A)=0$。

注 3. ( [61])。对于整个代数 A，所有 k-中心下降列在所有 $2\leq k\leq n$ 的情形下都相等。因此，对所有 $2\leq k\leq n$，k-幂零性的各种概念彼此等价；对于任意 $2\leq k\leq n$，我们将 $C^{p}{}_{k}(A)$ 记为 $C^p(A)$。

定义12. 设 (A $[\cdot,\ldots,\cdot]$,$\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1}$) 是一个 n-Hom-李代数，或更一般地说，是一个 n元斜对称Hom代数。定义 A 的中心 Z(A) 为

$$Z(A)=\{z\in A : [x_1,\ldots,x_{n-1},z]=0, \forall x_1,\ldots,x_{n-1}\in A\}.$$

引理3（**[61]**）. 设 (A $[\cdot,\ldots,\cdot]$,$\alpha$) 是一个 n-Hom-李代数，且 $A\neq\{0\}$。若 A 是 k-幂零的，则对于任意 $2\leq k\leq n$，A 的中心 Z(A) 非平凡（$Z(A)\neq\{0\}$）。

引理4. 设 $\mathscr{A}=(A\ [\cdot,\ldots,\cdot],(\alpha_i)_{1\leq i\leq n-1})$ 是一个 n元斜对称Hom代数，且 $A\neq\{0\}$。

(i) 如果 $\mathscr{A}$ 是幂零的，则 $Z(\mathscr{A})$ 非平凡（$Z(A)\neq\{0\}$）。

(ii) *If* $\dim A=n+1$, *then* $\dim Z(\mathscr{A})=0$ *or* $\dim Z(\mathscr{A})=1$ *or* $Z(\mathscr{A})=A$.

证明。（i）第一个陈述是引理3 推广到 $n$元斜对称 Hom-代数的情形，其证明方法相同，因为原证明并未使用 Hom-Nambu-Filippov 恒等式。

(ii)假设 A 的维数 $=n+1$，且 $Z(\mathscr{A})$ 的维数为 $>1$。设 $(e_i)$ 是 A 的一组基，使得 $e_1, e_2 \in Z(\mathscr{A})$，则 $[e1,\ldots,\hat{}e_i,\ldots,e_{n+1}]=0$ 对所有 $1\le i\le n+1$ 均成立，这意味着 $[x1,\ldots,x_n]=0$ 对所有 $x1,\ldots,x_n\in A$ 均成立。□

以下对 [61] 任意$n$元斜对称 Hom-代数的相应结果的直接推广，可按照 [61] 中的相同方法予以证明，因为该证明不涉及 Hom-Nambu-Filippov 恒等式。

命题 5. 设 $\mathscr{A}=(A\ [\cdot,\ldots,\cdot],\{\alpha_i\}_{1\le i\le n-1})$ 是一个 $(n+1)$ 维 n 元斜对称代数。代数 $\mathscr{A}$ 是幂零且非阿贝尔的，当且仅当 $\dim Z(\mathscr{A})=1$ 且 $[A\ldots,A]=Z(\mathscr{A})$】【。

命题 6. 设 $\mathscr{A}=(A\ [\cdot,\ldots,\cdot],\{\alpha_i\}_{1\le i\le n-1})$ 是一个 n-Hom-李代数，或更一般地，是一个具有 $A\neq\{0\}$ 的 n元斜对称Hom代数。$\mathscr{A}$ 是幂零类为 p 的，当且仅当 $\{0\}\subsetneq C^{p-1}(A)\subseteq Z(A)$。

证明。该结论成立，因为 $\mathscr{A}$ 是类为 p 的幂零元，当且仅当 $C^p(A)=\{0\}$ 且 $C^{p-1}(A)\neq\{0\}$，并且

$$\begin{aligned} C^p(A)=\{0\} &\iff \left[C^{p-1}(A),A,\ldots,A\right]=\{0\}\\ &\iff \forall\, c\in C^{p-1}(A),\forall\, x_1,\ldots,x_{n-1}\in A,[c,x_1,\ldots,x_{n-1}]=0\\ &\iff \forall\, c\in C^{p-1}(A),c\in Z(\mathscr{A})\\ &\iff C^{p-1}(A)\subseteq Z(\mathscr{A}). \end{aligned}$$ □

命题 7. 设 $\mathscr{A}=(A\ [\cdot,\ldots,\cdot]_{\mathscr{A}},\alpha)$ 和 $\mathscr{B}=(B\ [\cdot,\ldots,\cdot]_{\mathscr{B}},\beta)$ 是 n 元 Hom- 代数。设 $f:\mathscr{A}\to\mathscr{B}$ 是一个 n 元 Hom- 代数同态，则如果 $\mathscr{A}$ 是乘法的，那么 $\mathscr{B}$ 是乘法的。此外，如果 f 是一个同构，那么 $\mathscr{A}$ 是乘法的当且仅当 $\mathscr{B}$ 是乘法的。

证明。设 $f:\mathscr{A}\to\mathscr{B}$是满同态，则对于所有 $y1,\ldots,y_n\in B$，都存在 $x1,\ldots,x_n\in A$，使得对于 $1\le i\le n$，有 $f(x_i)=y_i$，且 $\beta\circ f=f\circ\alpha$。假设 $\mathscr{A}$是乘法的，则有，

$$\begin{aligned} \beta\left([y_1,\ldots,y_n]_{\mathscr{B}}\right)&=\beta\left([f(x_1),\ldots,f(x_n)]_{\mathscr{B}}\right)\\ &=\beta\circ f\left([x_1,\ldots,x_n]_{\mathscr{A}}\right)=f\circ\alpha\left([x_1,\ldots,x_n]_{\mathscr{A}}\right)\\ &=[f\circ\alpha(x_1),\ldots,f\circ\alpha(x_n)]_{\mathscr{B}}=[\beta\circ f(x_1),\ldots,\beta\circ f(x_n)]_{\mathscr{B}}\\ &=[\beta(y_1),\ldots,\beta(y_n)]_{\mathscr{B}}. \end{aligned}$$

若 f 是同构，则可使用相同的论证，以 $f^{-1}$ 代替 f，证明其逆命题。

命题 8 (**[61]**).设 $(A\ [\cdot,\ldots,\cdot],\alpha)$ 是一个 n 元 Hom 代数，且 维数 $A=n+1$, $[\cdot,\ldots,\cdot]$斜对称， $\alpha$ 幂零， 维数$\ker\alpha=2$，其括号由矩阵 B 表示 $=(b_{i,j})$ 如 (8)所示，在一个 $\alpha$ 处于 Jordan 标准形的基下

形式。括号 $[\cdot,\ldots,\cdot]$ 满足 Hom-Nambu-Filippov恒等式，当且仅当

$$b_{i_0-1,j}b_{p,n+1}-b_{n+1,j}b_{p,i_0-1}=0,\forall\ 1\leq j,p\leq n+1,j\neq 1,j\neq i_0,$$

其中，\(i\) 满足 \(\ker\{v2\}e\{v3\}e\{v4\}\)。

注4. 我们来比较在维数 n $+1$ 下，具有不同类型扭曲映射时，由 Nambu-Filippov恒等式和 Hom-Nambu-Filippov恒等式得到的多项式方程：

可对角化且可逆，特征值为 $\lambda_i$、$1\leq$ i $\leq$n $+1$:

$$(\lambda_i b_{j,i}-\lambda_j b_{i,j})b_{p,k}+(\lambda_k b_{i,k}-\lambda_i b_{k,i})b_{p,j}+(\lambda_j b_{k,j}-\lambda_k b_{j,k})b_{p,i}=0,\qquad \forall\ 1\leq i,j,k,p\leq n+1; i<j<k; \tag{9}$$

可对角化，维数核为 $\alpha=1$，特征值为 $\lambda_i$、$1\leq$，$\leq$n $+1$:

$$\lambda_k b_{1,k}w_j-\lambda_k b_{j,k}w_1-\lambda_j b_{1,j}w_k+\lambda_j b_{k,j}w_1=0,\quad \forall\ 1<j<k\leq n+1; \tag{10}$$

可对角化，且 dimker $\alpha=2$，特征值为 $\lambda_i$、$1\leq$i 和 $\leq$n $+1$:

$$b_{1,k}w_2-b_{2,k}w_1=0,\quad \forall\ 3\leq k\leq n+1; \tag{11}$$

核的维数为 $\alpha=1$ 的幂零情形：

$$(b_{k-1,i}-b_{i-1,k})b_{p,n+1}-b_{n+1,i}b_{p,k-1}+b_{n+1,k}b_{p,i-1}=0,\qquad \forall\ 1\leq i,k,p\leq n+1,i<k; \tag{12}$$

核的维数为 $\alpha=2$ 的幂零元素：

$$b_{i_0-1,j}b_{p,n+1}-b_{n+1,j}b_{p,i_0-1}=0,\quad \forall\ 1\leq j,p\leq n+1,j\neq 1,j\neq i_0. \tag{13}$$

这些不同的情况彼此独立，而$n$-李代数的情形是（9）中所有 $\lambda_i$ 都相等的特殊情况。请注意，ker$\alpha$ 的维数越高，我们拥有的方程就越少，且每个方程中的项也越少；也就是说，在这些情况下，Hom-Nambu-Filippov恒等式的限制要宽松得多。与$n$-李代数的情形相比，另一个区别是，Hom-代数中的同构必须与乘法和扭曲映射相容，这导致同构条件有所不同且限制更严格，并且通常会产生更多同构类。

引理5。 设 $(A\ [\cdot,\ldots,\cdot],\alpha)$ 是一个 n 元 Hom 代数，且 维数$A=n+1$, $[\cdot,\ldots,\cdot]$斜对称且 $\alpha$幂零。设 $(e_i)_{1\leq i\leq n+1}$ 是 A 的一组基，其中 $\alpha$具有若尔当标准形，并考虑 $[\cdot,\ldots,\cdot]$ 按 (8)定义。

如果 \(\dim\ker\ \alpha\geq 2\)，则 \((A\ [\cdot,\ldots,\cdot],\alpha)\) 是乘法的，当且仅当 \( [A\ldots,A]\subseteq\ker\ \alpha\)。

若 dim ker$\alpha=1$，则 (A $[\cdot,\ldots,\cdot],\alpha$) 是乘法的，当且仅当 $\alpha(w_1)=(-1)^n w_{n+1}$且 $w_i\in\ker\alpha,\forall\ 2\leq$i $\leq$n $+1$，其中 $(w_i)$ 定义见式 (8)。

证明。设 dimker $\alpha \geq 2$，则对所有 $1 \leq i \leq n+1$,

$$\begin{aligned}\alpha(w_i) &= (-1)^{n+1+i}\alpha([e_1,\ldots,\widehat{e_i},\ldots,e_{n+1}]) \\ &= (-1)^{n+1+i}\left[\alpha(e_1),\ldots,\widehat{\alpha(e_i)},\ldots,\alpha(e_{n+1})\right] = 0,\end{aligned}$$

由于至少对于两个不同的指标 i 有 $e_i \in \ker\alpha$ for，即 $\alpha(e_1)\ldots,\alpha(e_i)\ldots,\alpha(e_{n+1})$ 中至少有一个为零。因此，$[A\ldots,A] = \langle w1,\ldots,w_{n+1}\rangle \subseteq \ker\alpha$。

现设维数 $\ker\alpha = 1$，则有 $\alpha(e_1) = 0$ 且 $\alpha(e_i) = e_{i-1}$ 对于 $2 \leq i \leq n+1$。我们得到

$$\begin{aligned}\alpha(w_1) &= (-1)^{n+1+1}\alpha([e_2,\ldots,e_{n+1}]) = (-1)^n[\alpha(e_2),\ldots,\alpha(e_{n+1})] \\ &= (-1)^n[e_1,\ldots,e_n] = (-1)^n(-1)^{n+1+n+1}w_{n+1} = (-1)^n w_{n+1}.\end{aligned}$$

对于 $i \neq 1$，我们有,

$$\begin{aligned}\alpha(w_i) &= (-1)^{n+1+i}\alpha([e_1,\ldots,\widehat{e_i},\ldots,e_{n+1}]) \\ &= (-1)^{n+1+i}\left[\alpha(e_1),\ldots,\widehat{\alpha(e_i)},\ldots,\alpha(e_{n+1})\right] \\ &= (-1)^{n+1+i}[0,e_1,\ldots,\widehat{e_{i-1}},\ldots,e_n] = 0,\end{aligned}$$

即 $\alpha(w_i) = 0$ 对于 $i \neq 1$。

命题 9. 设 $\mathscr{A} = (A\ [\cdot,\ldots,\cdot],\alpha)$ 是一个 $(n+1)$ 维数的 n-Hom-Lie 代数。如果 $\dim\ker\alpha \geq 2$，那么 $\mathscr{A}$ 是乘法的，当且仅当 $[\alpha]B = 0$，其中 $[\alpha]$ 和 B 是在任意给定基下分别表示扭曲映射 $\alpha$ 和括号的矩阵。

证明。设 $(e_i)_{1\leq i\leq n+1}$ 是 A 的一组基，其中包含 $\ker\alpha$ 的一组基。那么 $\mathscr{A}$ 是乘法的，当且仅当

$$\alpha([e_1,\ldots,\widehat{e_i},\ldots,e_{n+1}]) = \left[\alpha(e_1),\ldots,\widehat{\alpha(e_i)},\ldots,\alpha(e_{n+1})\right] \text{ for all } 1 \leq i \leq n+1.$$

另一方面，$\left[\alpha(e_1)\ldots,\ \widehat{\alpha}(e_i)\ldots,\ \alpha(e_{n+1})\right] = 0$，因为元素 $e1,\ldots,e_{i-1},e_{i+1},\ldots,e_{n+1}$ 中至少有一个属于 $\ker\alpha$。此外，$[\alpha]B$ 是一个矩阵，其列为 $(-1)^{n+i+1}\alpha([e1,\ldots,\widehat{e_i},\ldots,e_{n+1}])$ 的坐标。因此，$\alpha$ 是代数同态，当且仅当 $[\alpha]B = 0$。

现在设 $[\alpha]_2$ 和 $B_2$ 是在另一组基 $(e'_i)$ 下分别表示 $\alpha$ 和 $[\cdot,\ldots,\cdot]$ 的矩阵，那么存在一个可逆矩阵 P，使得 $[\alpha]_2 = P[\alpha]P^{-1}$ 且 $B_2 = (\det P)^{-1}PBP^T$，于是得到

$$\begin{aligned}[\alpha]_2B_2 &= (P[\alpha]P^{-1})((\det P)^{-1}PBP^T) \\ &= (\det P)^{-1}(P[\alpha]P^{-1}PBP^T) = (\det P)^{-1}(P[\alpha]BP^T).\end{aligned}$$

因此$[\alpha]_2B_2 = 0$ 当且仅当 $[\alpha]B = 0$，因为 P 可逆。

推论 3. 设 (A $[\cdot,\ldots,\cdot]$,α) 是一个 n 元 Hom 代数，且 dimA $=n+1$、$[\cdot,\ldots,\cdot]$ 斜对称并且 α 幂零。设 $(e_i)_{1\le i\le n+1}$ 是 A 的一组基，其中α 处于其若尔当标准形，并考虑将 $[\cdot,\ldots,\cdot]$ 定义为该基下的结构常数，即 $[e_{i_1},\ldots,e_{i_n}]=\sum_{k=1}^{\dim A} c^{k}_{i_1,\ldots,i_n}e_k$。

如果 dim ker $\alpha\ge 2$，则 (A $[\cdot,\ldots,\cdot]$,α) 是乘法的，当且仅当 $c^{k}_{i_1,\ldots,i_n}=0$，对于所有 $1\le i_1,\ldots,i_n\le \dim A$ 以及满足 $e_k\notin\ker\alpha$ 的 k。

注 5。当 dim A $=n+1$ 时，只需通过其结构常数将括号定义为 $[e_1,\ldots,\widehat{e_i},\ldots,e_{n+1}]=\sum_{k=1}^{\dim A} c^{k}_{1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,n+1}e_k$。式 (8) 中的参数 b(p, i) 为 $b(p,i)=(-1)^{n+1+i}c^{p}_{1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,n+1}$。

## 3 类 $\mathfrak{4}_{3,N(2),6}$ 四维 3-Hom-Lie代数

一类有趣的四维3-Hom-Lie代数 $\mathfrak{4}_{3,N(2),6}=(A\ [\cdot,\ldots,\cdot],\ \alpha)$按照式(8)在基 $(e_i)_{1\le i\le 4}$ 上定义如下

$$[\alpha]=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&c(1,3,4,1)&-c(1,2,4,1)&0\\0&c(1,3,4,2)&-c(1,2,4,2)&0\\0&c(1,3,4,3)&-c(1,2,4,3)&0\\0&c(1,3,4,4)&-c(1,2,4,4)&0\end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}&[e_1,e_2,e_3]=0\\&[e_1,e_2,e_4]=c(1,2,4,1)e_1+c(1,2,4,2)e_2+c(1,2,4,3)e_3+c(1,2,4,4)e_4\\&[e_1,e_3,e_4]=c(1,3,4,1)e_1+c(1,3,4,2)e_2+c(1,3,4,3)e_3+c(1,3,4,4)e_4\\&[e_2,e_3,e_4]=0,\end{aligned}$$

其中，$c(i_1,\ldots,i_n,k)=c^{k}_{i_1,\ldots,i_n}$ 是相对于以下对象的结构常数

$$[e_{i_1},\ldots,e_{i_n}]=\sum_{k=1}^{\dim A}c^{k}_{i_1,\ldots,i_n}e_k=\sum_{k=1}^{\dim A}c(i_1,\ldots,i_n,k)e_k.$$

将引理 5 应用于类 $\mathfrak{4}_{3,N(2),6}$ 的 3-Hom-Lie代数，可得以下结果，该结果描述了类 $\mathfrak{4}_{3,N(2),6}$ 中所有乘法的 3-Hom-Lie代数。

推论4。来自 $\mathfrak{4}_{3,N(2),6}$ 的 3-Hom-Lie代数是乘法的，当且仅当

$$c(1,2,4,3)=0,\ c(1,2,4,4)=0,\ c(1,3,4,3)=0,\ c(1,3,4,4)=0.$$

证明。根据引理5，3-Hom-Lie代数 $\mathfrak{4}_{3,N(2),6}$ 是乘法的，当且仅当$[e_1,e_2,e_4],[e_1,e_3,e_4]\in\ker\alpha$，其为 $\langle\{e_1,e_2\}\rangle$，而这当且仅当 $c(1,2,4,3)=0$、$c(1,2,4,4)=0$、$c(1,3,4,3)=0$、$c(1,3,4,4)=0$. □

因此，来自 $43,_{N(2),}$ 6 的 3-Hom-Lie代数属于乘法的 3-Hom-Lie代数的子类 $43,_{N(2),}$ 6, $_{M}$，当且仅当乘法（括号）定义为

$$\begin{aligned}
&[e_1,e_2,e_3]=0,\\
&[e_1,e_2,e_4]=c(1,2,4,1)e_1+c(1,2,4,2)e_2,\\
&[e_1,e_3,e_4]=c(1,3,4,1)e_1+c(1,3,4,2)e_2,\\
&[e_2,e_3,e_4]=0.
\end{aligned}$$

## 4 导出级数与中心降序列：适用于 $43,_{N(2),}6$

引理 1 的一个推论是，$n$-Hom-李代数的导出级数和中心降序列是代数不变量。这里，我们根据导出级数和中心降序列，将所考虑的这类3-Hom-Lie代数分为五个子类。属于不同子类的两个3-Hom-Lie代数必定不同构；我们以此作为进一步步骤，对这一类代数进行完整的同构分类。

对于 $n$-Hom-李代数，导出级数和中心降序列中的各项通常并非理想，这与 $n$-李代数的情形不同。在最一般的情况下，它们是弱子代数；如果扭曲映射是代数同态，则它们可以是子代数；如果扭曲映射是满射代数同态，则它们可以是理想，正如 [59] 所示。对于 $43,_{N(2),}$ 6, $_{M}$，我们有如下结果。

定理1. 考虑 $\mathscr{A}=(A\ [\cdot,\cdot,\cdot],\alpha)=4_{3,N(2),6}$。假设 $B\neq 0$ 并定义 $d(p,q)=c(1,2,4,p)c(1,3,4,q)-c(1,2,4,q)c(1,3,4,p)$，其中 $1\leq p,q\leq 4$，即 $d(p,q)$ 是定义 $\mathscr{A}$ 的括号的矩阵 B 的所有可能非零子式 $2\times 2$。那么 $\mathscr{A}$ 是 2阶 3-可解的。

$\mathscr{A}$ 是 2-可解的，当且仅当 $d(1,4)=0$，这进一步意味着存在 $(\lambda,\lambda')\in\mathbb{K}^2\setminus\{(0,0)\}$，使得 $\lambda d(2,4)+\lambda' d(1,2)=0$ 且 $\lambda d(3,4)+\lambda' d(1,3)=0$，或者等价地，秩 $\mathrm{Rank}\begin{pmatrix} d(2,4) & d(3,4)\\ d(1,2) & d(1,3)\end{pmatrix}<2$，这又等价于 $\begin{vmatrix} d(2,4) & d(3,4)\\ d(1,2) & d(1,3)\end{vmatrix}=0$。

如果 $\mathrm{Rank}B=2$，或者等价地，存在 $1\leq p<q\leq 4$，使得 $d(p,q)\neq 0$，那么

1) $Z(\mathscr{A})=\{0\}$. *This also means that* $4_{3,N(2),6}$ *is not nilpotent.*

2）若 $\mathscr{A}$ 是 2-可解的，则

2.a) *If* $\begin{pmatrix} d(2,4) & d(3,4)\\ d(1,2) & d(1,3)\end{pmatrix}\neq 0$, *then* $\mathscr{A}$ *is* 2*-solvable of class* 3.

2.b) *If* $\begin{pmatrix} d(2,4) & d(3,4)\\ d(1,2) & d(1,3)\end{pmatrix}=0$ *then,* $\mathscr{A}$ *is* 2*-solvable of class* 2.

若 RankB $=1$，或等价地，对所有 $1 \leq p < q \leq 4$，d(p,q) $=0$，则 $4_{3,\ N(2),\ 6}$ 是 2 阶 2-可解的，并且 dim Z($\mathscr{A}$) $=1$，且

$$Z(\mathscr{A}) = \langle \{ c(1,3,4,p)e_2 - c(1,2,4,p)e_3 \} \rangle,$$

其中 c(1, 2, 4, p) $\neq 0$或 c(1, 3, 4, p) $\neq 0$。此外，当且仅当 Z($\mathscr{A}$) $=$ [A, A, A], 时，该代数是幂零的；等价地，当且仅当 c(1, 2, 4, 1) $=$c(1, 2, 4, 4) $=$c(1, 3, 4, 1) $=$c(1, 3, 4, 4) $=0$，且 c(1, 3, 4, p)c(1, 2, 4, 3) $+$c(1, 2, 4, p)c(1, 2, 4, 2) $=0$，并且 c(1, 3, 4, p)c(1, 3, 4, 3) $+$ c(1, 2, 4, p)c(1, 3, 4, 2) $=0$。

证明。 根据注记 2，我们知道 $4_{3,N(2),6}$ 是 3-可解的。 $\mathscr{A}$ 的导出级数为

$$\begin{aligned} D_3^1(\mathscr{A}) = \langle \{ & c(1,2,4,1)e_1 + c(1,2,4,2)e_2 + c(1,2,4,3)e_3 + c(1,2,4,4)e_4, \\ & c(1,2,4,1)e_1 + c(1,2,4,2)e_2 + c(1,2,4,3)e_3 + c(1,2,4,4)e_4 \} \rangle, \end{aligned}$$

以及 $D_3^2(\mathscr{A}) = \left[ D_3^1(\mathscr{A}), D_3^1(\mathscr{A}), D_3^1(\mathscr{A}) \right] = \{0\}$，根据反对称性，因为 dim$D_3^1$(A) 小于 3（元数）。现在我们计算二阶导出列，

$$\begin{aligned} D_2^1(\mathscr{A}) = \langle \{ & c(1,2,4,1)e_1 + c(1,2,4,2)e_2 + c(1,2,4,3)e_3 + c(1,2,4,4)e_4, \\ & c(1,3,4,1)e_1 + c(1,3,4,2)e_2 + c(1,3,4,3)e_3 + c(1,3,4,4)e_4 \} \rangle \end{aligned}$$

我们有 $0 \leq$维 $D_2^1$(A) $\leq 2$。如果维数$D_2^1$(A) $=2$，那么

$$\begin{aligned} D_2^2(\mathscr{A}) &= \langle \{ [e_1, w_2, w_3], [e_2, w_2, w_3], [e_3, w_2, w_3], [e_4, w_2, w_3] \} \rangle \qquad (14) \\ &= \langle \{ (c(1,3,4,2)c(1,2,4,4) - c(1,3,4,4)c(1,2,4,2))w_3 \\ &\qquad - (c(1,3,4,3)c(1,2,4,4) - c(1,3,4,4)c(1,2,4,3))w_2, \\ &\quad - (c(1,3,4,1)c(1,2,4,4) - c(1,3,4,4)c(1,2,4,1))w_3, \\ &\quad - (c(1,3,4,1)c(1,2,4,4) - c(1,3,4,4)c(1,2,4,1))w_2, \\ &\quad (c(1,3,4,1)c(1,2,4,2) - c(1,3,4,2)c(1,2,4,1))w_3 \\ &\qquad - (c(1,3,4,1)c(1,2,4,3) - c(1,3,4,3)c(1,2,4,1))w_2 \} \rangle. \end{aligned}$$

如果 dim$D_2^2(\mathscr{A}) = 2$，那么 $D_2^2(\mathscr{A}) = D_2^1(\mathscr{A})$，因为 $D_2^2(\mathscr{A}) \subseteq D_2^1(\mathscr{A})$ 且具有相同的维数。由此我们得出，在这种情况下，A 不是 2-可解的。

若 dim $D_2^2(\mathscr{A}) = 1$，则 $D_2^2(\mathscr{A}) = \langle \{v\} \rangle$ with $v \in$A, $v \neq 0$。在这种情况下，$D_2^3(\mathscr{A}) = \langle \{ [e_i, v, v], 1 \leq i \leq 4 \} \rangle$，即 $D_2^3(\mathscr{A}) = \{0\}$，且 A 是 3 类 2-可解的。当且仅当式 (14) 中列出的 $D_2^2(\mathscr{A})$ 的生成元族的秩为 1 时，这种情况才会出现；也就是说，当且仅当存在某个 $\lambda, \lambda' \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} & (c(1,3,4,1)c(1,2,4,4) - c(1,3,4,4)c(1,2,4,1)) = 0, \\ & \lambda (c(1,3,4,2)c(1,2,4,4) - c(1,3,4,4)c(1,2,4,2)) \\ & \quad + \lambda' (c(1,3,4,1)c(1,2,4,2) - c(1,3,4,2)c(1,2,4,1)) = 0, \\ & \lambda (c(1,3,4,3)c(1,2,4,4) - c(1,3,4,4)c(1,2,4,3)) \\ & \quad + \lambda' (c(1,3,4,1)c(1,2,4,3) - c(1,3,4,3)c(1,2,4,1)) = 0. \end{aligned}$$

另一方面，我们有

$$\det\begin{pmatrix} d(2,4) & d(3,4) \\ d(1,2) & d(1,3) \end{pmatrix} = (c(1,2,4,3)c(1,3,4,2) - c(1,2,4,2)c(1,3,4,3))\times \\ \times (c(1,2,4,4)c(1,3,4,1) - c(1,2,4,1)c(1,3,4,4) \\ = d(2,3)d(1,4),$$

这意味着 $\det\begin{pmatrix} \mathrm{d(2,\ 4)} & \mathrm{d(3,4)} & \mathrm{d(1,\ 2)} & \mathrm{d(1,3)} \end{pmatrix} = 0$ 当且仅当 $\mathrm{d(2,3)} = 0$ 或 $\mathrm{d(1,4)} = 0$。这也意味着，条件 $\det\begin{pmatrix} \mathrm{d(2,\ 4)} & \mathrm{d(3,\ 4)} & \mathrm{d(1,\ 2)} & \mathrm{d(1,\ 3)} \end{pmatrix} = 0$ 且 $\mathrm{d(1,\ 4)} = 0$ 等价于仅仅说明 $\mathrm{d(1,4)} = 0$。

式(14)中 $\mathrm{D}_2^2\mathrm{(A)}$ 的生成元所出现的系数是矩阵 $\begin{pmatrix} \mathrm{d(2,\ 4)} & \mathrm{d(3,\ 4)} & \mathrm{d(1,\ 2)} & \mathrm{d(1,\ 3)} \end{pmatrix}$ 的各项，也就是说，$\mathrm{D}_2^2\mathrm{(A)} = \{0\}$ 当且仅当 $\begin{pmatrix} \mathrm{d(2,\ 4)} & \mathrm{d(3,\ 4)} & \mathrm{d(1,\ 2)} & \mathrm{d(1,\ 3)} \end{pmatrix} = 0.$

若 $\dim \mathrm{D}_2^1\mathrm{(A)} = 1$，则 $\mathrm{D}_2^2\mathrm{(A)}$ 的生成元中出现的所有系数均为零，因为它们是秩为 1 的矩阵 B 的 $2\times 2$ 子式。这意味着 $\mathrm{D}_2^2\mathrm{(A)} = \{0\}$，且 A 是 2阶的 2-可解代数。

我们知道，一个 $(\mathrm{n}+1)$ 维的 n-Hom-李代数是幂零且非阿贝尔的，当且仅当 $[\mathrm{A}\ldots,\mathrm{A}] = \mathrm{Z(A)}$，并且 $\dim \mathrm{Z(A)} = 1$（见 [61] 命题 9）。因此，若 $\dim[\mathrm{A}\ldots,\mathrm{A}] = 2$，则 A 不是幂零的。在这种情况下，对于所有 $\mathrm{r} \geq 1$，$\mathrm{C}_k^r\mathrm{(A)} = \langle\{\mathrm{w}_2,\mathrm{w}_3\}\rangle$。现在考虑 $\mathscr{A}$ 的中心，

$$Z(A) = \{z = \sum_{k=1}^{4} z_k e_k \mid \forall\, x,y \in A, [x,y,z] = 0\} \\ = \{z = \sum_{k=1}^{4} z_k e_k \mid \forall\, 1 \leq i < j \leq 4, [e_i,e_j,z] = 0\}$$

并得到以下方程组

$$c(1,2,4,1)z_1 = 0;\ c(1,2,4,2)z_1 = 0;\ c(1,2,4,3)z_1 = 0;\ c(1,2,4,4)z_1 = 0; \\ c(1,3,4,1)z_1 = 0;\ c(1,3,4,2)z_1 = 0;\ c(1,3,4,3)z_1 = 0;\ c(1,3,4,4)z_1 = 0; \\ c(1,2,4,1)z_2 + c(1,3,4,1)z_3 = 0;\ c(1,2,4,2)z_2 + c(1,3,4,2)z_3 = 0; \\ c(1,2,4,3)z_2 + c(1,3,4,3)z_3 = 0;\ c(1,2,4,4)z_2 + c(1,3,4,4)z_3 = 0; \\ c(1,2,4,1)z_4 = 0;\ c(1,2,4,2)z_4 = 0;\ c(1,2,4,3)z_4 = 0;\ c(1,2,4,4)z_4 = 0; \\ c(1,3,4,1)z_4 = 0;\ c(1,3,4,2)z_4 = 0;\ c(1,3,4,3)z_4 = 0;\ c(1,3,4,4)z_4 = 0.$$

则我们得到，代数是阿贝尔的，当且仅当 $\mathrm{z}_1 \neq 0$ or $\mathrm{z}_4 \neq 0$，即对于所有 $1 \leq \mathrm{i} \leq 4$，$\mathrm{c(1,2,4,i)} = \mathrm{c(1,\ 3,\ 4,\ i)} = 0$。排除这种情况，我们得到以下方程组。

$$c(1,2,4,1)z_2 + c(1,3,4,1)z_3 = 0;\ c(1,2,4,2)z_2 + c(1,3,4,2)z_3 = 0, \\ c(1,2,4,3)z_2 + c(1,3,4,3)z_3 = 0;\ c(1,2,4,4)z_2 + c(1,3,4,4)z_3 = 0.$$

这等价于 $z_2w_3 + z_3w_2 = 0$。因此，维数Z($\mathscr{A}$) = 1 当且仅当 RankB = 维数$\langle\{w_2,w_3\}\rangle = 1$。在这种情况下，

$$\begin{aligned} Z(A) &= \{z = \sum_{k=1}^{4} z_k e_k \in A : z_1 = z_4 = 0 \text{ and } c(1,2,4,p)z_2 + c(1,3,4,p)z_3 = 0\} \\ &= \{z_2 e_2 - \frac{z_2 c(1,2,4,p)}{c(1,3,4,p)} e_3 : z_2 \in \mathbb{K}\} \\ &= \{z_2(c(1,3,4,p)e_2 - c(1,2,4,p)e_3) : z_2 \in \mathbb{K}\} \end{aligned}$$

如果存在 $1 \leq p \leq 4$ 使得 c(1, 3, 4, p) $\neq 0$，并且

$$\begin{aligned} Z(A) &= \{z = \sum_{k=1}^{4} z_k e_k \in A : z_1 = z_4 = 0 \text{ and } c(1,2,4,p)z_2 + c(1,3,4,p)z_3 = 0\} \\ &= \{-z_3 \frac{c(1,3,4,p)}{c(1,2,4,p)} e_2 + z_3 e_3 : z_3 \in \mathbb{K}\} \\ &= \{z_3(c(1,3,4,p)e_2 - c(1,2,4,p)e_3) : z_3 \in \mathbb{K}\} \\ &= \{z_3 e_3 : z_3 \in \mathbb{K}\} \end{aligned}$$

否则。根据命题 5，$\mathscr{A}$是幂零的，当且仅当 $Z(\mathscr{A}) = [A, A, A]$, 因为维数 $Z(\mathscr{A}) = 1$。现在，我们证明这等价于

$$\begin{aligned} c(1,2,4,1) = c(1,2,4,4) = c(1,3,4,1) = c(1,3,4,4) = 0, \\ c(1,3,4,p)c(1,2,4,3) + c(1,2,4,p)c(1,2,4,2) = 0, \\ c(1,3,4,p)c(1,3,4,3) + c(1,2,4,p)c(1,3,4,2) = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Z($\mathscr{A}$) = [A, A, A]当且仅当 $\dim\langle\{w_2,w_3,c(1,3,4,p)e_2 - c(1,2,4,p)e_3\}\rangle = 1$，这等价于秩 $\begin{pmatrix} c(1,3,4,1) & -c(1,2,4,1) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$ $\begin{matrix} c(1,3,4,2) & -c(1,2,4,2) \\ c(1,3,4,p) & c(1,3,4,3) \end{matrix}$ $\begin{matrix} -c(1,2,4,3) & -c(1,2,4,p) \\ c(1,3,4,4) & -c(1,2,4,4) \end{matrix}$，也就是说，该矩阵的所有 $2 \times 2$ 子式均为零，由此得到方程组 (15)。 □

推论 5. 具有 B $\neq 0$ 的 3-Hom-Lie代数类 $4_{3,N(2),6}$ 可分为五个非同构子类:

1) 3-可解、2阶、非 2-可解、非幂零，且具有平凡中心:

$$\begin{aligned} &[e_1,e_2,e_3] = 0 \\ &[e_1,e_2,e_4] = c(1,2,4,1)e_1 + c(1,2,4,2)e_2 + c(1,2,4,3)e_3 + c(1,2,4,4)e_4 \\ &[e_1,e_3,e_4] = c(1,3,4,1)e_1 + c(1,3,4,2)e_2 + c(1,3,4,3)e_3 + c(1,3,4,4)e_4 \\ &[e_2,e_3,e_4] = 0 \end{aligned}$$

*with* $d(1,4) \neq 0$, *in that case we have Rank* $\begin{pmatrix} d(2,4) & d(3,4) \\ d(1,2) & d(1,3) \end{pmatrix} = 2.$

2) 3-可解、2阶、2-可解、3 类、非幂零，且具有平凡中心：

$$\begin{aligned}
&[e_1,e_2,e_3]=0\\
&[e_1,e_2,e_4]=c(1,2,4,1)e_1+c(1,2,4,2)e_2+c(1,2,4,3)e_3+c(1,2,4,4)e_4\\
&[e_1,e_3,e_4]=\lambda c(1,2,4,1)e_1+c(1,3,4,2)e_2+c(1,3,4,3)e_3+\lambda c(1,2,4,4)e_4\\
&[e_2,e_3,e_4]=0
\end{aligned}$$

当 (c(1, 2, 4, 1), c(1, 2, 4, 4)) $\neq$(0,0) 或

$$\begin{aligned}
&[e_1,e_2,e_3]=0\\
&[e_1,e_2,e_4]=c(1,2,4,2)e_2+c(1,2,4,3)e_3\\
&[e_1,e_3,e_4]=c(1,3,4,1)e_1+c(1,3,4,2)e_2+c(1,3,4,3)e_3+c(1,3,4,4)e_4\\
&[e_2,e_3,e_4]=0
\end{aligned}$$

*such that Rank* $\begin{pmatrix} d(2,4) & d(3,4)\\ d(1,2) & d(1,3)\end{pmatrix}=1.$

3）3-可解的2阶、2-可解的2阶、非幂零、具有平凡中心：

$$\begin{aligned}
&[e_1,e_2,e_3]=0\\
&[e_1,e_2,e_4]=c(1,2,4,2)e_2+c(1,2,4,3)e_3\\
&[e_1,e_3,e_4]=c(1,3,4,2)e_2+c(1,3,4,3)e_3\\
&[e_2,e_3,e_4]=0
\end{aligned}\quad,\quad \textit{with } d(2,3)\neq 0.$$

4）3-可解的2阶、2-可解的2阶、非幂零、具有1维中心：

$$\begin{aligned}
&[e_1,e_2,e_3]=0\\
&[e_1,e_2,e_4]=c(1,2,4,1)e_1+c(1,2,4,2)e_2+c(1,2,4,3)e_3+c(1,2,4,4)e_4\\
&[e_1,e_3,e_4]=\lambda c(1,2,4,1)e_1+\lambda c(1,2,4,2)e_2+\lambda c(1,2,4,3)e_3\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad+\lambda c(1,2,4,4)e_4\\
&[e_2,e_3,e_4]=0
\end{aligned}$$

当 $[e_1,e_2,e_4]\neq 0$（即并非所有 c(1,2,4,1)、c(1,2,4,2)、c(1,2,4,3)、c(1,2,4,4) 都为零）时，或

$$\begin{aligned}
&[e_1,e_2,e_3]=0\\
&[e_1,e_2,e_4]=0\\
&[e_1,e_3,e_4]=c(1,3,4,1)e_1+c(1,3,4,2)e_2+c(1,3,4,3)e_3+c(1,3,4,4)e_4\\
&[e_2,e_3,e_4]=0
\end{aligned}$$

5) 2阶的3-可解、2阶的2-可解、2阶幂零，且中心为1维：

$$\begin{array}{l}[e_1,e_2,e_3]=0\\ [e_1,e_2,e_4]=c(1,2,4,2)e_2+c(1,2,4,3)e_3\\ [e_1,e_3,e_4]=\frac{-c(1,2,4,2)^2}{c(1,2,4,3)}e_2-c(1,2,4,2)e_3\\ [e_2,e_3,e_4]=0\end{array} \quad , \quad c(1,2,4,3)\neq 0$$

*or*

$$\begin{array}{l}[e_1,e_2,e_3]=0\\ [e_1,e_2,e_4]=c(1,2,4,2)e_2+\frac{-c(1,2,4,2)^2}{c(1,3,4,2)}e_3\\ [e_1,e_3,e_4]=c(1,3,4,2)e_2-c(1,2,4,2)e_3\\ [e_2,e_3,e_4]=0\end{array} \quad , \quad c(1,3,4,2)\neq 0$$

注6. 在上述最后一种情况下，c(1,3,4,2) $\neq 0$ 或c(1,2,4,3) $\neq 0$；若二者均为零，则括号为零。

推论6. 推论 *5*中给出的子类里，情形1和3不可能是乘法的。所考虑的类中的所有乘法的 3-Hom-Lie代数均包含在其余子类中：

2m) 3-可解的 2 阶、2-可解的 3 类、非幂零，且具有平凡中心

$$\begin{array}{l}[e_1,e_2,e_3]=0\\ [e_1,e_2,e_4]=c(1,2,4,1)e_1+c(1,2,4,2)e_2\\ [e_1,e_3,e_4]=c(1,3,4,1)e_1+c(1,3,4,2)e_2\\ [e_2,e_3,e_4]=0\end{array}$$

*with* $d(1,2)=c(1,2,4,1)c(1,3,4,2)-c(1,2,4,2)c(1,3,4,1)\neq 0.$

4m) 3-可解的2阶、2-可解的2阶、非幂零，且具有1维中心

$$\begin{array}{l}[e_1,e_2,e_3]=0\\ [e_1,e_2,e_4]=c(1,2,4,1)e_1+c(1,2,4,2)e_2\\ [e_1,e_3,e_4]=\lambda c(1,2,4,1)e_1+\lambda c(1,2,4,2)e_2\\ [e_2,e_3,e_4]=0\end{array}$$

5m）3-可解的2阶类、2-可解的2阶类、2阶幂零类，且中心维数为1

$$\begin{array}{l}[e_1,e_2,e_3]=0\\ [e_1,e_2,e_4]=0\\ [e_1,e_3,e_4]=c(1,3,4,2)e_2\\ [e_2,e_3,e_4]=0\end{array} \quad , \quad c(1,3,4,2)\neq 0.$$

## 5 关于$4_{3,N(2),6}$ 的同构类

以下定理给出了 3-Hom-Lie代数 $4_{3,N(2),6}$ 这一类代数在同构意义下的分类。需要注意的是，这里所考虑的同构是指 Hom-代数意义下的同构，即不仅要求保持乘法结构，还要求与扭曲映射相互交织。

定理 2. 类 $4_{3,N(2),6}$中任意满足 $B \neq 0$ 的 3-Hom-Lie代数 $\mathscr{A}$ 同构于以下某个代数:

1) $\dim D_3^1(\mathscr{A}) = 2$，非 2-可解、非幂零，且中心平凡:

1.a) $c(1,2,4,4) \neq 0$.

$$\begin{aligned}
&[e_1,e_2,e_3] = 0\\
&[e_1,e_2,e_4] = e_4\\
&[e_1,e_3,e_4] = c'(1,3,4,1)e_1 + c'(1,3,4,3)e_3 + c'(1,3,4,4)e_4\\
&[e_2,e_3,e_4] = 0,
\end{aligned}$$

$$c'(1,3,4,1) = \frac{-d(1,4)}{c(1,2,4,4)} \neq 0, \quad c'(1,3,4,3) = \frac{-d(3,4)}{c(1,2,4,4)^2},$$
$$c'(1,3,4,4) = \frac{c(1,2,4,3)+c(1,3,4,4)}{c(1,2,4,4)}.$$

两个这样的代数分别由结构常数 (c′(i, j,k, p)) 和 (c″(i, j, k, p)) 给出；它们同构，当且仅当 c′(1,3,4,3) =c″(1, 3, 4, 3)、c′(1, 3, 4,4) =c″(1,3,4,4)，且 c′(1,3,4,1) c″(1,3,4,1) 是 $\mathbb{K}$ 中的一个平方。因此，这族代数按同构分类由 $\mathbb{K}^* \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ 参数化，其中 $\mathbb{K}^*$ $(\mathbb{K}^*)^2$ 是 $\mathbb{K}^*$ 关于 $(\mathbb{K}^*)^2 = \{x^2 | x \in \mathbb{K}^*\}$ 的商群。

1.b) c(1, 2, 4, 4) $= 0$，c(1, 2,4,3) $\neq 0$ 和 c(1,2,4,3) $\neq$c(1,3,4,4)。在这种情况下，c(1, 2, 4, 1) 和 c(1, 3,4,4) 均非零，因为 d(1,4) $\neq 0$。

$$\begin{aligned}
&[e_1,e_2,e_3] = 0\\
&[e_1,e_2,e_4] = c'(1,2,4,1)e_1 + e_3\\
&[e_1,e_3,e_4] = c'(1,3,4,4)e_4\\
&[e_2,e_3,e_4] = 0,
\end{aligned}, \quad \begin{aligned}
&c'(1,2,4,1) = c(1,2,4,1) \neq 0,\\
&c'(1,3,4,4) = \tfrac{c(1,3,4,4)}{c(1,2,4,3)} \neq 0.
\end{aligned}$$

两个这样的代数，分别由结构常数 (c′(i, j,k, p)) 和 (c″(i, j, k, p)) 给出，当且仅当 c′(1,2,4,1) c″(1,2,4,1) 是 $\mathbb{K}$ 中的一个平方时，它们才是同构的。

1.c) c(1, 2, 4, 4) $= 0$、c(1, 2,4,3) $\neq 0$和 c(1,2,4,3) =c(1,3,4,4)。在这种情况下，c(1, 2, 4, 1) 和 c(1,3,4,4) 也非零，因为 d(1,4) $\neq 0$。

$$\begin{array}{l}[e_1,e_2,e_3]=0\\ [e_1,e_2,e_4]=c'(1,3,4,3)e_3+e_4\\ [e_1,e_3,e_4]=c'(1,2,4,1)e_1+e_3\\ [e_2,e_3,e_4]=0,\end{array}\quad,\quad\begin{array}{l}c'(1,3,4,3)=\frac{c(1,3,4,4)}{c(1,2,4,3)}\neq 0,\\ c'(1,2,4,1)=c(1,2,4,1)\neq 0.\end{array}$$

由结构常数 (c′(i, j,k, p)) 和 (c″(i, j, k, p)) 分别给出的两个此类代数同构，当且仅当 $c'_{(1,2,4,1)}\,c''_{(1,2,4,1)}$ 是 $\mathbb{K}$ 中的一个平方。

1.d) $c(1,2,4,4)=0$和 $c(1,2,4,3)=0$。同样，在此情形下，$c(1,2,4,1)$ 和 $c(1,3,4,4)$ 均非零，因为 $d(1,4)\neq 0$。

$$\begin{array}{l}[e_1,e_2,e_3]=0\\ [e_1,e_2,e_4]=c'(1,2,4,1)e_1\\ [e_1,e_3,e_4]=e_4\\ [e_2,e_3,e_4]=0,\end{array}\quad,\quad c'(1,2,4,1)=c(1,2,4,1).$$

由结构常数 (c′(i, j,k, p)) 和 (c″(i, j, k, p)) 给出的两个此类括号同构，当且仅当 $c'_{(1,2,4,1)}\,c''_{(1,2,4,1)}$ 在 $\mathbb{K}$ 中~~是一个~~平方。特别是，如果 $c(1,2,4,1)$ 在 $\mathbb{K}$ 中是一个平方，则得到如下括号

$$\begin{array}{l}[e_1,e_2,e_3]=0\\ [e_1,e_2,e_4]=e_1\\ [e_1,e_3,e_4]=e_4\\ [e_2,e_3,e_4]=0.\end{array}$$

2) $\dim D_3^1(\mathscr{A})=2$，2-可解、3 类、非幂零且具有平凡中心，即 $d(1,4)=0$，$\left(d(2,4)\,d(3,4)\,d(1,2)\,d(1,3)\right)\neq 0$，等价于 $(c(1,2,4,1),c(1,2,4,4))\neq(0,0)$ 和 $(c(1,3,4,1),c(1,3,4,4))=\lambda(c(1,2,4,1),c(1,2,4,4))$，其中某个 $\lambda\in\mathbb{K}$，或 $(c(1,2,4,1),c(1,2,4,4))=(0,0)$ 且 $(c(1,3,4,1),c(1,3,4,4))\neq(0,0)$:

2.a) $c(1,2,4,4)\neq 0$，因此 $(c(1,2,4,1),c(1,2,4,4))\neq(0,0)$

$$\begin{array}{l}[e_1,e_2,e_3]=0\\ [e_1,e_2,e_4]=e_4\\ [e_1,e_3,e_4]=c'(1,3,4,2)e_2+c'(1,3,4,3)e_3+c'(1,3,4,4)e_4\\ [e_2,e_3,e_4]=0,\end{array}$$

$$\begin{aligned}c'(1,3,4,2)&=\frac{\lambda c(1,2,4,3)^2-\lambda c(1,2,4,2)c(1,2,4,4)}{c(1,2,4,4)^2}\\ &\quad+\frac{-c(1,3,4,3)c(1,2,4,3)+c(1,2,4,4)c(1,3,4,2)}{c(1,2,4,4)^2},\\ c'(1,3,4,3)&=\frac{c(1,3,4,3)-\lambda c(1,2,4,3)}{c(1,2,4,4)},\end{aligned}$$

$$c'(1,3,4,4)=\frac{\lambda c(1,2,4,4)+c(1,2,4,3)}{c(1,2,4,4)}.$$

这种形式的任意两个不同括号所对应的3-Hom-Lie代数均不同构。

2.b) (c(1, 2, 4, 1), c(1, 2, 4, 4)) $\neq$(0, 0), 且 c(1, 2, 4, 4) $=0$, 这意味着 c(1, 2, 4, 1) $\neq 0$ （否则该代数将是2阶2-可解的）。对于 c(1, 2, 4, 3) $\neq 0$,

$$\begin{aligned}
&[e_1,e_2,e_3]=0\\
&[e_1,e_2,e_4]=c'(1,2,4,1)e_1+e_3\\
&[e_1,e_3,e_4]=\lambda' c'(1,2,4,1)e_1+c'(1,3,4,2)e_2\\
&[e_2,e_3,e_4]=0,\\
&c'(1,2,4,1)=c(1,2,4,1)\neq 0,\quad \lambda'=\frac{\lambda c(1,2,4,3)-c(1,3,4,3)}{c(1,2,4,3)},\\
&c'(1,3,4,2)=\frac{-\lambda c(1,2,4,3)c(1,3,4,3)-\lambda c(1,2,4,2)c(1,2,4,3)}{c(1,2,4,3)^2}\\
&\qquad\qquad +\frac{c(1,3,4,3)^2+c(1,2,4,3)c(1,3,4,2)}{c(1,2,4,3)^2}.
\end{aligned}$$

由结构常数 (c′(i, j,k, p)) 和 (c″(i, j, k, p)) 给出的两个这样的括号定义的代数同构，当且仅当 $c'_{(1,2,4,1)}$ $c''_{(1,2,4,1)}$ 是 $\mathbb{K}$ 中的~~一个平方~~。

2.c) (c(1, 2, 4, 1), c(1, 2, 4, 4)) $\neq$(0, 0) 和 c(1, 2, 4, 4) $=0$, 这意味着 c(1, 2, 4, 1) $\neq 0$ （否则该代数将是 2阶的 2-可解代数）。对于 c(1, 2, 4, 3) $=0$和 c(1, 3, 4, 3) $\neq 0$,

$$\begin{aligned}
&[e_1,e_2,e_3]=0\\
&[e_1,e_2,e_4]=c'(1,2,4,1)e_1\\
&[e_1,e_3,e_4]=\lambda' c'(1,2,4,1)e_1+e_3\\
&[e_2,e_3,e_4]=0,\\
&\lambda'=\frac{-\lambda c(1,2,4,2)+\lambda c(1,3,4,3)+c(1,3,4,2)}{c(1,3,4,3)},\\
&c'(1,2,4,1)=c(1,2,4,1).
\end{aligned}$$

由结构常数 (c′(i, j,k, p)) 和 (c″(i, j, k, p)) 给出的两个此类括号同构，当且仅当 $c'_{(1,\ 2,\ 4,\ 1)}$ $c''_{(1,\ 2,\ 4,\ 1)}$ 在~~$\mathbb{K}$ 中是~~一个平方。

2.d) (c(1, 2, 4, 1), c(1, 2, 4, 4)) $\neq$(0, 0) 且 c(1, 2, 4, 4) $=0$, 这意味着 c(1, 2, 4, 1) $\neq 0$ （否则该代数将是 2-可解的 2阶代数）。我们考虑 c(1, 2, 4, 3) $=0$和 c(1, 3, 4, 3) $=0$。在这种情况下，该代数是乘法的。

$$\begin{array}{l}[e_1,e_2,e_3]=0\\ [e_1,e_2,e_4]=c'(1,2,4,1)e_1\\ [e_1,e_3,e_4]=e_2\\ [e_2,e_3,e_4]=0,\end{array}\quad,\quad c'(1,2,4,1)=c(1,2,4,1)\neq 0.$$

由结构常数 (c′(i, j,k, p)) 和 (c″(i, j, k, p)) 给出的两个此类括号定义同构代数，当且仅当 $c'_{(1,2,4,1)}\,c''_{(1,2,4,1)}$ 是 $\mathbb{K}$ 中的一个平方。

2.e) (c(1, 2, 4, 1), c(1, 2, 4,4)) $=$(0,0) 和 (c(1,3,4,1),c(1,3,4,4)) $\neq$(0,0), c(1, 2, 4, 3) $\neq 0$

$$\begin{array}{l}[e_1,e_2,e_3]=0\\ [e_1,e_2,e_4]=e_3\\ [e_1,e_3,e_4]=c'(1,3,4,3)e_3+c'(1,3,4,4)e_4\\ [e_2,e_3,e_4]=0,\end{array}$$

$$c'(1,3,4,3)=\frac{c(1,2,4,2)c(1,2,4,3)+c(1,3,4,3)c(1,2,4,3)}{c(1,2,4,3)^2}-\frac{c(1,2,4,2)c(1,3,4,4)}{c(1,2,4,3)^2},$$

$$c'(1,3,4,4)=\frac{c(1,3,4,4)}{c(1,2,4,3)}.$$

这种形式的任意两个不同括号都给出非同构的3-Hom-Lie代数。

2.f) (c(1, 2, 4, 1), c(1, 2, 4,4)) $=$(0,0) 和 (c(1,3,4,1),c(1,3,4,4)) $\neq$(0,0), c(1, 2, 4, 3) $=0$, c(1, 3,4,4) $\neq 0$

$$\begin{array}{l}[e_1,e_2,e_3]=0\\ [e_1,e_2,e_4]=c'(1,2,4,2)e_2\\ [e_1,e_3,e_4]=e_4\\ [e_2,e_3,e_4]=0,\end{array}\quad,\quad c'(1,2,4,2)=\frac{c(1,2,4,2)}{c(1,3,4,4)}.$$

2.g) (c(1, 2, 4, 1), c(1, 2, 4,4)) $=$(0,0) 和 (c(1,3,4,1),c(1,3,4,4)) $\neq$(0,0), c(1, 2, 4, 3) $=0$、c(1, 3,4,4) $=0$ 和 c(1,3,4,3) $\neq 0$

$$\begin{array}{l}[e_1,e_2,e_3]=0\\ [e_1,e_2,e_4]=c'(1,2,4,2)e_2\\ [e_1,e_3,e_4]=c'(1,3,4,1)e_1+e_3\\ [e_2,e_3,e_4]=0,\end{array}\quad,\quad\begin{array}{l}c'(1,2,4,2)=\frac{c(1,2,4,2)}{c(1,3,4,3)},\\ c'(1,3,4,1)=c(1,3,4,1).\end{array}$$

由结构常数 (c′(i, j,k, p)) 和 (c″(i, j, k, p)) 给出的这两个括号定义同构代数，当且仅当 c′(1,2,4,2) $=$c″(1, 2, 4, 2) 且 $c'_{(1,3,4,1)}\,c''_{(1,3,4,1)}$ 是 $\mathbb{K}$ 中的一个平方。

2.h) (c(1, 2, 4, 1), c(1, 2, 4,4)) $=$(0,0) 且 (c(1,3,4,1),c(1,3,4,4)) $\neq$(0,0), c(1, 2, 4, 3) $=0$, c(1, 3,4,4) $=0$且 c(1,3,4,3) $=0$。该代数是乘法的,

$$\begin{array}{l}[e_1,e_2,e_3]=0\\ [e_1,e_2,e_4]=e_2\\ [e_1,e_3,e_4]=c'(1,3,4,1)e_1\\ [e_2,e_3,e_4]=0\end{array}\quad,\quad c'(1,3,4,1)=c(1,3,4,1)\neq 0.$$

这两个由结构常数 (c′(i, j,k, p)) 和 (c″(i, j, k, p)) 给出的括号定义同构代数，当且仅当 $c'_{(1,3,4,1)}$ $c''_{(1,3,4,1)}$ 是 $\mathbb{K}$中的一个平方。

3) 维数 $D_3^1(\mathscr{A})=2$, 2-可解、2阶、非幂零且具有平凡中心:

3.a) c(1,2,4,3) $\neq 0$

$$\begin{aligned}&[e_1,e_2,e_3]=0\\ &[e_1,e_2,e_4]=c'(1,2,4,2)e_2+e_3\\ &[e_1,e_3,e_4]=c'(1,3,4,2)e_2\\ &[e_2,e_3,e_4]=0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c'(1,3,4,2)&=\frac{c(1,2,4,3)c(1,3,4,2)-c(1,2,4,2)c(1,3,4,3)}{c(1,2,4,3)^2},\\ c'(1,2,4,2)&=\frac{-c(1,2,4,2)-c(1,3,4,3)}{c(1,2,4,3)}.\end{aligned}$$

3.b) c(1, 2, 4, 3) $=0$, c(1,3,4,3) $\neq 0$和 c(1,3,4,3) $\neq$c(1,2,4,2)

$$\begin{array}{l}[e_1,e_2,e_3]=0\\ [e_1,e_2,e_4]=c'(1,2,4,2)e_2\\ [e_1,e_3,e_4]=e_3\\ [e_2,e_3,e_4]=0\end{array}\quad,\quad c'(1,2,4,2)=\frac{c(1,2,4,2)}{c(1,3,4,3)}.$$

3.c) c(1, 2, 4, 3) $=0$, c(1, 3, 4, 3) $\neq 0$ 和 c(1, 3, 4, 3) $=$c(1, 2, 4, 2)

$$\begin{array}{l}[e_1,e_2,e_3]=0\\ [e_1,e_2,e_4]=e_2\\ [e_1,e_3,e_4]=c'(1,3,4,2)e_2+e_3\\ [e_2,e_3,e_4]=0\end{array}\quad,\quad c'(1,3,4,2)=\frac{c(1,3,4,2)}{c(1,3,4,3)}.$$

4) dim $D_3^1(\mathscr{A})=1$, 2-可解的2阶代数, 非幂零, 且中心为1维:

4.a) $w_3\neq 0$, $w_2=\lambda w_3$ *with* $\lambda\in\mathbb{K}$ *and* $c(1,2,4,4)\neq 0$

$$\begin{array}{l}[e_1,e_2,e_3]= \quad 0\\ [e_1,e_2,e_4]= \quad e_4\\ [e_1,e_3,e_4]= \quad \lambda' e_4\\ [e_2,e_3,e_4]=0\end{array} \quad , \quad \lambda' = \frac{c(1,2,4,3)}{c(1,2,4,4)} + \lambda .$$

参数为 $\lambda'$ 和 $\lambda''$ 的这两个括号定义的3-Hom-李代数同构，当且仅当 $\lambda' = \lambda''$.

4.b) $w_3 \neq 0$, $w_2 = \lambda w_3$，其中 $\lambda \in \mathbb{K}$，且 c(1,2,4,4) $= 0$、c(1,2,4,3) $\neq 0$、c(1, 2, 4, 1) $\neq 0$

$$\begin{array}{l}[e_1,e_2,e_3]=0\\ [e_1,e_2,e_4]=e_1+c'(1,2,4,3)e_3\\ [e_1,e_3,e_4]=0\\ [e_2,e_3,e_4]=0\end{array} \quad , \quad c'(1,2,4,3) = c(1,2,4,3) \neq 0.$$

由结构常数 (c′(i, j,k, p)) 和 (c″(i, j, k, p)) 给出的这两个括号定义同构代数，当且仅当 $c'_{(1,2,4,3)}\, c''_{(1,2,4,3)}$ 是 $\mathbb{K}$ 中的一个平方。

4.c) $w_3 \neq 0$, $w_2 = \lambda w_3$，其中 $\lambda \in \mathbb{K}$，且 c(1,2,4,4) $= 0$、c(1,2,4,3) $\neq 0$、c(1, 2, 4, 1) $= 0$

$$\begin{array}{l}[e_1,e_2,e_3]=0\\ [e_1,e_2,e_4]=e_3\\ [e_1,e_3,e_4]=\lambda' e_3\\ [e_2,e_3,e_4]=0,\end{array}$$

4.d) $w_3 \neq 0$, $w_2 = \lambda w_3$ 满足 $\lambda \in \mathbb{K}$ 且 c(1,2,4,4) $= 0$, c(1,2,4,3) $= 0$, c(1, 2, 4, 1) $\neq 0$

$$\begin{array}{l}[e_1,e_2,e_3]=0\\ [e_1,e_2,e_4]=c'(1,2,4,1)e_1\\ [e_1,e_3,e_4]=0\\ [e_2,e_3,e_4]=0,\end{array}$$

4.e) $w_3 \neq 0$, $w_2 = \lambda w_3$ 满足 $\lambda \in \mathbb{K}$ 且 c(1,2,4,4) $= 0$, c(1,2,4,3) $= 0$, c(1, 2, 4, 1) $= 0$, c(1, 2,4,2) $\neq 0$

$$\begin{array}{l}[e_1,e_2,e_3]=0\\ [e_1,e_2,e_4]=e_2\\ [e_1,e_3,e_4]=0\\ [e_2,e_3,e_4]=0,\end{array}$$

4.f) $w_3 = 0$, c(1,3,4,4) $\neq 0$

$$[e_1,e_2,e_3]=0$$
$$[e_1,e_2,e_4]=0$$
$$[e_1,e_3,e_4]=e_4$$
$$[e_2,e_3,e_4]=0,$$

4.g)$w_3=0$, c(1, 3,4,4) = 0,c(1,3,4,1) $\neq 0$, c(1,3,4,3) $\neq 0$

$$\begin{array}{l}[e_1,e_2,e_3]=0\\ [e_1,e_2,e_4]=0\\ [e_1,e_3,e_4]=c'(1,3,4,1)e_1+e_3\\ [e_2,e_3,e_4]=0\end{array}\quad,\quad c'(1,3,4,1)=c(1,3,4,1).$$

由结构常数 (c′(i, j,k, p)) 和 (c″(i, j,k, p)) 给出的两个此类括号定义的代数同构，当且仅当 $c'_{(1,3,4,1)}$ $c''_{(1,3,4,1)}$ 是 $\mathbb{K}$ 中的一个~~平方。~~

4.h) $w_3=0$, $c(1,3,4,4)=0$, $c(1,3,4,1)\neq 0$, $c(1,3,4,3)=0$

$$\begin{array}{l}[e_1,e_2,e_3]=0\\ [e_1,e_2,e_4]=\\ [e_1,e_3,e_4]=c'(1,3,4,1)e_1\\ [e_2,e_3,e_4]=0\end{array}\quad,\quad c'(1,3,4,1)=c(1,3,4,1)$$

由结构常数 (c′(i, j,k, p)) 和 (c″(i, j,k, p)) 给出的两个此类括号定义的代数同构，当且仅当 $c'_{(1,3,4,1)}$ $c''_{(1,3,4,1)}$ 是 $\mathbb{K}$ 中的一个平方。~~此括号定~~义一个乘法代数。

5) dim $D_3^1(\mathscr{A})=1$，2-可解且为2阶，幂零且为2阶，中心为1维：

5.a) $[e_1,e_2,e_3]=0$, $[e_1,e_2,e_4]=0$, $[e_1,e_3,e_4]=e_2$, $[e_2,e_3,e_4]=0$

5.b) $[e_1,e_2,e_3]=0$, $[e_1,e_2,e_4]=e_3$, $[e_1,e_3,e_4]=0$, $[e_2,e_3,e_4]=0$

证明。设 $\mathscr{A}=(A\ [\cdot,\ldots,\cdot],\alpha)$ 为推论 5 中所列某一类中的 3-Hom-李代数，并考虑在基 ($e_i$) 下定义其括号的矩阵 B，其中 α具有约当标准形。任何与 $\mathscr{A}$ 同构的 3-Hom-李代数，其括号由矩阵 $B'=\ ^1\det(P)PBP^T$ 给出，其中 P 是一个与 [α]可交换的可逆矩阵，矩阵 α在基 ($e_i$) 下表示。矩阵

矩阵 P =(p(i, j))$_{1\leq i,\ j\leq 4}$ 与 [α] =可交换 $\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ 当且仅当它具有如下形式

$$P = \begin{pmatrix} p(1,1) & 0 & 0 & p(1,4) \\ p(2,1) & p(3,3) & p(2,3) & p(2,4) \\ 0 & 0 & p(3,3) & p(2,3) \\ 0 & 0 & 0 & p(3,3) \end{pmatrix}$$

, 其中 $\det(P) \neq 0$即 $p(1,1)p(3,3)^3 \neq 0$
这等价于 $p(1,1) \neq 0$和 $p(3,3) \neq 0$。我们用 c′(i, j,k, p) 表示经过 P 变换后括号的结构常数。

下文中，在矩阵 B′ 中，会出现如下形式的结构常数：$c'(i,j,k,l) = \frac{c(i,j,k,l)}{p(1,1)p(3,3)}$或 $\frac{c(i,j,k,l)}{p(3,3)^2}$。注意，由于 $p(1,1) \neq 0$和 $p(3,3) \neq 0$,

$$\frac{c(i,j,k,l)}{p(1,1)p(3,3)} = 0 \text{ or } \frac{c(i,j,k,l)}{p(3,3)^2} = 0 \iff c(i,j,k,l) = 0, \tag{16}$$

因此在这种情况下，由括号 $c(i,j,k,l) = 0$ 给出的代数与由括号 $c(i,j,k,l) \neq 0$ 给出的代数不同构。

1) 维数$D_3^1(\mathscr{A}) = 2$，非 2-可解、非幂零，且具有平凡中心，即

$$B = \begin{pmatrix} 0 & c(1,3,4,1) & -c(1,2,4,1) & 0 \\ 0 & c(1,3,4,2) & -c(1,2,4,2) & 0 \\ 0 & c(1,3,4,3) & -c(1,2,4,3) & 0 \\ 0 & c(1,3,4,4) & -c(1,2,4,4) & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $d(1,4) = c(1,2,4,1)c(1,3,4,4) - c(1,2,4,4)c(1,3,4,1) \neq 0$。

$$B' = \frac{1}{\det(P)} PBP^T =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & b'(1,2) & \frac{-c(1,2,4,1)p(1,1)-c(1,2,4,4)p(1,4)}{p(1,1)p(3,3)^2} & 0 \\ 0 & b'(2,2) & b'(2,3) & 0 \\ 0 & b'(3,2) & \frac{-c(1,2,4,4)p(2,3)-c(1,2,4,3)p(3,3)}{p(1,1)p(3,3)^2} & 0 \\ 0 & \frac{c(1,3,4,4)p(3,3)^2-c(1,2,4,4)p(2,3)p(3,3)}{p(1,1)p(3,3)^3} & -\frac{c(1,2,4,4)}{p(1,1)p(3,3)} & 0 \end{pmatrix},$$

$$b'(1,2) = c'(1,3,4,1) = \frac{p(2,3)(-c(1,2,4,1)p(1,1) - c(1,2,4,4)p(1,4))}{p(1,1)p(3,3)^3} + \frac{p(3,3)(c(1,3,4,1)p(1,1) + c(1,3,4,4)p(1,4))}{p(1,1)p(3,3)^3},$$

$$b'(2,2) = c'(1,3,4,2) = \frac{p(2,3)(-c(1,2,4,1)p(2,1) - c(1,2,4,3)p(2,3) - c(1,2,4,4)p(2,4) - c(1,2,4,2)p(3,3))}{p(1,1)p(3,3)^3} + \frac{p(3,3)(c(1,3,4,1)p(2,1) + c(1,3,4,3)p(2,3) + c(1,3,4,4)p(2,4) + c(1,3,4,2)p(3,3))}{p(1,1)p(3,3)^3},$$

$$b'(2,3) = -c'(1,2,4,2) = \frac{-c(1,2,4,1)p(2,1) - c(1,2,4,3)p(2,3)}{p(1,1)p(3,3)^2} + \frac{-c(1,2,4,4)p(2,4) - c(1,2,4,2)p(3,3)}{p(1,1)p(3,3)^2},$$

$$b'(3,2) = c'(1,3,4,3) = \frac{p(2,3)(-c(1,2,4,4)p(2,3) - c(1,2,4,3)p(3,3))}{p(1,1)p(3,3)^3}$$

$$+\frac{p(3,3)(c(1,3,4,4)p(2,3)+c(1,3,4,3)p(3,3))}{p(1,1)p(3,3)^3}.$$

并注意到 $c(1,2,4,4)p(1,1)p(3,3)=0$ 当且仅当 c(1,2,4,4) $=0$，因此，c(1, 2, 4, 4) $=0$的括号与 c(1,2,4,4) $\neq 0$的括号不能定义同构的3-Hom-Lie代数。若 c(1, 2, 4,4) $\neq 0$，则选择

$$P=P_{1,1}=\begin{pmatrix} \frac{c(1,2,4,4)}{p(3,3)} & 0 & 0 & -\frac{c(1,2,4,1)}{p(3,3)} \\ p(2,1) & p(3,3) & -\frac{c(1,2,4,3)p(3,3)}{c(1,2,4,4)} & p(2,4) \\ 0 & 0 & p(3,3) & -\frac{c(1,2,4,3)p(3,3)}{c(1,2,4,4)} \\ 0 & 0 & 0 & p(3,3) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} p(2,1)&=-\frac{(-c(1,2,4,4)c(1,3,4,3)c(1,2,4,3)+c(1,3,4,4)c(1,2,4,3)^2)p(3,3)}{-c(1,2,4,4)d(1,4)} \\ &\quad+\frac{(c(1,2,4,4)^2c(1,3,4,2)-c(1,2,4,2)c(1,2,4,4)c(1,3,4,4))p(3,3)}{-c(1,2,4,4)d(1,4)} \\ p(2,4)&=\frac{\left(c(1,2,4,1)c(1,2,4,4)c(1,3,4,2)-c(1,2,4,1)c(1,3,4,3)c(1,2,4,3)\right)p(3,3)}{-c(1,2,4,4)d(1,4)} \\ &\quad+\frac{\left(-c(1,2,4,2)c(1,2,4,4)c(1,3,4,1)+c(1,3,4,1)c(1,2,4,3)^2\right)p(3,3)}{-c(1,2,4,4)d(1,4)} \end{aligned}$$

we get $B'=\begin{pmatrix} 0 & \frac{c(1,2,4,4)c(1,3,4,1)-c(1,2,4,1)c(1,3,4,4)}{c(1,2,4,4)p(3,3)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c(1,2,4,4)c(1,3,4,3)-c(1,2,4,3)c(1,3,4,4)}{c(1,2,4,4)^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c(1,2,4,3)+c(1,3,4,4)}{c(1,2,4,4)} & -1 & 0 \end{pmatrix}$. If $c(1,2,4,4)=0$, then

$$B'=\begin{pmatrix} 0 & b'(1,2) & -\frac{c(1,2,4,1)}{p(3,3)^2} & 0 \\ 0 & b'(2,2) & b'(2,3) & 0 \\ 0 & b'(3,2) & -\frac{c(1,2,4,3)}{p(1,1)p(3,3)} & 0 \\ 0 & \frac{c(1,3,4,4)}{p(1,1)p(3,3)} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} b'(1,2)&=c'(1,3,4,1)=\frac{p(3,3)(c(1,3,4,1)p(1,1)+c(1,3,4,4)p(1,4))-c(1,2,4,1)p(1,1)p(2,3)}{p(1,1)p(3,3)^3} \\ b'(2,2)&=c'(1,3,4,2)=\frac{p(2,3)(-c(1,2,4,1)p(2,1)-c(1,2,4,3)p(2,3)-c(1,2,4,2)p(3,3))}{p(1,1)p(3,3)^3} \\ &\quad+\frac{p(3,3)(c(1,3,4,1)p(2,1)+c(1,3,4,3)p(2,3)+c(1,3,4,4)p(2,4)+c(1,3,4,2)p(3,3))}{p(1,1)p(3,3)^3} \\ b'(2,3)&=-c'(1,2,4,2)=\frac{-c(1,2,4,1)p(2,1)-c(1,2,4,3)p(2,3)-c(1,2,4,2)p(3,3)}{p(1,1)p(3,3)^2} \\ b'(3,2)&=c'(1,3,4,3)=\frac{p(3,3)(c(1,3,4,4)p(2,3)+c(1,3,4,3)p(3,3))-c(1,2,4,3)p(2,3)p(3,3)}{p(1,1)p(3,3)^3}. \end{aligned}$$

采用相同的论证方法，考虑结构常数 c(1, 3, 4, 4)、c(1, 2, 4, 3) 和 c(1, 2, 4, 1) 分别为零或非零的情形。

如果 c(1, 3, 4, 4) $=0$，那么 d(1,4) $=0$并且

$$\begin{pmatrix} d(2,4) & d(3,4) \\ (1,2) & d(1,3) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0, & 0 \\ c(1,2,4,1)c(1,3,4,2)-c(1,2,4,2)c(1,3,4,1), & c(1,2,4,1)c(1,3,4,3)-c(1,2,4,3)c(1,3,4,1) \end{pmatrix}$$

秩小于或等于 1，这意味着该代数是 2-可解的。

若 c(1, 2, 4, 1) $=0$，则 d(1,4) $=0$且

$$\begin{pmatrix} d(2,4) & d(3,4) \\ d(1,2) & d(1,3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c(1,2,4,2)c(1,3,4,4), & c(1,2,4,3)c(1,3,4,4) \\ -c(1,2,4,2)c(1,3,4,1), & -c(1,2,4,3)c(1,3,4,1) \end{pmatrix},$$

其秩也小于或等于 1，这意味着该代数是 2-可解的。

若 c(1, 2, 4, 3) $=0$，c(1, 3, 4, 4) $\neq 0$ 且 c(1,2,4,1) $\neq 0$，则 d(1,4) $\neq 0$ 且

$$\begin{pmatrix} d(2,4) & d(3,4) \\ d(1,2) & d(1,3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c(1,2,4,2)c(1,3,4,4), & 0 \\ c(1,2,4,1)c(1,3,4,2)-c(1,2,4,2)c(1,3,4,1), & c(1,2,4,1)c(1,3,4,3) \end{pmatrix}$$

当且仅当行列式 c(1,2,4,1)c(1,2,4,2)c(1,3,4,3)c(1,3,4,4) $\neq 0$ 时，其秩为 2；也就是说，当且仅当 c(1, 2,4,2) $\neq 0$ 且 c(1,3,4,3) $\neq 0$。

若 c(1, 2, 4, 4) $=0$、c(1, 2, 4, 1) $\neq 0$、c(1,3,4,4) $\neq 0$、c(1,2,4,3) $\neq 0$、c(1,2,4,3) $\neq$c(1, 3, 4, 4)，则选择

$$P = P_{1,2} = \begin{pmatrix} \frac{c(1,2,4,3)}{p(3,3)} & 0 & 0 & p(1,4) \\ p(2,1) & p(3,3) & \frac{c(1,3,4,3)p(3,3)}{c(1,2,4,3)-c(1,3,4,4)} & p(2,4) \\ 0 & 0 & p(3,3) & \frac{c(1,3,4,3)p(3,3)}{c(1,2,4,3)-c(1,3,4,4)} \\ 0 & 0 & 0 & p(3,3) \end{pmatrix}$$

p(1,4) $=-$ c(1,2,4,3)(c(1,2,4,3)c(1,3,4,1) $-$c(1,3,4,4)c(1,3,4,1) $-$c(1,2,4,1)c(1,3,4,3)) (c(1,2,4,3) $-$ c(1,3,4,4))c~~(1,3,4,4)p(3,3) p(2,1) $=$ (c(1,2,4,2)c(1,2,4,3) $+$c(1,3,4,3)c(1,2,4,3) $-$ c(1,2,4~~,2)c(1,3,4,4)) p(3,3) c(1,2,4,1)(c(1,2,4,3) $-$c(1,3,4,4)) p(2,4) $=$ $\big($$-$c(1,2,4,1)c(1,3,4,3)$^2$ $+$c(1,2,4,3)c(1,3,4,1)c(1,3,4,3) $+$ c(1,2,4,2)c~~(1,2,4,3)c(1,3,4,1)) p(3,3) c(1,2,4,1)(c(1,2,4,3) $-$ c(1,3,4,4))c(1,3,4,4) $($~~ $+$ c(1,2,4,1)c(1,2,4,3)c(1,3,4,2) $-$c(1,2,4,2)c(1,3,4,1)c(1,3,4,4) $+$c(1,2,4,1)c(1,3,4,2)c(1,3,4,4)) p(3,3) c(1,2,4,1)~~(c(1,2,4,3) $-$c(1,3,4,4))c(1,3,4,4)

---

we get $B' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{c(1,2,4,1)}{p(3,3)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{c(1,3,4,4)}{c(1,2,4,3)} & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

若 c(1, 2, 4, 4) $=0$、c(1, 2, 4, 1) $\neq 0$、c(1,3,4,4) $\neq 0$、c(1,2,4,3) $\neq 0$、c(1,2,4,3) =c(1, 3, 4, 4), 则选择

$$P = P_{1,3} = \begin{pmatrix} \frac{c(1,3,4,4)}{p(3,3)} & 0 & 0 & \frac{c(1,2,4,1)p(2,3)-c(1,3,4,1)p(3,3)}{p(3,3)^2} \\ \frac{-c(1,3,4,4)p(2,3)-c(1,2,4,2)p(3,3)}{c(1,2,4,1)} & p(3,3) & p(2,3) & p(2,4) \\ 0 & 0 & p(3,3) & p(2,3) \\ 0 & 0 & 0 & p(3,3) \end{pmatrix}$$

$$p(2,4) = \frac{-c(1,2,4,1)c(1,3,4,3)p(2,3) + c(1,3,4,1)c(1,3,4,4)p(2,3)}{c(1,2,4,1)c(1,3,4,4)} + \frac{c(1,2,4,2)c(1,3,4,1)p(3,3) - c(1,2,4,1)c(1,3,4,2)p(3,3)}{c(1,2,4,1)c(1,3,4,4)}$$

we get $B' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{c(1,2,4,1)}{p(3,3)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c(1,3,4,3)}{c(1,3,4,4)} & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

若 c(1, 2, 4, 4) $=0$、c(1, 2, 4,1) $\neq 0$、c(1,3,4,4) $\neq 0$ 和 c(1,2,4,3) $=0$, 则选择

$$P = P_{1,4} = \begin{pmatrix} \frac{c(1,3,4,4)}{p(3,3)} & 0 & 0 & \frac{-c(1,2,4,1)c(1,3,4,3)-c(1,3,4,1)c(1,3,4,4)}{c(1,3,4,4)p(3,3)} \\ -\frac{c(1,2,4,2)p(3,3)}{c(1,2,4,1)} & p(3,3) & -\frac{c(1,3,4,3)p(3,3)}{c(1,3,4,4)} & p(2,4) \\ 0 & 0 & p(3,3) & -\frac{c(1,3,4,3)p(3,3)}{c(1,3,4,4)} \\ 0 & 0 & 0 & p(3,3) \end{pmatrix}$$

<escape>p(2,4) $= -\frac{(-c(1,2,4,1)c(1,3,4,3)^2 - c(1,2,4,2)c(1,3,4,1)c(1,3,4,4) + c(1,2,4,1)c(1,3,4,2)c(1,3,4,4))}{p(3,3)\ c(1,2,4,1)c(1,3,4,4)^2}$</escape>

we get $B' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{c(1,2,4,1)}{p(3,3)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2）维数 $D_3^1(\mathscr{A}) = 2$, 3 类 2-可解、非幂零且具有平凡中心, 这等价于 d(1, 4) $=0$和 $\begin{pmatrix} d(2,4) & d(3,4) & d(1,2) & d(1,3) \end{pmatrix} \neq 0$, 因此 B 具有如下形式。

$$B=\begin{pmatrix} 0 & \lambda c(1,2,4,1) & -c(1,2,4,1) & 0 \\ 0 & c(1,3,4,2) & -c(1,2,4,2) & 0 \\ 0 & c(1,3,4,3) & -c(1,2,4,3) & 0 \\ 0 & \lambda c(1,2,4,4) & -c(1,2,4,4) & 0 \end{pmatrix} \text{ if } (c(1,2,4,1),c(1,2,4,4)) \neq (0,0), \text{ or}$$

$$B=\begin{pmatrix} 0 & c(1,3,4,1) & 0 & 0 \\ 0 & c(1,3,4,2) & -c(1,2,4,2) & 0 \\ 0 & c(1,3,4,3) & -c(1,2,4,3) & 0 \\ 0 & c(1,3,4,4) & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ if } (c(1,2,4,1),c(1,2,4,4)) = (0,0).$$

首先考虑 \(c_{1,2,4,1}, c_{1,2,4,\{v1\},0}\) 的情形，此时

$$B'=\begin{pmatrix} 0 & b'(1,2) & -\frac{c(1,2,4,1)p(1,1)+c(1,2,4,4)p(1,4)}{p(1,1)p(3,3)^2} & 0 \\ 0 & b'(2,2) & b'(2,3) & 0 \\ 0 & b'(3,2) & -\frac{c(1,2,4,4)p(2,3)+c(1,2,4,3)p(3,3)}{p(1,1)p(3,3)^2} & 0 \\ 0 & \frac{c(1,2,4,4)(\lambda p(3,3)-p(2,3))}{p(1,1)p(3,3)^2} & -\frac{c(1,2,4,4)}{p(1,1)p(3,3)} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
b'(1,2) &= c'(1,3,4,1) = \frac{(c(1,2,4,1)p(1,1)+c(1,2,4,4)p(1,4))(\lambda p(3,3)-p(2,3))}{p(1,1)p(3,3)^3}, \\
b'(2,2) &= c'(1,3,4,2) \\
&= \frac{p(3,3)(\lambda c(1,2,4,1)p(2,1)+\lambda c(1,2,4,4)p(2,4)+c(1,3,4,3)p(2,3)+c(1,3,4,2)p(3,3))}{p(1,1)p(3,3)^3} \\
&\quad + \frac{-p(2,3)(c(1,2,4,1)p(2,1)+c(1,2,4,3)p(2,3)+c(1,2,4,4)p(2,4)+c(1,2,4,2)p(3,3))}{p(1,1)p(3,3)^3}, \\
b'(3,2) &= c'(1,3,4,3) \\
&= \frac{c(1,2,4,4)p(2,3)(\lambda p(3,3)-p(2,3))+p(3,3)(c(1,3,4,3)p(3,3)-c(1,2,4,3)p(2,3))}{p(1,1)p(3,3)^3}, \\
b'(2,3) &= -c'(1,2,4,2) \\
&= -\frac{c(1,2,4,1)p(2,1)+c(1,2,4,3)p(2,3)+c(1,2,4,4)p(2,4)+c(1,2,4,2)p(3,3)}{p(1,1)p(3,3)^2}.
\end{aligned}$$

如果 c(1, 2, 4, 4) $\neq 0$ 那么选择

$$P=P_{2,1}=\begin{pmatrix} \frac{c(1,2,4,4)}{p(3,3)} & 0 & 0 & -\frac{c(1,2,4,1)}{p(3,3)} \\ p(2,1) & p(3,3) & -\frac{c(1,2,4,3)p(3,3)}{c(1,2,4,4)} & \frac{c(1,2,4,3)^2p(3,3)-c(1,2,4,1)c(1,2,4,4)p(2,1)-c(1,2,4,2)c(1,2,4,4)p(3,3)}{c(1,2,4,4)^2} \\ 0 & 0 & p(3,3) & -\frac{c(1,2,4,3)p(3,3)}{c(1,2,4,4)} \\ 0 & 0 & 0 & p(3,3) \end{pmatrix}$$

we get $B'=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda c(1,2,4,3)^2-\lambda c(1,2,4,2)c(1,2,4,4)-c(1,3,4,3)c(1,2,4,3)+c(1,2,4,4)c(1,3,4,2)}{c(1,2,4,4)^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c(1,3,4,3)-\lambda c(1,2,4,3)}{c(1,2,4,4)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda c(1,2,4,4)+c(1,2,4,3)}{c(1,2,4,4)} & -1 & 0 \end{pmatrix}$

如果 c(1, 2, 4, 4) $=0$且 c(1, 2,4,3) $\neq 0$，则

$$B'=\begin{pmatrix} 0 & \frac{c(1,3,4,1)p(1,1)+c(1,3,4,4)p(1,4)}{p(1,1)p(3,3)^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\begin{array}{c}c(1,3,4,1)p(2,1)-c(1,2,4,2)p(2,3)+c(1,3,4,3)p(2,3)\\ +c(1,3,4,4)p(2,4)+c(1,3,4,2)p(3,3)\end{array}}{p(1,1)p(3,3)^2} & -\frac{c(1,2,4,2)}{p(1,1)p(3,3)} & 0 \\ 0 & \frac{c(1,3,4,4)p(2,3)+c(1,3,4,3)p(3,3)}{p(1,1)p(3,3)^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c(1,3,4,4)}{p(1,1)p(3,3)} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

通过选择

$$P=P_{2,2}=\begin{pmatrix} \frac{c(1,2,4,3)}{p(3,3)} & 0 & 0 & p(1,4) \\ -\frac{(c(1,2,4,2)+c(1,3,4,3))p(3,3)}{c(1,2,4,1)} & p(3,3) & \frac{c(1,3,4,3)p(3,3)}{c(1,2,4,3)} & p(2,4) \\ 0 & 0 & p(3,3) & \frac{c(1,3,4,3)p(3,3)}{c(1,2,4,3)} \\ 0 & 0 & 0 & p(3,3) \end{pmatrix},$$

我们得到

$$B'=\begin{pmatrix} 0 & \frac{c(1,2,4,1)(\lambda c(1,2,4,3)-c(1,3,4,3))}{c(1,2,4,3)p(3,3)^2} & -\frac{c(1,2,4,1)}{p(3,3)^2} & 0 \\ 0 & \frac{\begin{array}{c}-\lambda c(1,2,4,3)c(1,3,4,3)-\lambda c(1,2,4,2)c(1,2,4,3)\\ +c(1,3,4,3)^2+c(1,2,4,3)c(1,3,4,2)\end{array}}{c(1,2,4,3)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

如果 \(c(1, 2, 4, 4)\) $=0$，在这种情况下，\(c(1,2,4,1)\) $\neq 0$（否则，根据定理1，该代数将是2-可解的，且其类为2）。我们考虑 \(c(1,2,4,3)\) $=0$和 \(c(1,3,4,3)\) $\neq 0$。我们有

$$B'=\begin{pmatrix} 0 & \frac{c(1,2,4,1)(\lambda p(3,3)-p(2,3))}{p(3,3)^3} & -\frac{c(1,2,4,1)}{p(3,3)^2} & 0 \\ 0 & \frac{\begin{array}{c}p(3,3)\big(\lambda c(1,2,4,1)p(2,1)+c(1,3,4,3)p(2,3)\\ +c(1,3,4,2)p(3,3)\big)-p(2,3)\times\\ \times(c(1,2,4,1)p(2,1)+c(1,2,4,2)p(3,3))\end{array}}{p(1,1)p(3,3)^3} & -\frac{c(1,2,4,1)p(2,1)+c(1,2,4,2)p(3,3)}{p(1,1)p(3,3)^2} & 0 \\ 0 & \frac{c(1,3,4,3)}{p(1,1)p(3,3)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

选择

$$P=P_{2,3}$$
$$=\begin{pmatrix} \frac{c(1,3,4,3)}{p(3,3)} & 0 & 0 & p(1,4) \\ -\frac{c(1,2,4,2)p(3,3)}{c(1,2,4,1)} & p(3,3) & \frac{p(3,3)(\lambda c(1,2,4,2)-c(1,3,4,2))}{c(1,3,4,3)} & p(2,4) \\ 0 & 0 & p(3,3) & \frac{p(3,3)(\lambda c(1,2,4,2)-c(1,3,4,2))}{c(1,3,4,3)} \\ 0 & 0 & 0 & p(3,3) \end{pmatrix}$$

我们得到 $B' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{c(1,2,4,1)(-\lambda c(1,2,4,2)+\lambda c(1,3,4,3)+c(1,3,4,2))}{c(1,3,4,3)p(3,3)^2} & -\frac{c(1,2,4,1)}{p(3,3)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

现在考虑 (c(1, 2, 4, 1), c(1,2,4,4)) $\neq$(0,0) 和 c(1,2,4,4) $= 0$，这意味着 c(1, 2, 4, 1) $\neq 0$。另外假设 c(1,2,4,3) $= 0$和 c(1,3,4,3) $= 0$。于是

$$B' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{c(1,3,4,1)p(1,1)p(3,3)-c(1,2,4,1)p(1,1)p(2,3)}{p(1,1)p(3,3)^3} & -\frac{c(1,2,4,1)}{p(3,3)^2} & 0 \\ 0 & \frac{\begin{array}{c}p(3,3)(c(1,3,4,1)p(2,1)+c(1,3,4,2)p(3,3)) \\ +p(2,3)(-c(1,2,4,1)p(2,1)-c(1,2,4,2)p(3,3))\end{array}}{p(1,1)p(3,3)^3} & \frac{-c(1,2,4,1)p(2,1)-c(1,2,4,2)p(3,3)}{p(1,1)p(3,3)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P = P_{2,4} = \begin{pmatrix} \frac{c(1,2,4,1)c(1,3,4,2)-c(1,2,4,2)c(1,3,4,1)}{c(1,2,4,1)p(3,3)} & 0 & 0 & p(1,4) \\ -\frac{c(1,2,4,2)p(3,3)}{c(1,2,4,1)} & p(3,3) & \frac{c(1,3,4,1)p(3,3)}{c(1,2,4,1)} & p(2,4) \\ 0 & 0 & p(3,3) & \frac{c(1,3,4,1)p(3,3)}{c(1,2,4,1)} \\ 0 & 0 & 0 & p(3,3) \end{pmatrix}$$

$$B' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{c(1,2,4,1)}{p(3,3)^2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

<escape>根据推论 4，该代数是乘法的。</escape>

如果 (c(1, 2, 4, 1), c(1, 2, 4, 4)) $=$(0,0) 且 (c(1,3,4,1),c(1,3,4,4)) $\neq$(0,0)，那么

$$B' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{c(1,3,4,1)p(1,1)+c(1,3,4,4)p(1,4)}{p(1,1)p(3,3)^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\begin{array}{c}p(3,3)(c(1,3,4,1)p(2,1)-c(1,2,4,2)p(2,3) \\ +c(1,3,4,3)p(2,3)+c(1,3,4,4)p(2,4) \\ +c(1,3,4,2)p(3,3))-c(1,2,4,3)p(2,3)^2\end{array}}{p(1,1)p(3,3)^3} & -\frac{c(1,2,4,3)p(2,3)+c(1,2,4,2)p(3,3)}{p(1,1)p(3,3)^2} & 0 \\ 0 & \frac{\begin{array}{c}-c(1,2,4,3)p(2,3)+c(1,3,4,4)p(2,3) \\ +c(1,3,4,3)p(3,3)\end{array}}{p(1,1)p(3,3)^2} & -\frac{c(1,2,4,3)}{p(1,1)p(3,3)} & 0 \\ 0 & \frac{c(1,3,4,4)}{p(1,1)p(3,3)} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

如果 c(1, 2, 4, 3) $\neq 0$，则选择

$$P = P_{2,5} = \begin{pmatrix} \frac{c(1,2,4,3)}{p(3,3)} & 0 & 0 & -\frac{c(1,2,4,3)c(1,3,4,1)}{c(1,3,4,4)p(3,3)} \\ p(2,1) & p(3,3) & -\frac{c(1,2,4,2)p(3,3)}{c(1,2,4,3)} & \frac{\begin{array}{c}-c(1,2,4,3)c(1,3,4,1)p(2,1)\\ -c(1,2,4,3)c(1,3,4,2)p(3,3)\\ +c(1,2,4,2)c(1,3,4,3)p(3,3)\end{array}}{c(1,2,4,3)c(1,3,4,4)} \\ 0 & 0 & p(3,3) & -\frac{c(1,2,4,2)p(3,3)}{c(1,2,4,3)} \\ 0 & 0 & 0 & p(3,3) \end{pmatrix},$$

we get $B' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c(1,2,4,3)c(1,3,4,3)+c(1,2,4,2)(c(1,2,4,3)-c(1,3,4,4))}{c(1,2,4,3)^2} & -1 & 0 \\ 0 & \frac{c(1,3,4,4)}{c(1,2,4,3)} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

If $c(1,2,4,3) = 0$, then

$$B' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{c(1,3,4,1)p(1,1)+c(1,3,4,4)p(1,4)}{p(1,1)p(3,3)^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\begin{array}{c}c(1,3,4,1)p(2,1)-c(1,2,4,2)p(2,3)\\ +c(1,3,4,3)p(2,3)+c(1,3,4,4)p(2,4)+c(1,3,4,2)p(3,3)\end{array}}{p(1,1)p(3,3)^2} & -\frac{c(1,2,4,2)}{p(1,1)p(3,3)} & 0 \\ 0 & \frac{c(1,3,4,4)p(2,3)+c(1,3,4,3)p(3,3)}{p(1,1)p(3,3)^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c(1,3,4,4)}{p(1,1)p(3,3)} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

若 c(1, 3, 4, 4) $\neq 0$, 选择

$$P = P_{2,6} = \begin{pmatrix} \frac{c(1,3,4,4)}{p(3,3)} & 0 & 0 & -\frac{c(1,3,4,1)}{p(3,3)} \\ p(2,1) & p(3,3) & -\frac{c(1,3,4,3)p(3,3)}{c(1,3,4,4)} & \frac{\begin{array}{c}c(1,3,4,3)^2p(3,3)\\ -c(1,2,4,2)c(1,3,4,3)p(3,3)\\ -c(1,3,4,1)c(1,3,4,4)p(2,1)\\ -c(1,3,4,2)c(1,3,4,4)p(3,3)\end{array}}{c(1,3,4,4)^2} \\ 0 & 0 & p(3,3) & -\frac{c(1,3,4,3)p(3,3)}{c(1,3,4,4)} \\ 0 & 0 & 0 & p(3,3) \end{pmatrix},$$

我们得到 B′ $= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{c(1,2,4,2)}{c(1,3,4,4)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

若 c(1, 3, 4, 4) $= 0$, 由于 (c(1,3,4,1),c(1,3,4,4)) $\neq$(0,0), 则 c(1,3,4,1) $\neq 0$,

$$B' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{c(1,3,4,1)}{p(3,3)^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\begin{array}{c}c(1,3,4,1)p(2,1)-c(1,2,4,2)p(2,3)\\ +c(1,3,4,3)p(2,3)+c(1,3,4,2)p(3,3)\end{array}}{p(1,1)p(3,3)^2} & -\frac{c(1,2,4,2)}{p(1,1)p(3,3)} & 0 \\ 0 & \frac{c(1,3,4,3)}{p(1,1)p(3,3)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

若 c(1, 3, 4, 3) $\neq 0$，则取

$$P = P_{2,7} = \begin{pmatrix} \frac{c(1,3,4,3)}{p(3,3)} & 0 & 0 & p(1,4) \\ \frac{c(1,2,4,2)p(2,3)-c(1,3,4,3)p(2,3)}{-c(1,3,4,2)p(3,3)} & p(3,3) & p(2,3) & p(2,4) \\ \frac{c(1,3,4,1)}{0} & 0 & p(3,3) & p(2,3) \\ 0 & 0 & 0 & p(3,3) \end{pmatrix},$$

we get $B' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{c(1,3,4,1)}{p(3,3)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{c(1,2,4,2)}{c(1,3,4,3)} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

若 c(1, 3, 4, 3) $= 0$，则该代数现在是乘法的，并且我们有

$$B' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{c(1,3,4,1)}{p(3,3)^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{p(3,3)(c(1,3,4,1)p(2,1)+c(1,3,4,2)p(3,3))-c(1,2,4,2)p(2,3)p(3,3)}{p(1,1)p(3,3)^3} & -\frac{c(1,2,4,2)}{p(1,1)p(3,3)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

与前一种情况一样，c(1, 3, 4,1 $\neq 0$，此外 c(1, 2, 4, 2) $\neq 0$，否则我们将有 $\mathrm{dimD}_3^1(\mathscr{A}) = 1$。选择

$$P = P_{2,8} = \begin{pmatrix} \frac{c(1,2,4,2)}{p(3,3)} & 0 & 0 & p(1,4) \\ p(2,1) & p(3,3) & \frac{c(1,3,4,1)p(2,1)+c(1,3,4,2)p(3,3)}{c(1,2,4,2)} & p(2,4) \\ 0 & 0 & p(3,3) & \frac{c(1,3,4,1)p(2,1)+c(1,3,4,2)p(3,3)}{c(1,2,4,2)} \\ 0 & 0 & 0 & p(3,3) \end{pmatrix},$$

we get $B' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{c(1,3,4,1)}{p(3,3)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3) $\mathrm{dimD}_3^1(\mathscr{A}) = 2$，2-可解的2阶类、非幂零且具有平凡中心。在这种情况下，定义括号的矩阵为

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c(1,3,4,2) & -c(1,2,4,2) & 0 \\ 0 & c(1,3,4,3) & -c(1,2,4,3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{p(2,3)(-c(1,2,4,3)p(2,3)-c(1,2,4,2)p(3,3))}{+p(3,3)(c(1,3,4,3)p(2,3)+c(1,3,4,2)p(3,3))} & \frac{-c(1,2,4,3)p(2,3)-c(1,2,4,2)p(3,3)}{p(1,1)p(3,3)^2} & 0 \\ 0 & \frac{c(1,3,4,3)p(3,3)^2-c(1,2,4,3)p(2,3)p(3,3)}{p(1,1)p(3,3)^3} & -\frac{c(1,2,4,3)}{p(1,1)p(3,3)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

注意，只有当 c′(1, 2, 4, 3) $= 0$ 时，c(1,2,4,3) $= 0$。因此，c(1, 2, 4, 3) $= 0$ 和 c(1, 2, 4, 3) $\neq 0$ 的情形不可能同构。

3.a) 若 c(1,2,4,3) $\neq 0$ 则取

$$P = P_{3,1} = \begin{pmatrix} \frac{c(1,2,4,3)}{p(3,3)} & 0 & 0 & p(1,4) \\ p(2,1) & p(3,3) & \frac{c(1,3,4,3)p(3,3)}{c(1,2,4,3)} & p(2,4) \\ 0 & 0 & p(3,3) & \frac{c(1,3,4,3)p(3,3)}{c(1,2,4,3)} \\ 0 & 0 & 0 & p(3,3) \end{pmatrix},$$

对于任意的 p(2, 1)、p(1, 4)、p(2,4) 和 p(3,3) $\neq 0$，得到如下定义括号的矩阵

$$B' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c'(1,3,4,2) & -c'(1,2,4,2) & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$c'(1,3,4,2) = \frac{c(1,2,4,3)c(1,3,4,2) - c(1,2,4,2)c(1,3,4,3)}{c(1,2,4,3)^2},$$

$$c'(1,2,4,2) = \frac{-c(1,2,4,2) - c(1,3,4,3)}{c(1,2,4,3)}.$$

3.b) 若 $c(1,2,4,3) = 0$则考虑 $c(1,3,4,3) \neq 0$和 $c(1,2,4,2) \neq 0$，否则代数的中心将变为非零（定理1）

$$B' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(c(1,3,4,3)-c(1,2,4,2))p(2,3)+c(1,3,4,2)p(3,3)}{p(1,1)p(3,3)^2} & -\frac{c(1,2,4,2)}{p(1,1)p(3,3)} & 0 \\ 0 & \frac{c(1,3,4,3)}{p(1,1)p(3,3)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

取

$$P = P_{3,2} = \begin{pmatrix} \frac{c(1,3,4,3)}{p(3,3)} & 0 & 0 & p(1,4) \\ p(2,1) & p(3,3) & -\frac{(c(1,3,4,3)-c(1,3,4,2))p(3,3)}{c(1,2,4,2)-c(1,3,4,3)} & p(2,4) \\ 0 & 0 & p(3,3) & -\frac{(c(1,3,4,3)-c(1,3,4,2))p(3,3)}{c(1,2,4,2)-c(1,3,4,3)} \\ 0 & 0 & 0 & p(3,3) \end{pmatrix}$$

对于任意的 p(2, 1)、p(1, 4)、p(2,4)和 $p(3,3) \neq 0$ 以及 $c(1,3,4,3) \neq c(1,2,4,2)$，得到如下定义括号 $B' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -' & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{1,2,4,2}$ c ( ) 的矩阵，其中

$c'(1,2,4,2) = \underline{c(1,2,4,2)\ c(1,3,4,3)}$.

现在考虑两个参数不同的这类代数，参数分别为 $c'(1,2,4,2) = a$ 和 $c''(1, 2, 4, 2) = b$，并分别用 $B'_1$ 和 $B'_2$ 表示定义括号的矩阵。这两个代数同构，当且仅当

$$\frac{1}{\det(P)} P B'_1 P^T - B'_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(a+1)p(2,3)}{p(1,1)p(3,3)^2} & \frac{a}{p(1,1)p(3,3)} - b & 0 \\ 0 & \frac{1}{p(1,1)p(3,3)} - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

3.c) 若 $(c(1, 3, 4, 3) = c(1, 2, 4, 2)$，则 $B' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c(1,3,4,2\ )}{p(1,1)p(3,3)} & -\frac{c(1,2,4,2\ )}{p(1,1)p(3,3)} & 0 \\ 0 & \frac{c(1,2,4,2)}{p(1,1)p(3,3)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

取 $P = P_{3,3} = \begin{pmatrix} p(1,1) & 0 & 0 & p(1,4) \\ p(2,1) & \frac{c(1,3,4,3)}{p(1,1)} & p(2,3) & p(2,4) \\ 0 & 0 & \frac{c(1,3,4,3)}{p(1,1)} & p(2,3) \\ 0 & 0 & 0 & \frac{c(1,3,4,3)}{p(1,1)} \end{pmatrix}$ 给出

$$B' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c(1,3,4,2)}{c(1,3,4,3)} & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4) $\dim D^1_3(\mathscr{A}) = 1$, $\mathscr{A}$是2阶可解、2阶、非幂零且具有1维中心。

在这种情况下，$w_2$ 和 $w_3$ 线性相关。

If $w_3 \neq 0$, $w_2 = \lambda w_3$, $\lambda \in \mathbb{K}$, then $B = \begin{pmatrix} 0 & \lambda c(1,2,4,1) & -c(1,2,4,1) & 0 \\ 0 & \lambda c(1,2,4,2) & -c(1,2,4,2) & 0 \\ 0 & \lambda c(1,2,4,3) & -c(1,2,4,3) & 0 \\ 0 & \lambda c(1,2,4,4) & -c(1,2,4,4) & 0 \end{pmatrix}$.

If $w_3 = 0$ and $w_2 \neq 0$, then $B = \begin{pmatrix} 0 & c(1,3,4,1) & 0 & 0 \\ 0 & c(1,3,4,2) & 0 & 0 \\ 0 & c(1,3,4,3) & 0 & 0 \\ 0 & c(1,3,4,4) & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4.a)我们首先考虑当 $w = 0$ 和 $w = \lambda_3 w$ 时，其中 $\lambda \in \mathbb{K}$ 然后

$$B' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{(\lambda p(3,3)-p(2,3))(c(1,2,4,1)p(1,1)+c(1,2,4,4)p(1,4))}{p(1,1)p(3,3)^3} & -\frac{c(1,2,4,1)p(1,1)+c(1,2,4,4)p(1,4)}{p(1,1)p(3,3)^2} & 0 \\ 0 & \frac{(\lambda p(3,3)-p(2,3))(c(1,2,4,1)p(2,1)+c(1,2,4,3)p(2,3)+c(1,2,4,4)p(2,4)+c(1,2,4,2)p(3,3))}{p(1,1)p(3,3)^3} & -\frac{c(1,2,4,1)p(2,1)+c(1,2,4,3)p(2,3)+c(1,2,4,4)p(2,4)+c(1,2,4,2)p(3,3)}{p(1,1)p(3,3)^2} & 0 \\ 0 & \frac{(\lambda p(3,3)-p(2,3))(c(1,2,4,4)p(2,3)+c(1,2,4,3)p(3,3))}{p(1,1)p(3,3)^3} & -\frac{c(1,2,4,4)p(2,3)+c(1,2,4,3)p(3,3)}{p(1,1)p(3,3)^2} & 0 \\ 0 & \frac{c(1,2,4,4)(\lambda p(3,3)-p(2,3))}{p(1,1)p(3,3)^2} & -\frac{c(1,2,4,4)}{p(1,1)p(3,3)} & 0 \end{pmatrix}.$$

If $c(1,2,4,4) \neq 0$ then taking

$$P = P_{4,1} = \begin{pmatrix} \frac{c(1,2,4,4)}{p(3,3)} & 0 & 0 & -\frac{c(1,2,4,1)}{p(3,3)} \\ p(2,1) & p(3,3) & -\frac{c(1,2,4,3)p(3,3)}{c(1,2,4,4)} & \frac{c(1,2,4,3)^2p(3,3)-c(1,2,4,1)c(1,2,4,4)p(2,1)-c(1,2,4,2)c(1,2,4,4)p(3,3)}{c(1,2,4,4)^2} \\ 0 & 0 & p(3,3) & -\frac{c(1,2,4,3)p(3,3)}{c(1,2,4,4)} \\ 0 & 0 & 0 & p(3,3) \end{pmatrix}$$

we get $B' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c(1,2,4,3)}{c(1,2,4,4)}+\lambda & -1 & 0 \end{pmatrix}$

4.b) 如果 $c(1,2,4,4) = 0$，那么

$$B' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{c(1,2,4,1)(\lambda p(3,3)-p(2,3))}{p(3,3)^3} & -\frac{c(1,2,4,1)}{p(3,3)^2} & 0 \\ 0 & \frac{(\lambda p(3,3)-p(2,3))(c(1,2,4,1)p(2,1)+c(1,2,4,3)p(2,3)+c(1,2,4,2)p(3,3))}{p(1,1)p(3,3)^3} & -\frac{c(1,2,4,1)p(2,1)+c(1,2,4,3)p(2,3)+c(1,2,4,2)p(3,3)}{p(1,1)p(3,3)^2} & 0 \\ 0 & \frac{c(1,2,4,3)(\lambda p(3,3)-p(2,3))}{p(1,1)p(3,3)^2} & -\frac{c(1,2,4,3)}{p(1,1)p(3,3)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

若 $c(1,2,4,3) \neq 0$ 且 $c(1,2,4,1) \neq 0$，取

$$P = P_{4,2} = \begin{pmatrix} \frac{c(1,2,4,3)}{p(3,3)} & 0 & 0 & p(1,4) \\ \frac{-\lambda c(1,2,4,3)p(3,3)-c(1,2,4,2)p(3,3)}{c(1,2,4,1)} & p(3,3) & \lambda p(3,3) & p(2,4) \\ 0 & 0 & p(3,3) & \lambda p(3,3) \\ 0 & 0 & 0 & p(3,3) \end{pmatrix},$$

we get $B' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{c(1,2,4,1)}{p(3,3)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4.c) 如果 $c(1,2,4,3) = 0$ 且 $c(1,2,4,1) \neq 0$，则

$$B' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{c(1,2,4,1)(\lambda p(3,3)-p(2,3))}{p(3,3)^3} & -\frac{c(1,2,4,1)}{p(3,3)^2} & 0 \\ 0 & \frac{(\lambda p(3,3)-p(2,3))\times}{\times(c(1,2,4,1)p(2,1)+c(1,2,4,2)p(3,3))} & -\frac{c(1,2,4,1)p(2,1)+c(1,2,4,2)p(3,3)}{p(1,1)p(3,3)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P = P_{4,3} = \begin{pmatrix} p(1,1) & 0 & 0 & p(1,4) \\ -\frac{c(1,2,4,2)p(3,3)}{c(1,2,4,1)} & p(3,3) & \lambda p(3,3) & p(2,4) \\ 0 & 0 & p(3,3) & \lambda p(3,3) \\ 0 & 0 & 0 & p(3,3) \end{pmatrix},$$

$$B' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{c(1,2,4,1)}{p(3,3)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.d) 如果 c(1, 2, 4, 3) $\neq 0$ 且 c(1,2,4,1) $= 0$, 那么

$$B' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(\lambda p(3,3)-p(2,3))\times}{\times(c(1,2,4,3)p(2,3)+c(1,2,4,2)p(3,3))} & -\frac{c(1,2,4,3)p(2,3)}{+c(1,2,4,2)p(3,3)} & 0 \\ & p(1,1)p(3,3)^3 & p(1,1)p(3,3)^2 & \\ 0 & \frac{c(1,2,4,3)(\lambda p(3,3)-p(2,3))}{p(1,1)p(3,3)^2} & -\frac{c(1,2,4,3)}{p(1,1)p(3,3)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P = P_{4,4} = \begin{pmatrix} \frac{c(1,2,4,3)}{p(3,3)} & 0 & 0 & p(1,4) \\ p(2,1) & p(3,3) & -\frac{c(1,2,4,2)p(3,3)}{c(1,2,4,3)} & p(2,4) \\ 0 & 0 & p(3,3) & -\frac{c(1,2,4,2)p(3,3)}{c(1,2,4,3)} \\ 0 & 0 & 0 & p(3,3) \end{pmatrix},$$

$$B' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c(1,2,4,2)}{c(1,2,4,3)} + \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.e) 若 c(1, 2, 4, 3) $= 0$ 且 c(1,2,4,1) $= 0$, 则

$$B' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c(1,2,4,2)(\lambda p(3,3)-p(2,3))}{p(1,1)p(3,3)^2} & -\frac{c(1,2,4,2)}{p(1,1)p(3,3)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_{4,5}=\begin{pmatrix} \frac{c(1,2,4,2)}{p(3,3)} & 0 & 0 & p(1,4) \\ p(2,1) & p(3,3) & \lambda p(3,3) & p(2,4) \\ 0 & 0 & p(3,3) & \lambda p(3,3) \\ 0 & 0 & 0 & p(3,3) \end{pmatrix},$$

$$B'=\begin{pmatrix} 0\,0 & 0 & 0 \\ 0\,0 & -1 & 0 \\ 0\,0 & 0 & 0 \\ 0\,0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.f) 现在我们考虑 $w_3=0$ 和 $w_2\neq 0$ 的情况，得到

$$B'=\begin{pmatrix} 0 & \frac{c(1,3,4,1)p(1,1)+c(1,3,4,4)p(1,4)}{p(1,1)p(3,3)^2} & 0\,0 \\ 0 & \frac{\begin{array}{c}c(1,3,4,1)p(2,1)+c(1,3,4,3)p(2,3)\\ +c(1,3,4,4)p(2,4)+c(1,3,4,2)p(3,3)\end{array}}{p(1,1)p(3,3)^2} & 0\,0 \\ 0 & \frac{c(1,3,4,4)p(2,3)+c(1,3,4,3)p(3,3)}{p(1,1)p(3,3)^2} & 0\,0 \\ 0 & \frac{c(1,3,4,4)}{p(1,1)p(3,3)} & 0\,0 \end{pmatrix}.$$

若 \(c(1, 3, 4, 4)\) $\neq 0$，则选择

$$P=P_{4,6}=\begin{pmatrix} \frac{c(1,3,4,4)}{p(3,3)} & 0 & 0 & -\frac{c(1,3,4,1)}{p(3,3)} \\ p(2,1) & p(3,3) & -\frac{c(1,3,4,3)p(3,3)}{c(1,3,4,4)} & \begin{array}{c}c(1,3,4,3)^2p(3,3)\\ -c(1,3,4,1)c(1,3,4,4)p(2,1)\\ -c(1,3,4,2)c(1,3,4,4)p(3,3)\end{array} \\ 0 & 0 & p(3,3) & -\frac{c(1,3,4,3)p(3,3)}{c(1,3,4,4)} \\ 0 & 0 & 0 & p(3,3) \end{pmatrix}$$

we get $B'=\begin{pmatrix} 0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0 \\ 0\,1\,0\,0 \end{pmatrix}$.

4.g) 若 c(1,3,4,4) $=0$，则

$$B'=\begin{pmatrix} 0 & \frac{c(1,3,4,1)}{p(3,3)^2} & 0\,0 \\ 0 & \frac{c(1,3,4,1)p(2,1)+c(1,3,4,3)p(2,3)+c(1,3,4,2)p(3,3)}{p(1,1)p(3,3)^2} & 0\,0 \\ 0 & \frac{c(1,3,4,3)}{p(1,1)p(3,3)} & 0\,0 \\ 0 & 0 & 0\,0 \end{pmatrix}.$$

如果 c(1, 3, 4, 3) $\neq 0$，则选取

$$P_{4,7}=\begin{pmatrix} \frac{c(1,3,4,3)}{p(3,3)} & 0 & 0 & p(1,4) \\ p(2,1) & p(3,3) & \frac{-c(1,3,4,1)p(2,1)-c(1,3,4,2)p(3,3)}{c(1,3,4,3)} & p(2,4) \\ 0 & 0 & p(3,3) & \frac{-c(1,3,4,1)p(2,1)-c(1,3,4,2)p(3,3)}{c(1,3,4,3)} \\ 0 & 0 & 0 & p(3,3) \end{pmatrix},$$

我们得到

$$B' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{c(1,3,4,1)}{p(3,3)^2} & 0\ 0 \\ 0 & 0 & 0\ 0 \\ 0 & 1 & 0\ 0 \\ 0 & 0 & 0\ 0 \end{pmatrix}.$$

4.h) 如果 c(1,3,4,3) $= 0$，则

$$B' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{c(1,3,4,1)}{p(3,3)^2} & 0\ 0 \\ 0 & \frac{c(1,3,4,1)p(2,1)+c(1,3,4,2)p(3,3)}{p(1,1)p(3,3)^2} & 0\ 0 \\ 0 & 0 & 0\ 0 \\ 0 & 0 & 0\ 0 \end{pmatrix}.$$

如果 c(1, 3, 4, 1) $\neq 0$，那么选择

$$P_{4,9} = \begin{pmatrix} p(1,1) & 0 & 0 & p(1,4) \\ -\frac{c(1,3,4,2)p(3,3)}{c(1,3,4,1)} & p(3,3) & p(2,3) & p(2,4) \\ 0 & 0 & p(3,3) & p(2,3) \\ 0 & 0 & 0 & p(3,3) \end{pmatrix}$$

给出

$$B' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{c(1,3,4,1)}{p(3,3)^2} & 0\ 0 \\ 0 & 0 & 0\ 0 \\ 0 & 0 & 0\ 0 \\ 0 & 0 & 0\ 0 \end{pmatrix}.$$

如果 c(1, 3, 4, 1) $= 0$，那么该代数就变成幂零代数。

5) $\dim D_3^1(\mathscr{A}) = 1$，2-可解的2阶，2阶幂零，具有1维中心。在这种情况下，定义 $\mathscr{A}$括号的矩阵具有以下形式

$$B_{5,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-c(1,2,4,2)^2}{c(1,2,4,3)} & -c(1,2,4,2) & 0 \\ 0 & -c(1,2,4,2) & -c(1,2,4,3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ where } c(1,2,4,3) \neq 0, \text{ or}$$

$$B_{5,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c(1,3,4,2) & -c(1,2,4,2) & 0 \\ 0 & -c(1,2,4,2) & -\frac{-c(1,2,4,2)^2}{c(1,3,4,2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ where } c(1,3,4,2) \neq 0.$$

Consider the first form, then

$$B' = \frac{1}{\det(P)} P B_{5,1} P^T$$

$$= \begin{pmatrix} 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & -\frac{c(1,2,4,2)^2}{c(1,2,4,3)p(1,1)p(3,3)} - \frac{2c(1,2,4,2)p(2,3)}{p(1,1)p(3,3)^2} - \frac{c(1,2,4,3)p(2,3)^2}{p(1,1)p(3,3)^3}, & -\frac{c(1,2,4,2)}{p(1,1)p(3,3)} - \frac{c(1,2,4,3)p(2,3)}{p(1,1)p(3,3)^2}, & 0 \\ 0, & -\frac{c(1,2,4,2)}{p(1,1)p(3,3)} - \frac{c(1,2,4,3)p(2,3)}{p(1,1)p(3,3)^2}, & -\frac{c(1,2,4,3)}{p(1,1)p(3,3)}, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$$

其中 c(1, 2, 4, 3) $\neq 0$。取

$$P = P_{5,1} = \begin{pmatrix} \frac{c(1,2,4,3)}{p(3,3)} & 0 & 0 & p(1,4) \\ p(2,1) & p(3,3) & -\frac{c(1,2,4,2)p(3,3)}{c(1,2,4,3)} & p(2,4) \\ 0 & 0 & p(3,3) & -\frac{c(1,2,4,2)p(3,3)}{c(1,2,4,3)} \\ 0 & 0 & 0 & p(3,3) \end{pmatrix}$$

we get $B' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

For the second form, we have

$$B' = \frac{1}{\det(P)} P B_{5,2} P^T =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c(1,2,4,2)^2 p(2,3)^2}{c(1,3,4,2)p(1,1)p(3,3)^3} - \frac{2c(1,2,4,2)p(2,3)}{p(1,1)p(3,3)^2} + \frac{c(1,3,4,2)}{p(1,1)p(3,3)} & \frac{c(1,2,4,2)^2 p(2,3)}{c(1,3,4,2)p(1,1)p(3,3)^2} - \frac{c(1,2,4,2)}{p(1,1)p(3,3)} & 0 \\ 0 & \frac{c(1,2,4,2)^2 p(2,3)}{c(1,3,4,2)p(1,1)p(3,3)^2} - \frac{c(1,2,4,2)}{p(1,1)p(3,3)} & \frac{c(1,2,4,2)^2}{c(1,3,4,2)p(1,1)p(3,3)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其中 c(1, 3, 4, 2) $\neq 0$。若 c(1, 2,4,2) $\neq 0$, 则通过取

$$P = P_{5,2} = \begin{pmatrix} -\frac{c(1,2,4,2)^2}{c(1,3,4,2)p(3,3)} & 0 & 0 & p(1,4) \\ p(2,1) & p(3,3) & \frac{c(1,3,4,2)p(3,3)}{c(1,2,4,2)} & p(2,4) \\ 0 & 0 & p(3,3) & \frac{c(1,3,4,2)p(3,3)}{c(1,2,4,2)} \\ 0 & 0 & 0 & p(3,3) \end{pmatrix}$$

we get $B' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

If $c(1,2,4,2) = 0$, then $B' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c(1,3,4,2)}{p(1,1)p(3,3)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, and by choosing

$$P = P_{5,3} = \begin{pmatrix} \frac{c(1,3,4,2)}{p(3,3)} & 0 & 0 & p(1,4) \\ p(2,1) & p(3,3) & p(2,3) & p(2,4) \\ 0 & 0 & p(3,3) & p(2,3) \\ 0 & 0 & 0 & p(3,3) \end{pmatrix}$$

we get $B' = \begin{pmatrix} 0\,0\,0\,0 \\ 0\,1\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0 \end{pmatrix}$. □

## 6 示例与备注

本节将给出一些例子，以展示上述结果未能推导出的特定性质，这些例子或可引发对 *n*-Hom-李代数性质的进一步研究。以下结果是 [58,引理 62] 的推论。

命题 10. 设 $\mathscr{A} =$(A $[\cdot,\ldots,\cdot]$, $(\alpha_i)_{1\leq i\leq n-1}$) 是一个 n-Hom-李代数，且 I 是 $\mathscr{A}$ 的一个理想。那么，对于所有 p $\in \mathbb{N}$, $2 \leq$ k $\leq$ n，$D^{p+1}$ k (I) 是 $D^p$k (I) 的弱理想，$C^{p+1}$k (I) 是 $C^p$k (I) 的弱理想。特别地，$D^1_k$(A) 和 $C^1_k$(A) 是 $\mathscr{A}$ 的弱理想。此外，如果所有 $\alpha_i, 1 \leq$ i $\leq$ n $-1$ 都是 Hom-代数态射，那么 $D^{p+1}$k (I) 是 $D^p$k (I) 的理想，$C^{p+1}$k (I) 是 $C^p$k (I) 的理想。

由此可知，上述分类中的所有乘法代数都不是单代数，因为它们至少有一个非平凡理想（$D^1_3$(A)）。

上述代数的导出级数和中心降级数中的元素如下所示

$$\begin{aligned} D^1_3(\mathscr{A}) = \langle \{ & c(1,2,4,1)e_1 + c(1,2,4,2)e_2 + c(1,2,4,3)e_3 + c(1,2,4,4)e_4, \\ & c(1,3,4,1)e_1 + c(1,3,4,2)e_2 + c(1,3,4,3)e_3 + c(1,3,4,4)e_4 \} \rangle, \\ D^1_2(\mathscr{A}) = \langle \{ & c(1,2,4,1)e_1 + c(1,2,4,2)e_2 + c(1,2,4,3)e_3 + c(1,2,4,4)e_4, \\ & c(1,3,4,1)e_1 + c(1,3,4,2)e_2 + c(1,3,4,3)e_3 + c(1,3,4,4)e_4 \} \rangle. \end{aligned}$$

对于情形 1.a) 和 2.a)，$D^1_3$(A) 在 α 下不具有不变性，也就是说，它不是理想。

情况 2.a）在这种情况下，

$$\begin{aligned} D^2_2(\mathscr{A}) = \langle \{ & (c'(1,3,4,2)c'(1,2,4,4) - c'(1,3,4,4)c'(1,2,4,2))w_3 - \\ & - (c'(1,3,4,3)c'(1,2,4,4) - c'(1,3,4,4)c'(1,2,4,3))w_2, \\ & - (c'(1,3,4,1)c'(1,2,4,4) - c'(1,3,4,4)c'(1,2,4,1))w_3, \\ & - (c'(1,3,4,1)c'(1,2,4,4) - c'(1,3,4,4)c'(1,2,4,1))w_2, \\ & (c'(1,3,4,1)c'(1,2,4,2) - c'(1,3,4,2)c'(1,2,4,1))w_3 - \\ & - (c'(1,3,4,1)c'(1,2,4,3) - c'(1,3,4,3)c'(1,2,4,1))w_2 \} \rangle \end{aligned}$$

$$= \langle \{c'(1,3,4,2)w_3 - c'(1,3,4,3)w_2\} \rangle \neq \{0\}$$

由于在情况 2）中，维数 $D_3^1(\mathscr{A}) = 2$。记 v 为 $D_2^2(\mathscr{A})$ 的生成元:

$$\begin{aligned} v &= c'(1,3,4,2)w_3 - c'(1,3,4,3)w_2 \\ &= -c'(1,3,4,2)e_4 - c'(1,3,4,3)(c'(1,3,4,2)e_2 + c'(1,3,4,3)e_3 + c'(1,3,4,4)e_4) \\ &= -c'(1,3,4,2)e_4 - c'(1,3,4,3)c'(1,3,4,2)e_2 - c'(1,3,4,3)^2 e_3 \\ &\quad - c'(1,3,4,3)c'(1,3,4,4)e_4 \\ &= -c'(1,3,4,3)c'(1,3,4,2)e_2 - c'(1,3,4,3)^2 e_3 - (c'(1,3,4,3)c'(1,3,4,4) \\ &\quad + c'(1,3,4,2))e_4. \end{aligned}$$

一般来说，$D_2^2(\mathscr{A})$ 是 $\mathscr{A}$ 的弱子代数。我们研究 $D_2^2(\mathscr{A})$ 在此类中能否成为 Hom-子代数。为此，我们计算 $D_2^2(\mathscr{A})$ 在 α 下的像:

$$\begin{aligned} \alpha(v) &= \alpha(-c'(1,3,4,3)c'(1,3,4,2)e_2 - c'(1,3,4,3)^2 e_3 \\ &\qquad - (c'(1,3,4,3)c'(1,3,4,4) + c'(1,3,4,2))e_4) \\ &= -\alpha(c'(1,3,4,3)c'(1,3,4,2)e_2) - \alpha(c'(1,3,4,3)^2 e_3) \\ &\qquad - \alpha((c'(1,3,4,3)c'(1,3,4,4) + c'(1,3,4,2))e_4) \\ &= -c'(1,3,4,3)c'(1,3,4,2)\alpha(e_2) - c'(1,3,4,3)^2\alpha(e_3) \\ &\qquad - (c'(1,3,4,3)c'(1,3,4,4) + c'(1,3,4,2))\alpha(e_4) \\ &= -c'(1,3,4,3)^2 e_2 - (c'(1,3,4,3)c'(1,3,4,4) + c'(1,3,4,2))e_3. \end{aligned}$$

当 $(c'(1,3,4,3)c'(1,3,4,4) + c'(1,3,4,2)) \neq 0$ 时，两个元素$\alpha(c'(1,3,4,2)w_3 - c'(1,3,4,3)w_2)$ 和 $c'(1,3,4,2)w_3 - c'(1,3,4,3)w_2$线性无关，这意味着 $D_2^2(\mathscr{A})$ 在 α 下不变，因此 $D_2^2(\mathscr{A})$ 是一个弱子代数，但不是 $\mathscr{A}$ 的 Hom-子代数。

若 $(c'(1,3,4,3)c'(1,3,4,4) + c'(1,3,4,2)) = 0$，则

$$\begin{aligned} c'(1,3,4,2) &= -c'(1,3,4,3)c'(1,3,4,4), \\ \alpha(v) &= -c'(1,3,4,3)^2 e_2, \\ v &= -c'(1,3,4,3)c'(1,3,4,2)e_2 - c'(1,3,4,3)^2 e_3 \\ &\quad - (c'(1,3,4,3)c'(1,3,4,4) + c'(1,3,4,2))e_4 \\ &= -c'(1,3,4,3)c'(1,3,4,2)e_2 - c'(1,3,4,3)^2 e_3 \\ &= +c'(1,3,4,3)^2 c'(1,3,4,4)e_2 - c'(1,3,4,3)^2 e_3 \\ &= c'(1,3,4,3)^2(c'(1,3,4,4)e_2 - e_3) \end{aligned}$$

如果 $c'(1,3,4,4) \neq 0$，那么在这种情况下 $c'(1,3,4,3) \neq 0$，否则 $c'(1,3,4,2) = 0$ 也成立，这与假设 $\dim D_3^1(\mathscr{A}) = 2$ 矛盾。如果 $c'(1,3,4,4) = 0$，那么 $c'(1,3,4,2) = 0$，因此 $c'(1,3,4,3) \neq 0$，否则 $\dim D_1^3(\mathscr{A}) \neq 2$。因此这些元素线性无关，因为 $e_2$ 和 $e_3$ 线性无关。

因此，在情形 2.a) 中，$D_2^2(\mathscr{A})$ 不能在 $\alpha$ 下保持不变，因此 $D_2^2(\mathscr{A})$ 是 $\mathscr{A}$ 的弱子代数，但不是 Hom-子代数。

由于 $D_2^2(\mathscr{A})$ 不是 $\mathscr{A}$ 的 Hom-子代数，因此它也不是 Hom-理想。现在我们来研究 $D_2^2(\mathscr{A})$ 是否为 $\mathscr{A}$ 的弱理想。我们有

$$\begin{aligned}
&[e_1,e_2,v] = \\
&\big[e_1,e_2,-c'(1,3,4,3)c'(1,3,4,2)e_2 - c'(1,3,4,3)^2e_3 \\
&\qquad\qquad -(c'(1,3,4,3)c'(1,3,4,4)+c'(1,3,4,2))e_4\big] \\
&= -c'(1,3,4,3)c'(1,3,4,2)\,[e_1,e_2,e_2] - c'(1,3,4,3)^2\,[e_1,e_2,e_3] \\
&\qquad\qquad -(c'(1,3,4,3)c'(1,3,4,4)+c'(1,3,4,2))\,[e_1,e_2,e_4] \\
&= -c'(1,3,4,3)c'(1,3,4,2)0 - c'(1,3,4,3)^20 \\
&\qquad\qquad -(c'(1,3,4,3)c'(1,3,4,4)+c'(1,3,4,2))e_4 \\
&= -(c'(1,3,4,3)c'(1,3,4,4)+c'(1,3,4,2))e_4.
\end{aligned}$$

若 $(c'(1,3,4,3)c'(1,3,4,4)+c'(1,3,4,2)) \neq 0$，当 $c'(1,3,4,3) \neq 0$ 时，$[e_1,e_2,v]$ 与 v 线性无关。因此 $D_2^2(\mathscr{A})$ 是弱子代数，但不是 $\mathscr{A}$ 的弱理想。若 $c'(1,3,4,3) = 0$，则 $c'(1,3,4,2) \neq 0$，因为 $\dim D_3^1(\mathscr{A}) \neq 2$ 其他情况，这与情形 2.a) 的假设矛盾。我们得到

$$\begin{aligned}
&[e_1,e_3,v] = \big[e_1,e_3,-(c'(1,3,4,3)c'(1,3,4,4)+c'(1,3,4,2))e_4\big] \\
&= -(c'(1,3,4,3)c'(1,3,4,4)+c'(1,3,4,2))\,[e_1,e_3,e_4] \\
&= -(c'(1,3,4,3)c'(1,3,4,4)+c'(1,3,4,2))(c'(1,3,4,2)e_2+c'(1,3,4,4)e_4).
\end{aligned}$$

该元素与 v 线性无关，因此不属于 $D_2^2(\mathscr{A})$。所以，$D_2^2(\mathscr{A})$ 不是 $\mathscr{A}$ 的弱理想。若 $(c'(1,3,4,3)c'(1,3,4,4)+c'(1,3,4,2)) = 0$，则 $v = c'(1,3,4,3)^2(c'(1,3,4,4)e_2 - e_3)$。在此情况下，$[e_j,e_k,v] \neq 0$ 当且仅当 $(j,k) = (1,4)$ 或 $(j,k) = (4,1)$ 时成立。因此，我们只计算 $[e_1,e_4,v]$，

$$\begin{aligned}
[e_1,e_4,v] &= \big[e_1,e_4,c'(1,3,4,3)^2(c'(1,3,4,4)e_2-e_3)\big] \\
&= c'(1,3,4,3)^2(\big[e_1,e_4,c'(1,3,4,4)e_2\big] - [e_1,e_4,e_3]) \\
&= c'(1,3,4,3)^2(-c'(1,3,4,4)\,[e_1,e_2,e_4] + [e_1,e_3,e_4]) \\
&= c'(1,3,4,3)^2\Big(-c'(1,3,4,4)e_4 + c'(1,3,4,2)e_2 \\
&\qquad\qquad + c'(1,3,4,3)e_3 + c'(1,3,4,4)e_4\Big) \\
&= -c'(1,3,4,3)^2(-c'(1,3,4,3)c'(1,3,4,4)e_2 + c'(1,3,4,3)e_3) \\
&= c'(1,3,4,3)^3(c'(1,3,4,4)e_2 - e_3) \\
&= c'(1,3,4,3)v.
\end{aligned}$$

因此，$D_2^2(\mathscr{A})$ 是 $\mathscr{A}$ 的弱理想。在这种情况下，$\mathscr{A}$ 的括号由以下给出。

$$[e_1,e_2,e_3] = 0$$

$$
\begin{aligned}
&[e_1,e_2,e_4]=e_4\\
&[e_1,e_3,e_4]=-c'(1,3,4,3)c'(1,3,4,4)e_2+c'(1,3,4,3)e_3+c'(1,3,4,4)e_4\\
&[e_2,e_3,e_4]=0,
\end{aligned}
$$

其中 $c'(1,3,4,3)\neq 0$

例1. 取 $\mathbb{K}=\mathbb{C}$、$c(1,3,4,4)=\pm i$ 和 $c(1,3,4,3)=-2$，可得到以下两个例子，其中 $D_2^2(\mathscr{A})$ 是 $\mathscr{A}$ 的弱理想：

$$
\begin{aligned}
&[e_1,e_2,e_3]=0\\
&[e_1,e_2,e_4]=e_4\\
&[e_1,e_3,e_4]=2ie_2-2e_3+ie_4\\
&[e_2,e_3,e_4]=0
\end{aligned}
\quad\text{or}\quad
\begin{aligned}
&[e_1,e_2,e_3]=0\\
&[e_1,e_2,e_4]=e_4\\
&[e_1,e_3,e_4]=-2ie_2-2e_3-ie_4\\
&[e_2,e_3,e_4]=0.
\end{aligned}
$$

## 参考文献


1. Abdaoui, K., Mabrouk, S., Makhlouf, A, 《Hom-Leibniz 与 n 元 Hom-Nambu-Lie 超代数的上同调》, 24 1406 3776[ ] 4 页, arXiv: . math.RT。Abramov, V.: 《由超李代数诱导的超Lie代数》, Adv. Appl. Clifford Algebr. 27 2 3 1 9 16 2017 ( ), - ( )。Abramov, V.: 《Weil代数、3-Lie代数与 B.R.S.代数》, 载于: Silvestrov, S., Malyarenko, A., Rancic, M.（编）, 《代数结构与应用》, Springer 数学与统计学会议论文集, 第 317, 1 2020 1802 05576[ ] 2 章 ( )。arXiv: . math.RA。Abramov, V., Lätt: 《低维-Lie超代数的分类》, 载于: Silvestrov S., Rancic M.（编）, 《工程数学II》, Springer 数学与统计学会议论文集, 第179卷, 2 5 1 12 2016 Springer, Cham, - ( )。Abramov, V., Lätt: 《超空间中的三元Lie超代数与 Nambu-Hamilton方程》, 载于: Silvestrov, S., Malyarenko, A., Rancic, M.（编）, 《代数结构与应用》, Springer 数学与统计学会议论文集, 第 317, 3 2020 2 章。( )。Abramov, V., Silvestrov, S.: 《基于-导子与对合的-Hom-Lie代数》, Adv. Appl. Clifford Algebras, 30, 45 4 7 2020( )。Aizawa, N., Sato, H.: 《带中心扩张的 Virasoro 代数的 q-变形》, Phys. Lett. B, 256, 185 2 8 190 1991 9012 1990 - ( )（广岛大学预印本, 预印本 HUPD- ( )）。Ammar, F., Ejbehi, Z., Makhlouf, A.: 《Hom-代数的上同调与变形》, J. Lie Theory 21 2 9 4 813 836 2011 ( ), – ( )。Ammar, F., Mabrouk, S., Makhlouf, A.: 《n元乘性 Hom-Nambu-Lie代数的表示与上同调》, J. Geom. Phys. 61, 1898 4 10 1913 2011– ( )。Arnlind, J., Kitouni, A., Makhlouf, A., Silvestrov, S.: 《由李代数诱导的3-Lie代数的结构与上同调》, 载于: Makhlouf, A., Paal, E., Silvestrov, S. D., Stolin, A., 《代数、几何与数学物理》, Springer 数学与统计学会议论文集85, 123 4 11 144 , 2014 - Springer ( )。Arnlind, J., Makhlouf, A., Silvestrov, S.: 《由Hom-李代数诱导的三元 Hom-Nambu-Lie代数》, J. Math. Phys. 51, 043515, 11 4 12 2010页。( )。Arnlind, J., Makhlouf, A., Silvestrov, S.: 《n-Lie代数与n元 Hom-Nambu-Lie代数的构造》, J. Math. Phys. 52, 123502, 13 4 13 2011页。( )。Ataguema, H., Makhlouf, A., Silvestrov, S.: 《n元 Nambu代数的推广及其他》, J. Math. Phys. 50, 083501 3, 5, 7 14 2009( )。Awata, H., Li, M., Minic, D., Yoneya, T.: 《Nambu括号的量子化》, J. High Energy Phys. 2, 013, 17页（2001）4

15. Bai, C., Guo, L., Sheng, Y.: 《3-Lie代数的双代数、经典杨-巴克斯特方程与 Manin 三元组》, Adv. Theor. Math. Phys. 第23卷第1期 2 16 74 2019 - ( )。Bai, R., An, H., Li, Z.: 《n-Lie代数的质心结构》, Linear Algebra Appl. 430, 229-240 2 17 2009( )。Bai, R., Bai, C., Wang, J.: 《3-Lie代数的实现》, J. Math. Phys. 51, 063505 (2010) 2, 4 18。Bai, R., Chen, L., Meng, D.: 《n-Lie代数的 Frattini 子代数》, 《数学学报（英文版）》23 2 19 5 847 856 2007 ( ), - ( )。Bai, R., Meng, D.: 《n-Lie代数的中心扩张》, Chinese Ann. Math. 27 (4) 491-502 (2006 2 20)。Bai, R., Meng, D.: 《n-Lie代数的质心》, Algebras Groups Geom. 25(2), 29-38 (2004 2 21)。Bai, R., Song, G., Zhang, Y.: 《n-Lie代数的分类》, Front. Math. China, 6, 581-606 2, 3 22 2011( )。Bai, R., Wang, X., Xiao, W., An, H.: 《特征为 2, **428** 8 9 1912 1920 2008 2, 3的域上的低维 23 n-Lie代数的结构》, Linear Algebra Appl. ( - ), - ( )。Bai, R., Wu, Y., Li, J., Zhou, H.: 《由 n-Lie代数构造(n )-Lie代数》, J. Phys. A: Math. Theor. 45 2 24 47 475206 2012 ( ), ( )。Bai, R., Wu, W., Chen, Zh.: 《(n+k)维度量n-Lie代数的分类》, J. Phys. A 46 3 25 14 145202, 11 2013 ( ), 页。( )。Bai, R., Zhang, Z., Li, H., Shi, H.: 《(n + 1)维n-Lie代数的内导子代数》, Comm. Algebra, 28 2 26 6 2927 2934 2000 ( ), - ( )。Bakayoko, I., Silvestrov, S.: 《乘性 n-Hom-Lie 色代数》, 载于: Silvestrov, S., Malyarenko, A., Rancic, M.（编）, 《代数结构与应用》, Springer 数学与统计学会议论文集, 第 317, 7, 2020 1912 10216[ ] 4 章。arXiv: . 27 math.QA。Ben Hassine, A., Mabrouk S., Ncib, O.: 《乘性n元Hom-Nambu代数的一些构造》, Adv. Appl. Clifford Algebras 29, 4 28 5, 88 2019 第( )期。Ben Abdeljelil, A., Elhamdadi, M., Kaygorodov, I., Makhlouf, A.: 《n-BiHom-Lie代数的广义导子》, 载于: Silvestrov, S., Malyarenko, A., Rancic, M.（编）, 《代数结构与应用》, Springer 数学与统计学会议论文集, 第317卷, 第 4, 2020 1901 09750[ ] 4 章。arXiv: . math.RA。 29 Benayadi, S., Makhlouf, A.: 《具有对称不变非退化双线性形式的Hom-Lie代数》, J. Geom. Phys. 76, 38 2, 6, 8 30 60 2014– ( )。Beites, P. D., Kaygorodov, I., Popov, Y.: 《乘性n元Hom- Ω **41** 2018 4 色代数的广义导子》, 31 Bull. of the Malay. Math. Sci. Soc. ( )。Cantarini, N., Kac, V. G.: 《单线性紧n-Lie超代数的分类》, Comm. Math. Phys. 298 3 32 3 833 853 2010 ( ), – ( )。Carlsson, R.: 《n元代数》, Nagoya Math. J. 78, 45 2 33 65 1980- ( )。Casas, J. M., Loday, J.-L., Pirashvili, T.: 《Leibniz n-代数》, Forum Math. 14, 189-207 (2002) 2 34。Chaichian, M., Ellinas, D., Popowicz, Z.: 《带中心扩张的量子共形代数》, Phys. Lett. B, 248, 95 2 35 99 1990- ( )。Chaichian, M., Isaev, A. P., Lukierski, J., Popowic, Z., Prešnajder, P.: 《Virasoro代数的q-变形与共形维数》, Phys. Lett. B, 262 2 36 1 32 38 1991 ( ), - ( )。Chaichian, M., Kulish, P., Lukierski, J.: 《q-变形 Jacobi 恒等式、q-振子与q-变形无限维代数》, Phys. Lett. B, 237, 401 2 37 406 1990- ( )。Chaichian, M., Popowicz, Z., Prešnajder, P.: 《q-Virasoro 代数及其与q-变形KdV系统的关系》, Phys. Lett. B 249, 63 2 38 65 1990- ( )。Chakrabarti, R., Jagannathan, R.: 《一种(p, q)-变形 Virasoro 代数》, J. Phys. A: Math. Gen. 25, 2607-2614 (1992) 39。Curtright, T. L., Zachos, C. K.: 《量子代数的变形映射》, Phys. Lett. B, 243, 237 2 40 244 1990- ( )。Damaskinsky, E. V., Kulish, P. P.: 《变形振子及其应用》（俄语）, Zap. Nauch. Semin. LOMI 189, 37-74 (1991) [J. Sov. Math. 62, 2963-2986 (1992)中的英译本 2

41. Daskaloyannis, C.：《广义变形Virasoro代数》，《现代物理快报A》7(9)，809–816（1992年）。42. Daletskii, Y. L., Takhtajan, L. A.：Nambu代数的Leibniz与Lie代数结构，《数学物理快报》39，127–141（1997年）。43. Darabi, H., Saeedi, F., Eshrati, M.：有限维幂零Filippov代数的刻画，J. Geom. Phys. 101，100–107（2016年）。44. Darabi H., Saeedi F., Eshrati M.：可实现的n-Lie代数及满足 s(A)=3 的幂零n-Lie代数的分类。J. Geom. Phys. 110，25–29（2016年）。45. De Azcárraga, J. A., Izquierdo, J. M.：n 元代数：综述及其应用，J. Phys. A: Math. Theor. 43(29)，293001（2010年）。46. Eshrati M., Saeedi F., Darabi H.：低维幂零n-Lie代数，arXiv:1810.03782。47. Eshrati M., Saeedi F., Darabi H.：关于幂零n-Lie代数的乘子，J. Algebra 450，162–172（2016年）。48. Elchinger, O., Lundengård, K., Makhlouf, A., Silvestrov, S. D.：带有 (τ,σ)-导子的括号以及Witt代数和Virasoro代数的 (p, q)-变形，Forum Math. 28(4)，657–673（2016年）。49. Filippov, V. T.：n-Lie代数，《西伯利亚数学杂志》26，879–891（1985年）。俄语原文译自：Sib. Mat. Zh. 26，126–140（1985年）。50. Geng, Q., Ren, M., Chen, Zh.：(n + 3)维度量n-Lie代数的分类。J. Math. Phys. 51(10)，103507（2010年），第6页。51. Hartwig, J. T., Larsson, D., Silvestrov, S. D.：利用 σ-导子对李代数进行变形，J. Algebra，295，314–361（2006年）（数学科学预印本 2003:32，LUTFMA-5036-2003，数学科学中心，隆德大学，52页（2003年））。52. Hoseini Z., Saeedi F., Darabi H.：关于二类(n+5)维幂零n-Lie代数的分类。《伊朗数学会通报》45(4)，939–949（2019年）。53. Hu, N.：q-Witt代数、q-Lie代数、q-全纯扩张结构与表示，《代数通讯》6(1)，51–70（1999年）。54. Jamshidi M., Saeedi F., Darabi H.：关于类为

2 ≥ 4 **27** 2 139 150 2021 3 且满足 n 的(n

55 + 6)维幂零n-Lie代数的分类。《阿拉伯数学科学杂志》（），–（）。55. Kassel, C.：微分算子的循环同调、Virasoro代数及其q类比，Comm. Math. Phys. 146(2)，343–356（1992年）。56. Kasymov, Sh. M.：n-Lie代数理论，《代数与逻辑》，

**26**, 155 166 1987 2 -（）。

57 +1

57. Kitouni, A., Makhlouf, A.：关于由n-Lie代数诱导的(n )-Lie代数的结构与中心扩张，arXiv:1405.5930（2014年）。58. Kitouni, A., Makhlouf, A., Silvestrov, S.：关于由n-Hom-Lie代数诱导的(n + 1)-Hom-Lie代数，《格鲁吉亚数学杂志》23(4)，441–459（2016年）。59. Kitouni, A., Makhlouf, A., Silvestrov, S.：关于n-Hom-Lie代数及由n-Hom-Lie代数诱导的(n + 1)-Hom-Lie代数的可解性与幂零性，载于：Silvestrov, S., Malyarenko, A., Rancic, M.（编），《代数结构与应用》，Springer 数学与统计学会议论文集，第317卷，第6章，127–157页（2020年），Springer。60. Kitouni, A., Makhlouf, A., Silvestrov, S.：关于BiHom-Lie代数和BiHom-结合代数的n元推广，载于：Silvestrov, S., Malyarenko, A., Rancic, M.（编），《代数结构与应用》，Springer 数学与统计学会议论文集，第317卷，第5章（2020年）。61. Kitouni, A., Silvestrov, S.：关于带幂零扭曲映射的(n + 1)维n-Hom-Lie代数的分类，载于：Silvestrov, S., Malyarenko A.（编），《非交换与非结合代数及分析结构》，数学与统计学会议录，Springer（即将出版）。62. Kitouni, A., Silvestrov S.：关于一类带幂零扭曲映射的四维3-Hom-Lie代数的性质与分类（即将出版）。63. Larsson, D., Sigurdsson, G., Silvestrov, S. D.：代数$\mathbb{F}[t]/(t^N)$上的准Lie变形，《一般Lie理论与应用杂志》2，201–205（2008年）。

64. Larsson, D., Silvestrov, S. D.: 准Hom-Lie代数、中心扩张及类2-余循环恒等式，J. Algebra 288，321–344（2005年）（数学科学预印本 2004:3，LUTFMA-5038，数学科学中心，隆德大学（2004年））。65. Larsson, D., Silvestrov, S. D.: 准Lie代数。载于《数学物理中的非交换几何与表示理论》，Contemp. Math.，391，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，241–248（2005年）（数学科学预印本 2004:30，LUTFMA-5049-2004，数学科学中心，隆德大学（2004年））。66. Larsson, D., Silvestrov, S. D.: 分次准Lie代数，Czechoslovak J. Phys. 55，1473–1478（2005年）。67. Larsson, D., Silvestrov, S. D.: 利用扭曲导子对 $sl_2(\mathbb{F})$ 进行准变形，Comm. Algebra，35，4303–4318（2007年）。68. Larsson, D., Silvestrov, S. D.: 关于由扭曲导子产生的广义N-复形，载于：Silvestrov, S., Paal, E., Abramov, V., Stolin, A.（编），《数学、物理及其他领域中的广义Lie理论》，Springer-Verlag，第7章，81–88页（2009年）。69. Ling, W. X.: 关于n-Lie代数的结构，博士论文，锡根大学-GHS，锡根（1993年）。70. Liu, K. Q.: 量子中心扩张，加拿大数学学会报告13(4)，135–140（1991年）。71. Liu, K. Q.: 量子Witt代数的刻画，《数学物理快报》24(4)，257–265（1992年）。72. Liu, K. Q.: 量子Witt代数及Witt代数上若干模的量子化，博士论文，阿尔伯塔大学数学系，加拿大埃德蒙顿（1992年）。73. Mabrouk, S., Ncib, O., Silvestrov, S.: n元Hom-Nambu超代数的广义导子与Rota-Baxter算子，Adv. Appl. Clifford Algebras，31，32（2021年）。（arXiv: 2003 01080[ ] 4 . math.QA）74. Makhlouf, A., Silvestrov, S. D.: Hom-代数结构，《一般Lie理论与应用杂志》2(2)，51–64（2008年）（数学科学预印本 2006:10，LUTFMA-5074-2006，数学科学中心，隆德大学（2006年））。75. Makhlouf, A., Silvestrov, S.: Hom-Lie容许Hom-余代数与Hom-Hopf代数，载于：Silvestrov, S., Paal, E., Abramov, V., Stolin, A.（编），《数学、物理及其他领域中的广义Lie理论》，Springer-Verlag，柏林、海德堡，第17章，189–206页（2009年）（数学科学预印本 2007:25，LUTFMA-5091-2007，数学科学中心，隆德大学（ 2007 0709 2413 [ ] 2007 2 ）。arXiv: . math.RA（ ））。76. Makhlouf, A., Silvestrov, S. D.: Hom-代数与Hom-余代数，J. Algebra Appl. 9(4)，553–589（2010年）（数学科学预印本 2008:19，LUTFMA-5103-2008，数学科学中心，隆德大学（ 2008 0811 0400 [ ] 2008 2 ）。arXiv: . math.RA（ ））。77. Makhlouf, A., Silvestrov, S.: Hom-结合代数和Hom-Lie代数的-参数形式变形札记，Forum Math. 22(4)，715–739（2010年）（数学科学预印本 2007:31，LUTFMA-5095-2007，数学科学中心，隆德大学（ 2007 0712 3130 1 [ ] 2007 2 ）。arXiv: . v math.RA（ ））。78. Makhlouf, A., Silvestrov, S.: Hom-Lie容许Hom-余代数与Hom-Hopf代数，载于：S. Silvestrov, E. Paal, V. Abramov, A. Stolin（编），《数学、物理及其他领域中的广义Lie理论》，Springer-Verlag，柏林、海德堡，第17章，189–206页（2009年）（数学科学预印本 2007:25，LUTFMA-5091-2007，数学科学中心，隆德大学）。79. Nambu, Y.: 广义Hamilton动力学，Phys. Rev. D（），–（）。80 σ 。Richard, L., Silvestrov, S. D.: $\mathbb{C}[t^{\pm 1}]$上-导子的准Lie结构，J. Algebra 319，第3期，1285–1304（2008年）。80. Ren, M., Chen, Zh., Liang, K.: $(n+2)$维度量n-Lie代数的分类。J. Nonlinear Math. Phys. 17(2)，243–249（2010年）。81. Rotkiewicz, M.: n-Lie代数的上同调环，Extracta Math. 20，219–232（2005年）。82. Sheng, Y.: Hom-Lie代数的表示，Algebr. Reprensent. Theory，1081–1098（2012年）。83. Sigurdsson, G., Silvestrov, S.: Witt型Lie色代数与Hom-Lie代数及其中心扩张，载于《数学、物理及其他领域中的广义Lie理论》，Springer，柏林，247–255（2009年）。

85. Sigurdsson, G., Silvestrov, S.：Witt型分次准李代数，《捷克物理杂志》56：1287–1291（2006年）。Takhtajan, L. A.：关于广义Nambu力学的基础，Comm. Math. Phys.，160，295–315（1994年）。Takhtajan, L. A.：Chevalley-Eilenberg复形的高阶类比及n元代数的变形理论，《圣彼得堡数学杂志》6，429–438（1995年）。Vainerman, L., Kerner, R.：关于n元代数的特殊类，J. Math. Phys. 37（5），2553–2565（1996年）。Yau, D.：Hom-Nambu代数的Hom-结合类比，arXiv：1005.2373 [math.RA]（2010年）。Yau, D.：Hom-Lie代数的包络代数，《一般Lie理论与应用杂志》2，第2期，95–108（2008年）。Yau, D.：Hom-代数与同调，《Lie理论杂志》19，409–421（2009年）。Yau, D.：关于n元Hom-Nambu代数与Hom-Nambu-Lie代数，J. Geom. Phys. 522（2012年）4、7、8