arXiv:2304.10803v1 [math.RT] 21 Apr 2023

Rankin–Cohen 括号、Racah 系数与结合律的恒等式

Q. Labriet*，L. Poulain d'Andecy†

摘要

我们证明了 Rankin–Cohen 括号满足的一族涉及 Racah 多项式的无穷恒等式，并为这些恒等式提供了表示论上的自然解释$sl(2)$。由这些恒等式以及 Racah 多项式的已知性质，可以简洁地得到 Eholzer 乘积结合律的一个新证明。最后，在 D. Zagier 引入的 Rankin–Cohen 代数背景下，我们讨论了如何将 Rankin–Cohen 括号满足的任意代数恒等式视为本文所给恒等式集的推论。

1 引言

Rankin–Cohen 括号（简称 RC 括号）最初被引入为一族微分算子，它们将一对模形式映射为具有最高权（[1], [14]）的模形式。更一般地，我们可以将它们视为作用于复变量全纯函数对上的双微分算子。对于 λ_1，$\lambda_2 \in \mathbb{C}$ 和 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，RC 括号通过以下公式定义：

$$\mathrm{RC}^n_{\lambda_1,\lambda_2}(f,g)(z) = \sum_{s=0}^{n} (-1)^s \binom{\lambda_1+n-1}{n-s} \binom{\lambda_2+n-1}{s} \partial^{(s)} f(z) \partial^{(n-s)} g(z). \tag{1.1}$$

在 [17], D.Zagier 从代数的角度研究了 RC 括号，并证明它们满足一些可以直接验证的代数恒等式，例如：

$$0 = [[f_1,f_2]_1,f_3]_1 + [[f_2,f_3]_1,f_1]_1 + [[f_3,f_1]_1,f_2]_1; \tag{1.2}$$

$$0 = \lambda_3[[f_1,f_2]_1,f_3]_0 + \lambda_1[[f_2,f_3]_1,f_1]_0 + \lambda_2[[f_3,f_1]_1,f_2]_0. \tag{1.3}$$

按照 [17], 惯例，使用标准记号 $[f_i,f_j]_n$，而不使用 $\mathrm{RC}^n_{\lambda_i,\ \lambda_j}(f_i,f_j)$。这种记号省略了括号的参数，约定如下：每个函数 f_i 都对应一个参数 λ_i，此外，函数 $[f_i,f_j]_k$对应参数 $\lambda_i+\lambda_j+2k$。

W.Eholzer 在所有模形式的空间上引入了如下乘积，我们称之为 Eholzer乘积（见[2, 17]）：

$$f \star g = \sum_n [f,g]_n \hbar^n. \tag{1.4}$$

*丹麦奥胡斯大学数学系，Ny Munkegade 118，DK-8000，奥胡斯 C，丹麦。电子邮箱：quentin.labriet@math.au.dk

†兰斯数学实验室 LMR，UMR 9008，兰斯香槟-阿登大学，Moulin de la Housse BP 1039，51100 兰斯，法国。电子邮箱：loic.poulain-dandecy@univ-reims.fr

他推测这个乘积满足结合律，从而得到许多其他由 RC 括号满足的代数恒等式。结合律通过两种不同的方法在 [2] 和[3]中得到了证明。关于 Rankin–Cohen 括号的更多详情，例如可参见 [2, 3, 7, 12, 13, 15, 17]及其中的参考文献。

本文的主要结果是 RC 括号满足的以下一组恒等式。

定理 1.1. 设 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$ 和 $n \in \mathbb{N}$。则满足以下等式：

$$[[f_1, f_2]_k, f_3]_{n-k} = \sum_{p=0}^{n} U_{\lambda_3;n,p}^{\lambda_1,\lambda_2;k} [f_1, [f_2, f_3]_p]_{n-p} \ , \tag{1.5}$$

其中

$$U_{\lambda_3;n,p}^{\lambda_1,\lambda_2;k} = \binom{n}{k} \frac{(\lambda_2)_k (\lambda_3)_{n-k} (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+n-1)_p}{(\lambda_3)_p (\lambda_2+\lambda_3+p-1)_p (\lambda_2+\lambda_3+2p)_{n-p}} R_{p,k}. \tag{1.6}$$

这里，$(x)_m$ 是 Pochhammer 符号 $(x)(x+1)\dots(x+m-1)$，而 $R_{p,k}$ 表示 Racah 多项式（见 *[8]*）的取值，其定义为

$$R_{p,k} = {}_4F_3\left(\begin{matrix} -p \ , & p+\lambda_2+\lambda_3-1 \ , & -k \ , & k+\lambda_1+\lambda_2-1 \\ \lambda_2 \ , & \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+n-1 \ , & -n & \end{matrix} ; 1 \right).$$

采用包含参数的完整记号，等式（1.5）可写成以下算子等式：

$$\mathrm{RC}_{\lambda_1+\lambda_2+2k,\lambda_3}^{n-k} \circ (\mathrm{RC}_{\lambda_1,\lambda_2}^{k} \otimes Id) = \sum_{p=0}^{n} U_{\lambda_3;n,p}^{\lambda_1,\lambda_2;k} \, \mathrm{RC}_{\lambda_1,\lambda_2+\lambda_3+2p}^{n-p} \circ (Id \otimes \mathrm{RC}_{\lambda_2,\lambda_3}^{p}) \ . \tag{1.7}$$

这一结果给出了一大类推广上述恒等式的关系。事实上，作为第一个应用，我们给出 Eholzer 乘积结合律的另一种证明。我们将证明，结合律实际上是经典 Racah 多项式若干性质的直接推论。因此，与 Eholzer 乘积结合律对应的恒等式是定理 1.1中所证明的恒等式的推论。我们还将进一步探讨，并结合 [17], 中引入的 Rankin–Cohen 代数的概念，说明在某种意义上，RC 括号满足的所有代数恒等式都可由上述恒等式（以及众所周知的反对称性）推出。

现在，我们用李代数$\mathfrak{sl}_2$的表示论来阐释定理 1.1。在对 λ_1施加适当条件后 $\lambda_2 \in \mathbb{C}$ （详见第2 节），我们得到两个最高权 Verma 模 V_{λ_1}的张量积 V_{λ_2}的如下分解：

$$V_{\lambda_1} \otimes V_{\lambda_2} \simeq \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} V_{\lambda_1+\lambda_2+2k} \ .$$

对于将 V_λ实现为上半平面上的全纯函数空间的一种适当方式，已知（例如参见[7] ），RC 括号 $\mathrm{RC}_{\lambda_1是\lambda_2}^{k}$ 与$V_{\lambda_1} \otimes V_{\lambda_2}$ 之间的交织算子，并生成空间 Hom $V_{\lambda_1+\lambda_2+2k}$($\mathfrak{sl}_2$,$V_{\lambda_1} \otimes V_{\lambda_2}$)。我们将在第 $V_{\lambda_1+\lambda_2+2k}$3 节给出这一结果的另一种证明。

接着考察 Verma 模的三重张量积，我们得到以下分解：

$$V_{\lambda_1} \otimes V_{\lambda_2} \otimes V_{\lambda_3} \simeq \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} (n+1) V_{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+2n}.$$

这两个族各自

$$\{\mathrm{RC}^{n-k}_{\lambda_1+\lambda_2+2k,\lambda_3}\circ(\mathrm{RC}^{k}_{\lambda_1,\lambda_2}\otimes Id)\}_{0\le k\le n}\quad\text{and}\quad\{\mathrm{RC}^{n-p}_{\lambda_1,\lambda_2+\lambda_3+2p}\circ(Id\otimes\mathrm{RC}^{p}_{\lambda_2,\lambda_3})\}_{0\le p\le n}$$

构成交织算子空间 Hom 的一组基$\mathfrak{sl}_2(V_{\lambda_1}\otimes V_{\lambda_2}\otimes V_{\lambda_3},\ V_{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+2n})$。因此，恒等式 (1.7) 可以理解为交织算子空间这两组基之间的基变换。

转移系数可用 Racah 多项式表示，这一事实可视为 Racah 代数作用的结果。该代数在 $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)^{\otimes 3}$ 中由 $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)$ 的交换子实现，并作用于从 $V_{\lambda_1}\otimes V_{\lambda_2}\otimes V_{\lambda_3}$ 到 $V_{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+2n}$ 的交织算子空间。或者等价地说，这是 Racah 代数作用于重数空间的结果。例如，我们可参考 [11]，其中展示了 Racah 代数的这一作用如何导出 Jacobi 多项式的卷积恒等式，并将其解释为重数空间中的基变换。粗略地说，取伴随会自然地引出 RC 括号，并给出本文所呈现的恒等式。

致谢。作者衷心感谢 M. Pevzner 和 G. Zhang 对本工作的关注。第一作者获得 Villum 基金会研究资助（资助编号：00025373）。第二作者获得法国国家研究署 AHA 项目（ANR-18-CE40-0001）以及法国国家科学研究中心 AAPT 国际研究项目的资助。

2 $\mathfrak{sl}_2$ 的 Verma 模的张量积

在本节中，我们回顾关于 $\mathfrak{sl}_2$ 的 Verma 模的张量积及其相关交织算子的一些经典结果。我们利用单变量多项式空间上的 Verma 模实现，结合经典 Jacobi 多项式的一些性质，给出若干经典结果的证明。

2.1 最低权 Vermamodules

我们在复数域 $\mathbb{C}$ 上进行研究，并将李代数 $\mathfrak{sl}_2$ 的标准基 $H=\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&-1\end{smallmatrix}\right)$、$F=\left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right)$ 和 $E=\left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right)$ 记为相应元素。按照惯例，我们将 H、E、F 视为泛包络代数 $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)$ 的生成元。$\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)$ 中的 Casimir 算子定义为 $C=\frac{1}{4}H^2+\frac{1}{2}H+FE$。

对于 $\lambda\in\mathbb{C}$，我们通过以下公式在多项式空间 Pol(x) 上实现最高权 Verma 模 V_λ，其最高权为 $-\lambda$：

$$\begin{aligned}\pi_\lambda(H)P&=-\lambda P-2xP',\\ \pi_\lambda(E)P&=-P',\\ \pi_\lambda(F)P&=x^2P'+\lambda xP.\end{aligned}$$

已知当 $\lambda\notin\mathbb{Z}_{\le 0}$ 时，这些表示是不可约的。注意，如果 $\lambda=-n\in\mathbb{Z}_{\le 0}$，那么这些公式在商空间 Pol($x$)/$<x^n>$ 上定义了一个不可约有限维表示。如果 $\lambda\in\mathbb{R}_{>0}$，则该表示源自 $SL_2(\mathbb{R})$ 的万有覆盖群的一个酉表示；而当 $\lambda\in\mathbb{Z}_{>0}$ [6] 时，则源自 $SL_2(\mathbb{R})$ 的一个酉表示。

逆变表示 V_λ^* 的 V_λ 在对偶空间 Pol(x)* 上通过以下方式实现：

$$\pi_\lambda^*(Z)f(v) = f(-\pi_\lambda(Z)v), \text{ for all } Z \in \mathfrak{sl}_2. \tag{2.1}$$

我们通过 Pol(x) 上的 Fischer 内积，将 Pol(x)* 的对偶空间与 Pol(x) 等同：

$$\langle P, Q\rangle_F = P(\partial_x)\overline{Q(x)}\Big|_{x=0} \quad \text{or} \quad \langle x^n, x^m\rangle_F = n!\delta_{n,m}. \tag{2.2}$$

我们可以通过以下公式在 \($\mathrm{Pol}(\{v1\})$\) 上实现逆变表示：

$$\pi_\lambda^*(Z)P = -\pi_\lambda(Z)^\dagger, \tag{2.3}$$

其中，† 表示相对于 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle_F$ 的伴随算子。注意，† 运算交换 x 和 ∂_x。现在，模 V_λ^* 是权为 λ 的最低权模，其具体表达式如下：

$$\begin{aligned}
\pi_\lambda^*(H)P &= \lambda P + 2xP',\\
\pi_\lambda^*(E)P &= xP,\\
\pi_\lambda^*(F)P &= -(xP'' + \lambda P').
\end{aligned}$$

在考虑两个最低权 Verma 模的张量积之前，我们先回顾 Jacobi 多项式族的一些性质 $\{P_\ell^{(\alpha,\beta)}\}$，它可以由以下表达式定义 [8]:

$$P_\ell^{(\alpha,\beta)}(v) = \frac{(\alpha+1)_\ell}{\ell!}{}_2F_1\left(\begin{matrix}-\ell\ ,\ 1+\alpha+\beta+\ell\\ \alpha+1\end{matrix};\frac{1-v}{2}\right). \tag{2.4}$$

等价地，它们可表示为

$$P_\ell^{(\alpha,\beta)}(v) = \frac{1}{2^\ell}\sum_{s=0}^{\ell}(-1)^s\binom{\ell+\alpha}{\ell-s}\binom{\ell+\beta}{s}(1-v)^s(1+v)^{\ell-s}. \tag{2.5}$$

如果 α、$\beta \notin \mathbb{Z}_{<0}$ 和 $\alpha+\beta+1 \notin \mathbb{Z}_{<0}$，那么 $P_{(\alpha,\beta)\,\ell}$的次数为 ℓ，因此族 $\{P_\ell^{(\alpha,\beta)}\}$是 Pol($v$)的一组基。定义 $(\cdot,\cdot)_J$ 为一种内积，使 Jacobi 多项式彼此正交。对于 α、$\beta > -1$，它由下式给出

$$(f,g)_J = \int_{-1}^{1} f(t)\overline{g(t)}(1-y)^\alpha(1+t)^\beta\ dt. \tag{2.6}$$

雅可比多项式 $P_\ell^{(\alpha,\beta)}$ 是雅可比（或超几何）微分算子 $\Phi^{(\alpha,\beta)}$ 的特征向量，其特征值为 $-\ell(\ell+\alpha+\beta+1)$，该算子定义如下：

$$\Phi^{(\alpha,\beta)} = (1-v^2)\partial_v^2 + (\alpha-\beta-(\alpha+\beta+2)v)\partial_v. \tag{2.7}$$

2.2 两个最低权 Verma 模的张量积

我们固定 λ_1、$\lambda_2 \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}_{\leq 0}$，使得 $\lambda_1+\lambda_2 \notin \mathbb{Z}_{\leq 0}$。

我们考虑两个权为λ_1 和 $\lambda_2 \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}_{\leq 0}$的最低权 Verma 模的张量积 $V_{\lambda_1}^* \otimes V_{\lambda_2}^*$。首先，我们利用 Jacobi 多项式的已知性质，重新得到关于该张量积的一些众所周知的结果（例如参见 [6] ）。随后，我们将利用这些结果轻松计算张量积与其直和分解中的不可约分量之间的交织算子。

张量积表示 $V_{\lambda_1}^* \otimes V_{\lambda_2}^*$ 实现于 Pol(x,y) 上，具体如下：

$$\pi_{\lambda_1}^* \otimes \pi_{\lambda_2}^*(H)P = (\lambda_1+\lambda_2)P + 2(x\partial_x + y\partial_y)P, \tag{2.8}$$
$$\pi_{\lambda_1}^* \otimes \pi_{\lambda_2}^*(E)P = (x+y)P \tag{2.9}$$
$$\pi_{\lambda_1}^* \otimes \pi_{\lambda_2}^*(F)P = -\left((x\partial_x^2 + y\partial_y^2)P + \lambda_1\partial_x P + \lambda_2\partial_y P\right). \tag{2.10}$$

现在我们引入另一种模型，其中 $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)$ 的 Casimir 算子将具有一个熟悉的表达式。为此，我们使用坐标变换 $(x,y) \mapsto (x+y, \frac{y-x}{x+y})$，其逆变换为 $(t,v) \mapsto (\frac{t(1-v)}{2}, {}^{t}_{(1+v)\,2})$。当考虑 $SL_2(\mathbb{R})$ 的两个全纯离散系列表示的张量积时，这一坐标变换在几何上可通过对称锥来解释（见 [10]）。

将这一坐标变换拉回到多项式上，我们得到一个映射。

$$\Psi : P \mapsto P\left(\frac{t(1-v)}{2}, \frac{t(1+v)}{2}\right), \tag{2.11}$$

并且我们在 Ψ 的像上实现张量积，该像恰好是 Pol(t, tv)。更准确地说，下面的引理将 Ψ 的像描述为直和，这将导出张量积的不可约表示分解。

引理 2.1. 对于满足 $\lambda_1+\lambda_2 \notin \mathbb{Z}_{\leq 0}$ 的 λ_1、$\lambda_2 \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}_{\leq 0}$，我们有：

$$Im(\Psi) = \bigoplus_{\ell\geq 0} t^\ell \operatorname{Pol}(t) \otimes \mathbb{C}P_\ell^{(\lambda_1-1,\lambda_2-1)}(v). \tag{2.12}$$

~ ~证明。首先，注意如果 $P(x,y)$ 是一个次数为 ℓ 的齐次多项式，那么 $\Psi(P)(t,v) = \left(\frac{t}{2}\right)^\ell \tilde{P}(1-v, 1+v)$。这一观察适用于多项式

$$\tilde{P}_\ell^{(\lambda_1-1,\lambda_2-1)}(x,y) = \sum_{s=0}^{\ell}(-1)^s \binom{\ell+\lambda_1-1}{\ell-s}\binom{\ell+\lambda_2-1}{s} x^s y^{\ell-s}, \tag{2.13}$$

并表明 $\Psi(\tilde{P}_{(\lambda_1-1,\lambda_2-1)\,\ell})(t,v) = t^\ell P_{(\lambda_1-1,\lambda_2-1)\,\ell}(v)$，其中 $P^{(\lambda_1-1,\lambda_2-1}{}_{)\,\ell}$ 是雅可比多项式。因此，对于任意一元多项式 Q，我们有：

$$\Psi(Q(x+y)\tilde{P}_\ell^{(\lambda_1-1,\lambda_2-1)}) = t^\ell Q(t) P_\ell^{(\lambda_1-1,\lambda_2-1)}(v),$$

这证明了

$$\sum_{\ell\geq 0} t^\ell \operatorname{Pol}(t) \otimes \mathbb{C}P_\ell^{(\lambda_1-1,\lambda_2-1)}(v) \subset Im(\Psi).$$

此外，我们还有：

$$\Psi(x^n y^m) = \left(\frac{t}{2}\right)^{n+m} (1-v)^n (1+v)^m.$$

由于在我们对 λ_1 和 λ_2 的假设下，Jacobi 多项式构成了 Pol(v) 的一组基，我们可以将 $(1-v)^n(1+v)^m$ 展开为这组基的线性组合，从而证明反向包含关系。 □

在坐标 (t,v) 中，通过直接计算可得该表示的以下公式：

$$\pi_{\lambda_1}^* \otimes \pi_{\lambda_2}^*(H)P = (\lambda_1+\lambda_2)P + 2t\partial_t P, \tag{2.14}$$
$$\pi_{\lambda_1}^* \otimes \pi_{\lambda_2}^*(E)P = tP, \tag{2.15}$$
$$\pi_{\lambda_1}^* \otimes \pi_{\lambda_2}^*(F)P = -\left(t\partial_t^2 P + (\lambda_1+\lambda_2)\partial_t P + t^{-1}\Phi_v^{(\lambda_1-1,\lambda_2-1)}P\right), \tag{2.16}$$

其中 $\Phi^{(\lambda_1-1,\lambda_2-1)}{}_v$ 是作用于变量 v 的 Jacobi 微分算子。利用 $\pi^*_{\lambda_1}\otimes\pi^*_{\lambda_2}$ 的显式公式，下面的结果给出了 Casimir 元素的作用。关键在于，Casimir 算子现在是一个仅含 v 的导数的二阶常微分算子。

引理 2.2. 在新坐标 (t,v) 中，我们有

$$\pi^*_{\lambda_1}\otimes\pi^*_{\lambda_2}(C)=\frac{(\lambda_1+\lambda_2)(\lambda_1+\lambda_2-2)}{4}-\Phi_v^{(\lambda_1-1,\lambda_2-1)}. \tag{2.17}$$

现在证明，形如 $t^\ell\,\mathrm{Pol}(t)\otimes\mathbb{C}P^{(\lambda_1-1,\lambda_2-1)}{}_\ell$ 的空间是张量积的不可约子模。更确切地说，有以下定理。

定理 2.3. 设 $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}_{\le 0}$，使得 $\lambda_1+\lambda_2\notin\mathbb{Z}_{\le 0}$ 且 $\ell\in\mathbb{N}$。

空间 $t^\ell\cdot\mathrm{Pol}(t)\otimes\mathbb{C}P^{(\lambda_1-1,\lambda_2-1)}{}_\ell(v)$ 是一个不可约的 $\mathfrak{sl}_2$-子模，与最低权模 $V^*_{\lambda_1+\lambda_2+2\ell}$ 同构，其最低权向量为 $t^\ell P^{(\lambda_1-1,\lambda_2-1)}{}_\ell(v)$。

由此得到以下不可约 $\mathfrak{sl}_2$-模的分解。

$$V^*_{\lambda_1}\otimes V^*_{\lambda_2}\simeq\bigoplus_{\ell\ge 0}V^*_{\lambda_1+\lambda_2+2\ell} \tag{2.18}$$

证明。利用关于 Jacobi 多项式的讨论，可以通过直接计算证明，空间 $t^\ell\cdot Pol(t)\otimes\mathbb{C}P^{(\lambda_1-1,\lambda_2-1)}{}_\ell(v)$ 是 Casimir 算子对应于特征值 $(\lambda_1+\lambda_2+2\ell)(\lambda_1+\lambda_2+2\ell-2)$ 的特征空间。注意，关于 λ_1,λ_2 的条件确保这些特征值两两不同。因此，它是张量积的一个 $\mathfrak{sl}_2$-子模。根据 E-作用，这个子模没有任何最高权向量。此外，可以明确验证，当 $\lambda_1+\lambda_2\notin\mathbb{Z}_{\le 0}$ 时，$t^\ell P^{(\lambda_1-1,\lambda_2-1)}{}_\ell(v)$ 是唯一的最低权向量。这证明该子模与 $V^*_{\lambda_1+\lambda_2+2\ell}$ 同构。最后，引理 2.1 证明了这个分解。

□

定理 2.3 的一个直接推论如下。

推论 2.4. 设 $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}_{\le 0}$ 满足 $\lambda_1+\lambda_2\notin\mathbb{Z}_{\le 0}$ 和 $\ell\in\mathbb{N}$。

映射 $\Phi^{\lambda_1,\lambda_2}_\ell$: $\mathrm{Pol}(t)\to\mathrm{Pol}(t,v)$ 由下式给出：

$$\Phi^{\lambda_1,\lambda_2}_\ell Q(t,v)=t^\ell Q(t)P^{(\lambda_1-1,\lambda_2-1)}_\ell(v). \tag{2.19}$$

定义了 $V^*_{\lambda_1+\lambda_2+2\ell}$ 与 $V^*_{\lambda_1}\otimes V^*_{\lambda_2}$ 之间的交织算子。

关于变量 (x,y) 的对应公式由映射 $\widetilde{\Phi}^{\lambda_1,\lambda_2}_\ell$: $\mathrm{Pol}(t)\to\mathrm{Pol}(x,y)$ 定义如下：

$$\widetilde{\Phi}^{\lambda_1,\lambda_2}_\ell Q(x,y)=(x+y)^\ell P^{(\lambda_1-1,\lambda_2-1)}_\ell\left(\frac{y-x}{x+y}\right)Q(x+y). \tag{2.20}$$

3 交织算子与主定理的证明

现在，我们可以将 RC 括号解释为最高权 Verma 模之间的交织算子。$V_{\lambda_1}\otimes V_{\lambda_2}$ 与 $V_{\lambda_1+\lambda_2+2\ell}$ 之间的交织算子由算子 $\widetilde{\Phi}^{\lambda_1,\lambda_2}_\ell$ 的伴随给出，该算子见推论 2.4。伴随是相对于 Fischer 内积取的（该内积自然地扩展到 $\mathrm{Pol}(x,y)$）。我们将证明，这个伴随与 RC 括号一致。

为了计算 $\widetilde{\Phi}^{\lambda_1,}{}_{\ell}{}^{\lambda_2}$ 的伴随，我们引入映射

$$\begin{aligned}\Delta : P \in \mathrm{Pol}(z) &\mapsto P(x+y) \in \mathrm{Pol}(x,y),\\ m(Q) : P \in \mathrm{Pol}(x,y) &\mapsto Q(x,y)P(x,y) \in \mathrm{Pol}(x,y),\end{aligned}$$

其中 $Q \in \mathrm{Pol}(x,y)$ 。

引理 3.1。我们有：

$$\Delta^\dagger : P \in \mathrm{Pol}(x,y) \mapsto P(z,z) \in \mathrm{Pol}(z), \tag{3.1}$$

$$m(Q)^\dagger : P \in \mathrm{Pol}(x,y) \mapsto Q(\partial_x,\partial_y)P(x,y) \in \mathrm{Pol}(x,y). \tag{3.2}$$

证明。首先，我们有：

$$\begin{aligned}\langle \Delta(z^{p+q}), x^p y^q\rangle_F &= \sum_{k=0}^{p+q}\binom{p+q}{k}\langle x^k y^{p+q-k}, x^p y^q\rangle_F\\ &= (p+q)!\\ &= \langle z^{p+q}, z^{p+q}\rangle_F.\end{aligned}$$

此外，$\langle \Delta(z^n)\ x^p y^q\rangle_F = 0 = \langle z^n, z^{p+q}\rangle_F$ 若 $n \neq p+q$，因此 $\Delta^\dagger P = P(z,z\quad)$.

第二个等式源于这样一个事实：$\dagger$ 运算交换了 x 和 ∂_x。 □

最后，注意到：

$$\widetilde{\Phi}_\ell^{\lambda_1,\lambda_2} = m\left((x+y)^\ell P_\ell^{(\lambda_1-1,\lambda_2-1)}\left(\frac{y-x}{x+y}\right)\right)\circ\Delta,$$

并且 $(x+y)^\ell P_{(\lambda_1-1,\ \lambda_2-1)\,\ell}(\frac{y-x}{x+y})$ 是在 (2.13) 中定义的多项式。因此，$\widetilde{\Phi}^{\lambda_1,}{}_{\ell}{}^{\lambda_2}$的伴随算子由 RC 括号给出，如下述定理所述。

定理 3.2. 对于满足 $\lambda_1+\lambda_2 \notin \mathbb{Z}_{\leq 0}$ 且 $P \in \mathrm{Pol}(x,y)$ 的 $\lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}_{\leq 0}$，我们有：

$$\left(\widetilde{\Phi}_\ell^{\lambda_1,\lambda_2}\right)^\dagger P(z) = \sum_{s=0}^{\ell}(-1)^s\binom{\ell+\lambda_1-1}{\ell-s}\binom{\ell+\lambda_2-1}{s}\frac{\partial^\ell P}{\partial_x^s\partial_y^{\ell-s}}(z,z). \tag{3.3}$$

因此，RC 括号 $\mathrm{RC}^\ell_{\lambda_1,\ \lambda_2}$ 是 $V_{\lambda_1}\otimes V_{\lambda_2}$ 与 $V_{\lambda_1+\lambda_2+2\ell}$ 之间的交织算子。

3.1 定理1.1 的证明

从现在起，我们固定满足条件的 $n \in \mathbb{N}$ 和 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3 \in \mathbb{C}$

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3 \notin \mathbb{Z}_{\leq 0} \quad \text{and} \quad \lambda_1+\lambda_2,\ \lambda_2+\lambda_3,\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 \notin \mathbb{Z}_{\leq 0}. \tag{3.4}$$

前文各节已将 RC 括号解释为最高权 Verma 模的交织算子，因此它们是最低权 Verma 模交织算子的伴随。由此可知，定理 1.1 必然存在一个针对这些其他交织算子的等价版本。这个等价版本如下所示，是 Jacobi 多项式的卷积公式，相关内容已有论述（见 [9] 或 [11]）。

<escape>定理 3.3。 对于 $k=0,\ \cdots,\ n$，以及 $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ 满足 (3.4)</escape>

$$(x+y+z)^{n-k}(x+y)^k P_{n-k}^{(\lambda_1+\lambda_2+2k-1,\lambda_3-1)}\left(\frac{z-x-y}{x+y+z}\right) P_k^{(\lambda_1-1,\lambda_2-1)}\left(\frac{y-x}{x+y}\right) =$$
$$\sum_{p=0}^{n} U_{\lambda_3;n,p}^{\lambda_1,\lambda_2;k}(x+y+z)^{n-p}(y+z)^p P_{n-p}^{(\lambda_1-1,\lambda_2+\lambda_3+2p-1)}\left(\frac{y+z-x}{x+y+z}\right) P_p^{(\lambda_2-1,\lambda_3-1)}\left(\frac{z-y}{y+z}\right). \quad (3.5)$$

公式（3.5）立即转化为关于交织算子 $\widetilde{\Phi}^{\lambda_1}{}_{,\ k}{}^{\ \lambda_2}$（见推论 2.4）的一个公式，由此得到：

$$(\widetilde{\Phi}_k^{\lambda_1,\lambda_2}\otimes Id)\circ\widetilde{\Phi}_{n-k}^{\lambda_1+\lambda_2+2k,\lambda_3} = \sum_{p=0}^{n} U_{\lambda_3;n,p}^{\lambda_1,\lambda_2;k}(Id\otimes\widetilde{\Phi}_p^{\lambda_2,\lambda_3})\circ\widetilde{\Phi}_{n-p}^{\lambda_1,\lambda_2+\lambda_3+2p}. \quad (3.6)$$

对该公式取伴随，按照定理 3.2，即可完成定理 1.1的证明。注 3.4。 还可以得到逆恒等式：

$$\mathrm{RC}_{\lambda_1,\lambda_2+\lambda_3+2p}^{n-p}\circ(Id\otimes\mathrm{RC}_{\lambda_2,\lambda_3}^{p}) = \sum_{k=0}^{n}\tilde{U}_{\lambda_3;n,p}^{\lambda_1,\lambda_2;k}\,\mathrm{RC}_{\lambda_1+\lambda_2+2k,\lambda_3}^{n-k}\circ(\mathrm{RC}_{\lambda_1,\lambda_2}^{k}\otimes Id), \quad (3.7)$$

其中

$$\tilde{U}_{\lambda_3;n,p}^{\lambda_1,\lambda_2;k} = U_{\lambda_1;n,k}^{\lambda_3,\lambda_2;p} = \binom{n}{p}\frac{(\lambda_2)_p(\lambda_1)_{n-p}(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+n-1)_k}{(\lambda_1)_k(\lambda_1+\lambda_2+k-1)_k(\lambda_1+\lambda_2+2k)_{n-k}}R_{k,p}.$$

我们已经注意到显然的对称性 $R_{k,p}=R_{p,k}|_{\lambda_1\leftrightarrow\lambda_3}$。 通过交换 λ_1 和 λ_3 并利用 RC 括号的反对称性，反向恒等式实际上与原恒等式相同。▲

备注 3.5. 将 RC 括号解释为交织算子本身很有意思，但在我们证明定理 1.1 时并非必不可少。事实上，通过计算伴随，无需参照 $\mathfrak{sl}_2$ 的表示，就可以从定理 3.3 中 Jacobi 多项式的卷积恒等式得到该结果。不过，将 RC 括号视为交织算子，可以为这些恒等式提供自然的解释，并使我们能够绕过定理 3.3。

事实上，回想一下，定理 3.3是在 [11] 中得到的，其中使用了 Racah 代数的某些表示，并将其视为 $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)$ 对角嵌入于 $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)^{\otimes 3}$的中心化子。这些表示作用于张量积中的重数空间，当然，也可以定义在交织算子上。因此，可以从将 RC 括号解释为交织算子的角度，通过重复 [11] 中用于证明定理 3.3的推理，证明定理 1.1 中的恒等式。技术细节完全类似，因此我们决定直接援引定理 3.3。▲

4 应用场景

4.1 Eholzer乘积的结合律

对于任意 $\lambda\in\mathbb{Z}_{>0}$，我们令 V_λ 表示单变量全纯函数空间，并定义 $V_0=\mathbb{C}$，将其视为常值函数空间。我们设

$$V=\bigoplus_{\lambda\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} V_\lambda\ .$$

对于 λ_1, λ_2, $n \geq 0$，我们将由公式（1.1）定义的 RC 括号 $\mathrm{RC}^{n}_{\lambda_1,\ \lambda_2}$ 视为以下向量空间之间的线性映射：

$$\mathrm{RC}^{n}_{\lambda_1,\lambda_2} \ : \ V_{\lambda_1} \otimes V_{\lambda_2} \to V_{\lambda_1+\lambda_2+2n} \ .$$

取形式参数 $\hbar$，并定义如下星乘积：

$$\forall (f_1, f_2) \in V_{\lambda_1} \times V_{\lambda_2} \, , \qquad f_1 \star f_2 = \sum_{n\geq 0} \mathrm{RC}^{n}_{\lambda_1,\lambda_2}(f_1, f_2)\hbar^n \ . \tag{4.1}$$

该星乘积的取值属于空间 $V^\hbar = V[[\hbar]]$，即系数取自 V 的 $\hbar$ 形式幂级数。改变 λ_1、λ_2，星乘积可扩展为一个线性映射：

$$\star \ : \ V^\hbar \otimes V^\hbar \to V^\hbar \ ,$$

从而在向量空间 $V^\hbar$ 上赋予一个乘积。

作为 RC 括号的一组恒等式的推论，我们利用已知的 Racah 多项式生成函数，为上述星乘积的结合律给出了新的证明。

推论4.1。映射 $\star$ 在 $V^\hbar$ 上赋予一个结合乘积。

备注4.2。星乘积的单位元是属于 V_0的常值函数1。另请注意，令 $\hbar = 0$时可恢复函数的标准乘积，因为 $\mathrm{RC}^{0}_{\lambda_1,\ \lambda_2}(f, g) = fg$。

考虑对每个 V_λ 取模形式权为 λ的子空间所得到的子空间。根据 RC 括号的经典性质，星乘积限制在该子空间上，并称为 Eholzer乘积。我们将其记为[2]。

▲

证明。对于所有 $n \in \mathbb{N}$，结合律条件可改写如下：

$$\sum_{k=0}^{n} \mathrm{RC}^{n-k}_{\lambda_1+\lambda_2+2k,\lambda_3} \circ (\mathrm{RC}^{k}_{\lambda_1,\lambda_2} \otimes Id) = \sum_{p=0}^{n} \mathrm{RC}^{n-p}_{\lambda_1,\lambda_2+\lambda_3+2p} \circ (Id \otimes \mathrm{RC}^{p}_{\lambda_2,\lambda_3}). \tag{4.2}$$

利用定理 1.1我们得到

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{p=0}^{n} U^{\lambda_1,\lambda_2;k}_{\lambda_3;n,p}\, \mathrm{RC}^{n-p}_{\lambda_1,\lambda_2+\lambda_3+2p} \circ (Id \otimes \mathrm{RC}^{p}_{\lambda_2,\lambda_3}) = \sum_{p=0}^{n} \mathrm{RC}^{n-p}_{\lambda_1,\lambda_2+\lambda_3+2p} \circ (Id \otimes \mathrm{RC}^{p}_{\lambda_2,\lambda_3}). \tag{4.3}$$

于是，结合律等价于

$$\sum_{k=0}^{n} U^{\lambda_1,\lambda_2;k}_{\lambda_3;n,p} = 1 \qquad \text{for any } p = 0, 1, \ldots, n. \tag{4.4}$$

这由一个更一般的陈述得到，该陈述给出了系数的生成函数$U^{\lambda_1,\ \ \lambda_2\, k\,;\ ;\ ,}_{\lambda_3\ n\ p}$，其本身则可通过使用 Racah 多项式的一个已知生成函数进行直接运算得到。详见下文命题 4.3 。

□

命题4.3. 设 $p \in \{0, 1, \ldots, n\}$。系数 $U^{\lambda_1,\ \ \lambda_2\, k\,;\ ;\ ,}_{\lambda_3\ n\ p}$ 的生成函数为：

$$\sum_{k=0}^{n} U^{\lambda_1,\lambda_2;k}_{\lambda_3;n,p} t^k = \frac{(\lambda_3)_n(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+n-1)_p}{(\lambda_3)_p(\lambda_2+\lambda_3+p-1)_p(\lambda_2+\lambda_3+2p)_{n-p}} \times$$
$$\times \ {}_2F_1\left(\begin{matrix} -p \ , & \lambda_1+n-p \\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+n-1 & \end{matrix}; t\right) {}_2F_1\left(\begin{matrix} p-n \ , & p+\lambda_2 \\ -\lambda_3-n+1 & \end{matrix}; t\right) \ . \tag{4.5}$$

特别地，我们有：

$$\sum_{k=0}^{n} U^{\lambda_1,\lambda_2;k}_{\lambda_3;n,p} = 1 \qquad for\ any\ p = 0, 1, \dots, n. \tag{4.6}$$

证明。我们使用以下涉及 Pochammer 符号的性质

$$\binom{n}{k} = (-1)^k \frac{(-n)_k}{k!} \quad \text{and} \quad (x)_{n-k} = (-1)^k \frac{(x)_n}{(-x-n+1)_k} .$$

因此利用公式（1.6）处理 $U^{\lambda_1,\ \ \lambda_2\ k\ ;\ ;\ ,}_{\lambda_3\ n\ p}$，我们得到

$$\sum_{k=0}^{n} U^{\lambda_1,\lambda_2;k}_{\lambda_3;n,p} t^k = \frac{(\lambda_3)_n(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+n-1)_p}{(\lambda_3)_p(\lambda_2+\lambda_3+p-1)_p(\lambda_2+\lambda_3+2p)_{n-p}} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k(\lambda_2)_k}{(-n-\lambda_3+1)_k k!} R_{p,k} t^k.$$

右侧的和恰好是已知的 Racah 多项式生成函数之一。我们参阅 [8]，并指出与我们所用参数的对应关系为 $\gamma+1 = -n$、$\alpha+1 = \lambda_2$、$\beta+1 = \lambda_3$ 和 $\delta = \lambda_1+\lambda_3+n-1$。[8] 中给出的第二个生成函数，利用显然的对称性 $R_{k,\ p} = R_{p,\ k}|_{\lambda_1 \leftrightarrow \lambda_3}$，

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} -p\ ,\ \lambda_1+n-p \\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+n-1 \end{matrix}; t\right) {}_2F_1\left(\begin{matrix} p-n\ ,\ p+\lambda_2 \\ -\lambda_3-n+1 \end{matrix}; t\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k(\lambda_2)_k}{(-\lambda_3-n+1)_k k!} R_{p,k} t^k .$$

这证明了关于生成级数的陈述。

现在我们在 $t = 1$ 处对其求值。注意，由于 $p \le n$，${}_2F_1$ 实际上都是多项式。我们使用超几何级数的以下求值公式

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} -p\ ,\ b \\ c \end{matrix}; 1\right) = \frac{(c-b)_p}{(c)_p} .$$

因此，我们有：

$$\begin{aligned} &{}_2F_1\left(\begin{matrix} -p\ ,\ \lambda_1+n-p \\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+n-1 \end{matrix}; 1\right) {}_2F_1\left(\begin{matrix} p-n\ ,\ p+\lambda_2 \\ -\lambda_3-n+1 \end{matrix}; 1\right) \\ &\qquad = \frac{(\lambda_2+\lambda_3+p-1)_p(-n-\lambda_3-p-\lambda_2+1)_{n-p}}{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+n-1)_p(-n-\lambda_3+1)_{n-p}}. \end{aligned}$$

由此证明得证，因为 $(-n-\lambda_3-\lambda_2-p+1)_{n-p} = (-1)^{n-p}(\lambda_2+\lambda_3+2p)_{n-p}$ and $(-n-\lambda_3+1)_{n-p} = (-1)^{n-p}(\lambda_3+p)_{n-p} = (-1)^{n-p}\frac{(\lambda_3)_n}{(\lambda_3)_p}$。 □

注 4.4. 在 [2]，中，作者证明了一个参数族的星乘积满足结合律：

$$f \star_\kappa g = \sum_n t_n^\kappa(\lambda_1,\lambda_2)[f,g]_n \hbar^n, \tag{4.7}$$

with

$$t_n^\kappa(\lambda_1,\lambda_2) = \frac{1}{\binom{-2\lambda_2}{n}} \sum_{r+s=n} \frac{\binom{-\lambda_1}{r}\binom{-\lambda_1+\kappa-1}{r}\binom{n+\lambda_1+\lambda_2-\kappa}{s}\binom{n+\lambda_1+\lambda_2+-1}{s}}{\binom{-2\lambda_1}{r}\binom{2n+2\lambda_1+2\lambda_2-2}{s}},$$

其被猜想等于

$$t_n^\kappa(\lambda_1,\lambda_2) = \left(-\frac{1}{4}\right)^n \sum_{j\ge 0} \binom{n}{2j} \frac{\binom{-\frac{1}{2}}{j}\binom{\kappa-\frac{3}{2}}{j}\binom{\frac{1}{2}-\kappa}{j}}{\binom{-\lambda_1-\frac{1}{2}}{j}\binom{-\lambda_2-\frac{1}{2}}{j}\binom{n+\lambda_1+\lambda_2-\frac{3}{2}}{j}}.$$

情形 $\kappa = \frac{1}{2}$ 或 $3\ 2$ 对应于 Eholzer 乘积（1.4）。这一族星乘积的结合律等价于 Racah 系数满足以下恒等式：

$$\sum_{k=0}^{n} U^{\lambda_1,\lambda_2;k}_{\lambda_3;n,p} t^{\kappa}_{k}(\lambda_1,\lambda_2) t^{\kappa}_{n-k}(\lambda_1+\lambda_2+2k,\lambda_3) = t^{\kappa}_{p}(\lambda_2,\lambda_3) t^{\kappa}_{n-k}(\lambda_1,\lambda_2+\lambda_3+2p)\ .$$

因此，据我们所知，星乘积的结合律为 Racah 系数提供了新的恒等式。另一方面，如果我们能够直接证明这些恒等式，这将为上述星乘积族的结合律提供另一种证明。▲

4.2 关于 Rankin–Cohen 代数

定理的第二个应用1.1 与 Rankin–Cohen 代数的定义有关。在文章 [17]，D. Zagier 引入了 Rankin–Cohen 代数（或RC 代数）的定义如下：

定义 4.5（[17]）。域 K 上的 Rankin–Cohen 代数是一个分次向量空间 $M_* = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} M_k$，满足 $M_0 = K\cdot 1$ 且 $\dim M_k$ 有限，并配备双线性运算 $[\cdot,\cdot]_n$：$M_k \otimes M_\ell \to M_{k+\ell+2n}$，这些运算满足 RC 括号所满足的所有代数恒等式。

RC 括号满足的第一个代数恒等式是：

$$[f,g]_n = (-1)^n [g,f]_n\ . \tag{4.8}$$

代数恒等式的其他例子包括（1.2）和（1.3），而 [17] 中给出了一大类例子。然而，[17] 提出了这样一个问题：对于这些代数恒等式，是否存在一个完备集，即一个能够推出所有其他恒等式的恒等式集合。

由 RC 括号满足的代数恒等式，我们指的是以下内容。我们使用上一小节的记号。设 $D \geq 0$ 和 $\lambda_1,\ldots,\lambda_{D+1} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$。取全纯函数 $f_i \in V_{\lambda_i}$ 并固定 $n \geq 0$。我们考虑所有可能的 RC 括号复合方式，以构造一个映射：

$$V_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes V_{\lambda_{D+1}} \to V_{\lambda_1+\cdots+\lambda_{D+1}+2n}\ ,$$

也就是说，使用 RC 括号将 $(f_1,\ldots,f_{D+1})$ 组合成 $V_{\lambda_1+\cdots+\lambda_{D+1}+2n}$ 中的一个函数。更确切地说，我们考虑表达式 $f_{i_1} f_{i_2} \ldots f_{i_{D+1}}$ 的所有可能括号组合，以及 $i_1,\ldots,i_{D+1}$ 对 $1,\ldots,D+1$ 的所有可能排列。例如，一个标准形式是：

$$[f_1,[f_2,\cdots\cdots,[f_D,f_{D+1}]_{k_1}]_{k_2}]\ldots]_{k_D} \qquad \text{where } k_1+\cdots+k_D = n\,. \tag{4.9}$$

最后，代数恒等式是这类运算的线性组合，其结果为 0（对所有函数f_1、……、 f_{D+1}均成立）。注意，线性组合的系数取决于各个权λ_i，如例（1.3）所示。

定理 1.1 给出了一大类这样的恒等式。它们如下：

$$[[f_1,f_2]_k,f_3]_{n-k} = \sum_{p=0}^{n} U^{\lambda_1,\lambda_2;k}_{\lambda_3;n,p} [f_1,[f_2,f_3]_p]_{n-p}\ , \tag{4.10}$$

从而可以将形如 $[[f_1,f_2]_k,f_3]_{n-k}$ 的括号改写为标准形式（4.9），其中 $D=2$。

现在令 $D \geq 1$，并考虑 $f_{i_1} f_{i_2} \dots f_{i_{D+1}}$ 在任意排列 i_1、...、i_{D+1}（由 1、...、$D+1$ 构成）下的任意括号化。显然，反复使用恒等式（4.8）和（4.10），它们分别在 RC 括号中起到交换性和结合律的作用，可以将任意括号化写成标准形式（4.9）的线性组合。

此外，当 k_1、.....、k_D 变化时，(4.9) 中的标准括号化线性无关。这可通过直接考察函数 f_1、.....、f_{D+1} 的偏导数的次数得出。由它们可解释为从 $V_{\lambda_1} \otimes \dots \otimes V_{\lambda_{D+1}}$ 到 Verma 模 $V_{\lambda_1+\dots+\lambda_{D+1}+2n}$ 的不同副本的交织算子，也可得出这一结论。

因此，对于只使用 (4.8) 和 (4.10) 的括号复合的任意线性组合，我们都可以将其写成线性无关的标准形式的线性组合。因此，如果原线性组合是一个代数恒等式，通过这一过程便可知它等于 0。由此我们证明了以下结论。

命题 4.6。 RC 括号的所有代数恒等式均可由 (4.8) 以及定理 *1.1* 的恒等式推出。

注意，给定的恒等式组是极小的，也就是说，无法从其他恒等式推出其中任何一个。

注 4.7. 函数集 $f_1, \dots, f_{D+1}$ 的不同括号化方式与所谓的二元耦合方案相对应，用于对 $D+1$ 的 $\mathfrak{sl}_2$ 表示进行张量积。所有不同括号化方式之间的恒等式都可以通过反复应用 $D=2$ 的恒等式得到，这让人想起我们可以通过反复使用 $D=2$ 的耦合方案之间的关系，在不同耦合方案之间转换。就正交多项式而言，作为转移系数得到的多项式可表示为单变量 Racah 多项式的乘积。更多详情请参见例如 [4, 5, 11, 16] 。▲

例 4.8. 我们以证明恒等式 (1.2) 为例。为此，我们将求和式中的每个分量按基 $\{[f_1,[f_2,f_3]_0]_2, [f_1,[f_2,f_3]_1]_1, [f_1,[f_2,f_3]_2]_0\}$ 展开，得到：

$$
\begin{aligned}
[[f_1,f_2]_1,f_3]_1 &= U^{\lambda_1,\lambda_2;1}_{\lambda_3;2,0}[f_1,[f_2,f_3]_0]_2 + U^{\lambda_1,\lambda_2;1}_{\lambda_3;2,1}[f_1,[f_2,f_3]_1]_1 + U^{\lambda_1,\lambda_2;1}_{\lambda_3;2,2}[f_1,[f_2,f_3]_2]_0,\\
[[f_2,f_3]_1,f_1]_1 &= -[f_1,[f_2,f_3]_1]_1,\\
[[f_3,f_1]_1,f_2]_1 &= -U^{\lambda_1,\lambda_3;1}_{\lambda_2;2,0}[f_1,[f_2,f_3]_0]_2 + U^{\lambda_1,\lambda_3;1}_{\lambda_2;2,1}[f_1,[f_2,f_3]_1]_1 - U^{\lambda_1,\lambda_3;1}_{\lambda_2;2,2}[f_1,[f_2,f_3]_2]_0.
\end{aligned}
$$

利用公式 (1.6)，可得：

$$
\begin{aligned}
U^{\lambda_1,\lambda_2;1}_{\lambda_3;2,0} &= \frac{2\lambda_2\lambda_3}{\lambda_2+\lambda_3},\\
U^{\lambda_1,\lambda_2;1}_{\lambda_3;2,1} &= \frac{\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3-\lambda_3\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_2^2}{(\lambda_2+\lambda_3)(\lambda_2+\lambda_3+2)},\\
U^{\lambda_1,\lambda_2;1}_{\lambda_3;2,2} &= -\frac{2\lambda_1(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+2)}{(\lambda_2+\lambda_3+1)(\lambda_2+\lambda_3+2)(\lambda_2+\lambda_3+4)}.
\end{aligned}
$$

现在直接计算可得公式 (1.2)。

下面的恒等式给出了一个涉及更多括号的例子：

$$[[[f_1,f_2]_0,f_3]_0,f_4]_1 + [[[f_2,f_3]_0,f_4]_0,f_1]_1 + [[[f_4,f_3]_0,f_1]_0,f_2]_1 + [[[f_4,f_1]_0,f_2]_0,f_3]_1 = 0,$$

这可通过在基 $\{[f_1,[f_2,[f_3,f_4]_0]_0]_1, [f_1,[f_2,[f_3,f_4]_0]_1]_0, [f_1,[f_2,[f_3,f_4]_1]_0]_0\}$ 上展开，以类似方式证明。

注记 4.9。 在 [17, 推论 p.65], D. Zagier 提到了一种获得 RC 括号普适恒等式的方法。已证明，下列表达式在三元组 $(f_1,\ \lambda_1,\ x)$、$(f_2,\ \lambda_2,\ y)$、$(f_3,\ \lambda_3,\ z)$ 的置换下保持不变：

$$\sum_{k=0}^{n} c_k(\lambda_1,\lambda_2;x,y)c_{n-k}(\lambda_1+\lambda_2+2k,\lambda_3;x+y,z)[[f_1,f_2]_k,f_3]_{n-k},$$

其中 $c_k(\lambda_1,\lambda_2;\ x,y)\ =(2k+\lambda_1+\lambda_2-1)\frac{k!(k+\lambda_1+\lambda_2-2)!(k+\lambda_1-1)!(k+\lambda_2-1)!}{n}(x+y)^n P^{\lambda_1-1,\ \lambda_2-1}_n\left(\frac{y-x}{x+y}\right)$。改变 n，并考察 x、y、z 中各个单项式的系数，可以得到关于 RC 括号的恒等式。

利用定理 1.1 和定理 3.3，结合公式（4.8），可以很容易地重新得到上述表达式的不变性。因此，代数恒等式 [17, 推论 p.65]也可以作为本文所提出结果的推论而得到。 ▲

参考文献

[1] H. Cohen，关于二次特征 L 函数在负整数处取值之和，《数学年刊》217，271-295（1975）[2] P.B. Cohen、Y. Manin、D. Zagier，自守伪微分算子，载于：《可积系统的代数方面》。《非线性微分方程及其应用进展》第26卷，第17-47页。Birkh¨aus-er，波士顿（1997）[3] A. Connes、H. Moscovici，Rankin–Cohen 括号与横向几何 Hopf 代数，《莫斯科数学杂志》4(1)，111–130（2004）。[4] N. Crampe、L. Frappat、E. Ragoucy，二阶 Racah 代数的表示与正交多元多项式，《线性代数及其应用》664（2023），165–215。[5] V. Fack、S. Lievens、J. Van der Jeugt，关于二叉耦合树旋转图的直径，《离散数学》245（2002），第1-3期，1–18。[6] R. Howe、E.C. Tan，非阿贝尔调和分析：SL(2,R) 的应用。Universitext。Springer 出版社，纽约，1992。xvi+257 页。ISBN：0-387-97768-6 22E30（22-02 22E46）[7] T. Kobayashi、M. Pevzner，微分对称性破缺算子：II. 对称对的 Rankin–Cohen 算子，《精选数学》（新系列），22(2)：847-911，2016。[8]R. Koekoek、P.A. Lesky 和 R.F. Swarttouw，超几何正交多项式及其 q-类比，Springer 数学专著，Springer，柏林、海德堡（2010）。[9] H.T. Koelink、J. Van Der Jeugt，来自李代数与量子代数表示的正交多项式卷积，《工业与应用数学学会数学分析杂志》29（1998），第3期，794–822。[10] Q. Labriet，共形李群全纯离散系列分支问题的几何观点，《国际数学杂志》33（2022），第10-11期，论文编号2250069，70页。22E46。[11] Q. Labriet、L. Poulain d'Andecy，利用 Jacobi 算子实现 Racah 代数及卷积恒等式，即将出版，arXiv:2304.00820。

[12] M. J. Medina Luna，Rankin–Cohen 算子与融合矩阵，博士论文，兰斯（2016）http://www.theses.fr/2016REIMS028/document。[13] M. Pevzner，Rankin-Cohen括号的生成函数，《数学物理快报》108（2018），第12期，2627–2633。53D55[14] R.A. Rankin，由给定形式的导数构造自守形式，《印度数学学会杂志》20，113-143（1980）[15] A. Unterberger、J. Unterberger，符号代数与模形式，《分析数学杂志》68（1996）121–143。[16] J. Van der Jeugt，3nj系数与超几何型正交多项式，《正交多项式与特殊函数》（鲁汶，2002），25–92，《数学讲义》1817，Springer，柏林，2003。[17] D. Zagier，模形式与微分算子，《印度科学院学报（数学科学）》，第104卷，第1期，1994年2月，第57-75页。