arXiv:2304.10818v1 [math.RA] 21 Apr 2023

[1]

ON 李共形超代数的若干导子 S

LIPENG LUO [1] 和 SANIA ASIF[2]

Abstract. 设 $\mathcal{R}$ 为一个李共形超代数。本文首先研究共形导子代数 $CDer(\mathcal{R})$、共形三重导子代数 $CTDer(\mathcal{R})$以及广义共形三重导子代数 $GCTDer(\mathcal{R})$。此外，我们确定这些导子代数之间的联系。接着，我们对所有有限单李共形超代数上的（广义）共形三重导子代数给出完整分类。具体而言， $CTDer(\mathcal{R}) = CDer(\mathcal{R})$，其中 $\mathcal{R}$ 是有限单李共形超代数；而对于 $GCTDer(\mathcal{R})$，我们得到的结论与 $CDer(\mathcal{R})$密切相关。此外，我们考察李共形超代数上的(Φ,Ψ)-李三重导子，其中 Φ 和 Ψ 是与 $\phi_x \in gc(\mathcal{R})$相关联的自同构。我们研究了$(\Phi,\Psi)$-李三重导子的一些基本性质。随后，我们引入李共形超代数上(A,B,C,D)-导子的定义，并得到李共形超代数上的广义共形三重导子与共形(A,B,C,D)-导子之间的关系。最后，我们给出了李共形超代数的三重同态。

1. Introduction

李共形超代数的结构最早由 Fattori 在 [9], 中研究，其中探讨了李共形超代数的表示与导子。近年来， [8] 研究了李共形代数的广义导子理论，并在 [17]中给出了李代数的广义导子及其向该理论的推广。李共形超代数在手征场（二维量子场论）的算符乘积中具有特殊作用。此外，李共形超代数与形式分布李超代数的概念密切相关（$\mathcal{G}, F$）：李超代数 $\mathcal{G}$由一族两两局部的形式分布 F 的系数张成，详情见 [3, 5, 9] 。

在过去几年中，人们对 [6, 12, 17, 25, 28, 30, 31, 32] 中的李代数、李超代数、李色代数、李共形代数、李三重系统、 n-Hom Nambu 李代数和 Hom-李三重系统的导子与广义导子进行了卓有成效的研究。显然，对李代数的导子与广义导子代数的研究在李代数结构理论的发展中发挥着重要作用。Leger 和 Lucks 在 [17] 中研究了李代数及其子代数的广义导子。李代数导子存在一些推广形式，例如李代数、Schr¨odinger-Virasoro 李代数和块李代数的双导子，这些内容已由 [4, 16, 23] 中的多位作者进行了研究。作为导子的推广，李代数的李三重导子最早由 M¨uller 在 [20] 中引入。李代数的三重导子类似于 Jordan 代数和结合代数的三重导子。不难看出，李导子实际上都是李三重导子，但这一结论的逆命题未必成立。在 M¨uller 之后，许多作者从不同角度研究了李三重导子，并得到了许多有趣的结果，例如对套代数、四元数代数、三角代数、李色代数、TUHF 代数、严格的李代数的李三重导子的研究。

[1]第二作者为通讯作者：200036@nuist.edu.cn(Asif S.)*Date*：2023年4月24日。
2000 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号 15A99、17B67、17B10；次要分类号 16G30。
Key words and phrases. 李三重导子、(Φ,Ψ)-导子、(A,B,C,D)-导子、李共形超代数。

交换环上的上三角矩阵、 $gl(n,\mathcal{R})$ 和完美李（超）代数，详情参见 [1, 13, 15, 18, 19, 22, 24, 27, 29] 。[2, 11] 中还有其他一些结合代数上的三重导子，例如 Jordan 三重导子和结合三重导子。

近年来，文献 [10, 21, 26]讨论了李代数、李超代数和李共形超代数的（α,β,γ）-导子。本文重点研究李共形超代数的三重导子、广义三重导子、质心导子和中心三重导子。此外，我们还研究有限李共形超代数的三重导子。我们证明，对于有限李共形超代数，相应的三重导子代数与导子代数重合。此外，依照 [10],，我们研究李共形超代数的（Φ,Ψ）三重导子，并给出这些导子的诸多有趣性质。我们还旨在研究李共形超代数的（A,B,C,D）-导子。我们表明，在施加不同约束的情况下，（A,B,C,D）-导子具有许多性质。

本文安排如下。第 2 节介绍李共形超代数的一些基本记号、定义及相关结果。第 3 节首先着重建立李共形超代数上（广义）共形三重导子、中心导子和中心三重导子的记号。随后，我们研究李共形超代数结构以及这些三重导子的一些性质。第 4 节研究所有有限李共形超代数上的（广义）共形三重导子，并给出这些导子的完整分类。第 5 节首先引入李共形超代数的 (Φ,Ψ)-导子的概念，然后借助一些有趣的命题，给出这一导子系统的基本性质。此外，我们还给出李共形超代数的 (A,B,C,D)-导子的定义与分类，并推导出许多重要的恒等式。第 6 节首先引入李共形超代数的三重同态的定义，然后给出所有有限单李共形超代数的分类。

本文中， $\mathbb{C}$ 表示复数集。另一方面，所有张量积和向量空间均定义在 $\mathbb{C}$上。为避免歧义，我们将 $\otimes_{\mathbb{C}}$简记为 $\otimes$。

2. PRELIMINARIES

本节回顾李共形超代数的一些基本定义、记号及相关结果，以供后文使用。详细介绍可参见 [7, 14, 32]。

考虑一个 Z_2分次线性空间，其直和 $V = V_{\overline{0}} \oplus V_{\overline{1}}$ 记为 V。 V是一个超空间，其齐次元素的奇偶性为 j，记为 V_j，其中$j \in \{\overline{0},\overline{1}\}$。例如，若 j 是 a的奇偶性，则记作 $|a| = j$。本文用 $|a|$ 表示齐次元素 a 的奇偶性，并可通过线性性将此表示推广到其他元素。

定义 2.1. 李共形超代数 $\mathcal{R}$ 是一个 Z_2分次的 $\mathbb{C}[\partial]$-模，带有一个$\mathbb{C}$-线性映射 $\mathcal{R}\otimes\mathcal{R} \to \mathbb{C}[\lambda]\otimes\mathcal{R}$, $a\otimes b \mapsto [a_\lambda b]$，称为 λ-括号，并满足以下公理：

$$[\partial a_\lambda b] = -\lambda[a_\lambda b], \quad [a_\lambda \partial b] = (\partial+\lambda)[a_\lambda b] \quad (conformal\ sesquilinearity), \tag{2.1}$$

$$[a_\lambda b] = -(-1)^{|a||b|}[b_{-\lambda-\partial}a] \quad (skew\text{-}symmetry), \tag{2.2}$$

$$[a_\lambda [b_\mu c]] = [[a_\lambda b]_{\lambda+\mu} c] + (-1)^{|a||b|}[b_\mu [a_\lambda c]] \quad (Jacobi\ identity), \tag{2.3}$$

对于 a、b、$c \in \mathcal{R}$。

如 [14], 所示, 将 λ-括号定义如下:

$$[a_\lambda b] = \sum_{n\in\mathbb{Z}^+} \frac{\lambda^n}{n!} a_{(n)}b, \quad \forall a, b \in \mathcal{R}. \tag{2.4}$$

李共形超代数的等价定义如下。

定义 2.2. 李共形超代数 $\mathcal{R}$ 是一个 Z_2分次的 $\mathbb{C}[\partial]$-模, 配备一个$\mathbb{C}$双线性映射 $\mathcal{R}\otimes\mathcal{R}\to\mathcal{R}$, 称为 n乘积。对任意 $n\in\mathbb{Z}^+$, 该映射满足 $\mathcal{R}_{\alpha(n)}\mathcal{R}_\beta \subseteq \mathcal{R}_{\alpha+\beta}$, 其中 $\alpha,\beta\in\{\overline{0},\overline{1}\}$, 并满足以下公理: 对任意 $a,b\in\mathcal{R}$, 以及 $m,n\in\mathbb{Z}^+$,

(C1) $a_{(n)}b = 0$ for $n \gg 0$,
(C2) $(\partial a)_{(n)}b = -na_{(n-1)}b$, and $a_{(n)}(\partial b) = \partial(a_{(n)}b) + na_{(n-1)}b$,
(C3) $a_{(n)}b = -(-1)^{|a||b|}\sum_{j\in\mathbb{Z}^+}(-1)^{n+j}\frac{\partial^j(b_{(n+j)}a)}{j!}$,
(C4) $a_{(m)}(b_{(n)}c) = \sum_{j=0}^m \binom{m}{j}(a_{(j)}b)_{(m+n-j)}c + (-1)^{|a||b|}b_{(n)}(a_{(m)}c)$.

子代数 $\mathcal{S}$ 是 $\mathcal{R}$ 的一个 $\mathbb{C}[\partial]$-子模, 并满足: 对任意 $n\in\mathbb{Z}^+$, 均有 $\mathcal{S}_{(n)}\mathcal{S}\subseteq\mathcal{S}$。理想 $\mathcal{I}$ 是 $\mathcal{R}$ 的一个 $\mathbb{C}[\partial]$-子模, 并满足: 对任意 $n\in\mathbb{Z}^+$, 均有 $\mathcal{R}_{(n)}\mathcal{I}\subseteq\mathcal{I}$。此外, 由于斜对称性, 任何左理想或右理想实际上都是双边理想。若李共形超代数 $\mathcal{R}$ 满足 $\mathcal{R}$ 作为 $\mathbb{C}[\partial]$-模有限生成, 则称其为有限的。李共形超代数 $\mathcal{R}$的秩, 记作 rank($\mathcal{R}$), 是其作为 $\mathbb{C}[\partial]$-模的秩。若李共形超代数 $\mathcal{R}$ 没有非平凡理想且不是阿贝尔的, 则称其为单的。以下给出一些李共形超代数的例子。

E例 2.3. 设 $\mathcal{R} = \mathbb{C}[\partial]L \oplus \mathbb{C}[\partial]W$ 是一个自由的 Z_2-分次 $\mathbb{C}[\partial]$-模。定义

$$[L_\lambda L] = (\partial + 2\lambda)L, \quad [L_\lambda W] = (\partial + \frac{3}{2}\lambda)W, \quad [W_\lambda W] = 0,$$

其中 $\mathcal{R}_{\overline{0}} = \mathbb{C}[\partial]L$ 和 $\mathcal{R}_{\overline{1}} = \mathbb{C}[\partial]W$。则 $\mathcal{R}$ 是李共形超代数。

例 2.4.（Neveu-Schwarz 李共形超代数）设 $\mathcal{NS} = \mathbb{C}[\partial]L \oplus \mathbb{C}[\partial]G$ 是一个自由的 Z_2-分次 $\mathbb{C}[\partial]$-模。定义

$$[L_\lambda L] = (\partial + 2\lambda)L, \quad [L_\lambda G] = (\partial + \frac{3}{2}\lambda)G, \quad [G_\lambda G] = 2L,$$

其中 $\mathcal{NS}_{\overline{0}} = \mathbb{C}[\partial]L$ 和 $\mathcal{NS}_{\overline{1}} = \mathbb{C}[\partial]G$。则 $\mathcal{NS}$ 是李共形超代数。我们称其为 Neveu-Schwarz 李共形超代数。

定义 2.5. 若齐次 $\mathbb{C}[\partial]$-模同态 f: $\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 满足: 对于任意 a、$b\in\mathcal{A}$, 均有 $f([a_\lambda b]) = [f(a)_\lambda f(b)]$, 则称其为李共形超代数 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 之间的同态。

例 2.6. 设 $\mathcal{G} = \mathcal{G}_{\overline{0}} \oplus \mathcal{G}_{\overline{1}}$ 为一个复李超代数。令 $(Cur\mathcal{G})_\alpha := \mathbb{C}[\partial]\otimes\mathcal{G}_\alpha$ 为一个自由 $\mathbb{C}[\partial]$-模。则 $Cur\mathcal{G} = (Cur\mathcal{G})_{\overline{0}} \oplus (Cur\mathcal{G})_{\overline{1}}$ 是一个李共形超代数, 称为流李共形超代数, 其 λ-括号定义为

$$[(f(\partial)\otimes a)_\lambda (g(\partial)\otimes b)] := f(-\lambda)g(\partial+\lambda)\otimes[a,b], \quad \forall a,b\in\mathcal{R}. \tag{2.5}$$

文献 [9] 已经证明, 所有有限单李共形超代数均已得到确定。本文将对所有有限单李共形超代数的共形三重导子和共形三重同态进行分类。

定义 2.7. 设 α 是从 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{B}$ 的 Z_2 分次 $\mathbb{C}[\partial]$ 模的一个次数为 α 的共形线性映射 $\mathbb{C}$ 线性映射 ϕ_λ: $\mathcal{A}\to\mathbb{C}[\lambda]\otimes\mathcal{B}$, 满足以下公理:

$$\phi_\lambda(\partial a) = (\partial+\lambda)\phi_\lambda(a), \quad \forall a\in\mathcal{A}, \quad and \quad \phi_\lambda(\mathcal{A}_\beta)\subseteq\mathcal{B}_{\alpha+\beta}[\lambda], \quad \forall\alpha,\beta\in\{\overline{0},\overline{1}\}.$$

显然， ϕ 是共形线性的，这与不定变量 λ 的选择无关。在下文中，我们也将用 ϕ_λ 代替 ϕ ，以强调 ϕ 对 λ 的依赖。所有从 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{B}$ 的次数为 α 的共形线性映射构成的向量空间记为 $Chom(\mathcal{A},\mathcal{B})_\alpha$。于是 $Chom(\mathcal{A},\mathcal{B}) = Chom(\mathcal{A},\mathcal{B})_{\overline{0}} \oplus Chom(\mathcal{A},\mathcal{B})_{\overline{1}}$，它可通过 $(\partial\phi)_\lambda(a) = -\lambda\phi_\lambda(a)$ $\forall a \in \mathcal{A}$ 构成一个 Z_2 分次 $\mathbb{C}[\partial]$ 模。为方便起见，我们用 $CendA$ 表示 $Chom(\mathcal{A},\mathcal{A})$。

定义 2.8. 设 $\mathcal{R}$ 是一个李共形超代数。共形线性映射 $\phi_\lambda \in (Cend\mathcal{R})_\alpha$ 是 α 次的 $\mathcal{R}$ 的共形导子，当且仅当

$$\phi_\lambda([a_\mu b]) = [\phi_\lambda(a)_{\lambda+\mu} b] + (-1)^{|\phi||a|}[a_\mu \phi_\lambda(b)], \quad \forall a, b \in \mathcal{R}.$$

由 Jacobi恒等式，不难验证，对于每个 $a \in \mathcal{R}$，映射 ada_λ （定义为：对任意 $b \in \mathcal{R}$，$ada_\lambda b = [a_\lambda b]$ ），是 $\mathcal{R}$ 的一个共形导子。所有这类共形导子称为内共形导子。分别用 $CDer(\mathcal{R})$ 和 $CInn(\mathcal{R})$ 表示 $\mathcal{R}$ 的所有共形导子和内共形导子的向量空间。此外，我们有 $CDer(\mathcal{R}) = CDer(\mathcal{R})_{\overline{0}} \oplus CDer(\mathcal{R})_{\overline{1}}$，以及 $CInn(\mathcal{R}) = CInn(\mathcal{R})_{\overline{0}} \oplus CInn(\mathcal{R})_{\overline{1}}$

如 [32], 所示，我们有如下重要结论。

命题 2.9. Neveu–Schwarz 李共形超代数的每个共形导子都是内共形导子。

定义 2.10. 设 $\mathcal{R}$ 是一个李共形超代数。$Cend(\mathcal{R})$ 上的 λ-括号定义为

$$[\phi_\lambda \psi]_\mu a = \phi_\lambda(\psi_{\mu-\lambda} a) - (-1)^{|\phi||\psi|}\psi_{\mu-\lambda}(\phi_\lambda a), \quad \forall a \in \mathcal{R},$$

这为 $Cend(\mathcal{R})$ 定义了一个李共形超代数结构。这称为 $\mathcal{R}$ 上的广义李共形超代数，记作 $gc(\mathcal{R})$。显然， $gc(\mathcal{R}) = gc(\mathcal{R})_{\overline{0}} \oplus gc(\mathcal{R})_{\overline{1}}$。

受上述定义启发，容易验证 $CDer(\mathcal{R})$ 和 $CInn(\mathcal{R})$ 是 $gc(\mathcal{R})$ 的李共形子代数。此外，我们有如下链式结构 $CInn(\mathcal{R}) \subseteq CDer(\mathcal{R}) \subseteq gc(\mathcal{R})$。

3. construction of conformal triple derivation on Lie conformal superalgebras

本节首先讨论李共形超代数上（广义）共形三重导子的定义和记号，随后研究这些导子的共形代数结构及其若干性质。为方便起见，除非另有说明，本节中始终假设 $\mathcal{R}$ 是一个李共形超代数，且 α、 $\beta \in \{\overline{0}, \overline{1}\}$ 属于该代数。

定义 3.1. 如果共形线性映射 $\phi_x \in gc(\mathcal{R})_\alpha$ 满足以下公理，则称其为 $\mathcal{R}$ 的次数为 α 的共形三重导子:

$$\begin{aligned}&\phi_x([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu} c])\\ =&[[\phi_x(a)_{\lambda+x} b]_{\lambda+\mu+x} c] + (-1)^{|\phi||a|}[[a_\lambda \phi_x(b)]_{\lambda+\mu+x} c] + (-1)^{|\phi|(|a|+|b|)}[[a_\lambda b]_{\lambda+\mu} \phi_x(c)],\end{aligned} \tag{3.1}$$

对于任意齐次元素 a、 b、 $c \in \mathcal{R}$。

如果存在一个次数为 α 的 $\mathcal{R}$ 的共形三重导子 τ_x ，使得共形线性映射 $\phi_x \in gc(\mathcal{R})_\alpha$ 满足以下条件，则称其为 $\mathcal{R}$ 的次数为 α 的广义共形三重导子:

$$\begin{aligned}&\phi_x([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu} c])\\ =&[[\phi_x(a)_{\lambda+x} b]_{\lambda+\mu+x} c] + (-1)^{|\tau||a|}[[a_\lambda \tau_x(b)]_{\lambda+\mu+x} c] + (-1)^{|\tau|(|a|+|b|)}[[a_\lambda b]_{\lambda+\mu} \tau_x(c)],\end{aligned} \tag{3.2}$$

对于任意齐次 齐次元 a、 b、 $c \in \mathcal{R}$ 和 τ_x 称为相关共形三重导子 ，

分别用 $CTDer(\mathcal{R})$ 和 $GCTDer(\mathcal{R})$ 表示 $\mathcal{R}$ 的共形三重导子集和广义共形三重导子集。显然，共形三重导子都是广义共形三重导子，即通过在（3.2）中令 $\phi_x = \tau_x$，有 $CTDer(\mathcal{R}) \subseteq GCTDer(\mathcal{R})$。然而，反之一般并不成立。

根据上述定义，我们可以立即得到以下结果。

引理 3.2. 对于任意齐次元素 $a, b, c \in \mathcal{R}$, $\phi_x \in GCTDer(\mathcal{R})_\alpha$ 和 τ_x 是 ϕ_x 的相关共形三重导子，我们可以得到，

(1) $\phi_x([a_\lambda[b_\mu c]]) = [\phi_x(a)_{\lambda+x}[b_\mu c]] + (-1)^{\alpha|a|}[a_\lambda[\tau_x(b)_{\mu+x}c]] + (-1)^{\alpha(|a|+|b|)}[a_\lambda[b_\mu\tau_x(c)]]$.
(2) $(\phi_x - \tau_x)([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}c]) = [[(\phi_x - \tau_x)(a)_{\lambda+x}b]_{\lambda+\mu+x}c] = (-1)^{\alpha|a|}[[a_\lambda(\phi_x - \tau_x)(b)]_{\lambda+\mu+x}c]$
$= (-1)^{\alpha(|a|+|b|)}[[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}(\phi_x - \tau_x)(c)]$.
(3) $(\phi_x - \tau_x)([a_\lambda[b_\mu c]]) = [(\phi_x - \tau_x)(a)_{\lambda+x}[b_\mu c]] = (-1)^{\alpha|a|}[a_\lambda[(\phi_x - \tau_x)(b)_{\mu+x}c]]$
$= (-1)^{\alpha(|a|+|b|)}[a_\lambda[b_\mu(\phi_x - \tau_x)(c)]]$.

证明。（1）根据Jacobi恒等式，我们可以得到

$$\begin{aligned}
\phi_x([a_\lambda[b_\mu c]]) =&\phi_x([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}c]) + (-1)^{|a||b|}\phi_x([b_\mu[a_\lambda c]])\\
=&\phi_x([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}c]) - (-1)^{|a||b|+(|a|+|c|)|b|}\phi_x([[a_\lambda c]_{-\partial-\mu}b])\\
=&[[\phi_x(a)_{\lambda+x}b]_{\lambda+\mu+x}c] + (-1)^{\alpha|a|}[[a_\lambda\tau_x(b)]_{\lambda+\mu+x}c]\\
&+ (-1)^{\alpha(|a|+|b|)}[[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}\tau_x(c)] - (-1)^{|b||c|}([[\phi_x(a)_{\lambda+x}c]_{-\partial-x-\mu+x}b]+\\
&(-1)^{\alpha|a|}[[a_\lambda\tau_x(c)]_{-\partial-x-\mu+x}b] + (-1)^{\alpha(|a|+|c|)}[[a_\lambda c]_{-\partial-x-\mu}\tau_x(b)])\\
=&[[\phi_x(a)_{\lambda+x}b]_{\lambda+\mu+x}c] + (-1)^{\alpha|a|}[[a_\lambda\tau_x(b)]_{\lambda+\mu+x}c]\\
&+ (-1)^{\alpha(|a|+|b|)}[[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}\tau_x(c)] - (-1)^{|b||c|}[[\phi_x(a)_{\lambda+x}c]_{-\partial-\mu}b]\\
&- (-1)^{\alpha|a|+|b||c|}[[a_\lambda\tau_x(c)]_{-\partial-\mu}b] - (-1)^{\alpha(|a|+|c|)+|b||c|}[[a_\lambda c]_{-\partial-x-\mu}\tau_x(b)])\\
=&[[\phi_x(a)_{\lambda+x}b]_{\lambda+\mu+x}c] + (-1)^{\alpha|a|}[[a_\lambda\tau_x(b)]_{\lambda+\mu+x}c]\\
&+ (-1)^{\alpha(|a|+|b|)}[[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}\tau_x(c)] + (-1)^{(\alpha+|a|)|b|}[b_\mu[\phi_x(a)_{\lambda+x}c]]\\
&+ (-1)^{\alpha(|a|+|b|)+|a||b|}[b_\mu[a_\lambda\tau_x(c)]] + (-1)^{|a||b|}[\tau_x(b)_{\mu+x}[a_\lambda c]]\\
=&[\phi_x(a)_{\lambda+x}[b_\mu c]] + (-1)^{\alpha|a|}[a_\lambda[\tau_x(b)_{\mu+x}c]] + (-1)^{\alpha(|a|+|b|)}[a_\lambda[b_\mu\tau_x(c)]].
\end{aligned}$$

(2) 由于 τ 是 ϕ_x 的相关共形三重导子，我们有

$$\begin{aligned}
\phi_x([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}c]) &= [[\phi_x(a)_{\lambda+x}b]_{\lambda+\mu+x}c] + (-1)^{|\tau||a|}[[a_\lambda\tau_x(b)]_{\lambda+\mu+x}c] + (-1)^{|\tau|(|a|+|b|)}[[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}\tau_x(c)]\\
&= [[\phi_x(a)_{\lambda+x}b]_{\lambda+\mu+x}c] + \tau_x([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}c]) - [[\tau_x(a)_{\lambda+x}b]_{\lambda+\mu+x}c].
\end{aligned}$$

也就是说，

$$(\phi_x - \tau_x)([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}c]) = [[(\phi_x - \tau_x)(a)_{\lambda+x}b]_{\lambda+\mu+x}c].$$

同样，由斜对称性可得

$$(\phi_x - \tau_x)([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}c]) = (-1)^{\alpha|a|}[[a_\lambda(\phi_x - \tau_x)(b)]_{\lambda+\mu+x}c].$$

由斜对称性和 Jacobi恒等式可推得

$$\begin{aligned}
&(\phi_x-\tau_x)([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}c])\\
&=(\phi_x-\tau_x)([a_\lambda[b_\mu c]])-(-1)^{|a||b|}(\phi_x-\tau_x)([b_\mu[a_\lambda c]])\\
&=-(-1)^{|a|(|b|+|c|)}(\phi_x-\tau_x)([[b_\mu c]_{-\partial-\lambda}a])+(-1)^{|a||b|+|b|(|a|+|c|)}(\phi_x-\tau_x)([[a_\lambda c]_{-\partial-\mu}b])\\
&=-(-1)^{|a|(|b|+|c|)+\alpha|b|}[[b_\mu(\phi_x-\tau_x)(c)]_{-\partial-\lambda}a]+(-1)^{|b||c|+\alpha|a|}[[a_\lambda(\phi_x-\tau_x)(c)]_{-\partial-\mu}b]\\
&=(-1)^{\alpha(|a|+|b|)}[a_\lambda[b_\mu(\phi_x-\tau_x)(c)]]-(-1)^{\alpha(|a|+|b|)}(-1)^{|a||b|}[b_\mu[a_\lambda(\phi_x-\tau_x)(c)]]\\
&=(-1)^{\alpha(|a|+|b|)}[[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}(\phi_x-\tau_x)(c)].
\end{aligned}$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}
(\phi_x-\tau_x)([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}c])&=[[(\phi_x-\tau_x)(a)_{\lambda+x}b]_{\lambda+\mu+x}c]=(-1)^{\alpha|a|}[[a_\lambda(\phi_x-\tau_x)(b)]_{\lambda+\mu+x}c]\\
&=(-1)^{\alpha(|a|+|b|)}[[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}(\phi_x-\tau_x)(c)].
\end{aligned}$$

(3) 结合 (2) 和斜对称性，结论立即成立。

这就完成了证明。 □

受引理 3.2中(2)的证明启发，我们可以得到如下有趣的结论：

推论3.3. (1) 对于任意齐次元素 $a,b,c\in\mathcal{R}$, $\phi_x\in GCTDer(\mathcal{R})_\alpha$，以下三个等式等价：

(i) $\phi_x([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}c])=[[\phi_x(a)_{\lambda+x}b]_{\lambda+\mu+x}c]$.(ii) $\phi_x([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}c])=(-1)^{\alpha|a|}[[a_\lambda\phi_x(b)]_{\lambda+\mu+x}c]$.(iii) $\phi_x([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}c])=[[\phi_x(a)_{\lambda+x}b]_{\lambda+\mu+x}c]=(-1)^{\alpha|a|}[[a_\lambda\phi_x(b)]_{\lambda+\mu+x}c]=(-1)^{\alpha(|a|+|b|)}[[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}\phi_x(c)]$.

(2) 对于任意齐次元素 a、b、$c\in\mathcal{R}$、$\phi_x\in GCTDer(\mathcal{R})_\alpha$，以下三个等式也彼此等价：

(i) $[[\phi_x(a)_{\lambda+x}b]_{\lambda+\mu+x}c]=(-1)^{\alpha(|a|+|b|)}[[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}\phi_x(c)]$.(ii) $[[a_\lambda\phi_x(b)]_{\lambda+\mu+x}c]=(-1)^{\alpha|b|}[[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}\phi_x(c)]$.(iii) $[[\phi_x(a)_{\lambda+x}b]_{\lambda+\mu+x}c]=(-1)^{\alpha|a|}[[a_\lambda\phi_x(b)]_{\lambda+\mu+x}c]=(-1)^{\alpha(|a|+|b|)}[[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}\phi_x(c)]$.

定义3.4. 共形线性映射 $\phi_x\in gc(\mathcal{R})_\alpha$ 称为 $\mathcal{R}$的 α 次共形三重中心，若其满足以下公理：

$$\phi_x([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}c])=[[\phi_x(a)_{\lambda+x}b]_{\lambda+\mu+x}c],\tag{3.3}$$

对任意齐次元素 $a,b,c\in\mathcal{R}$。

共形线性映射 $\phi_x\in gc(\mathcal{R})_\alpha$ 称为 $\mathcal{R}$的α 次共形三重拟中心，若其满足以下等式：

$$[[\phi_x(a)_{\lambda+x}b]_{\lambda+\mu+x}c]=(-1)^{\alpha(|a|+|b|)}[[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}\phi_x(c)],\tag{3.4}$$

对任意齐次元素 $a,b,c\in\mathcal{R}$。

共形线性映射 $\phi_x\in gc(\mathcal{R})_\alpha$ 称为 $\mathcal{R}$的 α 次中心共形三重导子，若其满足以下等式：

$$\phi_x([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}c])=[[\phi_x(a)_{\lambda+x}b]_{\lambda+\mu+x}c]=0,\tag{3.5}$$

对于任意齐次元素 a、b、$c\in\mathcal{R}$。

在下文中，我们分别用 $TC(\mathcal{R})$、$TQC(\mathcal{R})$ 和 $ZTDer(\mathcal{R})$ 表示共形三重中心、拟中心和中心共形三重导子的集合。显然，我们可以得到如下塔式关系：$ZTDer(\mathcal{R}) \subseteq TC(\mathcal{R}) \subseteq TQC(\mathcal{R})$。按照惯例，李共形超代数 $\mathcal{R}$ 的中心记为 $Z(\mathcal{R}) = \{a \in \mathcal{R} | [a_\lambda b] = 0, \ \forall b \in \mathcal{R}\}$。对于 $\mathcal{R}$ 的一个子集 $\mathcal{S}$，用 $C_{\mathcal{R}}(\mathcal{S})$ 表示 $\mathcal{S}$ 在 $\mathcal{R}$ 中的中心化子。显然，若 $Z(\mathcal{R}) = 0$，则 $ZTDer(\mathcal{R}) = 0$。

注 3.5. 受引理 3.2 中结论 (2) 的启发，我们可以推得，对于任意齐次元素 $a, b, c \in \mathcal{R}$，$\phi_x \in GCTDer(\mathcal{R})_\alpha$，若 τ_x 是 ϕ_x的相关共形三重导子，则 $\phi_x - \tau_x \in TC(\mathcal{R})_\alpha$。

从现在起，我们可以探讨这些共形三重导子之间的联系。

命题 3.6. 设 $\mathcal{R}$ 是一个李共形超代数。则 $CTDer(\mathcal{R})$ $GCTDer(\mathcal{R})$ 和$TC(\mathcal{R})$ 是李共形超代数 $gc(\mathcal{R})$ 的子代数。

证明. 不难看出，所有情形的证明都类似。因此，我们只需证明，对于任意 $\phi_x \in CTDer(\mathcal{R})_\alpha$, $\psi_x \in CTDer(\mathcal{R})_\beta$，有 $[\phi_x \psi]_y \in CTDer(\mathcal{R})_{\alpha+\beta}[x]$。

由于 $\phi_x \in CTDer(\mathcal{R})_\alpha$, $\psi_x \in CTDer(\mathcal{R})_\beta$，我们可以得到，

$$\phi_x([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu} c]) = [[\phi_x(a)_{\lambda+x} b]_{\lambda+\mu+x} c] + (-1)^{|\phi||a|}[[a_\lambda \phi_x(b)]_{\lambda+\mu+x} c] + (-1)^{|\phi|(|a|+|b|)}[[a_\lambda b]_{\lambda+\mu} \phi_x(c)],$$
$$\psi_x([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu} c]) = [[\psi_x(a)_{\lambda+x} b]_{\lambda+\mu+x} c] + (-1)^{|\psi||a|}[[a_\lambda \psi_x(b)]_{\lambda+\mu+x} c] + (-1)^{|\psi|(|a|+|b|)}[[a_\lambda b]_{\lambda+\mu} \psi_x(c)],$$

对任意齐次元素 a、b、$c \in \mathcal{R}$，此外，我们可以得到

$$\begin{aligned}
&\phi_x \psi_{y-x}([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu} c]) \\
=&\phi_x([[\psi_{y-x}(a)_{\lambda+y-x} b]_{\lambda+\mu+y-x} c] + (-1)^{|\psi||a|}[[a_\lambda \psi_{y-x}(b)]_{\lambda+\mu+y-x} c] + (-1)^{|\psi|(|a|+|b|)}[[a_\lambda b]_{\lambda+\mu} \psi_{y-x}(c)]) \\
=&[[\phi_x \psi_{y-x}(a)_{\lambda+y} b]_{\lambda+\mu+y} c] + (-1)^{|\phi|(|\psi|+|a|)}[[\psi_{y-x}(a)_{\lambda+y-x} \phi_x(b)]_{\lambda+\mu+y} c] \\
&+ (-1)^{|\phi|(|\psi|+|a|+|b|)}[[\psi_{y-x}(a)_{\lambda+y-x} b]_{\lambda+\mu+y-x} \phi_x(c)] \\
&+ (-1)^{|\psi||a|}([[\phi_x(a)_{\lambda+x} \psi_{y-x}(b)]_{\lambda+\mu+y} c] + (-1)^{|\phi||a|}[[a_\lambda \phi_x \psi_{y-x}(b)]_{\lambda+\mu+y} c] \\
&+ (-1)^{|\phi|(|\psi|+|a|+|b|)}[[a_\lambda \psi_{y-x}(b)]_{\lambda+\mu+y-x} \phi_x(c)]) \\
&+ (-1)^{|\psi|(|a|+|b|)}([[\phi_x(a)_{\lambda+x} b]_{\lambda+\mu+x} \psi_{y-x}(c)] + (-1)^{|\phi||a|}[[a_\lambda \phi_x(b)]_{\lambda+\mu+x} \psi_{y-x}(c)] \\
&+ (-1)^{|\phi|(|a|+|b|)}[[a_\lambda b]_{\lambda+\mu} \phi_x \psi_{y-x}(c)]) \\
=&[[\phi_x \psi_{y-x}(a)_{\lambda+y} b]_{\lambda+\mu+y} c] + (-1)^{|\phi|(|\psi|+|a|)}[[\psi_{y-x}(a)_{\lambda+y-x} \phi_x(b)]_{\lambda+\mu+y} c] \\
&+ (-1)^{|\phi|(|\psi|+|a|+|b|)}[[\psi_{y-x}(a)_{\lambda+y-x} b]_{\lambda+\mu+y-x} \phi_x(c)] \\
&+ (-1)^{|\psi||a|}[[\phi_x(a)_{\lambda+x} \psi_{y-x}(b)]_{\lambda+\mu+y} c] + (-1)^{(|\phi|+|\psi|)|a|}[[a_\lambda \phi_x \psi_{y-x}(b)]_{\lambda+\mu+y} c] \\
&+ (-1)^{(|\phi|+|\psi|)|a|+|\phi|(|\psi|+|b|)}[[a_\lambda \psi_{y-x}(b)]_{\lambda+\mu+y-x} \phi_x(c)] \\
&+ (-1)^{|\psi|(|a|+|b|)}[[\phi_x(a)_{\lambda+x} b]_{\lambda+\mu+x} \psi_{y-x}(c)] + (-1)^{(|\phi|+|\psi|)|a|+|\psi||b|}[[a_\lambda \phi_x(b)]_{\lambda+\mu+x} \psi_{y-x}(c)] \\
&+ (-1)^{(|\phi|+|\psi|)(|a|+|b|)}[[a_\lambda b]_{\lambda+\mu} \phi_x \psi_{y-x}(c)] \\
=&[[\phi_x \psi_{y-x}(a)_{\lambda+y} b]_{\lambda+\mu+y} c] + (-1)^{(|\phi|+|\psi|)|a|}[[a_\lambda \phi_x \psi_{y-x}(b)]_{\lambda+\mu+y} c] \\
&+ (-1)^{(|\phi|+|\psi|)(|a|+|b|)}[[a_\lambda b]_{\lambda+\mu} \phi_x \psi_{y-x}(c)] \\
&+ (-1)^{|\phi|(|\psi|+|a|)}[[\psi_{y-x}(a)_{\lambda+y-x} \phi_x(b)]_{\lambda+\mu+y} c] + (-1)^{|\phi|(|\psi|+|a|+|b|)}[[\psi_{y-x}(a)_{\lambda+y-x} b]_{\lambda+\mu+y-x} \phi_x(c)] \\
&+ (-1)^{|\psi||a|}[[\phi_x(a)_{\lambda+x} \psi_{y-x}(b)]_{\lambda+\mu+y} c] + (-1)^{(|\phi|+|\psi|)|a|+|\phi|(|\psi|+|b|)}[[a_\lambda \psi_{y-x}(b)]_{\lambda+\mu+y-x} \phi_x(c)] \\
&+ (-1)^{|\psi|(|a|+|b|)}[[\phi_x(a)_{\lambda+x} b]_{\lambda+\mu+x} \psi_{y-x}(c)] + (-1)^{(|\phi|+|\psi|)|a|+|\psi||b|}[[a_\lambda \phi_x(b)]_{\lambda+\mu+x} \psi_{y-x}(c)]
\end{aligned}$$

类似地，我们有

$$\begin{aligned}
&\psi_{y-x}\phi_x([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}c])\\
&\quad=[[\psi_{y-x}\phi_x(a)_{\lambda+y}b]_{\lambda+\mu+y}c]+(-1)^{(|\phi|+|\psi|)|a|}[[a_\lambda\psi_{y-x}\phi_x(b)]_{\lambda+\mu+y}c]\\
&\qquad+(-1)^{(|\phi|+|\psi|)(|a|+|b|)}[[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}\psi_{y-x}\phi_x(c)]\\
&\qquad+(-1)^{|\psi|(|\phi|+|a|)}[[\phi_x(a)_{\lambda+x}\psi_{y-x}(b)]_{\lambda+\mu+y}c]+(-1)^{|\psi|(|\phi|+|a|+|b|)}[[\phi_x(a)_{\lambda+x}b]_{\lambda+\mu+x}\psi_{y-x}(c)]\\
&\qquad+(-1)^{|\phi||a|}[[\psi_{y-x}(a)_{\lambda+y-x}\phi_x(b)]_{\lambda+\mu+y}c]+(-1)^{(|\phi|+|\psi|)|a|+|\psi|(|\phi|+|b|)}[[a_\lambda\phi_x(b)]_{\lambda+\mu+x}\psi_{y-x}(c)]\\
&\qquad+(-1)^{|\phi|(|a|+|b|)}[[\psi_{y-x}(a)_{\lambda+y-x}b]_{\lambda+\mu+y-x}\phi_x(c)]+(-1)^{(|\psi|+|\phi|)|a|+|\phi||b|)}[[a_\lambda\psi_{y-x}(b)]_{\lambda+\mu+y-x}\phi_x(c)].
\end{aligned}$$

因此，我们可以得到

$$\begin{aligned}
&[\phi_x\psi]_y([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}c])=[[[\phi_x\psi]_y(a)_{\lambda+y}b]_{\lambda+\mu+y}c]\\
&+(-1)^{(|\phi|+|\psi|)|a|}[[a_\lambda[\phi_x\psi]_y(b)]_{\lambda+\mu+y}c]+(-1)^{(|\phi|+|\psi|)(|a|+|b|)}[[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}[\phi_x\psi]_y(c)].
\end{aligned}$$

所以，$[\phi_x\psi]_y\in CTDer(\mathcal{R})_{\alpha+\beta}[x]$，即 $CTDer(\mathcal{R})$ 是 $gc(\mathcal{R}$ 的李共形子代数).

证明完毕。 □

命题 3.7. 设 $\mathcal{R}$ 是一个李共形超代数。则 $ZTDer(\mathcal{R})$ 是 $CTDer(\mathcal{R})$ 和 $GCTDer(\mathcal{R})$ 的李共形理想。

证明。显然，我们有塔 $ZTDer(\mathcal{R})\subseteq CTDer(\mathcal{R})\subseteq GCTDer(\mathcal{R})$。我们只需证明，对于任意 $\phi_x\in ZTDer(\mathcal{R})_\alpha$ 和 $\psi_x\in CTDer(\mathcal{R})^\beta$，有 $[\phi_x\psi]_y\in ZTDer(\mathcal{R})_{\alpha+\beta}[x]$。另一种情况可以类似地证明。

对于任意齐次元素 a、b、$c\in\mathcal{R}$，我们有

$$\begin{aligned}
&[[[\phi_x\psi]_y(a)_{\lambda+y}b]_{\lambda+\mu+y}c]\\
&\quad=[[\phi_x\psi_{y-x}(a)_{\lambda+y}b]_{\lambda+\mu+y}c]-(-1)^{|\phi||\psi|}[[\psi_{y-x}\phi_x(a)_{\lambda+y}b]_{\lambda+\mu+y}c]\\
&\quad=0-(-1)^{|\phi||\psi|}(\psi_{y-x}([[\phi_x(a)_{\lambda+x}b]_{\lambda+\mu+x}c])\\
&\qquad-(-1)^{|\psi|(|\phi|+|a|)}[[\phi_x(a)_{\lambda+x}\psi_{y-x}(b)]_{\lambda+\mu+y}c]-(-1)^{|\psi|(|\phi|+|a|+|b|)}[[\phi_x(a)_{\lambda+x}b]_{\lambda+\mu+x}\psi_{y-x}(c)])\\
&\quad=0.
\end{aligned}$$

同样地，我们可以得到，

$$[\phi_x\psi]_y([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}c])=0.$$

因此，我们可以推导出 $[\phi_x\psi]_y\in ZTDer(\mathcal{R})_{\alpha+\beta}[x]$。

这就完成了证明。 □

注记 3.8. 众所周知，$gc(\mathcal{R})$ 是一个简单李共形超代数。因此，若 $GCTDer(\mathcal{R})=gc(\mathcal{R})$，根据命题 3.7，$ZTDer(\mathcal{R})$ 等于 0 或 $gc(\mathcal{R})$。此外，若 $ZTDer(\mathcal{R})=gc(\mathcal{R})$，则 $\mathcal{R}$ 是阿贝尔的。

命题 3.9. 设 $\mathcal{R}$ 是李共形超代数。若 $Z(\mathcal{R})=0$，则 $TC(\mathcal{R})$ 和$TQC(\mathcal{R})$ 是交换李共形代数。特别地，若 $Z(\mathcal{R})=0$，则 $TC(\mathcal{R})$ 与$TQC(\mathcal{R})$ 对易。

证明。显然，我们只需证明第一种情形，另一种情形可类似证明。对于任意齐次元素 $a, b, c \in \mathcal{R}$, $\phi_x \in TC(\mathcal{R})_\alpha$, $\psi_x \in TC(\mathcal{R})_\beta$，我们可以推出

$$\begin{aligned}[[\phi_x\psi_{y-x}(a)_{\lambda+y}b]_{\lambda+\mu+y}c] &= \phi_x([[\psi_{y-x}(a)_{\lambda+y-x}b]_{\lambda+\mu+y-x}c]) \\ &= (-1)^{|\psi||a|}\phi_x([[a_\lambda\psi_{y-x}(b)]_{\lambda+\mu+y-x}c]) \\ &= (-1)^{|\psi||a|}[[\phi_x(a)_{\lambda+x}\psi_{y-x}(b)]_{\lambda+\mu+y}c] \\ &= (-1)^{|\psi||a|+|\psi|(|\phi|+|a|)}[[\psi_{y-x}\phi_x(a)_{\lambda+y}b]_{\lambda+\mu+y}c] \\ &= (-1)^{|\psi||\phi|}[[\psi_{y-x}\phi_x(a)_{\lambda+y}b]_{\lambda+\mu+y}c] \\ &.\end{aligned}$$

因此，我们有

$$[[[\phi_x\psi]_y(a)_{\lambda+y}b]_{\lambda+\mu+y}c] = 0.$$

由于 $Z(\mathcal{R}) = 0$ 和 b, c 是 $\mathcal{R}$ 的任意元素，因此我们可以得出，

$$[\phi_x\psi]_y(a) = 0.$$

因此，我们有 $[\phi_x\psi]_y = 0$。

这就完成了证明。 □

命题 3.10. 设 $\mathcal{R}$ 为一个李共形代数。则有以下结论：

(1) $[CTDer(\mathcal{R})_{\alpha\lambda}TC(\mathcal{R})_\beta]_\mu \subseteq TC(\mathcal{R})_{\alpha+\beta}[\lambda]$. (2) $[GCTDer(\mathcal{R})_{\alpha\lambda}TC(\mathcal{R})_\beta]_\mu \subseteq TC(\mathcal{R})_{\alpha+\beta}[\lambda]$. (3) $[CTDer(\mathcal{R})_{\alpha\lambda}TQC(\mathcal{R})_\beta]_\mu \subseteq TQC(\mathcal{R})_{\alpha+\beta}[\lambda]$.

证明。显然，我们只需证明第一种情况，其他情况可以类似地证明。由于$\phi_x \in CTDer(\mathcal{R})_\alpha$, $\psi_x \in TC(\mathcal{R})_\beta$，对于任意齐次元素 $a, b, c \in \mathcal{R}$，我们可以得到

$$\begin{aligned}&[[\phi_x\psi_{y-x}(a)_{\lambda+y}b]_{\lambda+\mu+y}c] \\ =&\phi_x([[\psi_{y-x}(a)_{\lambda+y-x}b]_{\lambda+\mu+y-x}c]) - (-1)^{|\phi|(|\psi|+|a|)}[[\psi_{y-x}(a)_{\lambda+y-x}\phi_x(b)]_{\lambda+\mu+y}c] \\ &- (-1)^{|\phi|(|\psi|+|a|+|b|)}[[\psi_{y-x}(a)_{\lambda+y-x}b]_{\lambda+\mu+y-x}\phi_x(c)] \\ =&\phi_x\psi_{y-x}([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}c]) - (-1)^{|\phi|(|\psi|+|a|)}\psi_{y-x}([[a_\lambda\phi_x(b)]_{\lambda+\mu+x}c]) \\ &- (-1)^{|\phi|(|\psi|+|a|+|b|)}\psi_{y-x}([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}\phi_x(c)]).\end{aligned}$$

类似地，我们有

$$\begin{aligned}&[[\psi_{y-x}\phi_x(a)_{\lambda+y}b]_{\lambda+\mu+y}c] \\ =&\psi_{y-x}([[\phi_x(a)_{\lambda+x}b]_{\lambda+\mu+x}c]) \\ =&\psi_{y-x}\phi_x([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}c]) - (-1)^{|\phi||a|}\psi_{y-x}([[a_\lambda\phi_x(b)]_{\lambda+\mu+x}c]) \\ &- (-1)^{|\phi|(|a|+|b|)}\psi_{y-x}([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}\phi_x(c)]).\end{aligned}$$

因此，我们可以得到，

$$[[[\phi_x\psi]_y(a)_{\lambda+y}b]_{\lambda+\mu+y}c] = [\phi_x\psi]_y([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}c]).$$

因此，我们有 $[\phi_x\psi]_y \in TC(\mathcal{R})_{\alpha+\beta}[x]$。

证明至此完成。 □

4. Classification of conformal triple derivations on simple Lie conformal superalgebras

在本节中，我们对所有单李共形超代数的（广义）共形三重导子进行分类。为方便起见，我们始终假设 $\mathcal{R}$ 是有限单李共形超代数，且 α、$\beta \in \{\overline{0}, \overline{1}\}$。

容易看出，$CDer(\mathcal{R})$ 和 $CInn(\mathcal{R})$ 是 $CTDer(\mathcal{R})$ 的李共形子代数。此外，我们有以下引理。

引理 4.1. 设 $\mathcal{R}$ 是有限单李共形超代数。那么 $CInn(\mathcal{R})$ 是李共形超代数 $CTDer(\mathcal{R})$ 的理想。

证明。设 $\phi_x \in CTDer(\mathcal{R})_\alpha$, $a \in \mathcal{R}_\beta$。由于 $\mathcal{R}$ 是一个简单李共形超代数，因此存在某个有限指标集 $I, J \subseteq \mathbb{Z}^+$ 以及齐次元素 $a^1_{ij}, a^2_{ij} \in \mathcal{R}$，使得$a = \sum_{i\in I, j\in J} \frac{d^i}{d\lambda^i}[a^1_{ij}{}_\lambda a^2_{ij}]|_{\lambda=0}$。

对于任意 $b \in \mathcal{R}$，我们有

$$\begin{aligned}
[\phi_x ada]_y(b) &= \phi_x ada_{y-x}(b) - (-1)^{|\phi||a|} ada_{y-x}\phi_x(b)\\
&= \phi_x([a_{y-x}b]) - (-1)^{|\phi||a|}[a_{y-x}\phi_x(b)]\\
&= \phi_x([(\sum_{i\in I, j\in J} \frac{d^i}{d\lambda^i}[a^1_{ij}{}_\lambda a^2_{ij}]|_{\lambda=0})_{y-x}b]) - (-1)^{|\phi||a|}[(\sum_{i\in I, j\in J} \frac{d^i}{d\lambda^i}[a^1_{ij}{}_\lambda a^2_{ij}]|_{\lambda=0})_{y-x}\phi_x(b)]\\
&= \sum_{i\in I, j\in J} \frac{d^i}{d\lambda^i}([[\phi_x(a^1_{ij})_{\lambda+x}a^2_{ij}]_y b] + (-1)^{|\phi||a^1_{ij}|}[[a^1_{ij}{}_\lambda \phi_x(a^2_{ij})]_y b]\\
&+ (-1)^{|\phi|(|a^1_{ij}|+|a^2_{ij}|)}[[a^1_{ij}{}_\lambda a^2_{ij}]_{y-x}\phi_x(b)])|_{\lambda=0} - (-1)^{|\phi||a|}[(\sum_{i\in I, j\in J} \frac{d^i}{d\lambda^i}[a^1_{ij}{}_\lambda a^2_{ij}]|_{\lambda=0})_{y-x}\phi_x(b)]\\
&= \sum_{i\in I, j\in J} \frac{d^i}{d\lambda^i}([[\phi_x(a^1_{ij})_{\lambda+x}a^2_{ij}]_y b] + (-1)^{|\phi||a^1_{ij}|}[[a^1_{ij}{}_\lambda \phi_x(a^2_{ij})]_y b])|_{\lambda=0}\\
&= ad(\sum_{i\in I, j\in J} \frac{d^i}{d\lambda^i}([\phi_x(a^1_{ij})_{\lambda+x}a^2_{ij}] + (-1)^{|\phi||a^1_{ij}|}[a^1_{ij}{}_\lambda \phi_x(a^2_{ij})])|_{\lambda=0})_y(b).
\end{aligned}$$

由于 b、$[\phi_x ada]_y$ 的任意性，$[\phi_x ada]_y$ 是一个内共形导子。因此，$\mathcal{R}(CInn)$ 是李共形代数 $\mathcal{R}(CTDer)$ 的一个理想。□

事实上，$CDer(\mathcal{R})$ 与 $CTDer(\mathcal{R})$ 之间还有其他联系，这比上述引理所示的二者关系更强。因此，我们有以下引理。

引理 4.2. 设 $\mathcal{R}$ 是一个有限单李共形超代数。那么存在一个 $\mathbb{C}$-线性映射 $\delta: CTDer(\mathcal{R}) \to CDer(\mathcal{R})$，$\phi_x \mapsto \delta_{\phi_x}$使得对于所有 $a \in \mathcal{R}$, $\phi_x \in CTDer(\mathcal{R})$，都有$[\phi_x ada]_y = ad\delta_{\phi_x}(a)_y$。

证明。由引理 4.1 的证明，取 $\phi_x \in CTDer(\mathcal{R})_\alpha$，于是我们可以在 $\mathcal{R}$ 上定义一个共形线性自同态 δ_{ϕ_x}，使得对于任意齐次元素 $a = \sum_{i\in I,\ j\in J} \frac{d^i}{d\lambda^i}[a^1_{ij}{}_\lambda a^2_{ij}]|_{\lambda=0} \in \mathcal{R}$,

$$\delta_{\phi_x}(a) = \sum_{i\in I, j\in J} \frac{d^i}{d\lambda^i}([\phi_x(a^1_{ij})_{\lambda+x}a^2_{ij}] + (-1)^{|\phi||a^1_{ij}|}[a^1_{ij}{}_\lambda \phi_x(a^2_{ij})])|_{\lambda=0}.$$

首先 st， $\delta_{\phi_x}(a)$ 不依赖于 a 的表达式选择。为证明这一点，取 e

$$A = \sum_{i\in I, j\in J} \frac{d^i}{d\lambda^i}([\phi_x(a^1_{ij})_{\lambda+x}a^2_{ij}] + (-1)^{|\phi||a^1_{ij}|}[a^1_{ij\lambda}\phi_x(a^2_{ij})])|_{\lambda=0},$$

$$B = \sum_{s\in I', t\in J'} \frac{d^s}{d\lambda^s}([\phi_x(b^1_{st})_{\lambda+x}b^2_{st}] + (-1)^{|\phi||b^1_{st}|}[b^1_{st\lambda}\phi_x(b^2_{st})])|_{\lambda=0},$$

其中 a 也可以表示为 $a = \sum_{s\in I',\ t\in J'} \frac{d^s}{d\lambda^s}[b^1_{st\lambda}b^2_{st}]|_{\lambda=0}$。由于 $\phi_x \in CTDer(\mathcal{R})_\alpha$，对于任意 $c \in \mathcal{R}$，我们可以推得

$$[A_{\lambda+\mu+x}c] = \phi_x([a_{\lambda+\mu}c]) - (-1)^{|\phi||a|}[a_{\lambda+\mu}\phi_x(c)] = [B_{\lambda+\mu+x}c].$$

因此，对于任意 $c \in \mathcal{R}$，有 $[(A-B)_{\lambda+\mu+x}c] = 0$，即 $A - B \in Z(\mathcal{R})$。显然，由于 $\mathcal{R}$ 是一个简单李共形超代数，我们有 $Z(\mathcal{R}) = 0$。于是，我们可以得到 $A = B$。因此，δ_{ϕ_x} 是良定义的。此外，由引理 4.1的证明可立即推出，$[\phi_x ada]_y = ad\delta_{\phi_x}(a)y$。

接下来，我们需要证明 δ_{ϕ_x} 是一个共形线性映射，即 $\delta_{\phi_x}(\partial a) = (\partial+x)\delta_{\phi_x}(a)$。对于任意齐次元素 $a = \sum_{i\in I,\ j\in J} \frac{d^i}{d\lambda^i}[a^1_{ij\lambda}a^2_{ij}]|_{\lambda=0} \in \mathcal{R}$，我们有 $\partial a = \sum_{i\in I,\ j\in J} \frac{d^i}{d\lambda^i}([\partial a^1_{ij\lambda}a^2_{ij}] + [a^1_{ij\lambda}\partial a^2_{ij}])|_{\lambda=0}$。因此，我们可以得到

$$\begin{aligned}
\delta_{\phi_x}(\partial a) = &\sum_{i\in I,j\in J} \frac{d^i}{d\lambda^i}([\phi_x(\partial a^1_{ij})_{\lambda+x}a^2_{ij}] + (-1)^{|\phi||a^1_{ij}|}[\partial a^1_{ij\lambda}\phi_x(a^2_{ij})] \\
&+ [\phi_x(a^1_{ij})_{\lambda+x}\partial a^2_{ij}] + (-1)^{|\phi||a^1_{ij}|}[a^1_{ij\lambda}\phi_x(\partial a^2_{ij})])|_{\lambda=0} \\
= &\sum_{i\in I,j\in J} \frac{d^i}{d\lambda^i}(-\lambda([\phi_x(a^1_{ij})_{\lambda+x}a^2_{ij}] + (-1)^{|\phi||a^1_{ij}|}[a^1_{ij\lambda}\phi_x(a^2_{ij})]) \\
&+ (\partial+\lambda+x)([\phi_x(a^1_{ij})_{\lambda+x}a^2_{ij}] + (-1)^{|\phi||a^1_{ij}|}[a^1_{ij\lambda}\phi_x(a^2_{ij})]))|_{\lambda=0} \\
=&(\partial+x)\sum_{i\in I,j\in J} \frac{d^i}{d\lambda^i}([\phi_x(a^1_{ij})_{\lambda+x}a^2_{ij}] + (-1)^{|\phi||a^1_{ij}|}[a^1_{ij\lambda}\phi_x(a^2_{ij})])|_{\lambda=0} \\
=&(\partial+x)\delta_{\phi_x}(a).
\end{aligned}$$

最后，我们应当证明 δ_{ϕ_x} 是一个共形导子。根据上述讨论，对于任意 $\phi_x \in CTDer(\mathcal{R})_\alpha$、齐次元素 a、$b \in \mathcal{R}$，我们有 $[\phi_x ad[a_\lambda b]] = ad\delta_{\phi_x}([a_\lambda b])$。另一方面，我们有

$$\begin{aligned}
[\phi_x ad[a_\lambda b]] &= [\phi_x[ada_\lambda adb]] \\
&= [[\phi_x ada]_{\lambda+x}adb] + (-1)^{|\phi||a|}[ada_\lambda[\phi_x adb]] \\
&= [ad\delta_{\phi_x}(a)_{\lambda+x}adb] + (-1)^{|\phi||a|}[ada_\lambda ad\delta_{\phi_x}(b)] \\
&= ad([\delta_{\phi_x}(a)_{\lambda+x}b] + (-1)^{|\phi||a|}[a_\lambda\delta_{\phi_x}(b)]).
\end{aligned}$$

因此，$ad\delta_{\phi_x}([a_\lambda b]) = ad([\delta_{\phi_x}(a)_{\lambda+x}b] + (-1)^{|\phi||a|}[a_\lambda\delta_{\phi_x}(b)])$。由于 $Z(\mathcal{R}) = 0$，于是我们有$\delta_{\phi_x}([a_\lambda b]) = [\delta_{\phi_x}(a)_{\lambda+x}b] + (-1)^{|\phi||a|}[a_\lambda\delta_{\phi_x}(b)]$。由 a、b 的任意性，我们可以推导出$\delta_{\phi_x} \in CDer(\mathcal{R})$。

这就完成了证明。 □

引理 4.3. 设 $\mathcal{R}$ 是一个有限单李共形超代数。那么 $CTDer(\mathcal{R})$ 中 $CInn(\mathcal{R})$ 的中心化子是平凡的，即 $C_{CTDer(\mathcal{R})}(CInn(\mathcal{R})) = 0$。特别地，$CTDer(\mathcal{R})$ 的中心为零。

证明。假设 $\phi_x \in C_{CTDer(\mathcal{R})}(CInn(\mathcal{R}))_\alpha$。那么对于任意齐次元素 $a \in \mathcal{R}$，我们有 $[\phi_x ada] = 0$。因此，对于任意齐次元素 $b \in \mathcal{R}$，可以得到 $\phi_x([a_\lambda b]) - (-1)^{|\phi||a|}[a_\lambda \phi_x(b)] = [\phi_x ada]_{\lambda+x}(b) = 0$。此外，由斜对称性，我们有$\phi_x([a_\lambda b]) = (-1)^{|\phi||a|}[a_\lambda \phi_x(b)] = [\phi_x(a)_{\lambda+x} b]$。

一方面，我们有

$$\phi_x([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}c]) = [[\phi_x(a)_{\lambda+x}b]_{\lambda+\mu+x}c] = (-1)^{|\phi||a|}[[a_\lambda \phi_x(b)]_{\lambda+\mu+x}c] = (-1)^{|\phi|(|a|+|b|)}[[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}\phi_x(c)],$$

对任意齐次元素 $a, b, c \in \mathcal{R}$。另一方面，我们有

$$\phi_x([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}c]) = [[\phi_x(a)_{\lambda+x}b]_{\lambda+\mu+x}c] + (-1)^{|\phi||a|}[[a_\lambda \phi_x(b)]_{\lambda+\mu+x}c] + (-1)^{|\phi|(|a|+|b|)}[[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}\phi_x(c)],$$

因为 $\phi_x \in CTDer(\mathcal{R})$。因此，我们可以得到

$$\phi_x([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}c]) = 3\phi_x([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}c]).$$

这意味着，对于任意齐次元素 $a, b, c \in \mathcal{R}$， $\phi_x([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}c]) = 0$。由于 $\mathcal{R}$ 是一个简单李共形超代数， $\mathcal{R}$中的每个元素都可以表示为有限个形如 $\sum_{i\in I, j\in J, k\in K} \frac{d^i}{d\lambda^i}\frac{d^k}{d\mu^k}[[a^1_{ijk}{}_\lambda a^2_{ijk}]_\mu a^3_{ijk}]|_{\lambda=\mu=0}$的元素的线性组合，因此我们可以推得$\phi_x = 0$。□

现在，我们通过以下定理介绍本节的主要结果，该定理将给出有限单李共形超代数的共形三重导子的分类。

定理 4.4. 设 $\mathcal{R}$ 是有限单李共形超代数。则 $CTDer(\mathcal{R}) = CDer(\mathcal{R})$。

证明. 假设 $\phi_x \in CTDer(\mathcal{R})_\alpha$ 且 a 是 $\mathcal{R}$中的齐次元素。由引理 4.2，得 $[\phi_x ada]_y = ad\delta_{\phi_x}(a)_y$ 且 $\delta_{\phi_x} \in CDer(\mathcal{R})$。此外，对于任意 $b \in \mathcal{R}$，有$ad\delta_{\phi_x}(a)_y(b) = [\delta_{\phi_x}(a)_y b] = \delta_{\phi_x}([a_{y-x}b]) - (-1)^{|\phi||a|}[a_{y-x}\delta_{\phi_x}(b)] = [\delta_{\phi_x} ada]_y(b)$。由 b的任意性，可推出 $ad\delta_{\phi_x}(a)_y = [\delta_{\phi_x} ada]_y$。因此，得 $[\phi_x ada]_y = [\delta_{\phi_x} ada]_y$，即 $\phi_x - \delta_{\phi_x} \in C_{CTDer(\mathcal{R})}(CInn(\mathcal{R}))$。由引理 4.3，$\phi_x - \delta_{\phi_x} = 0$，即 $\phi_x = \delta_{\phi_x}$。因此，由引理 4.2 可得该定理。

□

5. (Φ,Ψ)-triple derivations and (A,B,C,D)-triple derivation of Lie conformalsuperalgebras

本节的目的是展示共形 (Φ,Ψ)-三重导子的一些基本性质。本节后面，我们将对所有单李共形超代数 $\mathcal{R}$ 的（广义）(A, B, C, D)-三重导子进行分类。

定义 5.1. 设 $\mathcal{R}$ 为李共形超代数， G 为 $Aut(\mathcal{R})$ 的子群。若存在两个自同构 Φ、$\Psi \in G$，使得 $\phi_x \in gc(\mathcal{R})_\alpha$ 是 $\mathcal{R}$ 的次数为 α 的共形 (Φ,Ψ)-三重导子，则称其为共形 (Φ,Ψ)-三重导子。

$$\begin{aligned}\phi_x([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}c]) =& [[\phi_x(a)_{\lambda+x}\Phi(b)]_{\lambda+x+\mu}\Psi(c)] + (-1)^{|\phi||a|}[[\Phi(a)_\lambda \phi_x(b)]_{\lambda+x+\mu}\Psi(c)] \\ &+ (-1)^{|\phi|(|a|+|b|)}[[\Phi(a)_\lambda \Psi(b)]_{\lambda+\mu}\phi_x(c)] \end{aligned} \tag{5.1}$$

对于任意齐次元素 a、 b、 $c \in \mathcal{R}$.

在这种情况下， Φ 和 Ψ 称为 ϕ_x的相关自同构。 $\mathcal{R}$的所有共形(Φ,Ψ)-三重导子的集合记为 $CTDer_{\Phi,\ \Psi}(\mathcal{R})$。不难看出，对于 $\Phi = \Psi = id$，有$CTDer_{\Phi,\ \Psi}(\mathcal{R}) = CTDer(\mathcal{R})$。为方便起见，本节中我们将$CTDer_{\Phi,\ id}(\mathcal{R})$简记为$CTDer_\Phi(\mathcal{R})$。

命题5.2. 设 $\mathcal{R}$ 为李共形超代数， G 为 $Aut(\mathcal{R})$的一个子群。对于任意自同构 Φ、 $\Psi \in G$、 $CTDer_{\Phi,\Psi}(\mathcal{R})$与 $CTDer_{\Psi^{-1}\Phi}(\mathcal{R})$作为 $C[\partial]$-模同构。此外， $rank(CTDer_{\Phi,\Psi}(\mathcal{R})) = rank(CTDer_{\Psi^{-1}\Phi}(\mathcal{R}))$。

证明。考虑一个映射 $\sigma_\Psi\colon CTDer_{\Phi,\Psi}(\mathcal{R}) \to CTDer_{\Psi^{-1}\Phi}(\mathcal{R})$，由 $\sigma_\Psi(\phi_x) = \Psi^{-1}\phi_x$ 给出，对于任意 $\phi_x \in CTDer_{\Phi,\Psi}(\mathcal{R})_\alpha$。
对于任意齐次元素 a、 b、 $c \in R$，我们有

$$\begin{aligned}
&\Psi^{-1}\phi_x([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}c]) \\
&=\Psi^{-1}([[\phi_x(a)_{\lambda+x}\Phi(b)]_{\lambda+x+\mu}\Psi(c)]) + (-1)^{|\phi||a|}\Psi^{-1}([[\Phi(a)_\lambda\phi_x(b)]_{\lambda+x+\mu}\Psi(c)]) \\
&+(-1)^{|\phi|(|a|+|b|)}\Psi^{-1}([[\Phi(a)_\lambda\Psi(b)]_{\lambda+\mu}\phi_x(c)]) \\
&=[[\Psi^{-1}\phi_x(a)_{\lambda+x}\Psi^{-1}\Phi(b)]_{\lambda+x+\mu}c] + (-1)^{|\phi||a|}[[\Psi^{-1}\Phi(a)_\lambda\Psi^{-1}\phi_x(b)]_{\lambda+x+\mu}c] \\
&+(-1)^{|\phi|(|a|+|b|)}[[\Psi^{-1}\Phi(a)_\lambda(b)]_{\lambda+\mu}\Psi^{-1}\phi_x(c)]
\end{aligned}$$

因此， $\Psi^{-1}\phi_x \in CTDer_{\Psi^{-1}\Phi,\ id}(\mathcal{R}) = CTDer_{\Psi^{-1}\Phi}(\mathcal{R})$。于是， σ_Ψ是一个定义良好的映射。
此外，不难看出，

$$\sigma_\Psi(\phi_x + \psi_x) = \Psi^{-1}(\phi_x + \psi_x) = \Psi^{-1}(\phi_x) + \Psi^{-1}(\psi_x) = \sigma_\Psi(\phi_x) + \sigma_\Psi(\psi_x)$$

对任意 ϕ_x、 $\psi_x \in CTDer_{\Phi,\Psi}(\mathcal{R})$ 均成立。对任意 $\phi_x \in CTDer_{\Phi,\Psi}(\mathcal{R})$ 和 $a \in \mathcal{R}$，我们有

$$(\sigma_\Psi(\partial\phi))_x a = \Psi^{-1}(\partial\phi)_x a = \Psi^{-1}(-x\phi_x(a)) = -x\Psi^{-1}(\phi_x(a)) = (\partial\sigma_\Psi(\phi))_x a.$$

由于 ϕ_x 和 a的任意性，我们可以推得 σ_Ψ 是一个 $C[\partial]$-模同态。
类似地，我们可以通过 $\tau_\Psi(\varphi_x) = \Psi\varphi_x$ 定义 $\tau_\Psi\colon CTDer_{\Psi^{-1}\Phi}(\mathcal{R}) \to CTDer_{\Phi,\ \Psi}(\mathcal{R})$。容易看出， τ_Ψ 也是一个定义良好的 $C[\partial]$-模同态，因此 $\sigma_\Psi = \tau_\Psi^{-1}$。于是，$CTDer_{\Psi^{-1}\Phi}(\mathcal{R})$ 与 $CTDer_{\Psi,\ \Phi}(\mathcal{R})$ 作为 $C[\partial]$-模同构。□

受命题 3.6 的启发，我们希望定义 $CTDer_{\Phi,\ \Psi}(\mathcal{R})$ 中共形超代数的结构。类似于 [10], 中的命题 2.2，不难看出我们可以得到以下结果。

命题 5.3。设 $\mathcal{R}$ 是一个李共形超代数， G 是 $Aut(\mathcal{R})$ 的一个子群。对于任意的 $\Phi \in G$, $CTDer_{\Phi,\Phi}(\mathcal{R})$ 可以视为一个李共形超代数，并且 $CTDer_{\Phi,\ \Phi}(\mathcal{R})$ 与 $CTDer(\mathcal{R})$ 作为李共形超代数同构。

命题 5.4. 设 $\mathcal{R}$ 是一个李共形超代数，且 G 是 $Aut(\mathcal{R})$ 的一个子群。假设 Φ、 Ψ 是 G 中的两个元素，满足 $(\Phi - \Psi)(\mathcal{R}) \in Z(\mathcal{R})$，则 $CTDer_\Phi(\mathcal{R}) = CTDer_\Psi(\mathcal{R})$。特别地，若 $(\Phi - id_\mathcal{R})(\mathcal{R}) \subseteq Z(\mathcal{R})$，则 $CTDer_\Phi(\mathcal{R}) = CTDer(\mathcal{R})$。

证明。对于任意的 $\phi_x \in CTDer_\Phi(\mathcal{R})_\alpha$ 和齐次元素 a、 b、 $c \in \mathcal{R}$，且由于 $(\Phi-\Psi)(\mathcal{R}) \in Z(\mathcal{R})$，我们可以得到

$$[[\phi_x(a)_{\lambda+x}(\Phi - \Psi)(b)]_{\lambda+\mu+x}c] = [[(\Phi - \Psi)(a)_\lambda\phi_x(b)]_{\lambda+\mu+x}c] = [[(\Phi - \Psi)(a)_\lambda b]_{\lambda+\mu}\phi_x(c)] = 0,$$

i.e,

$$\begin{aligned}
[[\phi_x(a)_{\lambda+x}\Phi(b)]_{\lambda+\mu+x}c] &= [[\phi_x(a)_{\lambda+x}\Psi(b)]_{\lambda+\mu+x}c], \\
[[\Phi(a)_\lambda\phi_x(b)]_{\lambda+\mu+x}c] &= [[\Psi(a)_\lambda\phi_x(b)]_{\lambda+\mu+x}c], \\
[[\Phi(a)_\lambda b]_{\lambda+\mu}\phi_x(c)] &= [[\Psi(a)_\lambda b]_{\lambda+\mu}\phi_x(c)].
\end{aligned}$$

因此我们得到

$$\begin{aligned}
&\phi_x([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}c])\\
&= [[\phi_x(a)_{\lambda+x}\Phi(b)]_{\lambda+\mu+x}c] + (-1)^{|\phi||a|}[[\Phi(a)_\lambda\phi_x(b)]_{\lambda+\mu+x}c] + (-1)^{|\phi|(|a|+|b|)}[[\Phi(a)_\lambda b]_{\lambda+\mu}\phi_x(c)]\\
&= [[\phi_x(a)_{\lambda+x}\Psi(b)]_{\lambda+\mu+x}c] + (-1)^{|\phi||a|}[[\Psi(a)_\lambda\phi_x(b)]_{\lambda+\mu+x}c] + (-1)^{|\phi|(|a|+|b|)}[[\Psi(a)_\lambda b]_{\lambda+\mu}\phi_x(c)]
\end{aligned}$$

由此可得 $\phi_x \in CTDer_\Psi(\mathcal{R})$，这意味着 $CTDer_\Phi(\mathcal{R}) \subseteq CTDer_\Psi(\mathcal{R})$。类似地，我们有 $CTDer_\Psi(\mathcal{R}) \subseteq CTDer_\Phi(\mathcal{R})$。因此，$CTDer_\Psi(\mathcal{R}) = CTDer_\Phi(\mathcal{R})$。第二部分的证明可通过取 $\Psi = id_\mathcal{R}$ 类似地完成。□

命题 5.5. 设 $\mathcal{R}$ 是一个李共形超代数，G 是 $Aut(\mathcal{R})$ 的一个子群。假设 Φ、Ψ 是 G 中的两个元素，满足 $\phi_x \in CTDer_\Phi(\mathcal{R})_\alpha$ 且 $\psi_x \in CTDer_\Psi(\mathcal{R})_\beta$。若 Φ 与 Ψ 交换，ϕ_x 与 Ψ 交换，且 ψ_y 与 Φ 交换，则 $[\phi_x\psi]_y \in CTDer_{\Phi\Psi}(\mathcal{R})_{\alpha+\beta}$.

证明。对于任意齐次元素 a、b、$c \in \mathcal{R}$，由于 Φ 与 Ψ 交换，ϕ_x 与Ψ 交换，且 ψ_y 与 Φ 交换，我们有

$$\begin{aligned}
&\phi_x\psi_{y-x}([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}c])\\
&=\phi_x([[\psi_{y-x}(a)_{\lambda+y-x}\Psi(b)]_{\lambda+\mu+y-x}c] + (-1)^{|\psi||a|}[[\Psi(a)_\lambda\psi_{y-x}(b)]_{\lambda+\mu+y-x}c]\\
&\quad + (-1)^{|\psi|(|a|+|b|)}[[\Psi(a)_\lambda b]_{\lambda+\mu}\psi_{y-x}(c)])\\
&=([[\phi_x\psi_{y-x}(a)_{\lambda+y}\Phi\Psi(b)]_{\lambda+\mu+y}c]\\
&\quad + (-1)^{|\phi|(|\psi|+|a|)}[[\Phi\psi_{y-x}(a)_{\lambda+y-x}\Psi\phi_x(b)]_{\lambda+\mu+y}c]\\
&\quad + (-1)^{|\phi|(|\psi|+|a|+|b|)}[[\Phi\psi_{y-x}(a)_{\lambda+y-x}\Psi(b)]_{\lambda+\mu+y-x}\phi_x(c)])\\
&\quad + (-1)^{|a||\psi|}([[\phi_x\Psi(a)_{\lambda+x}\Phi\psi_{y-x}(b)]_{\lambda+\mu+y}c] + (-1)^{|a||\phi|}[[\Phi\Psi(a)_\lambda\phi_x\psi_{y-x}(b)]_{\lambda+\mu+y}c]\\
&\quad + (-1)^{(|a|+|\psi|+|b|)|\phi|}[[\Phi\Psi(a)_\lambda\psi_{y-x}(b)]_{\lambda+\mu+y-x}\phi_x(c)])\\
&\quad + (-1)^{|\psi|(|a|+|b|)}([[\Psi\phi_x(a)_{\lambda+x}\Phi(b)]_{\lambda+\mu+x}\psi_{y-x}(c)] + (-1)^{|a||\phi|}[[\Phi\Psi(a)_\lambda\phi_x(b)]_{\lambda+\mu+x}\psi_{y-x}(c)]\\
&\quad + (-1)^{(|a|+|b|)|\phi|}[[\Phi\Psi(a)_\lambda b]_{\lambda+\mu}\phi_x\psi_{y-x}(c)])\\
&=([[\phi_x\psi_{y-x}(a)_{\lambda+y}\Phi\Psi(b)]_{\lambda+\mu+y}c] + (-1)^{|a|(|\phi|+|\psi|)}[[\Phi\Psi(a)_\lambda\phi_x\psi_{y-x}(b)]_{\lambda+\mu+y}c]\\
&\quad + (-1)^{(|a|+|b|)(|\phi|+|\psi|)}[[\Phi\Psi(a)_\lambda b]_{\lambda+\mu}\phi_x\psi_{y-x}(c)])\\
&\quad + (-1)^{|\phi|(|\psi|+|a|)}[[\Phi\psi_{y-x}(a)_{\lambda+y-x}\Psi\phi_x(b)]_{\lambda+\mu+y}c]\\
&\quad + (-1)^{|\phi|(|\psi|+|a|+|b|)}[[\Phi\psi_{y-x}(a)_{\lambda+y-x}\Psi(b)]_{\lambda+\mu+y-x}\phi_x(c)]\\
&\quad + (-1)^{|a||\psi|}[[\phi_x\Psi(a)_{\lambda+x}\Phi\psi_{y-x}(b)]_{\lambda+\mu+y}c]\\
&\quad + (-1)^{|\phi|(|a|+|\psi|+|b|)+|a||\psi|}[[\Phi\Psi(a)_\lambda\psi_{y-x}(b)]_{\lambda+\mu+y-x}\phi_x(c)]\\
&\quad + (-1)^{|\psi|(|a|+|b|)}[[\Psi\phi_x(a)_{\lambda+x}\Phi(b)]_{\lambda+\mu+x}\psi_{y-x}(c)]\\
&\quad + (-1)^{|a||\phi|+|\psi|(|a|+|b|)}[[\Phi\Psi(a)_\lambda\phi_x(b)]_{\lambda+\mu+x}\psi_{y-x}(c)].
\end{aligned}$$

类似地，我们可以得到

$$\begin{aligned}
&\psi_{y-x}\phi_x([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}c])\\
&=([[\psi_{y-x}\phi_x(a)_{\lambda+y}\Psi\Phi(b)]_{\lambda+\mu+y}c] + (-1)^{|a|(|\psi|+|\phi|)}[[\Psi\Phi(a)_\lambda\psi_{y-x}\phi_x(b)]_{\lambda+\mu+y}c]\\
&\quad + (-1)^{(|\psi|+|\phi|)(|a|+|b|)}[[\Psi\Phi(a)_\lambda b]_{\lambda+\mu}\psi_{y-x}\phi_x(c)])\\
&\quad + (-1)^{|\psi|(|\phi|+|a|)}[[\Psi\phi_x(a)_{\lambda+x}\Phi\psi_{y-x}(b)]_{\lambda+\mu+y}c]\\
&\quad + (-1)^{|\psi|(|\phi|+|a|+|b|)}[[\Psi\phi_x(a)_{\lambda+x}\Phi(b)]_{\lambda+\mu+x}\psi_{y-x}(c)]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+(-1)^{|a||\phi|}[[\psi_{y-x}\Phi(a)_{\lambda+y-x}\Psi\phi_x(b)]_{\lambda+\mu+y}c]\\
&+(-1)^{|\psi|(|a|+|\phi|+|b|)+|a||\phi|}[[\Psi\Phi(a)_\lambda\phi_x(b)]_{\lambda+\mu+x}\psi_{y-x}(c)]\\
&+(-1)^{|\phi|(|a|+|b|)}[[\Phi\psi_{y-x}(a)_{\lambda+y-x}\Psi(b)]_{\lambda+\mu+y-x}\phi_x(c)]\\
&+(-1)^{|a||\psi|+|\phi|(|a|+|b|)}[[\Psi\Phi(a)_\lambda\psi_{y-x}(b)]_{\lambda+\mu+y-x}\phi_x(c)]
\end{aligned}
$$

结合上述两个方程，我们有

$$
\begin{aligned}
[\phi_x\psi]_y([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}c]) =&[[[\phi_x\psi]_y(a)_{\lambda+y}\Psi\Phi(b)]_{\lambda+\mu+y}c]+(-1)^{|a|(|\psi|+|\phi|)}[[\Psi\Phi(a)_\lambda[\phi_x\psi]_y(b)]_{\lambda+\mu+y}c]\\
&+(-1)^{(|\psi|+|\phi|)(|a|+|b|)}[[\Psi\Phi(a)_\lambda b]_{\lambda+\mu}[\phi_x\psi]_y(c)].
\end{aligned}
$$

这意味着 $[\phi_x\psi]_y \in CTDer_{\Phi\Psi}(\mathcal{R})_{\alpha+\beta}$。

这就完成了证明。 □

推论 5.6. 设 $\mathcal{R}$ 为李共形超代数，G 为 $Aut(\mathcal{R})$ 的一个子群。假设 $\Phi^2=\Phi\in G$ 满足 Φ 与 $CTDer_\Phi(\mathcal{R})$ 中的每个元素都可交换。则 $CTDer_\Phi(\mathcal{R})$ 是一个李共形超代数。

证明。由于 $CTDer_\Phi(\mathcal{R})$ 是一个 $C[\partial]$-模，因此只需证明 $CTDer_\Phi(\mathcal{R})$ 在 λ-括号运算下封闭。对于任意 $\phi_x\in CTDer_\Phi(\mathcal{R})_\alpha$、$\psi_x\in CTDer_\Phi(\mathcal{R})_\beta$ 以及齐次元素 a、b、$c\in\mathcal{R}$，根据命题 5.5 的证明中的类似讨论，我们有

$$
\begin{aligned}
[\phi_x\psi]_y([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}c]) =&[[[\phi_x\psi]_y(a)_{\lambda+y}\Phi^2(b)]_{\lambda+\mu+y}(c)]+(-1)^{|a|(|\psi|+|\phi|)}[[\Phi^2(a)_\lambda[\phi_x\psi]_y(b)]_{\lambda+\mu+y}c]\\
&+(-1)^{(|\psi|+|\phi|)(|a|+|b|)}[[\Phi^2(a)_\lambda b]_{\lambda+\mu}[\phi_x\psi]_y(c)].
\end{aligned}
$$

由于 $\Phi^2=\Phi$，我们有

$$
\begin{aligned}
[\phi_x\psi]_y([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}c]) =&[[[\phi_x\psi]_y(a)_{\lambda+y}\Phi(b)]_{\lambda+\mu+y}c]+(-1)^{|a|(|\psi|+|\phi|)}[[\Phi(a)_\lambda[\phi_x\psi]_y(b)]_{\lambda+\mu+y}c]\\
&+(-1)^{(|\psi|+|\phi|)(|a|+|b|)}[[\Phi(a)_\lambda b]_{\lambda+\mu}[\phi_x\psi]_y(c)].
\end{aligned}
$$

因此，$[\phi_x\psi]_y\in CTDer_\Phi(\mathcal{R})_{\alpha+\beta}$。

□

命题 5.7. 设 $\mathcal{R}$ 是李共形超代数，且 G 是 $Aut(\mathcal{R})$ 的子群。假设 Φ、$\Psi\in G$ 和 $\phi_x\in CTDer_\Phi(\mathcal{R})$。那么 $\Psi\phi_x\in CTDer_{\Psi\Phi,\Psi}(\mathcal{R})$ 和 $\phi_x\Psi\in CTDer_{\Phi\Psi,\Psi}(\mathcal{R})$

证明. 设 $\phi_x\in CTDer_\Phi(\mathcal{R})_\alpha$，对于齐次元素 a、b、$c\in\mathcal{R}$，我们有

$$
\begin{aligned}
\Psi\phi_x([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}c]) =& [[\Psi(\phi_x(a))_{\lambda+x}\Psi\Phi(b)]_{\lambda+\mu+x}\Psi(c)]+(-1)^{|\phi||a|}[[\Psi\Phi(a)_\lambda\Psi(\phi_x(b))]_{\lambda+\mu+x}\Psi(c)]\\
&+(-1)^{|\phi|(|a|+|b|)}[[\Psi\Phi(a)_\lambda\Psi(b)]_{\lambda+\mu}\Psi(\phi_x(c))],
\end{aligned}
$$

因此，$\Psi\phi_x\in CTDer_{\Psi\Phi,\Psi}(\mathcal{R})_\alpha$。类似地，我们有 $\phi_x\Psi\in CTDer_{\Phi\Psi,\Psi}(\mathcal{R})_\alpha$. □

命题 5.8. 设 $\mathcal{R}$ 是李共形超代数，且 G 是 $Aut(\mathcal{R})$ 的子群。假设 $\phi_x\in CTDer_\Phi(\mathcal{R})_\alpha$ 是一个元素，使得 $(\phi_x\Phi-\Phi\phi_x)(\mathcal{R})\subseteq Z(\mathcal{R})$。那么 $[[\mathcal{R}_\lambda\mathcal{R}]_{\lambda+\mu}\mathcal{R}]\subseteq Ker(\phi_x\Phi-\Phi\phi_x)$。

证明。对于任意齐次元素 a、b、$c\in\mathcal{R}$ 和 $\phi_x\in CTDer_\Phi(\mathcal{R})_\alpha$，我们有

$$
\begin{aligned}
\Phi\phi_x([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}c]) =& [[\Phi(\phi_x(a))_{\lambda+x}\Phi^2(b)]_{\lambda+\mu+x}\Phi(c)]+(-1)^{|\phi||a|}[[\Phi^2(a)_\lambda\Phi(\phi_x(b))]_{\lambda+\mu+x}\Phi(c)]\\
&+(-1)^{|\phi|(|a|+|b|)}[[\Phi^2(a)_\lambda\Phi(b)]_{\lambda+\mu}\Phi(\phi_x(c))],
\end{aligned}
$$

and

$$\begin{aligned}\phi_x\Phi([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}c]) = &[[\phi_x(\Phi(a))_{\lambda+x}\Phi^2(b)]_{\lambda+\mu+x}\Phi(c)] + (-1)^{|\phi||a|}[[\Phi^2(a)_\lambda\phi_x(\Phi(b))]_{\lambda+\mu+x}\Phi(c)]\\ &+(-1)^{|\phi|(|a|+|b|)}[[\Phi^2(a)_\lambda\Phi(b)]_{\lambda+\mu}\phi_x(\Phi(c))],\end{aligned}$$

由于 $(\phi_x\Phi-\Phi\phi_x)(\mathcal{R})\subseteq Z(\mathcal{R})$，我们有

$$(\phi_x\Phi-\Phi\phi_x)([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}c]) = 0 \tag{5.2}$$

因此，$[[\mathcal{R}_\lambda\mathcal{R}]_{\lambda+\mu}\mathcal{R}]\subseteq Ker(\phi_x\Phi-\Phi\phi_x)$。 □

在本节后续部分中，我们假设 $\mathcal{R}$ 是李共形超代数。我们定义并分类 $\mathcal{R}$的所有可能的次数为 α 的(A,B,C,D)-导子。

定义 5.9. 设 $\mathcal{R}$ 为李共形超代数。若存在 $A,B,C,D\in\mathbb{C}$ 使得下式成立，则称共形线性映射 $\phi_x\in gc(\mathcal{R})$为 $\mathcal{R}$ 的次数为 α 的(A,B,C,D)-导子:

$$\begin{aligned}A\phi_x([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}c]) =&B[[\phi_x(a)_{\lambda+x}b]_{\lambda+\mu+x}c] + (-1)^{|\phi||a|}C[[a_\lambda\phi_x(b)]_{\lambda+\mu+x}c]\\ &+(-1)^{|\phi|(|a|+|b|)}D[[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}\phi_x(c)],\end{aligned} \tag{5.3}$$

对任意齐次元素 $a,b,c\in\mathcal{R}$,

$\mathcal{R}$ 的所有(A,B,C,D)-导子的集合记作 $\Phi(A,B,C,D)$。显然， $\mathcal{R}$ 上的每个共形三重导子实际上都是李共形超代数$\mathcal{R}$的(1,1,1,1)-导子。

命题 5.10. 对于所有的 A、 B、 C、 $D\in\mathbb{C}$，集合 $\Phi(A,B,C,D)$ 可以写成

$$\Phi(A,B,C,D) = \Phi(2A,B+C,B+C,2D)\cap\Phi(0,B-C,C-B,0). \tag{5.4}$$

此外， 对于任意 $t\in\mathbb{C}/\{0\}$，我们有 $\Phi(A,B,C,D) = \Phi(A,C,B,D) = \Phi(tA,tB,tC,tD)$.

证明。对于任意的 A、 B、 C、 $D\in\mathbb{C}$ 和 $\phi_x\in\Phi$（A、 B、 C、 D），我们有

$$\begin{aligned}A\phi_x([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}c]) \;&= B[[\phi_x(a)_{\lambda+x}b]_{\lambda+\mu+x}c] + (-1)^{|\phi||a|}C[[a_\lambda\phi_x(b)]_{\lambda+\mu+x}c]\\ &+(-1)^{|\phi|(|a|+|b|)}D[[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}\phi_x(c)],\end{aligned} \tag{5.5}$$

and

$$\begin{aligned}A\phi_x([[b_\lambda a]_{\lambda+\mu}c]) \;&= B[[\phi_x(b)_{\lambda+x}a]_{\lambda+\mu+x}c] + (-1)^{|\phi||b|}C[[b_\lambda\phi_x(a)]_{\lambda+\mu+x}c]\\ &+(-1)^{|\phi|(|b|+|a|)}D[[b_\lambda a]_{\lambda+\mu}\phi_x(c)],\end{aligned} \tag{5.6}$$

其中， a、 b、 $c\in\mathcal{R}$ 为齐次元素。根据 $\mathcal{R}$ 的共形斜对称性，(5.6) 可变换为

$$\begin{aligned}-(-1)^{|a||b|}A\phi_x([[a_{-\partial-\lambda}b]_{\lambda+\mu}c]) = &-(-1)^{(|\phi|+|b|)|a|}B[[a_{-\partial-\lambda-x}\phi_x(b)]_{\lambda+\mu+x}c]\\ &-(-1)^{|\phi||b|+(|\phi|+|a|)|b|}C[[\phi_x(a)_{-\partial-\lambda}b]_{\lambda+\mu+x}c]\\ &-(-1)^{|\phi|(|b|+|a|)+|a||b|}D[[a_{-\partial-\lambda}b]_{\lambda+\mu}\phi_x(c)].\end{aligned}$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}A\phi_x([[a_{-\partial-\lambda}b]_{\lambda+\mu}c]) = \;&C[[\phi_x(a)_{-\partial-\lambda}b]_{\lambda+\mu+x}c] + (-1)^{|\phi||a|}B[[a_{-\partial-\lambda-x}\phi_x(b)]_{\lambda+\mu+x}c]\\ &+(-1)^{|\phi|(|b|+|a|)}D[[a_{-\partial-\lambda}b]_{\lambda+\mu}\phi_x(c)].\end{aligned} \tag{5.7}$$

由共形亚双线性，并在（5.7）中交换 λ 和 μ 的位置，我们可以得到

$$\begin{aligned} A\phi_x([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}c]) &= C[[\phi_x(a)_{\lambda+x}b]_{\lambda+\mu+x}c] + (-1)^{|\phi||a|}B[[a_\lambda \phi_x(b)]_{\lambda+\mu+x}c] \\ &\quad +(-1)^{|\phi|(|a|+|b|)}D[[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}\phi_x(c)]. \end{aligned} \tag{5.8}$$

由（5.5）和（5.8），我们有

$$\begin{aligned} 2A\phi_x([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}c]) &= (B+C)[[\phi_x(a)_{\lambda+x}b]_{\lambda+\mu+x}c] + (-1)^{|\phi||a|}(C+B)[[a_\lambda \phi_x(b)]_{\lambda+\mu+x}c] \\ &\quad +(-1)^{|\phi|(|a|+|b|)}2D[[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}\phi_x(c)], \end{aligned} \tag{5.9}$$

and

$$0 = (B-C)[[\phi_x(a)_{\lambda+x}b]_{\lambda+\mu+x}c] + (-1)^{|\phi||a|}(C-B)[[a_\lambda \phi_x(b)]_{\lambda+\mu+x}c] + 0. \tag{5.10}$$

因此,

$$\phi_x \in \Phi(2A, B+C, B+C, 2D) \cap \Phi(0, B-C, C-B, 0).$$

这意味着

$$\Phi(A,B,C,D) \subseteq \Phi(2A, B+C, B+C, 2D) \cap \Phi(0, B-C, C-B, 0) \tag{5.11}$$

反过来，不难验证的是,

$$\Phi(2A, B+C, B+C, 2D) \cap \Phi(0, B-C, C-B, 0) \subseteq \Phi(A,B,C,D) \tag{5.12}$$

利用 (5.9) 和 (5.10)。因此，我们有

$$\Phi(A,B,C,D) = \Phi(2A, B+C, B+C, 2D) \cap \Phi(0, B-C, C-B, 0).$$

这就完成了证明。 □

命题 5.11. 对任意 A、B、C、$D \in \mathbb{C}$ 和 $B \neq \pm C$，有

$$\Phi(A,B,C,D) = \Phi(\frac{A}{B+C}, 0, 1, \frac{D}{B+C}) = \Phi(\frac{A}{B+C}, 1, 0, \frac{D}{B+C}). \tag{5.13}$$

证明. 根据方程（5.4），有

$$\begin{aligned} \Phi(A,B,C,D) &= \Phi(2A, B+C, B+C, 2D) \cap \Phi(0, B-C, C-B, 0) \\ &= \Phi(\frac{2A}{B+C}, 1, 1, \frac{2D}{B+C}) \cap \Phi(0, -1, 1, 0) \\ &= \Phi(\frac{2A}{B+C}, 0, 2, \frac{2D}{B+C}) \\ &= \Phi(\frac{A}{B+C}, 0, 1, \frac{D}{B+C}). \end{aligned}$$

证明至此完成。 □

结合上述事实与命题 5.10 和 5.11 的结果，可得以下一组恒等式:

(1) 对于 $B+C=0$，要么是 $B=C=0$，要么是 $B=-C\neq 0$，则

$$\Phi(A,B,C,D) = \begin{cases} \Phi(A,0,0,D), & D \neq 0, B=C=0, \\ \Phi(A,0,0,0), & D=0, B=C=0, \\ \Phi(A,B,-B,D), & D\neq 0, B=-C\neq 0, \\ \Phi(A,B,-B,0), & D=0, B=-C\neq 0. \end{cases} \tag{5.14}$$

(2) 对于 $B+C\neq 0$，要么是 $B-C\neq 0$，要么是 $B=C\neq 0$，则

$$\Phi(A,B,C,D)=\begin{cases}\Phi(A,B,C,D), & D\neq 0, B-C\neq 0,\\ \Phi(A,B,C,0), & D=0, B-C\neq 0,\\ \Phi(A,B,B,D), & D\neq 0, B=C\neq 0,\\ \Phi(A,B,B,0), & D=0, B=C\neq 0.\end{cases} \tag{5.15}$$

根据定义 5.9，若 $\frac{B}{A}=\frac{C}{A}=\frac{D}{A}=\delta$，则 (A,B,C,D)-导子是 $\mathcal{R}$ 的 δ-导子（一种拟三重导子）。现在，方程 (5.14) 和 (5.15) 变为:

$$\Phi(A,B,C,D)=\begin{cases}\Phi(\delta,0,0,1), & D\neq 0, B=C=0,\\ \Phi(\delta,0,0,0), & D=0, B=C=0,\\ \Phi(\delta,1,-1,1), & D\neq 0, B=-C\neq 0,\\ \Phi(\delta,1,-1,0), & D=0, B=-C\neq 0,\end{cases} \tag{5.16}$$

and

$$\Phi(A,B,C,D)=\begin{cases}\Phi(\delta,1,0,\delta'), & D\neq 0, B-C\neq 0,\\ \Phi(\delta,1,0,0), & D=0, B-C\neq 0,\\ \Phi(\delta,1,1,\delta'), & D\neq 0, B=C\neq 0,\\ \Phi(\delta,1,1,0), & D=0, B=C\neq 0.\end{cases} \tag{5.17}$$

为了更清楚地描述上述情形，我们得到以下列出的各种结果，这些结果与 [33] 中的结果一致。

(1) $\Phi(\delta,0,0,1)=\{\phi_x\in gc(\mathcal{R})|\delta\phi_x([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}c])=(-1)^{|\phi|(|a|+|b|)}[[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}\phi_x(c)],$
$\forall a,b,c\in\mathcal{R}\}$,

(2) $\Phi(\delta,0,0,0)=\{\phi_x\in gc(\mathcal{R})|\delta([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}c])=0,\forall a,b,c\in\mathcal{R}\}$,

(3) $\Phi(\delta,1,-1,1)=\Phi(\delta,0,0,1)\cap\Phi(0,-1,1,0)$,

(4) $\Phi(\delta,1,-1,0)=\Phi(\delta,0,0,0)\cap\Phi(0,-1,1,0)$,

(5) $\Phi(\delta,1,0,\delta')=\Phi(2\delta,1,1,2\delta')\cap\Phi(0,1,-1,0)$,

(6) $\Phi(\delta,1,0,0)=\Phi(2\delta,1,1,0)\cap\Phi(0,1,-1,0)$,

(7) $\Phi(\delta,1,1,\delta')=\{\phi_x\in gc(\mathcal{R})|\delta\phi_x([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}c])=[[\phi_x(a)_{\lambda+x}b]_{\lambda+x+\mu}c]$
$+(-1)^{|\phi||a|}[[a_\lambda\phi_x(b)]_{\lambda+x+\mu}c]+(-1)^{|\phi|(|a|+|b|)}\delta'[[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}\phi_x(c)],\forall a,b,c\in\mathcal{R}\}$,

(8) $\Phi(\delta,1,1,0)=\{\phi_x\in gc(\mathcal{R})|\delta\phi_x([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}c])=[[\phi_x(a)_{\lambda+x}b]_{\lambda+x+\mu}c]$
$+(-1)^{|\phi||a|}[[a_\lambda\phi_x(b)]_{\lambda+x+\mu}c],\forall a,b,c\in\mathcal{R}\}$.

注 5.12。特别地，我们可以得到李共形超代数上的 (A,B,C,D)-导子与共形三重导子之间的一些联系，如下所示。

(1) $\Phi(0,0,0,0)=gc(\mathcal{R})$,

(2) $\Phi(1,1,0,0)=TC(\mathcal{R})$,

(3) $\Phi(0,1,0,-1)=TQC(\mathcal{R})$,

(4) $\Phi(1,1,1,1)=CTDer($
$\mathcal{R})$.

定理 5.13. 设 $\mathcal{R}$ 为一个李共形超代数。 $\mathcal{R}$ 的次数为 α 的 $\Phi(A,B,C,D)$-导子同构于以下情形之一。

$$(1)\Phi(\delta,0,0,1),\quad (2)\Phi(\delta,0,0,0),\quad (3)\Phi(\delta,1,-1,1),\quad (4)\Phi(\delta,1,-1,0),$$
$$(5)\Phi(\delta,1,0,\delta'),\quad (6)\Phi(\delta,1,0,0),\quad (7)\Phi(\delta,1,1,\delta'),\quad (8)\Phi(\delta,1,1,0),$$

其中 δ、$\delta' \in \mathbb{C}$.

6. Classification of conformal triple homomorphisms on simple Lie conformal superalgebras

在本节中，我们首先介绍李共形超代数的三重同态的定义。随后，还将刻画所有有限单李共形超代数的共形三重同态。

定义 6.1. 设 $\mathcal{A}$、$\mathcal{B}$ 为两个李共形超代数。称 $\mathbb{C}[\partial]$-模同态 $f: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 为:

(1) 若满足 $f([a_\lambda b]) = [f(a)_\lambda f(b)]$，则称为同态，适用于任意 $a,b \in \mathcal{A}$。(2) 若满足 $f([a_\lambda b]) = -[f(a)_\lambda f(b)]$，则称为反同态，适用于任意 $a,b \in \mathcal{A}$。(3) 若满足 $f([a_\lambda [b_\mu c]]) = [f(a)_\lambda [f(b)_\mu f(c)]]$，则称为三重同态，适用于任意 $a,b,c \in \mathcal{A}$.

注 6.2. 显然，由于李共形超代数的斜对称性，以下两个等式等价:

(1) $f([a_\lambda [b_\mu c]]) = [f(a)_\lambda [f(b)_\mu f(c)]]$.
(2) $f([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu} c]) = [[f(a)_\lambda f(b)]_{\lambda+\mu} f(c)]$.

设 $\mathcal{A}$ 是一个李共形超代数。对于 $\mathcal{A}$ 的子集 S， S 的包络李共形超代数按定义是由 S 生成的 $\mathcal{A}$ 的李共形子代数。如果一个李共形超代数不能写成两个非平凡理想的直和，则称其为不可分解的。

定义 6.3. 设 $\mathcal{A}$、$\mathcal{B}$ 是两个李共形超代数。如果 $f = f_1 + f_2$，且存在 f（$\mathcal{A}$）的包络李共形超代数的理想 I_1、I_2，使得 $I_1 \cap I_2 = 0$ 和 f_1（$\mathcal{A}$）$\subseteq I_1$、f_2（$\mathcal{A}$）$\subseteq I_2$，则称 $\mathbb{C}[\partial]$-模同态$f: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是 f_1 和 f_2 的直和。

注 6.4. 显然，李共形超代数的同态和反同态都是三重同态，但反过来并不总是成立。此外，同态与反同态之和也是三重同态。事实上，它们之间还存在其他联系，并非仅仅是包含关系。

在下文中，我们始终使用 E 表示 f（$\mathcal{A}$）的包络李共形超代数。此外，我们假设 $\mathcal{A}$ 是一个有限单李共形超代数，且 E 是中心无的，并且可以分解为不可分解理想的直和。

引理 6.5. 设 $\mathcal{A}$、$\mathcal{B}$ 是李共形超代数，且 f 是从 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{B}$ 的三重同态。那么存在一个共形同态 $\delta_f: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$，使得对所有 $a \in \mathcal{A}$，都有 $fada_x = ad\delta_f(a)_x f$。

证明。类似于引理 4.1 的证明中的讨论，存在某些有限指标集I、$J \subseteq \mathbb{Z}^+$和$a = \sum_{i\in I,\, j\in J} \frac{d^i}{d\lambda^i}[a^1_{ij}{}_\lambda a^2_{ij}]|_{\lambda=0}$。定义一个 $\mathbb{C}$-线性映射 δ_f: $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$，使得对于任意 $a \in \mathcal{A}$、$\delta_f(a) = \sum_{i\in I,\, j\in J} \frac{d^i}{d\lambda^i}[f(a^1_{ij})_\lambda f(a^2_{ij})]|_{\lambda=0}$。

首先，只需证明 $\delta_f(a)$ 与 a 的表达式无关。为此，取

$$A=\sum_{i\in I,j\in J}\frac{d^i}{d\lambda^i}[f(a^1_{ij})_\lambda f(a^2_{ij})]|_{\lambda=0},\quad B=\sum_{s\in I',t\in J'}\frac{d^s}{d\lambda^s}[f(b^1_{st})_\lambda f(b^2_{st})]|_{\lambda=0},$$

其中，a 也可以表示为$a=\sum_{s\in I',\ t\in J'}\frac{d^s}{d\lambda^s}[b^1_{st\lambda}b^2_{st}]|_{\lambda=0}$。由于 f 是从 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{B}$的共形三重同态，对于任意 $c\in\mathcal{A}$，我们可以推导出

$$\begin{aligned}
[f(c)_\mu(A-B)] &= [f(c)_\mu\sum_{i\in I,j\in J}\frac{d^i}{d\lambda^i}[f(a^1_{ij})_\lambda f(a^2_{ij})]|_{\lambda=0}]]-[f(c)_\mu\sum_{s\in I',t\in J'}\frac{d^s}{d\lambda^s}[f(b^1_{st})_\lambda f(b^2_{st})]|_{\lambda=0}]]\\
&=\sum_{i\in I,j\in J}\frac{d^i}{d\lambda^i}([f(c)_\mu[f(a^1_{ij})_\lambda f(a^2_{ij})]])|_{\lambda=0}-\sum_{s\in I',t\in J'}\frac{d^s}{d\lambda^s}([f(c)_\mu[f(b^1_{st})_\lambda f(b^2_{st})]])|_{\lambda=0}\\
&=\sum_{i\in I,j\in J}\frac{d^i}{d\lambda^i}(f([c_\mu[a^1_{ij}{}_\lambda a^2_{ij}]]))|_{\lambda=0}-\sum_{s\in I',t\in J'}\frac{d^s}{d\lambda^s}(f([c_\mu[b^1_{st\lambda}b^2_{st}]]))|_{\lambda=0}\\
&=f([c_\mu\sum_{i\in I,j\in J}\frac{d^i}{d\lambda^i}([a^1_{ij}{}_\lambda a^2_{ij}])|_{\lambda=0}])-f([c_\mu\sum_{s\in I',t\in J'}\frac{d^s}{d\lambda^s}([b^1_{st\lambda}b^2_{st}])|_{\lambda=0}])\\
&=f([c_\mu a])-f([c_\mu a])\\
&=0.
\end{aligned}$$

因此，$A-B\in Z(E)$。根据假设，我们有 $Z(E)=0$。由此，我们可以得到$A=B$。因此，δ_f 是良定义的。

接下来，我们需要证明对于每个 $a\in\mathcal{A}$，$fada_x=ad\delta_f(a)_xf$。对于任意 a、$b\in\mathcal{A}$，其中$a=\sum_{i\in I,\ j\in J}\frac{d^i}{d\lambda^i}[a^1_{ij}{}_\lambda a^2_{ij}]|_{\lambda=0}$，我们有

$$\begin{aligned}
fada_x(b) &= f([a_xb])\\
&=f([(\sum_{i\in I,j\in J}\frac{d^i}{d\lambda^i}[a^1_{ij}{}_\lambda a^2_{ij}]|_{\lambda=0})_xb])\\
&=\sum_{i\in I,j\in J}\frac{d^i}{d\lambda^i}[[f(a^1_{ij})_\lambda f(a^2_{ij})]_xf(b)]|_{\lambda=0}\\
&=[(\sum_{i\in I,j\in J}\frac{d^i}{d\lambda^i}[f(a^1_{ij})_\lambda f(a^2_{ij})]|_{\lambda=0})_xf(b)]\\
&=[\delta_f(a)_xf(b)]\\
&=ad\delta_f(a)_xf(b).
\end{aligned}$$

因此，由于 $b\in\mathcal{A}$的任意性，对于每个 $a\in\mathcal{A}$，我们可以推得 $fada_x=ad\delta_f(a)_xf$。

最后，我们需要证明 δ_f是一个共形同态，即 $\delta_f(\partial a)=\partial\delta_f(a)$ 且$\delta_f([a_\lambda b])=[\delta_f(a)_\lambda\delta_f(b)]$，对任意 $a,b\in\mathcal{A}$ 均成立。对于任意$a=\sum_{i\in I,\ j\in J}\frac{d^i}{d\lambda^i}[a^1_{ij}{}_\lambda a^2_{ij}]|_{\lambda=0}\in\mathcal{A}$，我们有

$\partial a = \sum_{i\in I,\ j\in J} \frac{d^i}{d\lambda^i}([\partial a^1_{ij}{}_\lambda a^2_{ij}] + [a^1_{ij}{}_\lambda \partial a^2_{ij}])|_{\lambda=0}$。因此，我们可以得到

$$\begin{aligned}
\delta_f(\partial a) &= \sum_{i\in I, j\in J} \frac{d^i}{d\lambda^i}([f(\partial a^1_{ij})_\lambda f(a^2_{ij})] + [f(a^1_{ij})_\lambda f(\partial a^2_{ij})])|_{\lambda=0} \\
&= \sum_{i\in I, j\in J} \frac{d^i}{d\lambda^i}(-\lambda[f(a^1_{ij})_\lambda f(a^2_{ij})] + (\partial+\lambda)[f(a^1_{ij})_\lambda f(a^2_{ij})])|_{\lambda=0} \\
&= \partial \sum_{i\in I, j\in J} \frac{d^i}{d\lambda^i}([f(a^1_{ij})_\lambda f(a^2_{ij})])|_{\lambda=0} \\
&= \partial\delta_f(a).
\end{aligned}$$

因此， δ_f是一个 $\mathbb{C}[\partial]$-模同态。对于任意的 a、 b、 $c \in \mathcal{A}$，我们可以得到

$$\begin{aligned}
&[(\delta_f([a_\lambda b]) - [\delta_f(a)_\lambda \delta_f(b)])_{\lambda+\mu} f(c)] \\
&= [\delta_f([a_\lambda b])_{\lambda+\mu} f(c)] - [\delta_f(a)_\lambda [\delta_f(b)_\mu f(c)]] + (-1)^{|a||b|}[\delta_f(b)_\mu [\delta_f(a)_\lambda f(c)]] \\
&= [[f(a)_\lambda f(b)]_{\lambda+\mu} f(c)] - [\delta_f(a)_\lambda (ad\delta_f(b)_\mu f(c))] + (-1)^{|a||b|}[\delta_f(b)_\mu (ad\delta_f(a)_\lambda f(c))] \\
&= [[f(a)_\lambda f(b)]_{\lambda+\mu} f(c)] - [\delta_f(a)_\lambda (fadb_\mu c)] + (-1)^{|a||b|}[\delta_f(b)_\mu (fada_\lambda c)] \\
&= f([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu} c]) - [\delta_f(a)_\lambda f([b_\mu c])] + (-1)^{|a||b|}[\delta_f(b)_\mu f([a_\lambda c])] \\
&= f([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu} c]) - ad\delta_f(a)_\lambda f([b_\mu c]) + (-1)^{|a||b|} ad\delta_f(b)_\mu f([a_\lambda c]) \\
&= f([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu} c]) - fada_\lambda([b_\mu c]) + (-1)^{|a||b|} fadb_\mu([a_\lambda c]) \\
&= f([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu} c]) - f([a_\lambda [b_\mu c]]) + (-1)^{|a||b|} f([b_\mu [a_\lambda c]]) \\
&= f([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu} c] - [a_\lambda [b_\mu c]] + (-1)^{|a||b|}[b_\mu [a_\lambda c]]) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

由于 c的任意性，我们有 $\delta_f([a_\lambda b]) - [\delta_f(a)_\lambda \delta_f(b)] \in Z(E)$。因此， $\delta_f([a_\lambda b]) = [\delta_f(a)_\lambda \delta_f(b)]$ ，因为 E 是中心无的。因此，由于 a、 $b \in \mathcal{A}$的任意性， δ_f 是一个共形同态。

证明至此完成。 □

如下引理展示了 E 的一些良好性质。

引理 6.6。记 $E^+ = Im(f + \delta_f)$ $E^- = Im(f - \delta_f)$。那么我们可以得到如下结果：

(1) E^+ 和 E^- 都是 E的理想。(2) $[E^+{}_\lambda E^-] = 0$。(3) $E^+ \cap E^- = 0$。

事实上， E 可以分解为理想 E^+ 和 E^-的直和。

证明。（1）显然，我们有 $E^+, E^- \subseteq E$。对于任意的 $a, b \in \mathcal{A}$，我们有

$$\begin{aligned}
[(f(a) + \delta_f(a))_\lambda f(b)] &= [f(a)_\lambda f(b)] + ad\delta_f(a)_\lambda f(b) \\
&= \delta_f([a_\lambda b]) + fada_\lambda(b) \\
&= \delta_f([a_\lambda b]) + f([a_\lambda b]) \\
&= (f + \delta_f)([a_\lambda b]).
\end{aligned}$$

因此， E^+ 是 E的理想。同理， E^- 也是 E的理想。

（2）对于任意 a、b、$c\in\mathcal{A}$，我们可以得到

$$\begin{aligned}
&[[(f(a)+\delta_f(a))_\lambda(f(b)-\delta_f(b))]_{\lambda+\mu}f(c)]\\
&\quad=[[f(a)_\lambda f(b)]_{\lambda+\mu}f(c)]-[[f(a)_\lambda\delta_f(b)]_{\lambda+\mu}f(c)]\\
&\qquad+[[\delta_f(a)_\lambda f(b)]_{\lambda+\mu}f(c)]-[[\delta_f(a)_\lambda\delta_f(b)]_{\lambda+\mu}f(c)]\\
&\quad=f([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}c])+(-1)^{|a||b|}[[\delta_f(b)_{-\partial-\lambda}f(a)]_{\lambda+\mu}f(c)]+[[\delta_f(a)_\lambda f(b)]_{\lambda+\mu}f(c)]\\
&\qquad-[\delta_f(a)_\lambda[\delta_f(b)_\mu f(c)]]+(-1)^{|a||b|}[\delta_f(b)_\mu[\delta_f(a)_\lambda f(c)]]\\
&\quad=f([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}c])+(-1)^{|a||b|}[(ad\delta_f(b)_{-\partial-\lambda}f(a))_{\lambda+\mu}f(c)]+[(ad\delta_f(a)_\lambda f(b))_{\lambda+\mu}f(c)]\\
&\qquad-[\delta_f(a)_\lambda(ad\delta_f(b)_\mu f(c))]+(-1)^{|a||b|}[\delta_f(b)_\mu(ad\delta_f(a)_\lambda f(c))]\\
&\quad=f([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}c])+(-1)^{|a||b|}[(fadb_{-\partial-\lambda}(a))_{\lambda+\mu}f(c)]+[(fada_\lambda b)_{\lambda+\mu}f(c)]\\
&\qquad-[\delta_f(a)_\lambda(fadb_\mu c)]+(-1)^{|a||b|}[\delta_f(b)_\mu(fada_\lambda c)]\\
&\quad=f([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}c])+(-1)^{|a||b|}[f([b_{-\partial-\lambda}a])_{\lambda+\mu}f(c)]+[f([a_\lambda b])_{\lambda+\mu}f(c)]\\
&\qquad-ad\delta_f(a)_\lambda f([b_\mu c])+(-1)^{|a||b|}ad\delta_f(b)_\mu f([a_\lambda c])\\
&\quad=f([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}c])-[f([a_\lambda b])_{\lambda+\mu}f(c)]+[f([a_\lambda b])_{\lambda+\mu}f(c)]\\
&\qquad-fada_\lambda([b_\mu c])+(-1)^{|a||b|}fadb_\mu([a_\lambda c])\\
&\quad=f([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}c])-f([a_\lambda[b_\mu c]])+(-1)^{|a||b|}f([b_\mu[a_\lambda c]])\\
&\quad=f([[a_\lambda b]_{\lambda+\mu}c]-[a_\lambda[b_\mu c]]+(-1)^{|a||b|}[b_\mu[a_\lambda c]])\\
&\quad=0.
\end{aligned}$$

因此，$[(f(a)+\delta_f(a))_\lambda(f(b)-\delta_f(b))]\in Z(E)$。由于 $Z(E)=0$，我们得到 $[(f(a)+\delta_f(a))_\lambda(f(b)-\delta_f(b))]=0$。

(3) 对任意 $a\in E^+\cap E^-$，由 (2) 可得 $[a_\lambda E^+]=[a_\lambda E^-]=0$。因此，对任意 $b\in\mathcal{A}$，我们有$[a_\lambda(f(b)+\delta_f(b))]=[a_\lambda(f(b)-\delta_f(b))]=0$。于是，$[a_\lambda f(b)]=0$，即 $a\in Z(E)$。由于 $Z(E)=0$，我们可以推得 $a=0$。

至此，证明完成。 □

我们首先考虑 E 的最简单情形，以研究从 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{B}$的共形三重同态。

引理 6.7. 若 E 不可分解，则 f 是从 $\mathcal{A}$到 $\mathcal{B}$的共形同态或共形反同态。

证明。对任意 $a\in\mathcal{A}$，令 $a^+=\frac{1}{2}(f(a)+\delta_f(a))$ $a^-=\frac{1}{2}(f(a)-\delta_f(a))$。显然，我们有$a^+\in E^+$、$a^-\in E^-$ 以及 $f(a)=a^++a^-$。因此，$E\subseteq E^++E^-$。由引理 6.6，得$E=E^+\oplus E^-$。由于 E 不可分解，因此 E^+ 或 E^- 必为平凡的。若 E^+是平凡的，即$(f+\delta_f)([a_\lambda b])=0$，则 $f([a_\lambda b])=-\delta_f([a_\lambda b])=-[f(a)_\lambda f(b)]$.因此，$f$是反同态。类似地，若 E^- 是平凡的，则 f 是同态。

证明至此完成。 □

最后，我们通过以下定理给出本节的主要结果。

定理 6.8. 假设 $\mathcal{A}$ 是一个有限单李共形超代数，并且 E 是无中心的，且可以分解为不可分解理想的直和。那么，f 要么是从 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{B}$ 的一个同态或反同态，要么是一个同态与一个反同态的直和。

证明。显然，在 E 是可分解的情况下，只需证明定理 6.7。根据假设， E 可以写成和 $E = E_1 \oplus E_2 \oplus ... \oplus E_n$, 其中每个 E_i 都是 E 的不可分解理想。由于 E 是中心无的，根据引理 6.6，每个 E_i 也是中心无的,

设 p_i 是 E 到 E_i 的投影。于是，我们有 $f = \sum_{i=1}^{n} p_i f$ ，且 $p_i f$ 是从 $\mathcal{A}$ 到 E_i 的三重同态，而 E_i 是 $p_i f(\mathcal{A})$ 的包络李共形超代数，其中 $i = 1$、2、...、 n。由于每个 E_i 都不可分解，根据引理 6.7，我们可以推知 $p_i f$ 是从 $\mathcal{A}$ 到 E_i 的同态或反同态。令
$I = \{i \mid p_i f \ is \ a \ homomorphism.\}$ 和 $J = \{j \mid p_j f \ is \ an \ anti - homomorphism.\}$。令
$E_I = \sum_{i \in I} \oplus E_i$ 和 $E_J = \sum_{j \in J} \oplus E_j$。设 $f_I = \sum_{i \in I} p_i f$ 和 $f_J = \sum_{j \in J} p_j f$。不难验证,
$E = E_I \oplus E_J$、 $[E_{I\lambda} E_J] = 0$、 $f = f_I + f_J$，其中 f_I 是从 $\mathcal{A}$ 到 E_I 的同态，且 f_J 是从 $\mathcal{A}$ 到 E_J 的反同态。证毕。□

致谢 本工作得到国家自然科学基金委员会（批准号：12171129、12271406）和中央高校基本科研业务费（批准号：22120210554）的资助。

References

[1] Asif, S. 和 Wu, Z. *Generalized Lie triple derivations of Lie color algebras and their subalgebras.* Symmetry 13(7), 1-13(2021) [2] Beidar, K. I. 和 Chebotar, M. A. *On Lie derivations of Lie ideals of prime algebras.* Israel J. Math. 123, 131 148 2001- ( ).[3] Boyallian, C., Kac, V., Liberati, J. 和 Rudakov, A. *Representations of simple finite Lie conformal superalgebras of type W and S.* **47** 4 1 140 2006 J. Math. Phys. ( ), - ( ).[4] Bresar, M. 和 Zhao, K. *Biderivations and commuting linear maps on Lie algebras.* J. Lie Theory. 28(3), 885-900(2018).[5] Chang, Z. *Automorphisms and twisted forms of differential Lie conformal superalgebras.* 博士论文——阿尔伯塔大学（加拿大）。117 页。25(2013).[6] Chen, L., Ma, Y. 和 Ni, L. *Generalized derivations of Lie color algebras.* Results Math. 63(4), 923- 936(2013).[7] D'Andrea, A. 和 Kac, V. *Structure theory of finite conformal algebras.* Sel. Math. 4, 377-418(1998).[8] Fan, G., Hong, Y. 和 Su, Y. *Generalized conformal derivations of Lie conformal algebras.* J. Algebra Appl. 18(9), 1950175(2019).[9] Fattori, D., Kac, V. 和 Retakh, A. *Structure theory of finite Lie conformal superalgebras.* 李理论及其在物理学中的应用 V，27-63，World Sci. Publ.，River Edge，NJ，(2004). [10] Feng, T., Zhao, J. 和 Chen, L. *Conformal ($\sigma\tau$)-Derivations on Lie conformal superalgebras.* (2021), arXiv:2105.09292.[11] Herstein, I. N. *Lie and Jordan structures in simple, associative rings.* Bull. Amer. Math. Soc. 67, 517- 531(1961).[12] Hopkins, N. *Generalized derivations of nonassociative algebras.* Nova J. Math. Game Theory Algebra 5(3), 215-224(1996).[13] Ji, P. 和 Wang, L. *Lie triple derivations of TUHF algebras.* Linear Algebra Appl. 403, 399-408(2005).[14] Kac, V. *Vertex Algebras for Beginners.* 大学讲座丛书 10，第 2 版（AMS，1998）[15] Lu, F. *Lie triple derivations on nest algebras.* Math. Nachr. 280(8), 882-887(2018).[16] Liu, X., Guo, X. 和 Zhao, K. *Biderivations of the block Lie algebras.* Linear Algebra Appl. 538, 43-55(2018).[17] Leger, G. 和 Lucks, E. *Generalized derivations of Lie algebras.* J. Algebra 228, 165-203(2000).[18] Li, H. 和 Wang, Y. *Generalized Lie triple derivations of strictly upper triangular matrices over a commutative ring.* **32** 2 253 262 2012 J. Math. ( ), - ( ).[19] Li, H., Wang, Y. 和 Guo, W. *Generalized Lie triple derivations for gl(n,R).* Int. J. Algebra 6(4), 37- 40(2012).

[20] M¨uller, D. *Isometries of bi-invariant pseudo-Riemannian metries on Lie groups.* Geom. Dedicata. 29, 65- 96(1989).[21] Novotny, P. 和 Hrivnak, J. *On*(α,β,γ)*-derivations of Lie algebras and corresponding invariant functions.* J. Geom. Phys. 58(2), 208-217(2008). [22] Wu, Z., Asif, S. 和 Munir, M. *On the Lie triple derivtaions.* Linear Multilinear Algebra 70(21), 6084-6095(2022).[23] Wang, D. 和 Yu, X. *Biderivations and linear commuting maps on the Schrodinger-Virasoro Lie algebra.* Comm. Algebra 41(6), 2166-2173(2013).[24] Xiao, Z. 和 Wei, F. *Lie triple derivations of triangular algebras.* Linear Algebra Appl. 437(5), 1234- 1249(2012).[25] Zhang, R. 和 Zhang Y. *Generalized derivations of Lie superalgebras.* Comm. Algebra 38, 3737-3751(2010).[26] Zheng, K. 和 Zhang, Y. *On*(α,β,γ)*-derivations of Lie superalgebras.* Int. J. Geom. Methods Mod Phys. 10, 1350050, 18 pp(2013).[27] Zhou, J. *Triple derivations of perfect Lie algebras.* Comm. Algebra 41, 1647-1654(2013).[28] Zhou, J. 和 Chen, L. *Generalized derivations of n-Hom-Nambu-Lie algebras.* Adv. Math. 47(5), 687- 705(2018).[29] Zhou, J., Chen, L. 和 Ma, Y. *Triple derivations and triple homomorphisms of perfect Lie superalgebras.* Indag. Math. (N.S.) 28(2), 436-445(2017).[30] Zhou, J., Chen, L. 和 Ma, Y. *Generalized derivations of Lie triple systems.* Open Math. 14(1), 260- 271(2016).[31] Zhou, J., Chen, L. 和 Ma, Y. *Generalized derivations of Hom-Lie triple systems.* Bull. Malays. Math. Sci. Soc. 41(2), 637-656(2018).[32] Zhao, J., Chen, L. 和 Yuan, L. *Deformations and generalized derivations of Lie conformal superalgebras.*J. Math. Phys. 58(11), 111702, 17 pp(2017). [33] Zhao, J., Ma,Y. 和 Chen, L. (φ,ψ)*-derivations and*(a,b,c,d)*-derivations on Lie Triple Systems.* (2021).

[1]Department of Mathematics, Tongji University, Shanghai, 200092, PR China.

[2]School of Mathematics and Statistics, Nanjing University of Information Science and Technology, Nanjing, Jiangsu Province, 210044, PR China.

Email address: [1]luolipeng@tongji.edu.cn

Email address: [2]200036@nuist.edu.cn