arXiv:2304.10775v1 [math.OA] 21 Apr 2023

因子中正规算子的交换子估计及其在导子中的应用

ALEKSEI F. BER、MATTHIJS J. BORST 和 FEDOR A. SUKOCHEV

Abstract. 对于附属于冯·诺依曼因子 $\mathcal{M}$ 的正规可测算子 a，我们证明：若 $\mathcal{M}$ 是无限的，则存在 $\lambda_0 \in \mathbb{C}$，使得对于 $\varepsilon > 0$，存在 $u_\varepsilon = u_\varepsilon^*$、$v_\varepsilon \in \mathcal{U}(\mathcal{M})$，满足

$$v_\varepsilon |[a, u_\varepsilon]| v_\varepsilon^* \geq (1-\varepsilon)(|a-\lambda_0 \mathbf{1}| + u_\varepsilon |a-\lambda_0 \mathbf{1}| u_\varepsilon).$$

若 $\mathcal{M}$ 是有限的，则存在 $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ 以及 u、$v \in \mathcal{U}(\mathcal{M})$，使得

$$v|[a,u]|v^* \geq \frac{\sqrt{3}}{2}(|a-\lambda_0\mathbf{1}| + u|a-\lambda_0\mathbf{1}|u^*).$$

这些界对于无限因子、II_1-因子以及某些 I_n-因子都是最优的。此外，对于有限因子，将 $\|\cdot\|_1$-范数应用于该不等式，可得到内导子 δ_a 的范数估计：$\mathcal{M} \to L_1(\mathcal{M},\tau)$，它与 a 相关。而根据 [3, 定理 1.1] 已知，对于有限因子和自伴算子 $a \in L_1(\mathcal{M},\tau)$，有 $\|\delta_a\|_{\mathcal{M}\to L_1(\mathcal{M},\tau)} = 2\min_{z\in\mathbb{C}} \|a-z\|_1$；我们给出有限因子 $\mathcal{M}$ 和正规算子 $a \in \mathcal{M}$ 的具体例子，使得这一结论不成立。

1. Introduction

导子是满足莱布尼茨法则 $\delta(xy) = \delta(x)y + x\delta(y)$ 的线性映射 δ。它们在李代数、上同调、半群研究和量子物理理论中发挥着重要作用，参见 [17, 19, 24]。关于导子的一个经典结果由 Stampfli 提出 [25]：对于$a \in B(H)$，若它是希尔伯特空间 H 上的有界算子，则由交换子 $\delta_a(x) = [a,x] = ax - xa$ 定义的导子 δ_a：$B(H) \to B(H)$ 的算子范数为 $\|\delta_a\| = 2\inf_{z\in\mathbb{C}} \|a - z\mathbf{1}\|$。通过 [13, 18, 27], 的工作，Stampfli 的结果已推广到任意冯·诺伊曼代数$\mathcal{M}$ 上的导子（关于这一方向的更多结果，另见 [21] ）。更准确地说，Zsid´o [27, 的推论]断言：对于 $\mathcal{M}$ 冯·诺伊曼代数以及 $a \in \mathcal{M}$，与 a 相关联的导子 δ_a：$\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ 满足距离公式：

$$\|\delta_a\|_{\mathcal{M}\to\mathcal{M}} = 2 \min_{z\in Z(\mathcal{M})} \|a - z\|, \tag{1}$$

其中，$Z(\mathcal{M})$ 表示 $\mathcal{M}$ 的中心。

我们的研究旨在对映射 $\mathcal{M}$ 的导子得到与 (1) 类似的结果，其中值域为预对偶 $\mathcal{M}_*$。事实上，预对偶 $\mathcal{M}_*$ 是一个 $\mathcal{M}$-双模（见第7节），因此可以考虑导子δ：$\mathcal{M} \to \mathcal{M}_*$。关于这类导子的研究已有重要进展，见 [2, 7, 14]；尤其是 [14, 定理 4.1] 表明，所有这类导子都是内导子（即具有如下形式：$\delta = \delta_a$ 对某个 $a \in \mathcal{M}_*$，其定义为 $\delta_a(x) = ax - xa$）。这些研究源于 Connes 在[8]中证明了所有可和的复数域 C*-代数必为核代数。Haagerup 在 [14] 中证明了逆命题也成立。

在 [3] 中研究了这些导子的范数，并在某些情形下得到了与 (1) 类似的结果：对于 $\mathcal{M}$ 纯无限情形，证明了某种形式的公式 (1) 成立；对于 $\mathcal{M}$ 有限情形，则在 a 为自伴算子的条件下证明了同样的结论。这些结果的证明基于对 [4, 5], 中得到的算子估计的改进，见下文：

定理 1.1. *[4, 定理 1]* 设 $\mathcal{M}$ 为一个因子，并令 $a = a^* \in S(\mathcal{M})$（其中 $S(\mathcal{M})$ 是与 $\mathcal{M}$相联系的可测算子代数）。

（1）如果 $\mathcal{M}$ 是有限因子，或者是纯无限的 σ-有限因子，则存在 $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ 和$u_0 = u_0^* \in \mathcal{U}(\mathcal{M})$，使得

$$|[a,u_0]| = u_0|a-\lambda_0 \mathbf{1}|u_0 + |a-\lambda_0\mathbf{1}|$$

其中，$\mathcal{U}(\mathcal{M})$ 是 $\mathcal{M}$ 中所有酉算子组成的群；

Date: 2023年4月24日。2010 *Mathematics Subject Classification.* 47B47, 46L10。
Key words and phrases. 冯·诺伊曼因子、算子不等式、导子、交换子。

(2) 存在 $\lambda_0 \in \mathbb{R}$，使得对于任意 $\varepsilon > 0$，都存在 $u_\varepsilon = u_\varepsilon^* \in \mathcal{U}(\mathcal{M})$，使得

$$\|[a, u_\varepsilon]\| \geq (1-\varepsilon)|a - \lambda_0 \mathbf{1}|. \tag{2}$$

该定理在[5]中推广到了任意冯·诺伊曼代数，其中将 $\lambda_0\mathbf{1}$ 替换为中心中的一个元素。在 [3, 定理 B.1] 不等式（2）被推广为：

$$\|[a, u_\varepsilon]\| \geq (1-\varepsilon)(|a - \lambda_0\mathbf{1}| + u_\varepsilon|a - \lambda_0\mathbf{1}|u_\varepsilon). \tag{3}$$

问题随之而来：对于任意 3，这样的不等式（ $a \in S(\mathcal{M})$ 是否成立？更确切地说，是否存在这样的 $\lambda_0 \in \mathbb{C}$、 u、 v、 $w \in \mathcal{U}(\mathcal{M}$以及常数 $C > 0$，使得

$$\|[a, u]\| \geq C(v|a - \lambda_0\mathbf{1}|v^* + w|a - \lambda_0\mathbf{1}|w^*) \tag{4}$$

是否成立？本文针对 a 为正规算子的情形回答了这一问题（见定理 5.6、6.4）。结果表明，若 $\mathcal{M}$ 是无限因子，则常数 C 可以任意接近 1，这与自伴 a 的情形相同。然而，若 $\mathcal{M}$ 是有限因子，情况则有所不同。对于 II_1-因子，最优常数 C 等于 $\frac{\sqrt{3}}{2}$；对于 I_n-因子，最优常数的适当上界和下界由 $\Lambda_n \leq C \leq \frac{1}{2}\widetilde{\Lambda}_n$ 给出（这些常数的定义见（10）和（11），估计见（12））。我们将上述结果概括为以下定理。

定理 1.2 （参见定理 5.6、6.4）。设 $\mathcal{M}$ 是一个因子，且 $a \in S$（$\mathcal{M}$）是正规的。那么存在一个 $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ 以及酉元 u、 v、 $w \in \mathcal{U}$（$\mathcal{M}$）使得

$$\|[a, u]\| \geq C\,(v|a - \lambda_0\mathbf{1}|v^* + w|a - \lambda_0\mathbf{1}|w^*) \tag{5}$$

对于某个与 a 无关的常数 $C > 0$，此外

(1) 当 $\mathcal{M}$ 是 I_n-因子时， $n < \infty$，最优常数满足 $\Lambda_n \leq C \leq \frac{1}{2}\widetilde{\Lambda}_n$。(2) 当 $\mathcal{M}$ 是 II_1-因子时，最优常数为 $C = \frac{\sqrt{3}}{2}$。(3) 当 $\mathcal{M}$ 是无限因子时，我们可以令 C 任意接近 1。

该定理可用于获得导子 δ 的范数估计： $\mathcal{M} \to \mathcal{M}_*$ 并推广了[3]的结果。具体而言，我们考虑 $\mathcal{M}$ 为有限的情形，且 τ 是 $\mathcal{M}$上的忠实正规迹态。在这种情形下， $\mathcal{M}_*$ 同构于 L_1（$\mathcal{M}$， τ）（参见例如 [26, 引理 2.12 和定理 2.13]）。作为不等式（3）的应用， [3, 定理 1.1] 证明了，对于 $a = a^* \in L_1$（$\mathcal{M}$， τ），有

$$\|\delta_a\|_{\mathcal{M}\to L_1(\mathcal{M},\tau)} = 2 \min_{z \in Z(S(\mathcal{M}))} \|a - z\|_1 \tag{6}$$

（这里 Z（S（$\mathcal{M}$））表示 S（$\mathcal{M}$），且最小值在一个自伴元处取得$c_a = c_a^* \in L_1$（$\mathcal{M}$， τ） $\cap Z$（S（$\mathcal{M}$））。本文利用定理 1.2，证明对于有限因子$\mathcal{M}$ 以及任意正规可测 $a \in L_1$（$\mathcal{M}$， τ），估计式

$$\sqrt{3} \min_{z\in\mathbb{C}} \|a - z\|_1 \leq \|\delta_a\|_{\mathcal{M}\to L_1(\mathcal{M},\tau)} \leq 2 \min_{z\in\mathbb{C}} \|a - z\|_1 \tag{7}$$

成立（见定理 7.3）。在第 7 节中，我们证明式（7）给出的估计是精确的。特别地，在定理 7.3 中，我们证明对于任意有限 II_1 因子 $\mathcal{M}$，都存在正规 $a \in \mathcal{M}$，使得导子 δ_a 非零且满足 $\|\delta_a\|_{\mathcal{M}\to L_1}$（$\mathcal{M}$， τ） $= \sqrt{3}\min_{z\in\mathbb{C}} \|a - z\|_1$；而由定理 6.4 和 [3, 定理 3.1] 可知，对于任意无限因子 $\mathcal{M}$，公式（6）对任意正规$a \in L_1$（$\mathcal{M}$， τ）成立。

最后，我们指出，(7) 实际上是酉轨道 L_1 的 $\mathcal{O}(a)$ $=\{uau^*$ 的估计： $u \in \mathcal{U}(\mathcal{M})\}$ 的 a 直径$_{L_1(\mathcal{M},\tau)}(\mathcal{O}(a)) = \|\delta_a\|_{\mathcal{M}\to L_1(\mathcal{M},\tau)}$，参见第 7 节末尾。

1.1. 结构与概述。第 2 节介绍标准术语，回顾（局部）可测算子的定义，并证明命题 2.1 和定理 2.2，将一些结果推广到~局部可测算子。第 3 节介绍本文将用到的常数 Λ_n 和 Λ_n，用于 $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$。第 4 节的主要结果是定理 4.3，该定理与常数 Λ_n 以及算子不等式 (4) 密切相关。第 5 节利用这一结果得到定理 5.6，该定理确立了有限因子中正规元所满足的定理 1.2 的算子不等式。第 6 节得到定理 1.2 中的不等式对附属于无限因子的正规局部可测算子成立，见定理 6.4。第 7 节应用我们的结果，得到导子范数的估计 (7) δ_a： $\mathcal{M} \to L_1(\mathcal{M},\tau)$，适用于正规 $a \in L_1(\mathcal{M},\tau)$，并证明在某些情形下，给出的界是最优的~。在附录中，我们证明了关于常数 Λ_n 和 Λ_n的两个技术性结果。特别地，定理 A.1 确定了 Λ_n 对于 $n \neq 4$的精确值。

2. Preliminaries

我们介绍冯·诺伊曼代数和（局部）可测算子的相关记号（关于这些主题的详细讨论，参见[10, 12]）。此外，我们证明两个结果，即命题 2.1 和定理 2.2，将一个已知结果（算子的一种三角不等式）推广到局部可测算子。

设 $\mathcal{M}$ 是作用在希尔伯特空间 H 上的冯·诺伊曼代数，单位元为 1。记 $\mathcal{U}(\mathcal{M})$ 为该群 of 酉元 i n $\mathcal{M}$，记 $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ 为 $\mathcal{M}$ 中的投影格，并记 $Z(\mathcal{M})$ 为 $\mathcal{M}$的中心。

回忆一下，如果存在元素 $u \in \mathcal{M}$，使得 $u^*u = e$ 且 $uu^* = f.$，则称两个投影 e、$f \in \mathcal{M}$ 穆雷–冯·诺依曼等价（记为 $e \sim f$）。若条件 $q \leq p$ 和 $q \sim p$ 蕴含 $q = p.$，则称投影 $p \in \mathcal{M}$ 是有限的。

设 x: $\mathrm{dom}(x) \to H$ 是一个稠密定义的闭线性算子（x 的定义域 $\mathrm{dom}(x)$ 是 H 中的线性子空间）。若对于交换子 $\mathcal{M}'$ 中代数 $\mathcal{M}.$ 的所有 y，都有 $yx \subset xy$，则称 x 附属于 $\mathcal{M}$。附属于 $\mathcal{M}$ 的线性算子 x，若 $\chi_{(\lambda,\infty)}$，则称其关于 $\mathcal{M}$ 是可测的，其中 $|x|$ 对于某个 $\lambda > 0.$ 是有限投影。这里，$\chi_{(\lambda,\infty)}(|x|)$ 是对应于区间 $(\lambda, +\infty)$ 的 $|x|$ 的谱投影。我们用 $S(\mathcal{M})$ 表示所有可测算子的集合。显然， $\mathcal{M}$ 是 $S(\mathcal{M})$ 的子集。显然，如果 $\mathcal{M}$ 是类型 I 或 III 的因子，则 $S(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$。

设 x、$y \in S$（$\mathcal{M}$）。众所周知， $x + y$ 和 xy 是 [10] 上稠密定义且可闭的算子。我们分别将 x 与 y 的强和、强积定义为这些算子的闭包，并且仍分别简单地记作 $x+y$ 和 xy。当 S（$\mathcal{M}$）wyposaż备强和运算、强积运算以及 $*$ 运算时，它成为 $\mathbb{C}$ 上的含单位 $*$-代数。显然， $\mathcal{M}$ 是 S（$\mathcal{M}$）的 $*$-子代数。此外，当 $\mathcal{M}$ 为有限时，每个附属于 $\mathcal{M}$ 的算子都变为可测算子。特别地，所有附属于的算子构成一个 $*$-代数，该代数与 S（$\mathcal{M}$）重合。沿用 [19, 20], 的做法，在冯·诺伊曼代数 $\mathcal{M}$ 为有限的情形下，我们将代数 S（$\mathcal{M}$）称为与 $\mathcal{M}$ 相关联的穆雷–冯·诺依曼代数。

设 $\mathcal{M}$ 为半有限的，并设 τ 是 $\mathcal{M}.$ 上的忠实正规半有限迹。若线性算子 x 附属于 $\mathcal{M}$，则称其关于 $\mathcal{M}$ 是 τ-可测的，如果对于某个 $\lambda > 0.$，有 $\tau\left(\chi_{(\lambda,\infty)}\left(|x|\right)\right) < \infty$。我们将所有 τ-可测算子的集合记作 S（$\mathcal{M}$, τ）。集合 S（$\mathcal{M}$, τ）是 S（$\mathcal{M}$）的一个 $*$-子代数，其中包含 $\mathcal{M}$。考虑 S（$\mathcal{M}$, τ）上依测度收敛的拓扑，即测度拓扑 t_τ，它由以下零邻域定义：

$$N(\varepsilon, \delta) = \{x \in S(\mathcal{M}, \tau) : \exists e \in \mathcal{P}(\mathcal{M}), \tau(\mathbf{1} - e) \leq \delta, xe \in \mathcal{M}, \|xe\|_{\mathcal{M}} \leq \varepsilon\},$$

其中 ε、δ为正数。赋予测度拓扑的代数 $S(\mathcal{M}, \tau)$ 是一个拓扑 $*$-代数和 F-空间 [10]。

与 $\mathcal{M}$ 附属的线性算子 x 称为关于 $\mathcal{M}$ 局部可测的，如果存在 $\mathcal{P}(Z(\mathcal{M}))$ 中递增的中心投影 (p_n)，其强收敛于 1，并且满足 $xp_n \in S(\mathcal{M})$。局部可测算子的集合 $LS(\mathcal{M})$ 关于强和与强积运算构成一个 $*$-代数。显然，如果 $\mathcal{M}$ 是一个因子，则 $LS(\mathcal{M}) = S)\mathcal{M}$。

设 $x \in LS(\mathcal{M})$。记 $\mathrm{l}(x)$ 为 x 的左载体，记 $\mathrm{r}(x)$ 为 x 的右载体，并记 $\mathrm{s}(x)$ $=\mathrm{l}(x) \vee \mathrm{r}(x)$。如果 $x = u|x|$ 是 x 的极分解，则 $\mathrm{l}(x) = uu^*$，且 $\mathrm{r}(x) = u^*u$。对于 x 的实部和虚部，我们分别记$\Re(x)$ $= \frac{x+x^*}{2}$ 和 $\Im(x) = \frac{x-x^*}{2i}$。对于自伴$x \in LS(\mathcal{M})$，记其正部为 x_+（负部为 x_-），分别定义为 $x_+ = \frac{x+|x|}{2}$（$x_- = -\frac{x-|x|}{2}$）。注意到 x_- 和 x_+ 是正交的，即 $x_-x_+ = 0$。

我们需要定理 2.2，该定理给出了算子的三角不等式 $x \in LS(\mathcal{M})$。其陈述与 [1, 定理 2。2] 类似，其中对于算子 $x \in \mathcal{M}$，结果是用偏等距算子而非等距算子证明的（另见 [12, 引理 4。3] 和 [15, 引理 4。15]）。为证明定理 2.2，我们需要以下与 [1, 命题 2。1]类似的陈述。这里， $v \in \mathcal{M}$ 称为一个等距算子，若 $v^*v = \mathbf{1}$。

Pro位置 2.1。对于每个 $x \in LS(\mathcal{M})$，都存在一个等距算子 $v \in \mathcal{M}$，使得 $\Re(x)_+ \leq v|x|v^*$。

证明。令 $p = \mathrm{s}(\Re(x)+)$ $a = p(x + |x|)$。显然 $\mathrm{l}(a) \leq p$。我们证明 $p = \mathrm{l}(a)$。设 $r = p - \mathrm{l}(a)$，使得 $0 = ra = rar = rxr + r|x|r$。对该等式取实部，得到 $0 = r\Re(x)r + r|x|r$。由于$r \leq p$，我们有 $r\Re(x)$ $_-r = 0$，因此 $r\Re(x)r = r\Re(x)_+r$。于是 $0 = r\Re(x)r + r|x|r = r\Re(x)_+r + r|x|r1\,1\,1$，从而 $r\Re(x)_+r = 0$。又因为 $(\Re(x) \overset{2}{+} r)^*(\Re(x) \overset{2}{+} r)$ $= r\Re(x)r = 0$，我们得到 $\Re(x) \overset{2}{+} r = 0$，从而$\Re(x)_+r = 0$。因此， $\Re(x)+($ $\mathbf{1} - r)$ $= \Re(x)+$，这表明 $(\mathbf{1} - r) \geq \mathrm{s}(\Re(x)+) = p$，故可得$r = 0$，即 $p = \mathrm{l}(a)$。

设 $a = w|a|$ 是 a 的极分解。则 $ww^* = p$。令 $q = w^*w$，并令 $s = (\mathbf{1} - q) \wedge p$。我们证明 $s = 0$。事实上，$as = aqs = 0$，因此 $s(x + |x|)s = sas = 0$，对该等式取实部

得到 $s\Re(x)s+s|x|s=0$。由于 $s\le p$，我们有 $s\Re(x)_-s=0$，从而 $s\Re(x)s=s\Re(x)_+s$。同样，利用前面的论证可得 $s\Re(x)_+s=0$，进而得到 $(\mathbf{1}-s)\ge p$。因此 $s\le(\mathbf{1}-p)\wedge p=0$。

令 $(\mathbf{1}-p)(\mathbf{1}-q)=w_0|(\mathbf{1}-p)(\mathbf{1}-q)|$ 为 $(\mathbf{1}-p)(\mathbf{1}-q)$ 的极分解。于是 $w_0w_0^*\le\mathbf{1}-p$ 且 $w_0^*w_0\le\mathbf{1}-q$。此外，若 $t=\mathbf{1}-q-w_0^*w_0=\mathbf{1}-q-\mathbf{r}((\mathbf{1}-p)(\mathbf{1}-q))$，则可得 $(\mathbf{1}-q)t=t$ 且

$$(\mathbf{1}-p)t=((\mathbf{1}-p)(\mathbf{1}-q))t=0\Rightarrow t\le p\Rightarrow t\le s=0.$$

T于是我们得到等式 $w_0^*w_0=\mathbf{1}-q$，并得到 $v=w+w_0$ 是 $\mathcal{M}$ 中的等距算子。

不等式 $\Re(x)_+\le v|x|v^*$ 的证明与 [1, 命题 2.1] 的证明相同（平方根函数的单调性可由 [10, 推论 2.2.28]得出）。□

定理2.2 的证明与 [1, 定理 2.2], 的证明完全相同， [1,命题 2.1] 但我们改用上面的命题2.1 。为完整起见，我们给出证明。

定理 2.2. 对任意 $x,y\in LS(\mathcal{M})$，存在等距算子 $v,w\in\mathcal{M}$，使得

$$|x+y|\le v|x|v^*+w|y|w^*.$$

证明。我们写出极分解 $x+y=u|x+y|$。然后

$$|x+y|=\frac{1}{2}(u^*(x+y)+(x+y)^*u)=\Re(u^*x)+\Re(u^*y) \tag{8}$$

此外，$|u^*x|=(x^*u^*ux)^{\frac{1}{2}}\le\|u\|(x^*x)^{\frac{1}{2}}\le|x|$ 并且类似地 $|u^*y|\le|y|$。现在将命题 2.1应用于 u^*x 以及 u^*y，得到等距算子 $v,w\in\mathcal{M}$ 使得

$$|x+y|=\Re(u^*x)+\Re(u^*y)\le v|u^*x|v^*+w|u^*y|w^*\le v|x|v^*+w|y|w^* \tag{9}$$

□

3. Constants Λ_n and $\widetilde{\Lambda}_n$

对于 $n\in\mathbb{N}$，我们用 (Ω_n,μ_n) 表示集合 $\{1,2,\dots,n\}$，并赋予其归一化计数测度；用 $(\Omega_\infty,\mu_\infty)$ 表示区间 $[0,1]$，并赋予其勒贝格测度。此外，我们将 $S(\Omega_n)$ 记为 Ω_n 上所有复值可测函数的集合，它就是所有 n 元复数构成的集合。我们将 Aut_n 记为 (Ω_n,μ_n) 的自同构群 $n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$，其中自同构定义如下:

定义 3.1. 设 (X_1,μ_1) 和 (X_2,μ_2) 为测度空间。我们称映射 T是 X_1 与 X_2 之间的一个同构，若 T是一个可测双射 $T\colon N_1\to N_2$，它在两个满测度集合 $N_1\subseteq X_1$ 与$N_2\subseteq X_2$之间建立映射，且此外 T^{-1}也可测，并且 $\mu_1\circ T^{-1}=\mu_2$。每当 $(X_1,\mu_1)=(X_2,\mu_2)$ 时，我们称 T为一个自同构。

~设 $n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$。现在我们引入两个常数 Λ_n 和 Λ_n，定义如下。设 $g\in S(\Omega_n)$， $T\in\mathrm{Aut}_n$,$z\in\mathbb{C}$, 并令

$$\Lambda(g,T,z)=\operatorname{ess\,inf}\frac{|g-g\circ T|}{|g-z|+|g\circ T-z|},$$

其中我们假设$\frac{0}{0}=1$。由三角不等式可得 $|g-g\circ T|\le|g-z|+|g\circ T-z|$，这表明$\Lambda(g,T,z)\le1$对所有 g,T,z均成立。我们令

$$\Lambda(g)=\sup\{\Lambda(g,T,z):\ T\in\mathrm{Aut}_n,z\in\mathbb{C}\}$$

并定义 Λ_n 为

$$\Lambda_n=\inf_{g\in S(\Omega_n)}\Lambda(g). \tag{10}$$

~对于 $n>1$，我们通过令 Λ_n 来定义。

$$\widetilde{\Lambda}_n=\begin{cases}2 & \text{if } n=2,\ n=4\\ \sqrt{3} & \text{if } n=3k,\\ \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{\frac{3k-3}{3k+1}}+\frac{3k+3}{3k+1}} & \text{if } n=3k+1,\ n\neq4\\ \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{\frac{3k+6}{3k+2}}+\frac{3k}{3k+2}} & \text{if } n=3k+2,\\ \sqrt{3} & \text{if } n=\infty.\end{cases}. \tag{11}$$

~在附录中，我们将证明关于常数 Λ_n 和 Λ_n的两个结果。在定理 A.1 中，我们将精确确定 Λ_n 除 $n=4$ 以外所有取值对应的结果。事实证明，

$$\Lambda_1=\Lambda_2=1,\quad \text{and}\quad \frac{\sqrt{3}}{2}\le\Lambda_4\le 1,\quad \text{and}\quad \Lambda_n=\frac{\sqrt{3}}{2}\ \text{for}\ n\notin\{1,2,4\}. \tag{12}$$

~我们注意到，这意味着 $2\Lambda_n\le\Lambda_n$ 对于 $n>1$ 成立，当 $n\equiv 0$ 模 3 或 $n=\infty$ 时取等号，并且还有 $\lim_{n\to\infty}2\Lambda_n=\sqrt{3}=\lim \widetilde{\Lambda}_{n\circ\ n\to\infty}$

我们将集合的直径记为 $A\subseteq\mathbb{C}$ 直径(A)：$=$上确界$_{z,\ w\in A}|z-w|$。在引理 A.2 中，我们将证明对于 $n>1$ 存在 $g\in L_\infty(\Omega_n)$ 满足直径$(g(\Omega_n))=1$ 且 $\widetilde{\Lambda}_n=$ 上确界$_{z\in\mathbb{C}}\frac{1}{\|g-z\|_1}$，这将在全文中使用。

4. Technical result

本节旨在证明定理 4.3，该定理与算子不等式 (4) 及常数 Λ_n密切相关。为了完整陈述该结果，我们先给出以下定义：

定义 4.1. 设 $z\in\mathbb{C}$，$0\le\alpha\le\pi$。集合 A，$B\subset\mathbb{C}$ 称为 $(z,\ \alpha)$-共轭的，如果在 $\mathbb{C}$ 中存在两条直线，它们交于点 z 且夹角为 α，使得集合 A 和 B 分别位于以 z 为顶点、大小为 α 的两个相对闭角内（见图 1）

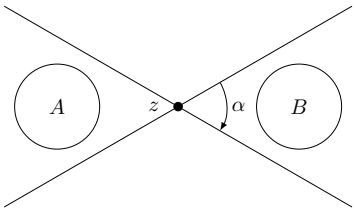

Figure 1. 图中描绘了两个（z,α）-共轭集合 A 和 B。

注 4.2. 设集合 A,B 是（z,α）-共轭的，$a\in A,\ b\in B$。容易看出，

$$|a-b|\ge(|a-z|+|b-z|)\cos\frac{\alpha}{2}.$$

事实上，只需考虑点 a,b 在角 α平分线上的投影即可 .

定理 4.3. 设 $g\in S(\Omega_n)$ $n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$。则存在一个 $z_0\in\mathbb{C}$和 Ω_n的一个自同构 T，使得

$$|g\circ T-g|\ge\frac{\sqrt{3}}{2}\big(|g-z_0|+|g\circ T-z_0|\big). \tag{13}$$

i.e.

$$\Lambda(g)\ge\frac{\sqrt{3}}{2}. \tag{14}$$

此外，集合 Ω_n 可以划分为如下互不相交的可测集：

(i) 如果 n 为偶数或 $n=\infty$，则存在一个划分 $\{X_1\}\cup\{X_2^{m,i}:\ 1\le m,1\le i\le 2\}$，使得 $g(X_1)\subset\{z_0\}$，$\mu_n(X^{m,1\ 2})=\mu_n(X^{m,2\ 2})$，并且集合 $g(X^{m,1\ 2})$ $g(X^{m,2\ 2})$ 对于 $m=1,2,\ldots$ 是 $(z_0,\frac{\pi}{3})$-共轭的；此外，记 $X_2=\Omega_n\setminus X_1$，我们有 $T^k|_{X_k}=$恒等算子$_{X_k}$ 对于 $k=1,2$。

(ii) 如果 n 是奇数，那么存在一个划分 X_1、X_2、X_3、X_5，使得 $T^k|_{X_k}=Id_{X_k}$、$k=1$、2、3、5 .

如果 $n<\infty$，那么存在 $z_0\in\mathbb{C}$ 和 $T\in Aut_n$，使得

$$\Lambda(g,T,z_0)=\Lambda(g). \tag{15}$$

上述定理通过函数演算与算子不等式 (4) 相关联。这一点在有限维因子的情形下最为明显，参见定理 5.1。此外，我们注意到，定理 4.3 为常数 Λ_n 提供了一个下界。事实上，给定 $g\in S(\Omega_n)$，所得到的 z_0,T 满足 $\Lambda(g,T,z_0)\ge\frac{\sqrt{3}}{2}$。因此，对于所有 $n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$，均有 $\Lambda_n\ge\frac{\sqrt{3}}{2}$。在附录的定理 A.1 中，证明了实际上对于 $n=3$ 和 $n\ge 5$，有 $\Lambda_n=\frac{\sqrt{3}}{2}$。这意味着，对于这些 n 的取值，上述定理中的常数 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 是最优的（即，它是最大的，使得对于所有 $g\in S(\Omega_n)$，都存在满足 (13) 的 z_0,T）。

定理 4.3 的证明有些技术性，需要用到两个引理，即引理 4.4 和引理 4.5。我们给出证明的概要。给定一个可测函数 $g:\Omega_n\to\mathbb{C}$，我们首先使用引理 4.5 找到一个点 $z_0\in\mathbb{C}$，并通过绘制 3 条交于 z_0、夹角为 $\frac{2\pi}{6}$ 的直线，将平面划分为 6 个部分。我们的做法是使相对部分中 g 的逆像的测度相等。然后，我们只需将每个部分的 g 的逆像映射到其相对部分的逆像，即可构造一个自同构 T。对于所有 $\omega\in\Omega$，我们随后得到关于该角度的估计$\angle g(w)$ z_0、$g(T(w))\geq\frac{2\pi}{3}$。引理 4.4 随即推出 (13) 成立。在定理 4.3 的实际证明中，部分的边界会带来一些困难，尤其是在我们处理测度空间 Ω_n 且 n 为奇数的情形时。由于这个原因，证明中有必要考虑多种情形。

下面的引理给出了复数 z_0、z_1、z_2 满足以下条件的充分条件

$$|z_1-z_2|\geq\frac{\sqrt{3}}{2}(|z_1-z_0|+|z_2-z_0|) \tag{16}$$

成立，即当角满足 $\angle z_1z_0z_2\geq\frac{2\pi}{3}$时。式（16）还可以从几何上描述为：点 z_0 位于焦点为 z_1 和 z_2、离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 的椭圆上。

引理 4.4。设 z_0、z_1、$z_2\in\mathbb{C}$ 是平面上的点，并考虑三角形 $\triangle z_0z_1z_2$。记 $a=|z_1-z_2|$、$b=|z_1-z_0|$、$c=|z_2-z_0|$和 $\alpha=\angle z_1z_0z_2$。若 $\alpha\geq\frac{2\pi}{3}$，则

$$a\geq\frac{\sqrt{3}}{2}(b+c).$$

证明。根据余弦定理，有

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha.$$

由于 $\cos\alpha\leq-\frac{1}{2}$ 和 $b^2+c^2\geq2bc$，我们得到

$$4a^2\geq4(b^2+c^2+bc)\geq3b^2+3c^2+6bc=3(b+c)^2$$

这就证明了该结果。 □

对于给定函数 $g\in S(\Omega_n)$，我们使用下面的引理来适当地选取点 $z_0\in\mathbb{C}$，使得对于某个自同构 T，(13)成立；该自同构将在后文确定。点 $z_0\in\mathbb{C}$ 应当被视为 g的像的中心（或者说，一个中心）。在引理 4.5 中，我们已将 $\mathbb{C}$与 $\mathbb{R}^2$ 对应起来，并将点 $z_0\in\mathbb{C}$ 表示为向量 $\mathbf{z}_0\in\mathbb{R}^2$。选取该向量 $\mathbf{z}_0$ 时，还要选取经过 $\mathbf{z}_0$ 的三个仿射超平面（即直线）；这些超平面由与之正交的单位向量 $\mathbf{v}_1$,$\mathbf{v}_2$,$\mathbf{v}_3$ 表示。此外，单位向量 $\mathbf{v}_1$,$\mathbf{v}_2$,$\mathbf{v}_3$ 之间的夹角为 $\angle\mathbf{v}_i0\mathbf{v}_j$（对于 $i\neq j$ 的 $\frac{2\pi}{3}$，这意味着仿射超平面以 $\frac{2\pi}{6}$ 的角度相交）。每个仿射超平面对应两个闭半空间。该引理说明，可以选取 $\mathbf{z}_0$,$\mathbf{v}_1$,$\mathbf{v}_2$,$\mathbf{v}_3$，使得 g 在每个此类闭半空间中的原像的测度都大于或等于$_1$ $_2$。这解释了我们为何将 $\mathbf{z}_0$ 视为 g的像的中心。也就是说，对于所有三个仿射超平面，定义域中映射到每一侧（或可能映射到仿射超平面上）的部分都必须相等。不过我们要指出，具有上述性质的这种“中心点”$\mathbf{z}_0$ 不一定唯一。

引理 4.5. 设 $(\Omega\ \mu)$ 是一个概率空间，且 g 是一个可测的复数域值函数。那么，存在一点 $\mathbf{z}_0\in\mathbb{R}^2$、单位向量 $\mathbf{v}_1$,$\mathbf{v}_2$,$\mathbf{v}_3\in\mathbb{R}^2$，其角度为 $\angle\mathbf{v}_10\mathbf{v}_2=\angle\mathbf{v}_20\mathbf{v}_3=\angle\mathbf{v}_30\mathbf{v}_1=\frac{2\pi}{3}$，使得对于 $i=1$，2，3，记 $a_i:=\langle\mathbf{z}_0,\mathbf{v}_i\rangle$，我们有

$$m_i^L:=\mu\Big(\{\omega\in\Omega:\ \langle g(\omega),\mathbf{v}_i\rangle\leq a_i\}\Big)\geq\frac{1}{2},\qquad m_i^R:=\mu\Big(\{\omega\in\Omega:\ \langle g(\omega),\mathbf{v}_i\rangle\geq a_i\}\Big)\geq\frac{1}{2}.$$

对于 $i=1$、2、3，我们指出，$m_i^L+m_i^R=1$ 成立当且仅当 $\mu(\{\omega\in\Omega:\ \langle g(w),\mathbf{v}_i\rangle=a_i\})=0$。

证明。我们首先证明 g 有界的情形。记 $\mathbb{T}=\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$，并令 $t\in\mathbb{T}$ 为 $\mathbf{v}(t)=(\cos(t),\sin(t))$，然后定义

$$\Omega(t,r)=\{\omega\in\Omega:\langle g(\omega),\mathbf{v}(t)\rangle\leq r\},\ r\in\mathbb{R},$$

$$A(t)=\left\{r\in\mathbb{R}:\frac{1}{2}\leq\mu(\Omega(t,r))\right\},$$

$$a(t)=\inf A(t).$$

若 $r_n \downarrow a(t)$ 且 $\frac{1}{2} \le \mu(\Omega(t, r_n))$，则 $\Omega(t, r_1) \supset \Omega(t, r_2) \supset \dots$ 且 $\Omega(t, a(t)) = \bigcap_n \Omega(t, r_n)$。因此，

$$\frac{1}{2} \le \mu(\Omega(t, a(t))). \tag{17}$$

如果 $r_n \uparrow a(t)$，那么 $\frac{1}{2} \ge \mu(\Omega(t, r_n))$ 且 $\Omega(t, r_1) \subset \Omega(t, r_2) \subset \dots$，并且 $\Omega: \langle g(\omega), \mathbf{v}(t)\rangle < a(t)\} = \bigcup_n \Omega(t, r_n)$。因此，

$$\mu\Big(\{\omega \in \Omega : \langle g(\omega), \mathbf{v}(t)\rangle < a(t)\}\Big) \le \frac{1}{2} \le \mu\Big(\{\omega \in \Omega : \langle g(\omega), \mathbf{v}(t)\rangle \le a(t)\}\Big) \tag{18}$$

并因此

$$\mu\Big(\{\omega \in \Omega : \langle g(\omega), \mathbf{v}(t)\rangle \ge a(t)\}\Big) \ge \frac{1}{2}. \tag{19}$$

注意，由 a 的定义可知

$$a(t+\pi) = -\sup\Big\{r \in \mathbb{R} : \frac{1}{2} \le \mu(\{\omega \in \Omega : \langle g(\omega), \mathbf{v}(t)\rangle \ge r\})\Big\} \tag{20}$$

因为

$$\Omega(t+\pi, r) = \{\omega \in \Omega : \langle g(\omega), \mathbf{v}(t)\rangle \ge -r\},\ r \in \mathbb{R}.$$

因此，由 (19)、(20) 以及上确界的性质可得，对于所有 $t \in \mathbb{T}$，都有 $a(t) \le -a(t+\pi)$，因为 $a(t) \in \Big\{r \in \mathbb{R} : \frac{1}{2} \le \mu(\{\omega \in \Omega : \langle g(\omega), \mathbf{v}(t)\rangle \ge r\})\Big\}$。此外，在 (18) 的第二个不等式中，用 $t+\pi$ 替换 t，可得

$$\frac{1}{2} \le \mu\Big(\{\omega \in \Omega : \langle g(\omega), \mathbf{v}(t)\rangle \ge -a(t+\pi)\}\Big). \tag{21}$$

因此，对于任意 $t \in \mathbb{T}$，以及任意 $b \in [a(t)\ -a(t+\pi)]$，利用 (18) 和 (21) 可得

$$\frac{1}{2} \le \mu\Big(\{\omega \in \Omega : \langle g(\omega), \mathbf{v}(t)\rangle \le b\}\Big), \qquad \frac{1}{2} \le \mu\Big(\{\omega \in \Omega : \langle g(\omega), \mathbf{v}(t)\rangle \ge b\}\Big). \tag{22}$$

我们证明函数 a 连续。事实上，设 $\varepsilon > 0$，并选择 $\delta > 0$ 使得对于所有满足 $\mathrm{dist}(s,t) < \delta$ 的 t, $s \in \mathbb{T}$，都有 $\|\mathbf{v}(t) - \mathbf{v}(s)\|_2 < \varepsilon$。现在，固定满足 $\mathrm{dist}(t,s) < \delta$ 的 $t, s \in \mathbb{T}$。那么对于 $\omega \in \Omega$，我们有

$$|\langle g(\omega), \mathbf{v}(t)\rangle - \langle g(\omega), \mathbf{v}(s)\rangle| \le \|g\|_\infty \|\mathbf{v}(t) - \mathbf{v}(s)\|_2 < \varepsilon \|g\|_\infty.$$

但这意味着对于 $r \in \mathbb{R}$，

$$\{\omega \in \Omega : \langle g(\omega), \mathbf{v}(t)\rangle \le r\} \subseteq \{\omega \in \Omega : \langle g(\omega), \mathbf{v}(s)\rangle \le r + \varepsilon\|g\|_\infty\}.$$

特别地，这意味着

$$\frac{1}{2} \le \mu\Big(\{\omega : \langle g(\omega), \mathbf{v}(t)\rangle \le a(t)\}\Big) \le \mu\Big(\{\omega : \langle g(\omega), \mathbf{v}(s)\rangle \le a(t) + \varepsilon\|g\|_\infty\}\Big)$$

因此，$a(s) \le a(t) + \varepsilon\|g\|_\infty$。由 s 和 t 的对称性，同理可得 $a(t) \le a(s) + \varepsilon\|g\|_\infty$，这意味着 $|a(t) - a(s)| < \varepsilon\|g\|_\infty$，并说明了 a 的连续性。

现在，对于 $t \in \mathbb{T}$ 和 $b \in \mathbb{R}$，考虑直线

$$L(t,b) = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2 : \langle \mathbf{w}, \mathbf{v}(t)\rangle = b\} = b\mathbf{v}(t) + \mathbb{R}\mathbf{v}(t + \frac{\pi}{2}).$$

对于 $s \ne t$ 模 π，直线 $L(s)$ 和 $L(t)$ 相交于唯一一点 $\mathbf{w}(L(s,b)\ L(t,c))$。特别地，存在一个 $r \in \mathbb{R}$ 使得

$$\mathbf{w}(L(s,b), L(t,c)) = b\mathbf{v}(s) + r\mathbf{v}(s + \frac{\pi}{2}).$$

因此 $c := \langle \mathbf{w}(L(s,b)\ L(t,c)), \mathbf{v}(t)\rangle = b\langle \mathbf{v}(s), \mathbf{v}(t)\rangle + r\langle \mathbf{v}(s+\frac{\pi}{2}), \mathbf{v}(t)\rangle$ 使得 $r = \frac{c - b\langle \mathbf{v}(\begin{smallmatrix} s\ ,\ t \\ s+\frac{\pi}{2}\ ,\ t \end{smallmatrix})\mathbf{v}()\mathbf{v}()\mathbf{v}()}{}$，从而

$$\mathbf{w}(L(s,b), L(t,c)) = b\mathbf{v}(s) + \frac{c - b\langle \mathbf{v}(s), \mathbf{v}(t)\rangle}{\langle \mathbf{v}(s+\frac{\pi}{2}), \mathbf{v}(t)\rangle}\mathbf{v}(s + \frac{\pi}{2}).$$

设 $t \in \mathbb{T}$。我们希望求出满足以下条件的 $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$：直线 $L(t-\frac{2\pi}{3}, b_1)$、$L(t+\frac{2\pi}{3}, b_2)$ 和 $L(t, b_3)$ 相交于同一点。也就是说，交点 $\mathbf{w}(L(t-\frac{2\pi}{3}, b_1)\ L(t+\frac{2\pi}{3}, b_2))$ 必须位于直线 $L(t, b_3)$ 上。由此我们得到 b_3 的表达式，即：

$$\begin{aligned}
b_3 &:= \langle \mathbf{w}(L(t-\frac{2\pi}{3}, b_1), L(t+\frac{2\pi}{3}, b_2)), \mathbf{v}(t)\rangle \\
&= b_1\langle \mathbf{v}(t-\frac{2\pi}{3}), \mathbf{v}(t)\rangle + \frac{b_2 - b_1\langle \mathbf{v}(t-\frac{2\pi}{3}), \mathbf{v}(t+\frac{2\pi}{3})\rangle}{\langle \mathbf{v}(t-\frac{\pi}{6}), \mathbf{v}(t+\frac{2\pi}{3})\rangle}\langle \mathbf{v}(t-\frac{\pi}{6}), \mathbf{v}(t)\rangle \\
&= b_1\cos(\frac{2\pi}{3}) + \frac{b_2 - b_1\cos(\frac{4\pi}{3})}{\cos(\frac{5\pi}{6})}\cos(\frac{\pi}{6}) \\
&= b_1\cos(\frac{2\pi}{3}) - \left(b_2 - b_1\cos(\frac{4\pi}{3})\right) \\
&= -b_1 - b_2.
\end{aligned}$$

这表明，直线 $L(t-\frac{2\pi}{3}b_1)$ $L(t+\frac{2\pi}{3}b_2)$ 和 $L(t, b_3)$ 恰在 $b_1+b_2+b_3=0$ 时相交。

3 定义 $c\colon \mathbb{T}\to\mathbb{R}$ as $c(t) = a(t-\frac{2\pi}{3})+a(t)+a(t+\frac{2\pi}{3})$，这是一个连续函数。现在我们注意到，与 a 类似，对于所有 t，都有 $c(t) \le -c(t+\pi)$，因此 $\int_{\mathbb{T}} c(t)dt \le -\int_{\mathbb{T}} c(t+\pi)dt = -\int_{\mathbb{T}} c(t)dt$，从而 $\int_{\mathbb{T}} c(t)dt \le 0$。于是我们可以找到一个 t_1，使得 $c(t_1) \le 0$。若还有 $0 \le -c(t_1+\pi)$，则令 $t_0 := t_1$。反之，若 $-c(t_1+\pi) < 0$，则令 $t_2 := t_1+\pi$，并得到 $-c(t_2+\pi) = -c(t_1) \ge c(t_1+\pi) > 0$。根据介值定理，我们便可找到一个 $t_0 \in \mathbb{T}$，使得 $-c(t_0+\pi) = 0$。于是 $c(t_0) \le -c(t_0+\pi) = 0$。

在这两种情况下，我们都找到了 $t_0 \in \mathbb{T}$，使得 $c(t_0) \le 0 \le -c(t_0+\pi)$。此外，由于对所有$t \in \mathbb{T}$都有 $a(t) \le -a(t+\pi)$，现在我们可以确定

$$\begin{aligned}
b_1 &\in [a(t_0-\frac{2\pi}{3}), -a(t_0+\frac{\pi}{3})], \\
b_2 &\in [a(t_0+\frac{2\pi}{3}), -a(t_0-\frac{\pi}{3})], \\
b_3 &\in [a(t_0), -a(t_0+\pi)]
\end{aligned}$$

使得 $b_1+b_2+b_3 = 0$。事实上，这是可行的，因为这些区间左端点之和等于 $c(t_0)$，而这些区间右端点之和等于 $-c(t_0+\pi)$。现在令 $\mathbf{v}_1 := \mathbf{v}(t_0-\frac{2\pi}{3})$、$\mathbf{v}_2 := \mathbf{v}(t_0+\frac{2\pi}{3})$ 和 $\mathbf{v}_3 := \mathbf{v}(t_0)$，并令 $\mathbf{z}_0$ 为直线 $L(t_0-\frac{2\pi}{3}, b_1)$、$L(t_0+\frac{2\pi}{3}, b_2)$和 $L(t_0, b_3)$的唯一交点。由于 $\mathbf{z}_0$ 位于这三条直线上，我们得到$a_i := \langle \mathbf{z}_0, \mathbf{v}_i\rangle = b_i$，其中 $i=1$分别为 1、2、3。根据区间中 b_i的选取，现在可知（见（22））引理的性质均已满足。引理的最后一句由以下事实得出：$m_i^L + m_i^R = \mu(\Omega) + \mu(\{\omega\in\Omega\colon \langle g(\omega), \mathbf{v}_i\rangle = a_i\})$。

无界 g 的情形可通过以下化归归结为有界函数的情形。对于 $j \in \mathbb{N}$，令 $\Omega_j \subseteq \Omega$ 为一个可测子集，使得 $g\chi_{\Omega_j}$ 有界且 $\Omega_j \uparrow \Omega$。记$\mu_j := \mu^1(\Omega_j)\mu$ 以及 $g_j := g|_{\Omega_j} \in L_\infty(\Omega_j, \mu_j)$。将引理的结论应用于 g_j，可得 $\mathbf{z}0_{,j}$和 $\mathbf{v}_{i,j}$，以及 $a_{i,j} = \langle \mathbf{z}0_{,j}、\mathbf{v}_{i,j}\rangle$，它们具有所述性质。序列 $\mathbf{z}0_{,j}$必定有界。事实上，否则存在一个 $i \in \{1,2,3\}$，使得对于 $(a_{i,j})_{j\ge1}$的某个子序列，我们有 $a_{i,j} \to +\infty$。然而，这将与 $\frac{1}{2} \le \mu_j\Big(\{\omega \in \Omega_j\colon \langle g_j(\omega), \mathbf{v}_{i,j}\rangle \ge a_{i,j}\}\Big)$矛盾。因此，由序列 $(\mathbf{z}0_{,j})_{j\ge1}$和 $(\mathbf{v}_{i,j})_{j\ge1}$的有界性可知，对 $\mathbb{N}$ 中某个严格递增序列 $(j_k)_{k\ge1}$，极限 $\mathbf{z}_0 := \lim_{k\to\infty}\mathbf{z}0_{,j_k}$和 $\mathbf{v}_i := \lim_{k\to\infty}\mathbf{v}_{i,j_k}$ 存在。令 $a_i := \langle \mathbf{z}_0, \mathbf{v}_i\rangle$，我们还有 $a_i = \lim_{k\to\infty} a_{i,j_k}$。现在利用（反向）Fatou 引理，对于 $i=1$、2、3，我们得到

$$\begin{aligned}
\mu\Big(\{\omega\in\Omega\colon \langle g(\omega), \mathbf{v}_i\rangle \le a_i\}\Big) &\ge \mu\Big(\bigcap_{K=1}^{\infty}\bigcup_{k\ge K}\{\omega\in\Omega_{j_k}\colon \langle g(\omega), \mathbf{v}_{i,j_k}\rangle \le a_{i,j_k}\}\Big) \\
&\ge \limsup_{k\to\infty}\mu\Big(\{\omega\in\Omega_{j_k}\colon \langle g(\omega), \mathbf{v}_{i,j_k}\rangle \le a_{i,j_k}\}\Big) \\
&\ge \limsup_{k\to\infty}\mu_{j_k}\Big(\{\omega\in\Omega_{j_k}\colon \langle g_{j_k}(\omega), \mathbf{v}_{i,j_k}\rangle \le a_{i,j_k}\}\Big) \\
&\ge \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

同理，可以证明 $\mu\Big(\{\omega\in\Omega|\langle g(\omega),\mathrm{v}_i\rangle\geq a_i\}\Big)\geq\frac{1}{2}$。引理的最后一行可照前述方法推出。引理得证。

□

现在我们已做好充分准备来证明定理 4.3。

定理 4.3 的证明。通过将 $\mathbb{C}$ 与 $\mathbb{R}^2$ 等同，我们可以应用引理 4.5，从而得到 z_0 和 $\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2,\mathrm{v}_3$ 以及 a_1、a_2、a_3，并利用它们证明该结果。此外，不失一般性，我们还可以假设 $\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2$ 和 v_3 均为逆时针定向。在证明中，我们根据 n 分情况讨论。分别对以下情形证明该结果：(1) n 为偶数，或 $n=\infty$；(2) n 为奇数，

(1). n 为偶数，或 $n=\infty$。

首先，假设 $n\in\mathbb{N}$ 为偶数。那么，根据点 z_0 和 $\mathrm{v}_1,\mathrm{v}_2,\mathrm{v}_3$ 的选取（见引理 4.5），并利用 n 为偶数这一事实，对于 $j=1$，我们可以构造 Ω_n 的划分 $\{I_j^+,I_j^-\}$，使得 $\mu_n(I_j^+)=\mu_n(\Omega_n)/2=\mu_n(I_j^-)$，并且当 $\omega\in I_j^-$ 时，$\langle g(\omega),\mathrm{v}_j\rangle\leq a_j$；当 $\omega\in I_j^+$ 时，$\langle g(\omega),\mathrm{v}_j\rangle\geq a_j$。若 $n=\infty$，则同样成立，因为此时 μ_n 是无原子的。现在我们可以定义这些集合

$$\begin{aligned}
P_1^+&=I_1^+\cap I_2^-\cap I_3^-,\quad P_1^-=I_1^-\cap I_2^+\cap I_3^+,\\
P_2^+&=I_1^-\cap I_2^+\cap I_3^-,\quad P_2^-=I_1^+\cap I_2^-\cap I_3^+,\\
P_3^+&=I_1^-\cap I_2^-\cap I_3^+,\quad P_3^+=I_1^+\cap I_2^+\cap I_3^-,\\
P_4^+&=I_1^+\cap I_2^+\cap I_3^+,\quad P_4^-=I_1^-\cap I_2^-\cap I_3^-
\end{aligned}$$

该划分 Ω_n。

我们证明 $g(P_4^+\cup P_4^-)\subseteq\{\mathrm{z}_0\}$。已知 $\mathrm{v}_1+\mathrm{v}_2+\mathrm{v}_3=0$，因此 $a_1+a_2+a_3=0$。对于$\omega\in I_1^+\cap I_2^+\cap I_3^+$，我们有 $\langle g(\omega),\mathrm{v}_i\rangle\geq a_i$、$i=1$、2、3，以及 $\sum_{i=1}^3\langle g(\omega),\mathrm{v}_i\rangle=0$。因此，$\langle g(\omega),\mathrm{v}_i\rangle=a_i$、$i=1$、2、3。但这恰好意味着 $g(\omega)=\mathrm{z}_0$。类似地，$g(P_4^-)\subseteq\{\mathrm{z}_0\}$。为便于读者理解，我们在图 2 中直观展示了这些划分集。

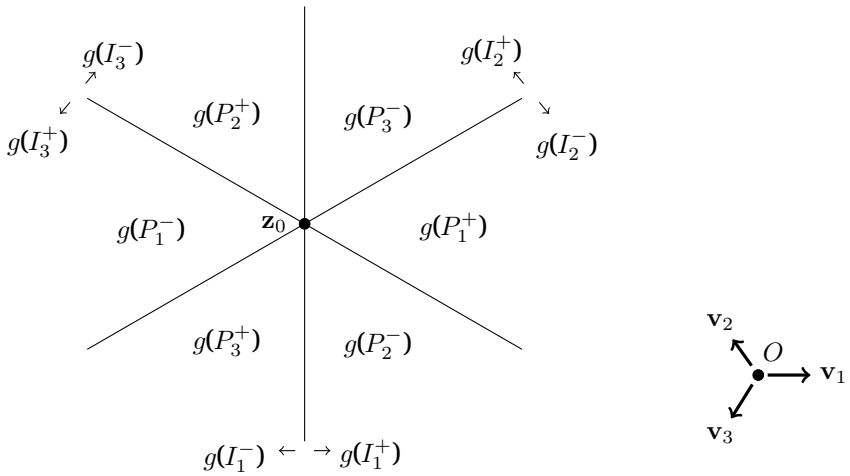

FIGURE 2. 划分集针对一个通用示例进行了可视化（任何示例都与此类似，只需移动z_0并旋转直线）。3条直线交于单一点z_0。对于每条直线，集合Ω_n被划分为两个集合 I_i^+ 和 I_i^-，使得 $g(I_i^+)$ 和 $g(I_i^-)$ 仅位于该直线的一侧。随后，划分集 $P_j^\pm$ 满足 $g(P_j^\pm)$ 位于一个连通分支（或其边界）中。集合 $g(P_4^+)$ 和 $g(P_4^-)$ 未在图中显示。对于这些集合，我们必须有 $g(P_4^+\cup P_4^-)\subseteq\{\mathrm{z}_0\}$。

我们有

$$\mu_n(P_1^+\cup P_2^-\cup P_3^-\cup P_4^+)=\mu_n(I_1^+)=\mu_n(I_1^-)=\mu_n(P_1^-\cup P_2^+\cup P_3^+\cup P_4^-),\tag{23}$$

$$\mu_n(P_1^-\cup P_2^+\cup P_3^-\cup P_4^+)=\mu_n(I_2^+)=\mu_n(I_2^-)=\mu_n(P_1^+\cup P_2^-\cup P_3^+\cup P_4^-),\tag{24}$$

$$\mu_n(P_1^-\cup P_2^-\cup P_3^+\cup P_4^+)=\mu_n(I_3^+)=\mu_n(I_3^-)=\mu_n(P_1^+\cup P_2^+\cup P_3^-\cup P_4^-),\tag{25}$$

(23)+(24):

$$\mu_n(P_3^-)+\mu_n(P_4^+)=\mu_n(P_3^+)+\mu_n(P_4^-),$$

(23)+(25):

$$\mu_n(P_2^-)+\mu_n(P_4^+)=\mu_n(P_2^+)+\mu_n(P_4^-),$$

(24)+(25):

$$\mu_n(P_1^-)+\mu_n(P_4^+)=\mu_n(P_1^+)+\mu_n(P_4^-).$$

因此我们得到，$t:=\mu_n(P_j^+)-\mu_n(P_j^-)$ 与 $j=1$、2、3、4 无关。

假设 $t\geq 0$，使得 $\mu_n(P_j^+)\geq t$。选取 $A_j\subseteq P_j^+$，使得 $\mu_n(A_j)=t$。我们记作$X_1=(P_4^+\cup P_4^-)\setminus A_4$并

$$X_2^{1,1}=P_1^+\setminus A_1,\quad X_2^{1,2}=P_1^-,\ X_2^{2,1}=P_2^+\setminus A_2,\ X_2^{2,2}=P_2^-,\ X_2^{3,1}=P_3^+\setminus A_3,\ X_2^{3,2}=P_3^-.$$

首先，假设 $n\in\mathbb{N}$ 为偶数。那么 $A_j=\{a_{j,1},\dots,a_{j,l}\}$、$j=1$、2、3、4、$l=tn$。固定 $k=1$，.....，l。在每个三元组 $(a_{1,k},a_{2,k},a_{3,k})$ 中，都存在这样的 i、$j\in\{1,2,3\}$，使得$\frac{2\pi}{3}\leq\angle g(a_{i,k})$、z0、$g(a_{j,k})\leq\pi$（见图 2）。令 $\{q\}=\{1,2,3\}\setminus\{i,j\}$。则 $\{g(a_{i,k})\}$ 和 $\{g(a_{j,k})\}$，以及 $\{g(a_{q,k})\}$ 和 $\{g(a_{4,k})\}$ 构成 (z0、$\frac{\pi}{3}$)-共轭集对。我们将 X^{2k+2}、$_2{}^1=\{a_{i,k}\}$、X^{2k+2}、$_2{}^2=\{a_{j,k}\}$、X^{2k+3}、$_2{}^1=\{a_{q,k}\}$、X^{2k+3}、$_2{}^2=\{a_{4,k}\}$和 X^m、$_2{}^1=X^m$、$_2{}^2=\emptyset$ 记作 $m\geq 2l+4$。

现在假设 $n=\infty$。令 $\Sigma_j=\{Y_j^1,Y_j^2,\dots\}$ 为 A_j 中两两不相交的可测子集的一个极大系统，$j=1$，2，3，4，使得 $\mu_\infty(Y_1^k)=\mu_\infty(Y_2^k)=\mu_\infty(Y_3^k)=\mu_\infty(Y_4^k)>0$，并且四个 $(g(Y_1^k)\ g(Y_2^k)\ g(Y_3^k)\ g(Y_4^k))$ 被分成两对 (z0, $\frac{\pi}{3}$)-共轭集，其中 $k=1$，2，.....。

令 $B_j=A_j\setminus\bigcup_k Y_j^k$。则 $\mu_\infty(B_1)=\mu_\infty(B_2)=\mu_\infty(B_3)=\mu_\infty(B_4)=t_0$。假设 $t_0>0$。如果集合 $g(B_1)\ g(B_2)\ g(B_3)$ 位于从 z_0 发出且夹角为 $\frac{2\pi}{3}$ 的三条射线上，那么 $g(B_1)\ g(B_2)$ 是 (z0, $\frac{\pi}{3}$)-共轭集，$g(B_3)\ g(B_4)$ 亦然。这与上述集合系统 Σ_j 的极大性相矛盾。

否则，将存在这样的 $b_1\in B_i$，$b_2\in B_j$，$i,j\in\{1,2,3\}$，$i\neq j$，使得 $\angle g(b_1)$、z0、$g(b_2)>\frac{2\pi}{3}$和 $g(b_1)\ g(b_2)$ 都是 $g|_{B_i\cup B_j}$ 的本质值。于是，分别存在点 $g(b_1)$ 和 $g(b_2)$ 的邻域 V_1 和 V_2，使得 V_1,V_2 是 (z0, $\frac{\pi}{3}$)-共轭集。因此，存在集合 $Y_1\subset B_i$，$Y_2\subset B_j$，使得 $\mu_\infty(Y_1)=\mu_\infty(Y_2)>0$ 且 $g(Y_k)\subset V_k$，$k=1,2$。因此，$g(Y_1)\ g(Y_2)$ 是 (z0, $\frac{\pi}{3}$)-共轭集。令 $\{q\}=\{1,2,3\}\setminus\{i,j\}$。存在 $Y_3\subset B_q$，$Y_4\subset B_4$，$\mu_\infty(Y_3)=\mu_\infty(Y_4)=\mu_\infty(Y_1)$。显然，$g(Y_3)\ g(Y_4)$ 是 (z0, $\frac{\pi}{3}$)-共轭集。集合 Y_1,Y_2,Y_3,Y_4 的存在与上述系统 Σ_j 的极大性矛盾。

两种情形中得到的矛盾均表明 $t_0=0$。因此，系统$\{X_1\}\cup\{X_2^{m,i}:\ 1\leq m\leq 3$、$1\leq i\leq 2\}$ 可以利用 Σ_j、$j=1$、2、3、4完成。

还需定义 T使得 $T_{X_1}=Id_{X_1}$，$T\ (X^{m,\ 12})=X^{m,\ 22}$，$T\ (X^{m,\ 22})=X^{m,\ 12}$对于 $m=1$，2，.....并且使得 $T^2=$恒等算子$_{\Omega_n}$。于是，不等式（13）由引理 4.4得到。

$t\leq 0$的情形类似，只需交换 P_j^+和 P_j^-的角色。

(2)。n 为奇数。

对于 $i=1$、2、3，我们可以改为构造 Ω_n 的划分 $\{I_i^+,\{\omega_i\},I_j^-\}$，使得 $\mu_n(I_i^+)=\mu_n(I_i^-)$，并且当 $\omega\in I_i^-$ 时 $\langle g(\omega),\mathrm{v}_i\rangle\leq a_i$，以及当 $\omega\in I^+$时 $\langle g(\omega),\mathrm{v}_i\rangle\geq a_i$，且 $\langle g(\omega_i),\mathrm{v}_i\rangle=a_i$。事实上，这样的 ω_i 存在，因为 $\Omega_n:\ \langle g(\omega),\mathrm{v}_i\rangle\leq a_i\}|$，$|\{\omega\in\Omega_n:\ \langle g(\omega),\mathrm{v}_i\rangle\geq a_i\}|\geq\frac{n+1}{2}$，因此$\{\omega\in\Omega_n:\ \langle g(\omega),\mathrm{v}_i\rangle\leq a_i\}\cap\{\omega\in\Omega_n:\ \langle g(\omega),\mathrm{v}_i\rangle\geq a_i\}\neq\emptyset$。记为 $Y_0=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$。

现在，假设 $\mathrm{z}_0\in g(\Omega_n)$。那么我们可以令 $\omega_1=\omega_2=\omega_3$ 全都相等，并使得$g(\omega_i)=\mathrm{z}_0$。于是 $|Y_0|=1$ 以及集合 $\{I_i^+,I_i^-\}$ 都是 $\Omega_n\setminus Y_0$ 的划分，与 (1) 类似，因此我们可以构造 $\Omega_n\setminus Y_0$ 的相应自同构 T。令$T(\omega_1)=\omega_1$，即可完成该情形的证明。

因此，我们可以假设 $\mathrm{z}_0\notin g(\Omega_n)$，从而特别有 $g(\omega_i)\neq g(\omega_j)$，其中 $i\neq j$ 和 $|Y_0|=3$。现在先假设 $\mathrm{z}_0\in\mathrm{Conv}(g(Y_0))$。于是对所有 $i\in\{1,2,3\}$，$Y_0\cap I_i^+$ 和 $Y_0\cap I_i^-$ 都只包含 1 个元素。因此，$\mu_n(I_i^+\setminus Y_0)=\mu_n(I_i^-\setminus Y_0)$，且 $\Omega_n\setminus Y_0$ 的划分 $\{I_i^+\setminus Y_0,I_i^-\setminus Y_0\}$ 满足与 (1) 相同的性质。因此，我们得到 $\Omega_n\setminus Y_0$ 的一个具有相同性质的保测自同构 T。现在令 $T(\omega_1)=\omega_2$、$T(\omega_2)=\omega_3$，以及 $T(\omega_3)=\omega_1$，使得$\angle g(\omega_i)$、z0、$g(T(\omega_i))=\frac{2\pi}{3}$。根据引理 4.4，证明至此完成。

现在假设 $\mathbf{z}_0\notin$属于凸包（$g\ (Y_0)$）。从几何上可以看出（直观示意见图 3），存在一组唯一的（互不相同的）指标 i_1、i_2、$i_3\in\{1,2,3\}$ 使得

$$\{\omega_{i_1}\}=Y_0\cap I_{i_2}^-\quad\{\omega_{i_3}\}=Y_0\cap I_{i_2}^+. \tag{26}$$

现在，假设 $\omega_{i_1}\notin I_{i_3}^+$。于是，由于 $\omega_{i_1}\neq\omega_{i_3}$，我们得到 $\omega_{i_1}\in I_{i_3}^-$。但接着，由于 $\omega_{i_1}\in\{\omega_{i_1}\}\cap I_{i_2}^-\cap I_{i_3}^-$，按照与在 (1) 中证明 $g(P_4^+\cup P_4^-)\subseteq\{\mathrm{z}_0\}$ 相同的论证，我们会得到 $g(\omega_{i_1})=\mathrm{z}_0$。然而，$\mathrm{z}_0\notin g(\Omega_n)$

根据我们的假设，因此这不可能成立。我们得出结论，必有 $\omega_{i_1} \in I_{i_3}^+$。用同样的论证可得，必有 $\omega_{i_3} \in I_{i_1}^-$（事实上，否则 $\omega_{i_3} \in I_{i_1}^+$，从而 $\omega_{i_3} \in I_{i_1}^+ \cap I_{i_2}^+ \cap \{\omega_{i_3}\}$，这将意味着 $g(\omega_{i_3}) = \mathrm{z}_0$，，从而产生矛盾）。此外，我们断言 $\omega_{i_2} \in I_{i_3}^+$。事实上，若 $\omega_{i_2} \in I_{i_3}^-$，那么我们可以将指标重新排列为 $i_1' = i_2$、$i_2' = i_3$ 和 $i_3' = i_1$，从而得到 $\{w_{i_1'}\} = \{w_{i_2}\} = Y_0 \cap I_{i_3}^- = Y_0 \cap I_{i_2'}^-$ 和 $\{w_{i_3'}\} = \{w_{i_1}\} = Y_0 \cap I_{i_3}^+ = Y_0 \cap I_{i_2'}^+$。这与满足 (26) 的选择 i_1、i_2、i_3 的唯一性矛盾。因此，我们得出结论，确实有 $\omega_{i_2} \in I_{i_3}^+$。用同样的论证可得 $\omega_{i_2} \in I_{i_1}^-$（事实上，若 $\omega_{i_2} \in I_{i_1}^+$，我们可以采用重排 $i_1' = i_3$、$i_2' = i_1$ 和 $i_3' = i_2$，得到 $\{w_{i_1'}\} = \{w_{i_3}\} = Y_0 \cap I_{i_1}^- = Y_0 \cap I_{i_2'}^-$ 和 $\{w_{i_3'}\} = \{w_{i_2}\} = Y_0 \cap I_{i_1}^+ = Y_0 \cap I_{i_2'}^+$，这与唯一性矛盾）。为清晰起见，我们总结如下:

$$\{\omega_{i_1}\} = Y_0 \cap I_{i_2}^- \quad \{\omega_{i_3}\} = Y_0 \cap I_{i_2}^+,$$
$$\{\omega_{i_2}, \omega_{i_3}\} = Y_0 \cap I_{i_1}^- \quad \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}\} = Y_0 \cap I_{i_3}^+.$$

现在我们得到

$$\mu_n(I_{i_1}^+ \cap I_{i_2}^-) + \mu_n(I_{i_1}^+ \cap I_{i_2}^+) = \mu_n(I_{i_1}^+ \setminus \{\omega_{i_2}\}) = \mu_n(I_{i_1}^+), \tag{27}$$

$$\mu_n(I_{i_1}^+ \cap I_{i_2}^-) + \mu_n(I_{i_1}^- \cap I_{i_2}^-) = \mu_n(I_{i_2}^- \setminus \{\omega_{i_1}\}) = \mu_n(I_{i_2}^-) - \frac{1}{n}, \tag{28}$$

$$\mu_n(I_{i_2}^+ \cap I_{i_3}^-) + \mu_n(I_{i_2}^- \cap I_{i_3}^-) = \mu_n(I_{i_3}^- \setminus \{\omega_{i_2}\}) = \mu_n(I_3^-), \tag{29}$$

$$\mu_n(I_{i_2}^+ \cap I_{i_3}^-) + \mu_n(I_{i_2}^+ \cap I_{i_3}^+) = \mu_n(I_{i_2}^+ \setminus \{\omega_{i_3}\}) = \mu_n(I_{i_2}^+) - \frac{1}{n}. \tag{30}$$

因此，由 (27) +(28) 可得 $\mu_n(I_{i_1}^+ \cap I_{i_2}^+) = \frac{1}{n} + \mu_n(I_{i_1}^- \cap I_{i_2}^-)$；将 (29) 与 (30) 相加可得 $\mu_n(I_{i_2}^- \cap I_{i_3}^-) = \frac{1}{n} + \mu_n(I_{i_3}^+ \cap I_{i_2}^+)$。由此可得 $\omega_4 \in I_{i_1}^+ \cap I_{i_2}^+$和 $\omega_5 \in I_{i_2}^- \cap I_{i_3}^-$存在。现在，对于集合 $P_4^+ := I_{i_1}^+ \cap I_{i_2}^+ \cap I_{i_3}^+$ 和 $P_4^- := I_{i_1}^- \cap I_{i_2}^- \cap I_{i_3}^-$，我们有 $g(P_4^+ \cup P_4^-) \subseteq \{\mathrm{z}_0\}$（与 (1) 中相同），因此根据假设，$P_4^+ \cup P_4^- = \emptyset$ 当 $\mathrm{z}_0 \notin g(\Omega_n)$ 时成立。这意味着 $\omega_4 \notin I_{i_3}^+$和 $\omega_5 \notin I_{i_1}^-$。此外，由于 $\omega_{i_3} \in I_{i_1}^-$且 $\omega_{i_1} \in I_{i_3}^+$，我们得到 $\omega_4 \neq \omega_{i_3}$和 $\omega_5 \neq \omega_{i_1}$。由于 $\{I_i^+, \{\omega_i\}, I_i^-\}$是 Ω_n的划分，我们得出 $\omega_4 \in I_{i_1}^+ \cap I_{i_2}^+ \cap I_{i_3}^-$和 $\omega_5 \in I_{i_1}^+ \cap I_{i_2}^- \cap I_{i_3}^-$。记 $Y_1 = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$，于是根据上述结果，我们有 $|Y_1| = 5$，并且:

$$Y_1 \cap I_{i_1}^- = \{\omega_{i_2}, \omega_{i_3}\}, \quad Y_1 \cap I_{i_2}^- = \{\omega_{i_1}, \omega_5\}, \quad Y_1 \cap I_{i_3}^- = \{\omega_4, \omega_5\},$$
$$Y_1 \cap I_{i_1}^+ = \{\omega_4, \omega_5\}, \quad Y_1 \cap I_{i_2}^+ = \{\omega_{i_3}, \omega_4\}, \quad Y_1 \cap I_{i_3}^+ = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}\}.$$

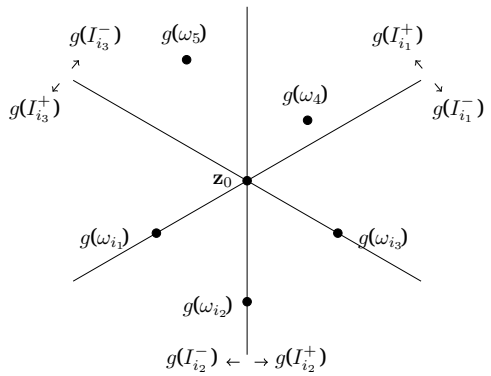

FIGURE 3. 这5个点是一个示例的示意图。

现在，由于所有这些集合的大小都是 2，我们必然有】【。

$$\mu_n(I_i^+ \setminus Y_1) = \mu_n(I_i^+) - \frac{2}{n} = \mu_n(I_i^-) - \frac{2}{n} = \mu_n(I_i^- \setminus Y_1).$$

这意味着 $\Omega_n \setminus Y_1$ 的划分 $\{I_i^+ \setminus Y_1, I_i^- \setminus Y_1\}$ 满足与 (1) 中相同的性质。因此，我们可以找到一个具有相同性质的 $\Omega_n \setminus Y_1$ 变换 T。现在，通过令 $T(\omega_{i_1}) = \omega_4$、$T(\omega_4) = \omega_{i_2}$、$T(\omega_{i_2}) = \omega_5$、$T(\omega_5) = \omega_{i_3}$ 以及 $T(\omega_{i_3}) = \omega_{i_1}$，我们可以在 Y_1 上定义 T。于是，对所有 i，有 $\angle g(\omega_i), \mathrm{z}0, g(T(\omega_i)) \geq \frac{2\pi}{3}$。由引理 4.4 可知，这意味着 $|g(w) - g(T(w))| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}(|g(w) - \mathrm{z}_0| + |g(T(w) - \mathrm{z}_0|)$ 对所有 $\omega \in \Omega$ 都成立，这表明 (13) 成立。不等式 (14) 由此得出。此外，在以下每一种

所考虑的情形中，如何将 Ω_n 划分为部分 X_1, X_2, X_3, X_5 都是显而易见的（注意，根据构造，对于某个 $k \in \{1,2,3,5\}$，有 $T^k(\omega) = \omega$，其中 $\omega \in \Omega$）。我们证明最后一个结论。

设 $n < \infty$，并设 (T_m)、(z_m) 为满足 $0 < \Lambda(g, T_m, z_m) \uparrow \Lambda(g)$ 的序列。则

$$\Lambda(g, T_m, z_m)^{-1} |g(\omega) - g(T_m(\omega))| \geq |g(\omega) - z_m| + |g(T_m(\omega)) - z_m| \geq |g(\omega) - z_m|$$

对任意 $\omega \in \Omega_n$。设 $\omega_0 \in \Omega_n$。则

$$|g(\omega_0) - z_m| \leq \Lambda(g, T_m, z_m)^{-1} \operatorname{Diam}(g(\Omega_n)) \leq \Lambda(g, T_1, z_1)^{-1} \operatorname{Diam}(g(\Omega_n)).$$

由于 $card(Aut_n) = n! < \infty$，且由于 $\{z \in \mathbb{C} : |g(\omega_0) - z| \leq \Lambda(g, T_1, z_1)^{-1} \operatorname{Diam}(g(\Omega_n))\}$ 是紧的，故存在一个序列 (m_k) 和一个 $z_0 \in \mathbb{C}$，使得

$$z_0 = \lim_k z_{m_k}, \ T_0 := T_{m_1} = T_{m_2} = \cdots = T_{m_k} = \ldots .$$

于是 $\Lambda(g, T_0, z_0) = \Lambda(g)$。 □

5. Commutator estimates for normal operators in finite factors

本节的主要结果定理5.6 如下，它为正规元 $a \in S(\mathcal{M})$建立了交换子不等式（4），其中 $\mathcal{M}$ 是一个有限因子，并给出了最优常数 $C_{\mathcal{M}}$的上界和下界。这为正规元给出了一个适用版本的[3, 定理 1。1]，我们在定理 n（$n < \infty$）中考虑 I5.1型因子（$_1$型因子的情形则见定理 5.4，并证明交换子不等式对常数 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 成立。II_1型因子的证明还需要两个额外结果：定理5.2 和引理 5.3。此外，为了证明定理 5.6 中的上界，我们给出命题5.5。

定理 5.1。设 $\mathcal{M} = B(\mathcal{H})$ 是 $n \in \mathbb{N}$ 上的一个 I_n-因子。对于任意正规算子 $a \in \mathcal{M}$，存在一个酉元 $u \in \mathcal{U}(\mathcal{M})$ 和一个 $z_0 \in \mathbb{C}$，使得

$$|[a, u]| \geq \frac{\sqrt{3}}{2}(|a - z_0 \mathbf{1}| + u|a - z_0 \mathbf{1}|u^*). \tag{31}$$

此外，可以选择 u 使得

- 当 n 为偶数时，存在投影 p_1、p_2，使得 $p_1 + p_2 = \mathbf{1}$
- 当 n 为奇数时，存在投影 p_1、p_2、p_3、p_5，使得 $p_1 + p_2 + p_3 + p_5 = \mathbf{1}$

从而

$$p_k u = u p_k, \ u^k p_k = p_k, \ k = 1, 2, 3, 5.$$

If $a \in \mathcal{M}$ 具有如下性质：其谱 $\sigma(a)$ 位于一条直线上，那么我们可以得到真正的等式 *ty:*

$$|[a, u]| = |a - z_0 \mathbf{1}| + u|a - z_0 \mathbf{1}|u, \ \textit{for some } u^* = u \in \mathcal{U}(\mathcal{M}), z_0 \in \mathbb{C}. \tag{32}$$

我们注意到，当 $n = 1$ 为 2 时，每个正规 $a \in \mathcal{M}$ 都满足这一额外条件。

证明。由于 a 是一个作用在 n 维希尔伯特空间上的正规元，由谱映射定理可知，存在一个酉元 $U: \mathcal{H} \to L_2(\Omega_n)$ 使得 $a = U^* M_g U$，其中 M_g是作用在 $L_2(\Omega_n)$ 上的乘法算子，其中 $g \in L_\infty(\Omega_n)$。将定理 4.3 应用于 g，得到一个变换 T 和一个 $z_0 \in \mathbb{C}$，使得

$$|g \circ T - g| \geq \frac{\sqrt{3}}{2}(|g - z_0| + |g \circ T - z_0|) \tag{33}$$

连同 Ω_n 的给定划分，该划分由集合 X_1, X_2（当 n 为偶数时）或 X_1, X_2, X_3, X_5（当 n为奇数时）组成，并且满足 $T^k|_{X_k} =$恒等算子$_{X_k}$。现在令 u_T为与 T对应的作用在 $L_2(\Omega_n)$ 上的 Koopman 算子，即 $u_T f = f \circ T$。记 $u = U^* u_T U$。于是

$$\begin{aligned}
|[a, u]| &= |u(u^* a u - a)| \\
&= |uau^* - a| \\
&= U^* |u_T M_g u_T^* - M_g| U \\
&= U^* |M_{g \circ T} - M_g| U \\
&= U^* M_{|g \circ T - g|} U \\
&\geq \Lambda_n \left(U^* |M_g - z_0| U + U^* |M_{g \circ T} - z_0| U \right) \\
&= \Lambda_n \left(U^* |M_g - z_0| U + U^* u_T |M_g - z_0| u_T^* U \right). \\
&= \Lambda_n \left(|a - z_0| + u|a - z_0|u^* \right)
\end{aligned}$$

现在，我们通过令 $p_k = U^* \chi_{X_k} U$ 来定义投影，它们显然满足这些陈述。

如果 $\sigma(a)$ 位于同一直线上，则存在标量 α、$\beta\in\mathbb{C}$、$|\alpha|=1$，使得 $a_1:=\alpha(a-\beta\mathbf{1})\in\mathcal{M}$是自伴的。由定理 1.1 可知，存在 $z_0\in\mathbb{R}$ 和 $u=u^*\in\mathcal{U}(\mathcal{M})$，使得

$$|[a,u]|=|[a_1,u]|=|a_1-z_0\mathbf{1}|+u|a_1-z_0\mathbf{1}|u=|a-(\beta+z_0\alpha^{-1})\mathbf{1}|+u|a-(\beta+z_0\alpha^{-1})\mathbf{1}|u.$$

□

我们需要以下结果：对于弥散半有限冯·诺伊曼代数（$\mathcal{M}$，τ）以及正规可测 $a\in S(\mathcal{M})$，存在一个单射 $*$-同态 F，其定义于 $S[0,1]$ 与 $S(\mathcal{M}$之间，保持测度，且使得 a 属于 F的像。对于下文结果的特殊情形，即 $\mathcal{M}$ 的正有界元素以及 $L_1(M,\tau)$的正元素，可分别参见[11, 引理 9] 和 [9, 引理 4。1]

定理 5.2. 设 $\mathcal{M}$ 是一个弥散（即无原子）冯·诺伊曼代数，带有忠实正规迹态 τ；设 $a\in S(\mathcal{M})$ 是一个正规算子。存在这样的单射 $*$-同态 $F\colon S[0,1]\to S(\mathcal{M})$，使得 $a\in\mathrm{Image}(F)$，并且对于任意可测子集 $A\subset[0,1]$，有 $m(A)=\tau(F(\chi_A))$（此处 m 是 $[0,1]$上的勒贝格测度）。

证明。设 e 是定义在 σ 代数 $\mathcal{B}(\sigma(a))$ 上、取值于 $\sigma(a)$ 中博雷尔子集的算子 a 的谱测度。于是，$\tau(e(\cdot))$ 在 $\mathcal{B}(\sigma(a))$ 上诱导出一个概率测度。根据谱定理（见 [22, 定理 13.33]），我们有

$$a=\int_{\sigma(a)}\lambda de(\lambda).$$

设 X_0 是一组特征值 a。显然，$X_0\subset\sigma(a)$ 和 $card(X_0)\le\aleph_0$。事实上，若 $t\in X_0$，则 $e(\{t\})\neq 0$，且 $\sum_{t\in X_0}\tau(e(\{t\}))=\tau(e(X_0))\le 1$。设 $t\in X_0$。由于 $\mathcal{M}$ 是弥散的，因此在 $\mathcal{M}$ 中存在这样一条投影链 $f_s^t\uparrow_s e(\{t\})$，使得 $\tau(f_s^t)=s$，$s\in Y_t:=[0,\tau(e(\{t\}))]$。

将由 $\mathcal{B}(Y_t)$ 给出的等式定义的谱测度记为 f_t

$$f_t((s_1,s_2))=f_{s_2}^t-f_{s_1}^t.$$

对于任意 $a\in\mathcal{B}(Y_t)$，我们有 $\tau(f_t(A))=m(A)$。现在令

$$X=(\sigma(a)\setminus X_0)\sqcup\bigsqcup_{t\in X_0}Y_t.$$

在 $\mathcal{B}(X)$ 上，我们定义一个谱测度 g，使得

$$g|_{\mathcal{B}(\sigma(a)\setminus X_0)}=e|_{\mathcal{B}(\sigma(a)\setminus X_0)},\ g|_{\mathcal{B}(Y_t)}=f_t,\ t\in X_0,$$

以及一个标量测度

$$\mu_X(A)=\tau(e(A\cap(\sigma(a)\setminus X_0)))+\sum_{t\in X_0}\mu(A\cap Y_t).$$

由此可知，$(X,\mathcal{B}(X)\ \mu_X)$ 是一个带有无原子概率测度的勒贝格空间。因此，它同构于赋有勒贝格测度 m 的线段 $[0,1]$，参见例如 [6, 定理 9.5。1]

线性映射 $F\colon S(X,\mathcal{B}(X)\ \mu_X)\to S(\mathcal{M})$ 定义为

$$F(\varphi)=\int_X\varphi(x)dg(x)$$

对任意 $\varphi\in S(X,\mathcal{B}(X)\ \mu_X)$（见 [10, 定义 1.5.6]）。我们注意到，对于可测的$A\subseteq X$，$F(\chi_A)=g(A)$，且 $\mu_X(A)=\tau(F(\chi_A))$。此外，对于可测集 $A,B\subseteq X$，$F(\chi_A\chi_B)=F(\chi_{A\cap B})=g(A\cap B)=g(A)g(B)=F(\chi_A)F(\chi_B)$。因此，由于 F 关于 $S(X,\mathcal{B}(X)\ \mu_X)$ 和 $S(\mathcal{M},\tau)$ 中依测度收敛的拓扑是连续的，并且 $S(X,\mathcal{B}(X)\ \mu_X)$ 中的简单函数关于测度拓扑稠密，可知对于所有 $\varphi,\psi\in S(X,\mathcal{B}(X)\ \mu_X)$，$F(\varphi\psi)=F(\varphi)F(\psi)$。此外，$F(\overline{\varphi})=\int_X\varphi(x)dg(x)=\overline{F(\varphi)}^*$，因此我们发现 F是一个 $*$-同态。现在，假设 $\varphi\in S(X,\mathcal{B}(X)\ \mu_X)$ 满足 $F(\varphi)=0$，且 $B\subseteq X$满足对几乎处处的$x\in B$，$\varphi(x)\neq 0$。则 $g(B)=F(\chi_B)=F(\frac{1}{\varphi}\chi_B)F(\varphi)=0$，因此 $\mu_X(B)=\tau(g(B))=0$。这表明 F是单射。

最后，通过令 f 满足以下条件来定义函数 $f\colon t=t$，其中 $t\in\mathcal{B}(\sigma(a)\setminus X_0)$ 或 $t\in Y_t$。那么，$f\in S(X,\mathcal{B}(X)\ \mu_X)$ 且 $F(f)=a$。□

引理 5.3. 设 $\mathcal{M}$ 是一个有限冯·诺伊曼代数，设 a、$b\in S(\mathcal{M})$ 是正规算子，$z_0\in\mathbb{C}$、$0\le\alpha<\pi$，并且设 $\sigma(a)$ $\sigma(b)$ 是 (z_0,α)-共轭集。那么

$$v|a-b|v^*\ge(|a-z_0\mathbf{1}|+|b-z_0\mathbf{1}|)\cos\frac{\alpha}{2}\tag{34}$$

对于某个 $v\in\mathcal{U}(\mathcal{M})$。

证明。由于 $\sigma(a)$ 和 $\sigma(b)$ 是 (z_0,α)-共轭的，平移后的集合 $\sigma(a)-z_0$ 和 $\sigma(b)-z_0$ 是 $(0,\alpha)$-共轭的。于是，我们可以得到一对如图 1 所示的直线，它们相交于原点，夹角为 α。通过绕原点旋转复平面，我们可以确保这两条直线关于实轴对称。也就是说，存在一个函数 $f(z)=c(z-z_0)$，满足 $|c|=1$，使得

$$f(\sigma(a))\subset\{z:\ -\frac{\alpha}{2}\le Arg(z)\le\frac{\alpha}{2}\},\ f(\sigma(b))\subset\{z:\ \pi-\frac{\alpha}{2}\le Arg(z)\le\pi+\frac{\alpha}{2}\}.$$

令 $a_1=f(a)$ $b_1=f(b)$。我们有

$$|a_1|\cos\frac{\alpha}{2}\le\Re a_1,\ |b_1|\cos\frac{\alpha}{2}\le-\Re b_1.$$

因此

$$(|a-z_0\mathbf{1}|+|b-z_0\mathbf{1}|)\cos\frac{\alpha}{2}=(|a_1|+|b_1|)\cos\frac{\alpha}{2}\le\Re a_1-\Re b_1=\Re(a_1-b_1)\le\Re(a_1-b_1)_+ \tag{35}$$

根据命题2.1，我们得到

$$\Re(a_1-b_1)_+\le v|a_1-b_1|v^*=v|a-b|v^*. \tag{36}$$

对某个 $v\in\mathcal{M}$ 满足 $v^*v=\mathbf{1}$。由于 $\mathbf{1}$ 是有限投影，因此可得 $vv^*=\mathbf{1}$，即 $v\in\mathcal{U}(\mathcal{M})$。结合（35）和（36）可得（34）□

现在我们证明定理5.1 在 II_1-因子中的一个版本。下面的方程（37）与（31）略有不同，因为其中涉及第二个酉元 $w\in\mathcal{U}(\mathcal{M})$。

定理 5.4. 设 $\mathcal{M}$ 是一个 II_1 型因子，$a\in S(\mathcal{M})$ 是正规的。那么存在 $z_0\in\mathbb{C}$、$u=u^*\in\mathcal{U}(\mathcal{M})$ 和 $w\in\mathcal{U}(\mathcal{M})$，使得

$$w|[a,u]|w^*\ge\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(|a-z_0\mathbf{1}|+u|a-z_0\mathbf{1}|u). \tag{37}$$

如果 $\sigma(a)$ 位于一条直线上，那么

$$|[a,u]|=|a-z_0\mathbf{1}|+u|a-z_0\mathbf{1}|u. \tag{38}$$

证明。设 τ 是定义在 $\mathcal{M}$ 上的忠实正规迹态，并设 $F:\ S[0,1]\to S(\mathcal{M})$ 是定理 5.2 中的一个单射 $*$-同态，满足 $a\in\mathrm{Image}(F)$。设 $g=F^{-1}(a)$。

由定理 4.3 可知，存在 z_0，使得 $[0,1]$ 可被划分为互不相交的可测部分 $\{X_1\}\cup\{X_2^{m,i}:\ m\ge1,\ 1\le i\le2\}$，满足 $g(X_1)\subset\{z_0\}$、$\mu(X^{m,12})=\mu(X^{m,22})$，且集合 $g(X^{m,12})$ $g(X^{m,22})$ 对于 $m=1,2,\dots$ 是 $(z_0,\frac{\pi}{3})$-共轭的（其中 μ 是 $[0,1]$上的勒贝格测度）。

令 $e=F(\chi_{X_1})$ $p_m=F(\chi_{X^{m,12}})$ $q_m=F(\chi_{X^{m,22}})$ $m=1,2,\dots$。则 $p_m\sim q_m$，$m=1,2,\dots$，因为 $\tau(p_m)=\mu(X^{m,12})=\mu(X^{m,22})=\tau(q_m)$。此外 $e+\sum_{m\ge1}(p_m+q_m)=\mathbf{1}$。因此，存在这样的 $u=u^*\in\mathcal{U}(\mathcal{M})$，使得

$$ue=e,\ up_m=q_mu,\ m=1,2,\dots.$$

还要注意，由于 u 是自伴的，因此 $p_mu=uq_m$。显然，

$$|[a,u]|e=|[a-z_0\mathbf{1},u]|e=0=(|a-z_0\mathbf{1}|+u|a-z_0\mathbf{1}|u)e.$$

对于任意 $m=1,2,\dots$ $\sigma(ap_m)$ 与函数 $g|_{X^{m,12}}$ 的本质值集合 A_m 相同，而 $\sigma(uaup_m)=\sigma(aq_m)$ 与函数 $g|_{X^{m,22}}$ 的本质值集合 B_m 相同（这里将算子 ap_m 和 $uaup_m$ 视为代数 $p_m\mathcal{M}p_m$ 的元素）。集合 A_m 和 B_m 是$(z_0,\frac{\pi}{3})$-共轭集。由引理 5.3 可知

$$v_m|a-uau|v_m^*p_m=v_m|a-uau|p_mv_m^*\ge\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(|a-z_0\mathbf{1}|+u|a-z_0\mathbf{1}|u)p_m \tag{39}$$

对于某个 $v_m\in\mathcal{U}(p_m\mathcal{M}p_m)$。

应用自同构 $u\cdot u$ 于（39），并注意到 $u|a-uau|u=|a-uau|$，我们得到

$$(uv_mu)|a-uau|(uv_mu)^*q_m\ge\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(|a-z_0\mathbf{1}|+u|a-z_0\mathbf{1}|u)q_m. \tag{40}$$

为了完成证明，仍需定义

$$w=e+\sum_{n=1}^{\infty}(v_n+uv_nu)$$

这是一个酉元（该级数在强算子拓扑下收敛）（注意此处 $uv_mu \in \mathcal{U}(q_m\mathcal{M}q_m)$）。我们观察到，

$$w|[a,u]|w^*p_n = w|[a,u]|p_nv_n^*p_n = wp_n|[a,u]|v_n^*p_n = v_n|a-uau|v_n^*p_n \tag{41}$$

同理，$w|[a,u]|w^*q_n = (uv_nu)|a-uau|(uv_nu)^*q_n$ 以及 $w|[a,u]|w^*e = |[a,u]|e = 0$。在测度拓扑中将不等式（39）和（40）相加，我们得到

$$\begin{aligned} w|[a,u]|w^* &= w|[a,u]|w^*e + \sum_{n=1}^{\infty} w|[a,u]|w^*(p_n+q_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} v_n|a-uau|v_n^*p_n + (uv_nu)|a-uau|(uv_nu)^*q_n \\ &\geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{3}}{2}(|a-z_0\mathbf{1}| + u|a-z_0\mathbf{1}|u)(p_n+q_n) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}(|a-z_0\mathbf{1}| + u|a-z_0\mathbf{1}|u) \end{aligned}$$

这就证明了（37）。关于等式（38）的证明，请参见定理5.1证明的末尾。

□

我们现在已在定理5.1 和定理5.4 中证明，对于有限因子，交换子估计（4）以常数 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 成立。然而，对于所有正规 $a \in \mathcal{M}$，该不等式成立时所对应的常数可能并非最佳。现在我们将建立最佳可能常数的上界，特别地，我们将证明 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 实际上是在 $\mathcal{M}$ 为 II_1-因子或 I_n-因子（$n<\infty$）且 $n \equiv 0$ 模 3，时的最佳可能常数。为此，我们需要以下命题；该命题部分受[16, 定理 1]的证明启发。在此，对于给定的代数 $\mathcal{A}$，我们用 $\mathrm{Mat}_n(\mathcal{A})$ 表示所有元素属于 $n\times n$ 且其条目为 $\mathcal{A}$的矩阵集合。

命题 5.5. 设 $\mathcal{N}$ 是一个带有忠实正规迹态 $\tau_{\mathcal{N}}$ 的有限因子，$\mathbb{M}_n = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ $n\in\mathbb{N}$，$\mathcal{M} = \mathbb{M}_n \otimes \mathcal{N} \cong \mathrm{Mat}_n(\mathcal{N})$，$\tau_{\mathcal{M}} = \frac{1}{n}Tr \otimes \tau_{\mathcal{N}}$ 是 $\mathcal{M}$ 上的迹态。记 $\mathcal{U}_n^{per} \subseteq \mathbb{M}_n$ 为置换矩阵群，$\mathbb{D}_n \subseteq \mathbb{M}_n$ 为对角矩阵集合。

若 $a \in \mathbb{D}_n \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{N}}$，则

$$\sup_{u\in\mathcal{U}(\mathcal{M})} \|a-u^*au\|_2 = \max_{u\in\mathcal{U}_n^{per}\otimes\mathbf{1}_{\mathcal{N}}} \|a-u^*au\|_2$$

（$\mathrm{Mat}_n(\mathcal{N}) \to \mathbb{M}_n\otimes\mathcal{N}$ 的同构（识别）由映射 $(a_{ij})_{i,\,j=1}^n \to \sum_{i,\,j=1}^n \alpha_{ij}\otimes a_{ij}$ 给出，其中 α_{ij} 是 $\mathbb{M}_n$ 的矩阵单位。）

证明. 令 $a = \mathrm{Diag}(a_i)_{i=1}^n \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{N}}$，其中 $a_i \in \mathbb{C}$，并令 $u = (u_{ij})_{i,\,j=1}^n \in \mathcal{U}(\mathcal{M})$ $u_{ij}\in\mathcal{N}$，$i,\ j = 1,\ \ldots\ldots,\ n$。注意到

$$\|a-uau^*\|_2^2 = \tau_{\mathcal{M}}((a-uau^*)(a^*-ua^*u)) = 2\tau_{\mathcal{M}}(|a|^2) - 2\Re(\tau_{\mathcal{M}}(aua^*u^*)).$$

我们希望找到一个酉元 $u\in\mathcal{M}$，使得标量

$$R(u) := -\Re(\tau_{\mathcal{M}}(aua^*u^*)) = -\frac{1}{n}\sum_{i,j}\Re(\tau_{\mathcal{N}}(a_iu_{ij}\overline{a_j}u_{ij}^*)) = -\frac{1}{n}\sum_{i,j}\Re(a_i\overline{a_j})\tau_{\mathcal{N}}(u_{ij}u_{ij}^*)$$

达到其最大值。为方便起见，令 $(d_{ij}) \in \mathbb{M}_n$ 为由 $d_{ij} = -\frac{1}{n}\Re(a_i\overline{a_j})$ 给出的矩阵，从而$R(u) = \sum_{ij} d_{ij}\tau_{\mathcal{N}}(u_{ij}u_{ij}^*)$。记 $\mathcal{W}_n = \{(\tau_{\mathcal{N}}(v_{ij}v_{ij}^*))_{ij} \in \mathbb{M}_n\colon\ v = (v_{ij}) \in \mathcal{U}(\mathrm{Mat}_n(\mathcal{N}))\}$。我们注意到，对于 $w = (\tau_{\mathcal{N}}(v_{ij}v_{ij}^*))_{ij} \in \mathcal{W}_n$ 以及满足 $1\leq j\leq n$ 的任意 j，都有 $\sum_i w_{ij} = \tau_{\mathcal{N}}(\sum_i v_{ij}v_{ij}^*) = \tau_{\mathcal{N}}(\mathbf{1}_{\mathcal{N}}) = 1$。类似地，对于任意 $1\leq i\leq n$，都有 $\sum_j w_{ij} = \tau_{\mathcal{N}}(\sum_j v_{ij}v_{ij}^*) = \tau_{\mathcal{N}}(\mathbf{1}_{\mathcal{N}}) = 1$。此外，由于 $v_{ij}v_{ij}^* \geq 0$ 属于 $\mathcal{N}$，显然对于所有 i、j，都有 $w_{ij}\geq 0$。现在，记满足以下条件的所有元素 $x = (x_{ij}) \in \mathbb{M}_n$ 的集合为 $\mathcal{X}_n$

$$\forall j : \sum_i x_{ij} = 1, \quad \forall i : \sum_j x_{ij} = 1, \quad \forall i,j : x_{ij} \geq 0$$

从而得到 $\mathcal{W}_n \subseteq \mathcal{X}_n$。将 $\mathcal{X}_n$ 视为 $\mathbb{R}^{n^2}$的子集，我们看到 $\mathcal{X}_n$ 定义了一个闭凸多面体。根据 [16, 引理]，$\mathcal{X}_n$ 的顶点是置换矩阵。因此，线性形式的最大值

$(x_{ij}) \to \sum_{ij} d_{ij}x_{ij}$在 $\mathcal{X}_n$上的最大值在某个置换矩阵 $\widetilde{u} = (\widetilde{u}_{ij}) \in \mathcal{U}_n^{per}$处取得。由于 $\widetilde{u} \in \mathcal{U}_n^{per} \subseteq \mathrm{Mat}_n(\mathcal{N})$，我们有 $\tau_{\mathcal{N}}(\widetilde{u}_{ij}\widetilde{u}_{ij}^*) = \widetilde{u}_{ij}$，因此

$$R(\widetilde{u}) = \sum_{i,j} d_{ij}\tau_{\mathcal{N}}(\widetilde{u}_{ij}\widetilde{u}_{ij}^*) = \sum_{i,j} d_{ij}\widetilde{u}_{ij} = \max_{x\in\mathcal{X}_n} \sum_{i,j} d_{ij}x_{ij} \geq \sup_{w\in\mathcal{W}_n} \sum_{i,j} d_{ij}w_{ij} = \sup_{u\in\mathcal{U}(\mathcal{M})} R(u).$$

因此，$\sup_{u\in\mathcal{U}(\mathcal{M})} \|a - u^*au\|_2 \leq \|a - (\widetilde{u}\otimes \mathbf{1}_{\mathcal{N}})^* a(\widetilde{u}\otimes \mathbf{1}_{\mathcal{N}})\|_2$，结论得证。 □

结合定理 5.1 和定理5.4，我们估计满足有限因子 $C_{\mathcal{M}}$ 的交换子估计 (4) 的最大常数 $\mathcal{M}$，见下文定理5.6 。常数的定义$\backsim\Lambda_n$ 和 Λ_n 见 (10) 和 (11)； Λ_n 的精确值见定理 A.1。

定理 5.6. 设 $\mathcal{M}$ 是具有 $\mathcal{M} \neq \mathbb{C}$ 的有限因子。则存在常数 $C > 0$，使得：

(∗) 对任意正规 $a \in S(\mathcal{M})$，存在复数 $z_0 \in \mathbb{C}$ 及酉元 u、v、$w \in \mathcal{U}(\mathcal{M})$，使得

$$|[a,u]| \geq C(v|a - z_0\mathbf{1}|v^* + w|a - z_0\mathbf{1}|w^*). \tag{42}$$

此外，存在满足此性质的最大常数 $C_{\mathcal{M}}$，且当 $\mathcal{M}$ 是 I_n 因子（$1 < n < \infty$）时，它满足 $\Lambda_n \leq C_{\mathcal{M}} \leq \frac{1}{2}\widetilde{\Lambda}_n$；当 $\mathcal{M}$ 是 II_1 因子时，$C_{\mathcal{M}}$ 等于 $\frac{1}{2}\sqrt{3}$。

证明。结合定理 5.1 和定理 5.4，我们得到，对于任意有限因子，常数 $C = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ 对于 (∗) 是可接受的。由定理 A.1，我们有，当 $n = 3$ 或 $5 \leq n \leq \infty$ 时，$\Lambda_n = \frac{1}{2}\sqrt{3}$。令$n < \infty$。为了证明 $C = \Lambda_n$ 对所有 n 都是可接受的，我们注意到，由定理 4.3 可知，对于 $g \in S(\Omega_n)$，存在 $z_0 \in \mathbb{C}, T \in \mathrm{Aut}_n$，使得 $\Lambda(g, T, z_0) = \Lambda_n(g) \geq \Lambda_n$，这意味着

$$|g \circ T - g| \geq \Lambda_n(|g - z_0| + |g \circ T - z_0|). \tag{43}$$

重复定理 5.1的证明，将 (33) 替换为 (43)，我们得到 $C = \Lambda_n$ 也是 (∗) 的一个可容许常数。稍后我们将看到，最大的可容许常数 $C_{\mathcal{M}}$ 实际上存在。首先，我们证明满足 (∗) 的常数 C 的上界，其中 $\mathcal{M}$。设 τ 是 $\mathcal{M}$上的一个迹态。

设 $\mathcal{M}$ 是一个满足 $1 < n < \infty$ 的 I_n-因子。令 $g \in S(\Omega_n)$ 为引理 A.2 中的函数，并令 $a = \mathrm{Diag}(g(1) \ldots g(n)) \in \mathcal{M}$。取满足条件 (∗) 的 $z_0 \in \mathbb{C}$、u、v、$w \in \mathcal{U}(\mathcal{M})$，其中 a 的常数为 C。由命题 5.5 ($\mathcal{N} = \mathbb{C}$) 可得

$$\|[a,u]\|_1 \leq \|[a,u]\|_2 = \|a - u^*au\|_2 \leq \max_{u_0\in\mathcal{U}_n^{per}} \|a - u_0^*au_0\|_2 \leq \mathrm{Diam}(\sigma(a)).$$

因此，

$$2C\|a - z_0\mathbf{1}\|_1 = C\|v|a - z_0\mathbf{1}|v^* + w|a - z_0\mathbf{1}|w^*\|_1 \leq \|[a,u]\|_1 \leq \mathrm{Diam}(\sigma(a)).$$

现在，按引理 g 的断言取 A.2，我们得到

$$1 \geq \mathrm{Diam}(\sigma(a)) \geq 2C\|a - z_0\mathbf{1}\|_1 \geq 2C\|g - z_0\|_1 \geq 2C\widetilde{\Lambda}_n^{-1}.$$

因此，$C \leq \frac{1}{2}\widetilde{\Lambda}_n$。

设 $\mathcal{M}$ 为 II_1 型。那么 $\mathcal{M} \cong \mathrm{Mat}_3(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{N}$，其中某个 II_1 型因子 $\mathcal{N}$满足此条件。设函数 $g \in S(\Omega_3)$ 如引理 A.2 中所述，并设 $a_1 = \mathrm{Diag}(g(1)\ g(2)\ g(3)) \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{C})$ 和 $a = a_1 \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{N}} \in \mathcal{M}$。设 $z_0 \in \mathbb{C}, u, v, w \in \mathcal{U}(\mathcal{M})$ 满足：对 a，(∗) 成立，且常数为 C。我们有

$$\|[a,u]\|_1 \leq \|[a,u]\|_2 = \|a - u^*au\|_2 \leq \text{最大值}_{u_0\in\mathcal{U}_3^{per}\otimes\mathbf{1}_{\mathcal{N}}} \|a - u_0^*au_0\|_2 = \text{最大值}_{u_0\in\mathcal{U}_3^{per}} \|a_1 - u_0^*a_1u_0\|_2 \leq \mathrm{Diam}(\sigma(a_1)).$$

因此，

$$2C\|a_1 - z_0\mathbf{1}\|_1 = 2C\|a - z_0\mathbf{1}\|_1 = C\|v|a - z_0\mathbf{1}|v^* + w|a - z_0\mathbf{1}|w^*\|_1 \leq \|[a,u]\|_1 \leq \mathrm{Diam}(\sigma(a_1)) \leq 1.$$

由引理 A.2 可得

$$1 \geq \mathrm{Diam}(\sigma(a_1)) \geq 2C\|g - z_0\|_1 \geq 2C\widetilde{\Lambda}_3^{-1}.$$

因此，$C \leq \frac{1}{2}\widetilde{\Lambda}_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}$。对于 $\mathcal{M}$ a II_1-因子，这表明事实上 $C_{\mathcal{M}}$ 存在，并且 $C_{\mathcal{M}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$。

现在我们证明，当 $C_{\mathcal{M}}$ 也是一个 I $\mathcal{M}$ 因子（n）时，最大常数$1 < n < \infty$也存在。设（C_i）$_{i\geq 1}$ 是（∗）的一列递增的可容许正常数，并令 $C = \sup C_i \leq \frac{1}{2}\widetilde{\Lambda}_n$。对于一个正规 $a \in \mathcal{M}$，存在相应的 $u_i \in \mathcal{U}$（$\mathcal{M}$）和$z_{0,\ i} \in \mathbb{C}$ 使得方程（43）以常数 C_i成立。现在根据

$$2\|a\|_1 \geq \|[a,u_i]\|_1 \geq 2C_i\|a - z_{0,i}\mathbf{1}\|_1 \geq 2C_i(|z_{0,i}| - \|a\|_1)$$

我们得到 $|z_{0,\ i}| \le \frac{1+C_i}{C_i}\|a\|_1 \le \frac{1+C_1}{C_1}\|a\|_1$。因此，由于序列 $(u_i)_i$ 和 $(z_{0,\ i})_i$ 有界，且 $\mathcal{M}$ 是有限维的，我们可以假设这些序列依范数收敛到某个 $u \in \mathcal{U}(\mathcal{M})$ 和某个$z_0 \in \mathbb{C}$ (否则可取子序列)。现在，元素 $d_i := |[a,u_i]| - C_i(|a - z_{0,\ i}\mathbf{1}| + u_i|a - z_{0,\ i}\mathbf{1}|u_i^*)$ 均为正元素，并收敛到 $d = |[a,u]| - C(|a-z_0\mathbf{1}| + u|a-z_0\mathbf{1}|u^*)$。由于 $\mathcal{M}$ 中正元素构成的锥在范数拓扑下是闭的，我们得到 $d \ge 0$。这表明 $|[a,u]| \ge C(|a-z_0\mathbf{1}|+u|a-z_0\mathbf{1}|u^*)$ 成立，因此 C 对 $(*)$ 也是可容许的。于是，所有可容许常数的上确界（它是有限的）仍然可容许，这就证明了 $C_{\mathcal{M}}$ 存在。现在可得 $\Lambda_n \le C_{\mathcal{M}} \le \frac{1}{2}\widetilde{\Lambda}_n$□

6. Commutator estimates for normal operators in infinite factors

现在我们将为无限因子中的正规元推导交换子估计（4）。我们在定理 6.4 中证明，对于这类因子，该估计中的常数 C 可以任意接近 1。对于无限因子，这将 [3, 定理 B1] 的结果推广到了正规元。定理 6.4 的证明大量运用了投影的几何。在开始证明之前，我们先陈述并证明三个简短的技术引理。

引理 6.1. 设 $\mathcal{M}$ 是一个无限因子，p 是来自 $\mathcal{M}$的一个无限投影。若 $p_1, .., p_n \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ 两两可交换，且 $p_1, \dots, p_n \prec p$，则 $p_1 \vee \cdots \vee p_n \prec p$。（我们将符号 “$\prec$” 理解为 “$\precsim$”。）

证明。设 $q_1 = p_1$ 和 $q_{k+1} = p_{k+1}(\mathbf{1} - q_1 - \dots q_k)$ 对于 $k = 1, \dots, n-1$。那么 $q_iq_j = 0$ 对于 $i \ne j$，$q_k \prec p$ 对于 $k = 1, \dots, n$ 并且 $p_1 \vee \cdots \vee p_n = q_1 + \cdots + q_n \prec p$ (参见 [4, 引理 2 (ii)])。□

引理 6.2. 设 $\mathcal{M}$ 是一个因子，a 是来自 $S(\mathcal{M})$ 的正规算子，p、$q \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ $q \preceq p$。假设以下条件之一成立：

(i). q 是有限的，并且存在 $\mathcal{M}$ 中的一个有限投影序列(p_n)，使得 $p_n \uparrow p$ 且对于所有 $n \in \mathbb{N}$，$[a, p_n] = 0$;

(ii). q 是一个无限投影，且 $[a,p] = 0$。

那么，存在一个投影 $q_1 \in \mathcal{M}$，使得 $q_1 \sim q$、$[a, q_1] = 0$，并且满足 $q_1 \le p$。

证明。证明过程与引理 [4, Lemma 3] 类似，因此略去。□

引理 6.3。设 $\mathcal{M}$ 是一个冯·诺伊曼代数，a、$b \in LS(\mathcal{M})$、α_1、$\alpha_2 > 0$，并且

$$|a| \ge \alpha_1 \mathbf{1}, \ , \ 2\alpha_2 < \alpha_1, \ \alpha_2 \mathbf{1} \ge |b|.$$

那么存在 $v \in \mathcal{U}(\mathcal{M})$，使得

$$v|a-b|v^* \ge (1 - \frac{2\alpha_2}{\alpha_1})|a| + |b|.$$

证明。设 $a, b \in LS(\mathcal{M})$, $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ 满足引理的假设。根据定理 2.2，我们有 th at

$$|a| \le v|a-b|v^* + w|b|w^*$$

对于某些 v、$w \in \mathcal{M}$，满足 $v^*v = w^*w = \mathbf{1}$。于是

$$\begin{aligned} v|a-b|v^* &\ge |a| - w|b|w^* \ge |a| - \alpha_2 ww^* \ge |a| - \alpha_2\mathbf{1} \\ &\ge |a| + |b| - 2\alpha_2\mathbf{1} \ge |a| + |b| - \frac{2\alpha_2}{\alpha_1}|a| = (1 - \frac{2\alpha_2}{\alpha_1})|a| + |b|. \end{aligned}$$

由于 $v|a-b|v^* \ge (1 - \frac{2\alpha_2}{\alpha_1})|a| \ge (\alpha_1 - 2\alpha_2)\mathbf{1}$，因此可得

$$0 = (\mathbf{1} - vv^*)v|a-b|v^*(\mathbf{1} - vv^*) \ge (\alpha_1 - 2\alpha_2)(\mathbf{1} - vv^*) \ge 0.$$

因此，我们有 $\mathbf{1} - vv^* = 0$，即 $v \in \mathcal{U}(\mathcal{M})$。□

定理 6.4. 设 $\mathcal{M}$ 为一个无限因子，且 $a \in S(\mathcal{M})$ 为正规元。存在一个 $\lambda_0 \in \mathbb{C}$，使得对于任意 $\varepsilon > 0$，存在 $u_\varepsilon = u_\varepsilon^* \in \mathcal{U}(\mathcal{M})$、$w_\varepsilon \in \mathcal{U}(\mathcal{M})$，从而

$$w_\varepsilon|[a, u_\varepsilon]|w_\varepsilon^* \ge (1-\varepsilon)(|a - \lambda_0\mathbf{1}| + u_\varepsilon|a - \lambda_0\mathbf{1}|u_\varepsilon). \tag{44}$$

证明。令 $e(\cdot)$ 为 a 在 $\mathbb{C}$上的谱测度，特别地，对任意 $X \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$，有 $e(X) = \chi_X(a)$。由于$a \in S(\mathcal{M})$，存在一个 $R > 0$，使得 $e(X_R)$ 是有限投影，其中 $X_R = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ |\lambda| > R\}$。于是 $Y_R := \mathbb{C} \setminus X_R$ 是紧的，由引理 6.1 可得 $e(Y_R) \sim \mathbf{1}$。若点 $\lambda \in \mathbb{C}$ 满足：对点 λ的任意邻域 V，都有 $e(V) \sim \mathbf{1}$，则称 $\lambda \in \mathbb{C}$ 为 a 的稠密化点。记 A 为 a的所有稠密化点构成的集合。

我们断言 $A \neq \emptyset$。为证明该断言，只需证明存在一列嵌套集合 $B_n = [\alpha_n, \alpha_n + \frac{5R}{2^n}) \times [\beta_n, \beta_n + \frac{5R}{2^n})$，满足 $e(B_n) \sim \mathbf{1}$。令 $\alpha_1 = \beta_1 = -R$，显然 $Y_R \subset B_1$，因此 $e(B_1) \sim \mathbf{1}$。现在假设 $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_n, \beta_n$ 已经构造完成，且满足$e(B_1) \sim \cdots \sim e(B_n) \sim \mathbf{1}$。我们可以将矩形 B_n 分成 4 个较小的矩形，方法是

$$B_n = \bigcup_{k,l=0}^{1} [\alpha_n + k \cdot \frac{5R}{2^{n+1}}, \alpha_n + (k+1) \cdot \frac{5R}{2^{n+1}}) \times [\beta_n + l \cdot \frac{5R}{2^{n+1}}, \beta_n + (l+1) \cdot \frac{5R}{2^{n+1}}).$$

由引理 6.1 可知，可以从这个并集中取一个集合来作为 B_{n+1}（由此定义 α_{n+1}, β_{n+1}）。归纳法至此完成。点 $\lambda := (\sup_n \alpha_n) + (\sup_n \beta_n) i$ 是 a 的一个稠密点，因为 V的任意邻域 λ 都包含一个集合 B_n，其中某个 n满足此性质。因此 $A \neq \emptyset$。

我们证明 A 是闭集。事实上，如果 λ 是 A 的极限点，且 V 是 λ的邻域，那么 V 也是 A中某点的邻域。因此 $e(V) \sim \mathbf{1}$。这表明 $\lambda \in A$。故 A 是闭集。显然， $A \subset Y_R$。因此， A 是 $\mathbb{C}$中的非空紧子集。

我们来考虑涵盖完整情形的三种情况。

- 1. 存在一点 $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ 使得 $e(\{\lambda_0\}) \sim \mathbf{1}$。于是 $e(\mathbb{C} \setminus \{\lambda_0\}) \preceq e(\{\lambda_0\})$，因此存在一个 $v \in \mathcal{M}$ 满足 $v^*v = e(\mathbb{C} \setminus \{\lambda_0\})$ 且 $vv^* \leq e(\{\lambda_0\})$。令 $u = v + v^* + (e(\{\lambda_0\}) - vv^*)$。于是 $u = u^* \in \mathcal{U}(\mathcal{M})$。由于

$$\begin{aligned}(a - \lambda_0\mathbf{1})u(a - \lambda_0\mathbf{1})^* &= (a - \lambda_0\mathbf{1})u(\mathbf{1} - e(\{\lambda_0\}))(a - \lambda_0\mathbf{1})^* \\ &= (a - \lambda_0\mathbf{1})v(\mathbf{1} - vv^*)(a - \lambda_0\mathbf{1})^* \\ &= (a - \lambda_0\mathbf{1})e(\{\lambda_0\})u(a - \lambda_0\mathbf{1})^* = 0\end{aligned}$$

并且，类似地,

$$(a - \lambda_0\mathbf{1})^*u(a - \lambda_0\mathbf{1}) = 0$$

then

$$|[a, u]| = |(a - \lambda_0\mathbf{1}) - u(a - \lambda_0\mathbf{1})u| = |a - \lambda_0\mathbf{1}| + u|a - \lambda_0\mathbf{1}|u$$

这就给出了此情形下的结果，其中 $w_\varepsilon = \mathbf{1}$。

在以下两种情形中，将找到标量 $\lambda_0 \in \mathbb{C}$，并且对于固定数 $\varepsilon > 0$，将构造一列投影算子对 $\{(p_n, q_n)\}_{n \geq 1}$，其属于 $\mathcal{M}$；同时还将构造一列正数 (γ_n)，该数列收敛于零并满足以下条件:

(i). $p_nq_m = 0$, $p_np_m = \delta_{nm}p_n$, $q_nq_m = \delta_{nm}q_n$, $[a, p_n] = [a, q_n] = 0$, $p_n \sim q_n$ 对所有 n, m均成立;
(ii). $q_n \leq e(W_n)$ $p_n \leq e(V_n)$ 对所有 $n \geq 1$均成立; (iii). $\bigvee_{n\geq 0} p_n \vee \bigvee_{n\geq 0} q_n = \mathbf{1} - e(\{\lambda_0\})$,

其中 $V_n := \{\lambda : |\lambda - \lambda_0| > \gamma_n\}$ 且 $W_n := \{\lambda : |\lambda - \lambda_0| < \frac{\varepsilon}{2}\gamma_n\}$。

- 2。集合 A 有一个极限点 λ_0。我们可以假设 $\varepsilon < \frac{1}{2}$。我们归纳地构造正数序列 (γ_n)（从而得到集合 V_n, W_n）、取自 A 的数列 (λ_n)，以及集合

$$U_n = \{\lambda : |\lambda - \lambda_{2n}| < \gamma_{n+1}\} \tag{45}$$

使得 $U_n \subseteq W_n \cap V_{n+1}$ 且集合 $V_{n+1} \setminus \bigcup_{k=1}^{n}(U_k \cup V_k))$ 是点 λ_{2n+1} 的一个邻域。首先，令 $\lambda_1 \in A \setminus \{\lambda_0\}$ 并置 $\gamma_1 = \frac{|\lambda_1 - \lambda_0|}{2}$。那么 V_1 是点 λ_1 的一个邻域。接下来，在集合 W_1 中将存在不同于 $A \setminus \{\lambda_0\}$ 的点 λ_2、λ_3。置$\gamma_2 = \frac{1}{2}\min\{|\lambda_3 - \lambda_0|, |\lambda_2 - \lambda_3|, \frac{\varepsilon}{2}\gamma_1 - |\lambda_2 - \lambda_0|, |\lambda_2 - \lambda_0|\}$，并注意到 $\gamma_2 < \frac{1}{2}|\lambda_3 - \lambda_0| \leq \frac{\gamma_1}{4}$。还要注意，集合 $V_2 \setminus (V_1 \cup U_1)$ 是点 λ_3 的一个邻域，并且 $U_1 \subseteq W_1 \cap V_2$。我们用归纳法继续这一过程。设这些序列已对指标 $1, \ldots, n$ 构造完成。那么在集合 W_n 中将存在不同于 $A \setminus \{\lambda_0\}$ 的点 λ_{2n}、λ_{2n+1}。置$\gamma_{n+1} = \frac{1}{2}\min\{|\lambda_{2n+1} - \lambda_0|, |\lambda_{2n} - \lambda_{2n+1}|, \frac{\varepsilon}{2}\gamma_n - |\lambda_{2n} - \lambda_0|, |\lambda_{2n} - \lambda_0|\}$。那么 $\gamma_{n+1} < \frac{\gamma_n}{4}$且$V_{n+1} \setminus \bigcup_{k=1}^{n}(U_k \cup V_k))$ 是点 λ_{2n+1} 的一个邻域，并且 $U_n \subseteq W_n \cap V_{n+1}$。由此，上述序列构造完成。我们注意到，对于 $n < m$，有 $U_n \cap U_m \subseteq W_m \cap V_{n+1} = \emptyset$

令 $p_1 = e(V_1)$ $q_1 = e(U_1)$ ； $q_n = e(U_n)$ $p_n = e(V_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1}(U_k \cup V_k))$，其中 $n > 1$。由构造可知， p_1、q_1、p_2、q_2、.....两两正交，且对任意n， $p_n \sim \mathbf{1} \sim q_n$。现在由于 $V_n = (V_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1}($ $U_k \cup V_k))) \cup \bigcup_{k=1}^{n-1}(U_k \cup V_k))$ 且 $\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n = \mathbb{C} \setminus \{\lambda_0\}$，我们得到$\bigvee_{n\geq 0} p_n \vee \bigvee_{n\geq 0} q_n = \mathbf{1} - e(\{\lambda_0\})$。

- 3。集合 A 是有限的，并且对于任意 $\lambda \in A$， $e(\{\lambda\}) \prec \mathbf{1}$。根据假设，我们可以写成 $A = \{\lambda_0, \ldots, \lambda_m\}$，其中 $m \geq 0$（注意 A非空）。当 $|A| = 1$时，令 $r = 1$；当 $|A| > 1$时，令 r 为 A中各点之间的最小距离。考虑集合 $V(t) = \mathbb{C} \setminus \bigcup_{k=0}^{m}\{\lambda : |\lambda - \lambda_k| < t\}$，其中$0 < t < \frac{r}{2}$。显然， $V(t) \uparrow \mathbb{C} \setminus A$ 在 $t \downarrow 0$处。

我们证明，对于 $0 < t < \frac{r}{2}$， $e(V(t)) \prec \mathbf{1}$。事实上，对于任意点 $z \in V(t) \setminus X_R$，都存在 z 的一个邻域 U_z，使得 $e(U_z) \prec \mathbf{1}$。现在，由于集合 $V(t) \setminus X_R$ 是紧的，我们可以取 $V(t) \setminus X_R$的一个有限子覆盖 $\{U_{z_1}, \ldots, U_{z_l}\}$。于是， $\{X_R, U_{z_1}, \ldots, U_{z_l}\}$ 覆盖了集合 $V(t)$。由引理 6.1 可得， $e(V(t)) \prec \mathbf{1}$。

现在有两种可能的情况：

3.1. 所有投影 $e(V(t))$ $t > 0$ 均为有限。在此情形下，令 $\gamma_1 = \frac{r}{3}$。

3.2. 存在一个 $0 < t_0 < \frac{r}{3}$，使得投影 $e(V(t_0))$ 是无限的。在这种情况下，令 $\gamma_1 = t_0$。设 $\gamma_n = \frac{\gamma_1}{2^{n-1}}$, $n > 1$（因此 V_n, W_n 也有定义）；我们令 $p_1 := e(V(\gamma_1) \cup (A \setminus \{\lambda_0\})) \leq e(V_1)$。由引理 6.1 可知， $p_1 \prec \mathbf{1}$ 且 $p := e(W_1) \sim \mathbf{1}$。若令 $q = p_1$，则对于 p, q，引理 6.2 的条件均得到满足：当 q 是无限投影时，条件 (ii) 得到满足；在情形 3.1 中，当 q 是有限投影时，条件 (i) 得到满足（在这种情况下，集合 W_1 被系统 $V(t)$ $t > 0$ 覆盖）。因此，存在一个投影 $q_1 \leq e(W_1)$，使得 $q_1 \sim p_1$ 且 $[a, q_1] = 0$。现在，假设投影 $p_1, q_1, \ldots, p_n, q_n \prec \mathbf{1}$ 已经构造出来。我们构造投影 p_{n+1}, q_{n+1}。令 $p_{n+1} = e(V(\gamma_{n+1})) \cdot (\mathbf{1} - \sum_{k=1}^{n}(p_k + q_k))$。于是， $p_{n+1} \prec \mathbf{1}$，因为 $p_{n+1} \leq e(V(\gamma_{n+1}))$。此外，由于 $e(W_n) \sim \mathbf{1}$ 且 $p_1, q_1, \ldots, p_n, q_n \prec \mathbf{1}$，我们得到 $e(W_n) \cdot (\mathbf{1} - \sum_{k=1}^{n}(p_k + q_k)) \sim \mathbf{1}$。再次利用引理 6.2，我们可以找到一个这样的投影 $q_{n+1} \sim p_{n+1}$，使得 $q_{n+1} \leq e(W_n) \cdot (\mathbf{1} - \sum_{k=1}^{n}(p_k + q_k))$ 且 $[a, q_{n+1}] = 0$（再次考虑两种情况： p_{n+1} 是无限投影； p_{n+1} 是有限投影且条件 3.1 得到满足）。由于 $p_{n+1} + \sum_{k=1}^{n}(p_k + q_k) \geq e(V(\gamma_{n+1}))$ 且 $p_1 \geq e(A \setminus \{\lambda_0\})$，我们得出 $\sum_{k=1}^{\infty}(p_k + q_k) = \mathbf{1} - e(\{\lambda_0\})$。因此，投影 $p_1, q_1, p_2, q_2, \ldots$ 满足条件 (i)-(iii)。

在情形（2）和（3）中，现在可以找到偏等距算子 $v_n \in \mathcal{M}$，使得 $v_n^* v_n = p_n$、 $v_n v_n^* = q_n$，对于$n = 1$、2、.....。令 $u_\varepsilon = e(\{\lambda_0\}) + \sum_{n=1}^{\infty}(v_n + v_n^*)$。于是 $u_\varepsilon = u_\varepsilon^* \in \mathcal{U}(\mathcal{M})$， $u_\varepsilon e(\{\lambda_0\}) = e(\{\lambda_0\})$，并且对所有 n 都有$u_\varepsilon p_n = q_n u_\varepsilon$。我们有

$$|a - \lambda_0 \mathbf{1}| p_n \geq \gamma_n p_n, \ |a - \lambda_0 \mathbf{1}| q_n \leq \frac{\varepsilon}{2} \gamma_n q_n, \ \forall n. \tag{46}$$

因此

$$|u_\varepsilon a u_\varepsilon - \lambda_0 \mathbf{1}| p_n = u_\varepsilon |a - \lambda_0 \mathbf{1}| q_n u_\varepsilon \leq \frac{\varepsilon}{2} \gamma_n u_\varepsilon q_n u_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2} \gamma_n p_n, \ \forall n. \tag{47}$$

由于 $[a, p_n] = [u_\varepsilon a u_\varepsilon, p_n] = 0$，于是

$$|a - u_\varepsilon a u_\varepsilon| p_n = |(a - \lambda_0 \mathbf{1}) p_n - (u_\varepsilon a u_\varepsilon - \lambda_0 \mathbf{1}) p_n|. \tag{48}$$

由引理 6.3 可知

$$w_n |a - u_\varepsilon a u_\varepsilon| p_n w_n^* \geq ((1 - \varepsilon)|a - \lambda_0 \mathbf{1}| + |u_\varepsilon a u_\varepsilon - \lambda_0 \mathbf{1}|) p_n$$

对于某个 $w_n \in \mathcal{U}(p_n \mathcal{M} p_n)$。

因此

$$w_n |a - u_\varepsilon a u_\varepsilon| w_n^* p_n \geq ((1 - \varepsilon)(|a - \lambda_0 \mathbf{1}| + |u_\varepsilon a u_\varepsilon - \lambda_0 \mathbf{1}|)) p_n. \tag{49}$$

应用自同构 $u_\varepsilon \cdot u_\varepsilon$ 于（49），并注意到 $u_\varepsilon |a - u_\varepsilon a u_\varepsilon| u_\varepsilon = |a - u_\varepsilon a u_\varepsilon|$，可得

$$(u_\varepsilon w_n u_\varepsilon) |a - u_\varepsilon a u_\varepsilon| (u_\varepsilon w_n u_\varepsilon)^* q_n \geq ((1 - \varepsilon)(|a - \lambda_0 \mathbf{1}| + |u_\varepsilon a u_\varepsilon - \lambda_0 \mathbf{1}|)) q_n. \tag{50}$$

回忆一下， $S(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$ 当 $\mathcal{M}$ 是 I 型或 III 型时成立。在这种情况下，我们用 t 表示 $\mathcal{M}$上的强算子拓扑。若因子 $\mathcal{M}$ 是 II 型，则 $\mathcal{S}(\mathcal{M}) = \mathcal{S}(\mathcal{M}, \tau)$ 对 τ上的任意忠实半有限正规迹 $\mathcal{M}$成立。在这种情况下，我们用 t 表示测度拓扑 t_τ（该拓扑在第 2节中定义；之所以需要使用此拓扑，是因为 a 可能是无界算子）。

为完成证明，还需令

$$w_\varepsilon = e(\{\lambda_0\}) + \sum_{n=1}^{\infty}(w_n + u_\varepsilon w_n u_\varepsilon)$$

（该级数在强算子拓扑下收敛），并在拓扑 t下将不等式（49）和（50）相加。 □

7. Estimates for inner derivations associated to normal elements

本节将应用定理 5.1 和定理5.6 中的算子估计，推广 [3, 定理 11] 的结果，并估计内导子 δ_a： $\mathcal{M} \to L_1(\mathcal{M}, \tau)$ 的范数，其中 $\mathcal{M}$ 是带有忠实正规迹的有限因子，且 τ是 $a \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$ 为正规算子。

我们先建立一些记号。设 $\mathcal{M}$ 是一个冯·诺伊曼代数，其预对偶为 $\mathcal{M}_*$。巴拿赫空间 $\mathcal{M}_*$ 可以嵌入其双对偶 $(\mathcal{M}_*)^{**} = \mathcal{M}^*$ 中。通过这种方式，我们将 $\mathcal{M}_*$ 视为

$\mathcal{M}$ 上超弱连续线性泛函构成的空间。预对偶 $\mathcal{M}_*$ 是一个巴拿赫 $\mathcal{M}$-双模，其双模作用定义如下：

$$(a\cdot\omega)(x)=\omega(xa),\ (\omega\cdot a)(x)=\omega(ax),\ a,x\in\mathcal{M},\ \omega\in\mathcal{M}_*. \tag{51}$$

如果存在忠实正规半有限迹 τ 于 $\mathcal{M}$，则 Banach $\mathcal{M}$-双模 $\mathcal{M}_*$ 同构于 $L_1(\mathcal{M},\ \tau)$（例如参见 [26, 引理 2.12 和定理 2.13]）。

线性算子 $\delta\colon \mathcal{M}\to\mathcal{M}_*$ 称为导子，当且仅当

$$\delta(xy)=\delta(x)y+x\delta(y)$$

对所有 $x,y\in\mathcal{M}$均成立。对于每个 $a\in\mathcal{M}_*$，导子 $\delta_a\colon \mathcal{M}\to\mathcal{M}_*$ 可由等式定义

$$\delta_a(x)=[a,x]=ax-xa$$

（使用 $\mathcal{M}$-双模结构，如（51）中所定义）。这类导子称为内导子。事实上，任意导子 $\delta\colon \mathcal{M}\to\mathcal{M}_*$ 都是内导子。此外，存在 $a\in\mathcal{M}_*$ 使得 $\delta=\delta_a$ 且$\|a\|_{\mathcal{M}_*}\le\|\delta\|_{\mathcal{M}\to\mathcal{M}_*}$，参见 [14, 定理 4。1] 以及 [2, 推论 C]。我们关注于描述导子 $\delta_a\colon\ \mathcal{M}\to\mathcal{M}_*$ 对于 $a\in\mathcal{M}_*$的范数。类似于（1）的距离公式是否成立？这一问题已在无限因子的 [3, 定理 31] 中得到完全解决。此外，以下定理得到了证明：

定理 7.1。 *[3, 定理 1。1]* 如果 $\mathcal{M}$ 是一个带有忠实正规有限迹 τ 的冯·诺伊曼代数，且 $a=a^*\in L_1(\mathcal{M},\tau)$，那么存在 $c_a=c_a^*\in L_1(\mathcal{M},\tau)\cap Z(S(\mathcal{M}))$，使得

$$\|\delta_a\|_{\mathcal{M}\to L_1(\mathcal{M},\tau)}=2\|a-c_a\|_1=2\min_{z\in Z(S(\mathcal{M}))}\|a-z\|_1 \tag{52}$$

where $Z(S(\mathcal{M}))$ 表示所有附属于 $\mathcal{M}$ 的可测算子所构成的代数的中心

我们专注于 $\mathcal{M}$ 为有限的情形。为简便起见，我们将范数$\|\cdot\|_{\mathcal{M}\to L_1(\mathcal{M},\tau)}$ 记为$\|\cdot\|_{\infty,1}$。对于一般的 $a\in L_1(\mathcal{M},\tau)$，我们不知道$\|\delta_a\|_{\infty,1}$ 与 $\inf\{\|a-z\|_1\colon\ z\in Z(S(\mathcal{M}))$ 之间的关系。在定理 7.3 中，我们将给出当 $\mathcal{M}$为有限因子且 a 为正规算子时这一关系的上界和下界估计。我们将看到，这与和自伴元相关的内导子的情形存在显著差异。首先，我们陈述与定理 7.3 相关且在其证明中会用到的定理 7.2。回忆一下，当 $n\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 3)$ 或 $n=\infty$ 时，我们有 $2\Lambda_n=\sqrt{3}=\widetilde{\Lambda}_n$，并且此外，

$$\lim_{n\to\infty}\widetilde{\Lambda}_n=\sqrt{3},$$

and

$$2\Lambda_n=\sqrt{3}\ \text{for}\ n=3,\ \text{or}\ n\ge 5.$$

为方便起见，我们对有限因子 $\mathcal{M}$ 定义如下数值

$$n(\mathcal{M})=\begin{cases}n & \mathcal{M}\ \text{is a}\ \mathrm{I}_n\text{-factor}\\ \infty & \mathcal{M}\ \text{is a}\ \mathrm{II}_1\text{-factor}\end{cases} \tag{53}$$

T定理 7.2. 设 $\mathcal{M}$ 是一个带有忠实迹态 τ的有限因子。假设 $\mathcal{M}\neq\mathbb{C}$。 n

(1) 对于每个导子 $\delta_a\colon \mathcal{M}\to L_1(\mathcal{M},\tau)$，若 $a\in\mathcal{M}$ 是正规元，则存在一个正规 $b\in\mathcal{M}$，使得 $\delta_a=\delta_b$ 且$\|\delta_b\|_{\infty,\ 1}\ge 2\Lambda_{n(\mathcal{M})}\|b\|_1$。(2) 存在一个正规 $a\in\mathcal{M}$，使得导子 $\delta_a\colon \mathcal{M}\to L_1(\mathcal{M},\tau)$ 非零，并且~对于每个满足 $\delta_a=\delta_b$ 的 $b\in\mathcal{M}$，都有$\|\delta_b\|_{\infty,\ 1}\le\Lambda_{n(\mathcal{M})}\|b\|_1$。

证明. (1) 设 $a\in\mathcal{M}$ 是正规元。由定理 5.6，存在 $u,w\in\mathcal{U}(\mathcal{M})$，$z_0\in\mathbb{C}$，满足交换子估计 (42)，因此$\|\delta_a\|_{\infty,\ 1}\ge\|\delta_a(u)\|_1\ge 2\Lambda_{n(\mathcal{M})}\|a-z_0\mathbf{1}\|_1$。由于$b:=a-z\mathbf{1}$ 是正规元且 $\delta=\delta_a=\delta_b$，这就证明了结论。

(2) 设 $\mathcal{M}$ 为一个有限因子。当 $\mathcal{M}$ 为一个 I_n-因子时，我们令 $m:=n$，并且可以写成 $\mathcal{M}=\mathrm{Mat}_m(\mathcal{N})$，其中 $\mathcal{N}=\mathbb{C}$。当 $\mathcal{M}$为一个 II_1-因子时，我们令 $m=3$，并且对于某个 II_1-因子 $\mathcal{N}$，可以写成 $\mathcal{M}=\mathrm{Mat}_m(\mathcal{N})$。现在，令 $g\in L_\infty(\Omega_m)$为非常数，并令 a 为对角矩阵$a=\mathrm{Diag}(g(1)\ldots,g(m))\otimes\mathbf{1}_{\mathcal{N}}\in\mathrm{Mat}_m(\mathbb{C})\otimes\mathcal{N}=\mathcal{M}$。那么，$\delta_a\colon\ \mathcal{M}\to L_1(\mathcal{M},\tau)$是一个非零导子。为了估计$\|\delta_a\|_{\infty,}$，我们回顾一下Russo–Dye定理，[23, 定理 1], 指出，对于含幺复数域*-代数，闭单位球等于所有酉元的闭凸包。现在，对于$x\in\mathrm{Conv}(\mathcal{U}(\mathcal{M}))$，我们可以写成 $x=\sum_{i=1}^N c_iu_i$，其中 $N\in\mathbb{N}$, $u_i\in\mathcal{U}(\mathcal{M})$，且 $c_i\ge 0$ 满足 $\sum_{i=1}^N c_i=1$。那么显然，$\|\delta_a(x)\|_1\le\sum_{i=1}^N c_i\|\delta_a(u_i)\|_1\le\max_{1\le i\le N}\|\delta(u_i)\|_1\le\sup_{u\in\mathcal{U}(\mathcal{M})}\|\delta_a(u)\|_1$。由连续性可知。

δ_a 该不等式对闭凸包中的所有 x 也成立。由 Russo-Dye 定理可知，这表明了。

$$\|\delta_a\|_{\infty,1} = \sup_{x\in\mathcal{M},\|x\|\le 1}\|\delta_a(x)\|_1 = \sup_{x\in \mathrm{Conv}(\mathcal{U}(\mathcal{M}))}\|\delta_a(x)\|_1 = \sup_{u\in\mathcal{U}(\mathcal{M})}\|\delta_a(u)\|_1. \tag{54}$$

由此以及命题5.5 可得

$$\begin{aligned}\|\delta_a\|_{\infty,1} &= \sup_{u\in\mathcal{U}(\mathcal{M})}\|\delta_a(u)\|_1\\ &= \sup_{u\in\mathcal{U}(\mathrm{Mat}_m(\mathcal{N}))}\|u^*[a,u]\|_1\\ &= \sup_{u\in\mathcal{U}(\mathrm{Mat}_m(\mathcal{N}))}\|u^*au-a\|_1\\ &\le \sup_{u\in\mathcal{U}(\mathrm{Mat}_m(\mathcal{N}))}\|u^*au-a\|_2\\ &= \sup_{u\in\mathcal{U}_m^{per}\otimes\mathbf{1}_{\mathcal{N}}}\|u^*au-a\|_2\\ &= \sup_{\substack{T:\Omega_m\to\Omega_m\\ \text{permutation}}}\|g\circ T-g\|_2.\end{aligned}$$

最后一步由以下事实得出：对于 $u\in\mathcal{U}_m^{per}\otimes\mathbf{1}_{\mathcal{N}}$，我们有 $u^*au=$对角矩阵$(g\circ T(1)\dots,g\circ T(n))\otimes\mathbf{1}_{\mathcal{N}}$~，其中某个置换为 T。由引理 A.2 可取一个 g，使得 $\mathrm{Diam}(g(\Omega_m))=1\le\Lambda_m\inf_{z\in\mathbb{C}}\|g-z\|_1$（注意，这样的 g 不是常数）。任取满足 $\delta_a=\delta_b$ 的 $b\in\mathcal{M}$。那么 $a-b$ 属于 $\mathcal{M}$ 的中心，因此$a-b=z_0\mathbf{1}$，其中某个 $z_0\in\mathbb{C}$。于是，$\|b\|_1=\|a-z_0\mathbf{1}\|_1=\|g-z_0\|_1$，使得$\|\delta\|_{\infty,1}\le\mathrm{Diam}(g(\Omega_m))\le$~$\Lambda_m\|b\|_1$。结果由此得出。事实上，当 $\mathcal{M}$ 是一个 I_n-因子时，我们得到$\|\delta\|_{\infty,1}\le\Lambda_{n(\mathcal{M})}\|b\|_1$；而当 $\mathcal{M}$ 是一个 II_1-因子时，我们得到$\|\delta\|_{\infty,1}\le\Lambda_3\|b\|_1=\Lambda_\infty\|b\|_1=\Lambda_{n(\mathcal{M})}\|b\|_1$。□

下面的定理表明，对于（大多数）有限因子，(52) 中的距离公式并不适用于任意正规 $a\in L_1(\mathcal{M},\tau)$。这与 Stampfli 的经典结果及其推广形成了关键区别；后者描述了导子 $\delta_a:\mathcal{M}\to\mathcal{M}$ 的范数，因为对于这些导子，距离公式 (1) 对所有 $a\in\mathcal{M}$ 都成立。尽管距离公式并不成立，我们仍能对比值 $\frac{\|\delta_a\|_{\infty,1}}{\min_{z\in\mathbb{C}}\|a-z\mathbf{1}\|_1}$ 给出常数界。对于 II_1 因子和 I_n 因子（$1<n<\infty$），当 $n\equiv 0$ 模 3 时，这些常数无法进一步改进。

定理 7.3. 设 $\mathcal{M}$ 是一个带有忠实迹态 τ 的有限因子，并且正规且可测的 $a\in L_1(\mathcal{M},\tau)\setminus Z(\mathcal{M})$。那么导子 $\delta_a:\mathcal{M}\to L_1(\mathcal{M},\tau)$ 满足：

$$2\Lambda_{n(\mathcal{M})}\le\frac{\|\delta_a\|_{\infty,1}}{\min_{z\in\mathbb{C}}\|a-z\mathbf{1}\|_1}\le 2. \tag{55}$$

此外，当 $\mathcal{M}\neq\mathbb{C}$ 存在非零导子 δ_a,δ_b 分别对应正规 $a,b\in\mathcal{M}$，使得$\|\delta_a\|_{\infty,1}\le\Lambda_{n(\mathcal{M})}\min_{z\in\mathbb{C}}\|a-z\mathbf{1}\|_1$ 且$\|\delta_b\|_{\infty,1}=2\min_{z\in\mathbb{C}}\|b-z\mathbf{1}\|_1$。我们指出，

(1) 当 $n(\mathcal{M})\notin\{1,2,4\}$ 时，(52) 中的距离公式不能推广到任意正规~可测 $a\in L_1(\mathcal{M},\tau)\setminus Z(\mathcal{M})$，因为 $\Lambda_{n(\mathcal{M})}<2$ 在这些情形下。（2）当 $\mathcal{M}$ 是一个 II_1-因子，或是一个 I_n-因子，且 $n\equiv 0$ 模 3 时，给出的常数界无法改进，因为在这些情形下 $2\Lambda_{n(\mathcal{M})}=\sqrt{3}=\widetilde{\Lambda}_{n(\mathcal{M})}$。 (55)

证明。设 $a\in L_1(\mathcal{M},\tau)\setminus Z(\mathcal{M})$ 为正规且可测。由定理 5.6 可得 $u,w\in\mathcal{U}(\mathcal{M}),z_0\in\mathbb{C}$ 满足（42），从而$\|\delta_a\|_{\infty,1}\ge\|\delta_a(u)\|_1\ge 2\Lambda_{n(\mathcal{M})}\|a-z_0\mathbf{1}\|_1$，由此得到第一个不等式。第二个不等式由以下事实得出：对任意 $x\in\mathcal{M},z\in\mathbb{C}$，$\|\delta_a(x)\|_1=\|(a-z\mathbf{1})x-x(a-z\mathbf{1})\|_1\le 2\|a-z\mathbf{1}\|_1\|x\|$ 均成立。

对于下一个陈述，由（52）可知，对任意自伴算子$b\in\mathcal{M}$，$\|\delta_b\|_{\infty,1}=2\inf_{z\in\mathbb{C}}\|b-z\mathbf{1}\|_1$ 成立；并且当 $\mathcal{M}\neq\mathbb{C}$ 时，我们可以选取 b，使得此外 $b\notin Z(\mathcal{M})$，从而保证 δ_b 非零。此外，由定理 7.2(2)，我们得到一个正规 $a\in\mathcal{M}$，使得 δ_a 是一个非零导子，且~$\|\delta_a\|_{\infty,1}\le\Lambda_{n(\mathcal{M})}\|a-z\mathbf{1}\|_1$ 对每个 $z\in\mathbb{C}$ 都成立，因为 $\delta_a=\delta_{a-z\mathbf{1}}$。因此，$\|\delta_a\|_{\infty,1}\le\Lambda_{n(\mathcal{M})}\min_{z\in\mathbb{C}}\|a-z\mathbf{1}\|_1$（显然最小值存在）。最后两条说明可直接得出。□

我们指出，上述论证实际上给出了酉轨道 L_1的直径 $\mathcal{O}(a)=\{uau^*:u\in\mathcal{U}(\mathcal{M})\}$ 的 a估计。事实上，正如我们已经在（54）中证明的，由 Russo-Dye 定理 [23, 定理 1] 可得$\|\delta_a\|_{\infty,1}=\sup_{u\in\mathcal{U}(\mathcal{M})}\|\delta_a(u)\|_1$。因此

$$\mathrm{Diam}_{L_1(\mathcal{M},\tau)}(\mathcal{O}(a))=\sup_{u\in\mathcal{U}(\mathcal{M})}\|a-uau^*\|_1=\sup_{u\in\mathcal{U}(\mathcal{M})}\|\delta_a(u)\|_1=\|\delta_a\|_{\infty,1}.$$

Appendix A.

~我们证明两个关于常数 Λ_n 和 Λ_n 的技术性结果。在定理 A.1 中，我们将对 $n \neq 4$借助定理 Λ_n 4.3 确定 的精确值。在引理 A.2 中，我们证明~本文所用常数 Λ_n 的主要性质。

定理 A.1。对于任意 $n \notin \{1,2,4\}$，我们有 $\Lambda_1 = \Lambda_2 = 1$、$\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \Lambda_4 \leq 1$ 和 $\Lambda_n = \frac{\sqrt{3}}{2}$。此外，对于 $n \neq 4$，存在一个 $g \in L_\infty(\Omega_n)$，$T \in \mathrm{Aut}_n$，$z \in \mathbb{C}$，使得 $\Lambda(g,T,z) = \Lambda(g) = \Lambda_n$。

证明。若 $n = 1$，则对于所有 $g \in \mathcal{S}(\Omega_n)$，$\Lambda(g,$ 恒等算子 $g(1)) = 1$，因为我们约定将 $\frac{0}{0} = 1$ 计入。因此，$\Lambda_1 = 1$。若 $n = 2$，则对于所有 $g \in \mathcal{S}(\Omega_n)$，$\Lambda(g,T,{}^{g(1)+g(2)}/_{2}) = 1$，其中 $T(1) = 2$。因此，$\Lambda_2 = 1$。由定理 4.3 可知，对于所有 $n \geq 3$，$\Lambda_n \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$。只需证明当$n = 3$ 或 $n \geq 5$时，事实上等号成立，下面我们就来证明这一点。对于给定的 n 值，我们可以找到 Ω_n 的一个划分 $\{A_1, A_2, A_3\}$，使得对于 $j = 1$、2、3，$\frac{1}{5} \leq \frac{\mu_n(A_j)}{\mu_n(\Omega_n)} \leq \frac{2}{5}$。现在，记 $w_j := e^{\frac{2\pi i j}{3}}$（$j = 1$、2、3），并构造函数 $g = \sum_{j=1}^{3} w_j \chi_{A_j} \in L_\infty(\Omega_n)$。我们将证明 $\Lambda(g) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$。

假设 $\Lambda(g) > \frac{\sqrt{3}}{2}$。那么存在 $T \in \mathrm{Aut}_n$、$z_0 \in \mathbb{C}$ 和 $\lambda > \frac{\sqrt{3}}{2}$，使得

$$|g(T(\omega)) - g(\omega)| \geq \lambda(|g(T(\omega)) - z_0| + |g(\omega) - z_0|)$$

几乎处处。

我们注意到，对于 $k \neq l$，我们有

$$|w_k - w_l| = \sqrt{3}.$$

记作 $B_{k,j} = A_k \cap T^{-1}(A_j)$，使得 $B_{k,j} \subseteq A_k$ 且 $T(B_{k,j}) \subseteq A_j$。此外，由于 $\{A_1, A_2, A_3\}$ 是 Ω_n 的一个划分，对于 $l = 1$、2、3，我们有】【。

$$A_l = B_{l,1} \cup B_{l,2} \cup B_{l,3} \quad T^{-1}(A_l) = B_{1,l} \cup B_{2,l} \cup B_{3,l}. \tag{56}$$

我们注意到，如果 $\mu_n(B_{k,\,j} \cup B_{j,\,k}) > 0$，根据假设必有 乐彩

$$|w_k - w_j| \geq \lambda(|w_k - z_0| + |w_j - z_0|).$$

这意味着 z_0 位于以 w_k 和 w_j 为焦点、离心率为 λ 的椭圆内。

现在假设 $\mu_n(B_{k,\,k}) > 0$，其中某个 k。那么 $z_0 = w_k$，对于 l，$j \neq k$，我们有

$$|w_l - w_j| \leq \sqrt{3} < 2\lambda < 2\lambda\sqrt{3} = \lambda(|w_l - w_k| + |w_j - w_k|) = \lambda(|w_l - z_0| + |w_j - z_0|)$$

因此 $\mu_n(B_{l,\,j}) = 0$。然而，(56) 随即推出，对于 $j \neq k$，

$$\mu_n(A_j) = \mu_n(B_{j,1}) + \mu_n(B_{j,2}) + \mu_n(B_{j,3}) = \mu_n(B_{j,k}).$$

因此，利用这一点和 (56) 可得

$$\begin{aligned}
2\mu_n(A_k) &= \mu_n(A_k) + (\mu_n(B_{1,k}) + \mu_n(B_{2,k}) + \mu_n(B_{3,k})) \\
&= \mu_n(A_k) + \left(\sum_{\substack{1 \leq l \leq 3 \\ l \neq k}} \mu_n(B_{l,k}) \right) + \mu_n(B_{k,k}) \\
&= \mu_n(A_k) + \left(\sum_{\substack{1 \leq l \leq 3 \\ l \neq k}} \mu_n(A_l) \right) + \mu_n(B_{k,k}) \\
&= \mu_n(B_{k,k}) + \mu_n(A_1) + \mu_n(A_2) + \mu_n(A_3) \\
&= \mu_n(\Omega_n) + \mu_n(B_{k,k}) > \mu_n(\Omega_n).
\end{aligned}$$

因此 $\frac{\mu_n(A_k)}{\mu_n(\Omega_n)} > \frac{1}{2}$，这与所选划分矛盾。

我们得出结论：$\mu_n(B_{k,k}) = 0$对于 $k = 1$，2，3。现在假设对于某个 $1 \leq l$，$j \leq 3$满足 $l \neq j$，有 $\mu_n(B_{l,j} \cup B_{j,l}) = 0$。令 $k \in \{1,2,3\}$ 满足 $k \neq l, j$。于是得到 $\mu_n(A_l) = \mu_n(B_{l,l}) + \mu_n(B_{j,l}) + \mu_n(B_{k,l}) = \mu_n(B_{k,l})$，并且 $\mu_n(A_j) = \mu_n(B_{l,j}) + \mu_n(B_{j,j}) + \mu_n(B_{k,j}) = \mu_n(B_{k,j})$。因此我们有

$$\begin{aligned}
2\mu_n(A_k) &= \mu_n(A_k) + \mu_n(B_{k,l}) + \mu_n(B_{k,j}) + \mu_n(B_{k,k}) \\
&= \mu_n(A_k) + \mu_n(A_l) + \mu_n(A_j) = \mu_n(\Omega_n)
\end{aligned}$$

因此 $\frac{\mu_n(A_k)}{\mu_n(\Omega_n)} = \frac{1}{2}$。这与划分集的选取相矛盾。

因此， $\mu_n(B_{l,\ j} \cup B_{j,\ l}) > 0$ 对所有 l， j 满足 $l \neq j$。这意味着点 z_0 位于所有三个椭圆内（即对于 $l \neq j$，点 z_0 必须位于焦点为 w_l 和 w_j、离心率为 λ的椭圆内）。我们得到，对于 $\lambda = \frac{\sqrt{3}}{2}$，三个椭圆的交集中唯一的点是 0；而对于 $\lambda > \frac{\sqrt{3}}{2}$，交集为空（见图 4)

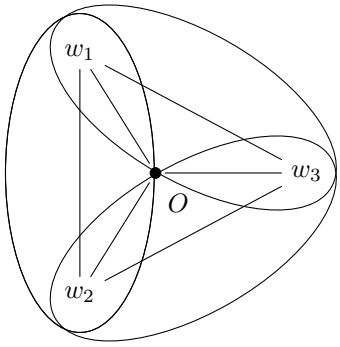

FIGURE 4. 简单函数 g 的像由三个点 w_1、w_2 和 w_3 组成。图中画出了焦点分别为 w_l 和 w_j（其中 l 与 j 不同）、离心率为 $\lambda = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 的三个椭圆。唯一同时位于这三个椭圆内的点是 $z_0 := 0$。

因此， $\Lambda\ (g)\ \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$。于是 $\Lambda_n = \frac{\sqrt{3}}{2}$。 □

引理 A.2. 设 $1 < n \leq \infty$。那么存在一个 $g \in L_\infty(\Omega_n)$，满足 $Diam\ (g(\Omega_n)) = 1$，且使得$\widetilde{\Lambda}_n = \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{1}{\|g-z\|_1}$。

证明. 对于 $n = 2$，取 $g = \chi_{\{1\}}$ 即可直接得到该结论。

因此，设 $n \geq 3$。我们可以构造 Ω_n 的一个划分 $\{A_1, A_2, A_3\}$，使得:

- 如果 $n = 3k$、 $k \in \mathbb{N}$ 或 $n = \infty$，那么 $\mu_n(A_1) = \mu_n(A_2) = \mu_n(A_3) = \frac{1}{3}$。
- 若 $n = 3k + 1$， $k \in \mathbb{N}$，则 $\mu_n(A_1) = \mu_n(A_2) = \frac{k}{n}$， $\mu_n(A_3) = \frac{k+1}{n}$。
- 若 $n = 3k + 2$、 $k \in \mathbb{N}$，则 $\mu_n(A_1) = \mu_n(A_2) = \frac{k+1}{n}$， $\mu_n(A_3) = \frac{k}{n}$。

为方便起见，记作

$$a = \mu_n(A_1) = \mu_n(A_2),\ b = \mu_n(A_3),\ w_k = e^{\frac{2\pi ki}{3}},\ k = 0, 1, 2.$$

定义 $g_0 \in L_\infty(\Omega_n, \mu_n)$ 为

$$g_0 = \chi_{A_1} w_1 + \chi_{A_2} w_2 + \chi_{A_3} w_0.$$

由于 $\mu_n(A_1) = \mu_n(A_2)$，显然 $\mathbb{C} \ni z \mapsto \|g_0 - z\|_1$ 的最小值在取实值的 z时达到，而且 $-\frac{1}{2} \leq z \leq 1$。当 $n = 4$时，由三角不等式显然可知，最小值在点 $t_0 = 1$ 处达到，且我们有 $\|g_0 - t_0\|_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$。现在假设 $n \neq 4$，使得比值 $\frac{b}{a}$满足$\frac{b}{a} < \sqrt{3}$（比值 $\frac{b}{a}$在 $n = 7$ 时取最大值，此时我们有 $\frac{b}{a} = \frac{\frac{3}{7}}{\frac{2}{7}} = \frac{3}{2} < \sqrt{3}$）。因此 $\sqrt{3}a - b > 0$。对于 $t \in [-\frac{1}{2}, 1]$，我们有

$$\|g_0 - t\|_1 = 2a|w_1 - t| + b(1 - t).$$

Then

$$\frac{d}{dt}\|g_0 - t\|_1 = 2a\frac{t + \frac{1}{2}}{|w_1 - t|} - b.$$

由于 $\frac{d}{dt}\|g_0 - t\|_1$ 在 $-\frac{1}{2}$ 处取值时为负（而在 1 处取值时为正，因为 $\sqrt{3}a - b > 0$），因此 $\|g_0 - t\|_1$ 的最小值必定在满足以下条件的某一点 $t_0 \in [-\frac{1}{2}, 1]$ 处取得。

$$b|w_1 - t_0| = 2a(t_0 + \frac{1}{2}).$$

Then

$$b^2((t_0 + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}) = 4a^2(t_0 + \frac{1}{2})^2$$

and

$$(t_0 + \frac{1}{2})^2 = \frac{3b^2}{4(4a^2 - b^2)} = \frac{3b^2}{4(2a - b)}$$

因为 $2a+b=1$。因此

$$(t_0+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}=\frac{3b^2}{4(2a-b)}+\frac{3}{4}=\frac{3a^2}{(2a-b)}$$

and

$$\begin{aligned}\|g_0-t_0\|_1&=2a|t_0-w_1|+b(1-t_0)\\&=2\frac{\sqrt{3}a^2}{\sqrt{2a-b}}+b-b(\frac{\sqrt{3}b}{2\sqrt{2a-b}}-\frac{1}{2})\\&=\frac{\sqrt{3}\sqrt{2a-b}}{2}+\frac{3b}{2}\\&=\frac{\sqrt{3-6b}}{2}+\frac{3b}{2}.\end{aligned}$$

- 对于 $n=3k$ 或 $n=\infty$，我们有 $\mu_n(A_3)=\frac{1}{3}$，并得到 $\|g_0-t_0\|_1=1$。
- 对于 $n=3k+1$ $(n\neq 4)$，我们有 $\mu_n(A_3)=\frac{k+1}{3k+1}$ 并得到

$$\|g_0-t_0\|_1=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3k-3}{3k+1}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3k+3}{3k+1}.$$

- 对于 $n=3k+2$，我们有 $\mu_n(A_3)=\frac{k}{3k+2}$，并得到

$$\|g_0-t_0\|_1=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3k+6}{3k+2}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3k}{3k+2}.$$

现在，取 $g=\frac{1}{\sqrt{3}}g_0$ 使得 $\mathrm{Diam}(g(\Omega_n))=1$。然后

$$\sup_{z\in\mathbb{C}}\frac{1}{\|g-z\|_1}=\sup_{z\in\mathbb{C}}\frac{\sqrt{3}}{\|g_0-z\|_1}=\frac{\sqrt{3}}{\|g_0-t_0\|_1}=\tilde{\Lambda}_n.$$

□

Acknowledgements

我们感谢黄敬浩和 Thomas Scheckter 提供的反馈，这些反馈有助于改进本文的表述。

References

[1] C.A. Akemann, T. Andersen, G.K. Pedersen, *Triangle inequalities in operator algebras*, Linear and Multilinear Algebra, 第11卷，第2期（1982年），167–178页。[2] U. Bader, T. Gelander, N. Monod, *A fixed point theorem for L_1 spaces*, Invent. Math. 189 (2012), 143–148. [3] A. Ber, J. Huang, F. Sukochev, *Norms of skew-adjoint derivations with values in the predual of a semifinite von Neumann algebra*, 已提交出版。[4] A. Ber, F. Sukochev, *Commutator estimates in W^*-factors*, Trans. Amer. Math. Soc. 364(10) (2012), 5571–5587. [5] A.F. Ber, F.A. Sukochev, *Commutator estimates in W^*-algebras*, J. Funct. Anal., 262 (2012), 537–568. [6] V.I. Bogachev, *Measure Theory, volume II*, Springer-Verlag,（2007年）[7] J. Bunce, W. Paschke, *Derivations on a C^*-algebra and its double dual*, J. Funct. Anal. 37 (1980), 235–247. [8] A. Connes *On the cohomology of operator algebras*, J. Funct. Anal 28(2) (1978) 248–253. [9] V.I. Chilin, F.A. Sukochev, *Weak convergence in non-commutative symmetric spaces* J. Operator Theory 31 (1994), 第1期，35–65页。[10] P.G. Dodds, B. de Pagter, F.A. Sukochev, *Non-Commutative Integration*, Springer Nature，2022年。[11] K. Dykema, F. Sukochev, D. Zanin, *A decomposition theorem in II_1 -factors* J. Reine Angew. Math. 708 (2015), 97–114。[12] T. Fack, H. Kosaki, *Generalized s-numbers of τ-measurable operators* Pacific J. Math. 123 (1986), 第2期，269–300页。[13] P. Gajendragadkar, *Norm of a derivation on a von Neumann algebra*, Transactions of the American Mathematical Society, 170 1972 165 170 ( ), – U. Haagerup, *All nuclear C^*-algebras are amenable*, Invent. Math. 74 (1983), 305–319。[14] [15] F. Hiai *Lectures on Selected Topics in von Neumann Algebras* EMS. Press.（2021年）[16] A.J. Hoffman, H.W. Wielandt, *The variation of the spectrum of a normal matrix*, Alan J. Hoffman文选：附评论，（ 1952 118 120 ），- [17] J. Huang, F. Sukochev *Derivations with values into bimodules into τ-measurable operators*, 已提交的手稿。[18] R.V. Kadison, E.C. Lance, J.R. Ringrose, *Derivations and automorphisms of operator algebras. II*, J. Funct. Anal., 1 2 1967 204 221 ( ) ( ), – R.V. Kadison, Z. Liu, *A note on derivations of Murray–von Neumann algebras*, PNAS, 第111[19]卷，第6期，（2014年）2087–2093页。[20] R.V. Kadison, Z. Liu, A. Thom, *A note on commutators in algebras of unbounded operators*, arXiv:1901.10711。[21] B. Magajna *The Haagerup norm on the tensor product of operator modules*, J. Funct. Anal., 129(2) (1995), 325–348。

[22] W. Rudin, *Functional analysis*, 国际版, 1991年。
[23] *A note on unitary operators in *-algebras* 33 1966 413 416 B. Russo, H.A. Dye, C Duke
[24] *Hochschild cohomology of von Neumann algebras* 203,
数学杂志, （）, – A Sinclair, R. Smith, 第.....卷, 剑桥大学出版社（1995年）。
[25] *The norm of a derivation* 33 3 1970 737 747 J.G. Stampfli, , 《太平洋数学杂志》, （）（）, -
[26] *Theory of operator algebras. II.*
M. Takesaki, 《数学科学百科全书》, 第 125 卷。《算子代数与非交换几何》, 第 6 卷。柏林: Springer–Verlag, 2003 年。[27] L. Zsid´o, *The norm of a derivation in a W*-algebra*, 《美国数学会会刊》, 38(1)（1973年）, 147–150。

Department of Mathematics, National University of Uzbekistan, Vuzgorodok, 100174, Tashkent, Uzbekistan,
E-mail : ber@ucd.uz

Delft Institute of Applied Mathematics, Delft University of Technology, P.O. Box 5031, 2600 GA, Delft, The Netherlands, *E-mail :* m.j.borst@tudelft.nl

School of Mathematics and Statistics, University of New South Wales, Kensington, 2052, NSW, Australia
E-mail : f.sukochev@unsw.edu.au