从狄拉克点分岔的波导中界面模态的数学理论

*

Jiayu Qiu† Junshan Lin ‡ Peng Xie§ Hai Zhang ¶

2023年4月24日

arXiv:2304.10843v1 [math-ph] 21 Apr 2023

摘要

本文证明了这样一种波导中束缚态的存在性：该波导由两个被界面分隔的半无限周期结构组成。这两个周期结构均由具有狄拉克点的同一周期介质扰动而来，并且具有包含狄拉克点的公共带隙。这里称为界面模态的束缚态以指数形式远离界面衰减，其频率位于公共带隙内，并可视为从狄拉克点分岔而来。利用层势技术和渐近分析，我们首先刻画两个受扰周期介质的带隙开启，并推导出带隙边缘附近布洛赫模态的渐近式。通过在界面上建立含有两个半无限结构的波导的特征值问题对应的边界积分方程，并分析相关边界积分算子的特征值，我们证明了当周期介质的扰动较小时，该波导中界面模态的存在性。

1 引言

1.1 背景

声学和电磁波的局域化能够将波限制在较小的体积内，或引导波沿预定方向传播，因此在新型声学和光学器件的设计中具有重要应用 [30, 31, 33, 34]。人们已提出多种策略，以在不同场景中实现波的局域化。例如，通过改变有限区域内的介质，在周期介质中引入单个缺陷，可诱导出所谓的缺陷模，使其局域在缺陷区域附近。这类扰动 do

*J. Lin 部分获得了美国国家科学基金会 DMS-2011148 项目的资助，H. Zhang 部分获得了香港研究资助局 GRF 16304621 项目的资助。

†中国香港特别行政区九龙清水湾香港科技大学数学系。jqiuaj@connect.ust.hk。

‡美国阿拉巴马州奥本市 36849 邮编，奥本大学数学与统计系。jzl0097@auburn.edu。§中国香港特别行政区九龙清水湾香港科技大学数学系。mapengxie@ust.hk。

¶中国香港特别行政区九龙清水湾香港科技大学数学系。haizhang@ust.hk。

不会改变基础微分算子的本质谱，但会在周期介质的带隙中产生具有有限重数的孤立特征值，其对应的本征模呈指数衰减 [3, 6, 19, 20]。通常，在这类情况下，需要较大的扰动才能产生缺陷模 [21, 26, 23]。产生波局域化的另一种方式是在整个区域内对周期介质施加随机扰动。可以证明，局域波模会出现在周期介质的带隙中，这种现象称为安德森局域化 [16, 17, 18, 33]。

在本文中，我们探讨通过沿波导轴的正向和负向部分施加不同的扰动，在波导中产生波局域化的思路。具体而言，我们证明，对于这种构型，在周期介质的狄拉克点附近存在局域波模（称为束缚态或界面模态）。狄拉克点是谱带结构中的一个特殊顶点，两条色散曲线（曲面）在此以线性（锥形）方式相交。近年来，由于狄拉克点在拓扑绝缘体中发挥着重要作用，对其的研究吸引了大量关注。例如，研究已表明，狄拉克点会出现在光子石墨烯 [1, 14]以及采用蜂窝晶格的光子/声子模型 [4, 7, 28]中。一般而言，拓扑相变发生在狄拉克点处。因此，在狄拉克点附近，对界面两侧的周期算子施加适当扰动，可以产生局域于界面附近的本征模。已有研究对特征值从狄拉克点处分岔的现象进行了严格分析，涉及一维 Schr¨odinger 算子 [13], 、二维 Schr¨odinger 算子 [15, 12, 10],以及具有光滑系数的二维椭圆算子 [27], ；这些研究均采用畴壁模型，使两种周期材料在远大于结构周期的长度尺度上绝热地“连接”起来。需要注意的是，对于界面尖锐的光子/声子材料，这种绝热畴壁模型可能并不现实。在本文中，我们研究两种不同的周期介质直接拼接、从而使介质系数在界面处发生跳变的模型。我们的目标是在波导背景下证明狄拉克点附近存在界面模态，其中两种周期介质之间的界面位于波导轴原点。该界面模态从狄拉克点处分岔而来，其对应的本征频率位于包围该狄拉克点的两种周期介质的公共带隙内。此外，我们证明，对于这两种周期介质，带边处的特征空间会相互交换，这表明介质在狄拉克点处发生了拓扑相变。

我们指出，在一维系统中由狄拉克点的分岔产生的束缚态/界面模态，已在几种不同构型下得到研究。通过传递矩阵方法以及针对 [29]中斯特姆-刘维尔算子的振荡理论，界面模态特征值的存在性与稳定性得以确立。在另一项工作中，[35], 建立了具有反演对称性的一维拓扑材料的体-界面对应关系。 [11] 研究了一维错位周期介质中的缺陷模，并表明缺陷模是由狄拉克算子本征模分岔产生的。最后，有研究通过数值计算 [2]报告了由两条具有不同拓扑性质的链组成的高对比度气泡有限链中稳定界面模态的存在性。然而， [11, 29, 35] 中的解析技术仅特别适用于一维问题。

本文提出一种基于层势技术和渐近分析的新方法，用于研究波导中带隙内束缚态的存在性。该方法克服了波导中非均匀介质系数不连续所带来的困难，并解决了由分隔两种不同周期介质的尖锐界面所引发的挑战

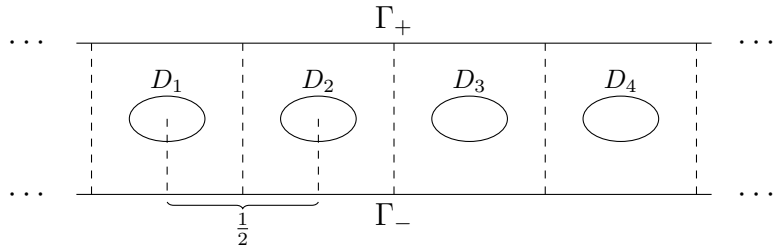

图 1：具有周期性排列障碍物的波导。

。这一数学框架可用于研究其他光子/声子系统中的界面模态或边缘模态，相关成果将另行发表。有关层势技术在由亚波长谐振器构成的光子/声子材料中的各种波传播问题上的应用综述，请参阅 [5] 。

1.2 主要结果陈述

我们从图 1 中的周期性波导开始，该波导的能带结构存在一个狄拉克点。设 $\Gamma_- = \mathbf{R} \times \{0\}$ 和 $\Gamma_+ = \mathbf{R} \times \{\frac{1}{2}\}$ 为平面 $\mathbf{R}^2$, 中波导的两条平行壁，并令 $\Gamma = \{0\} \times (0, 1/2)$。记 $\mathbb{Z}^* := \mathbb{Z} \backslash \{0\}$。此处从指标集中排除 0，以简化后续记号。一列相同的障碍物 $\{D_n\}_{n \in \mathbb{Z}^*}$ 沿 x_1 方向在波导中央周期性排列，周期为 $1/2$。此处， $D_n = z_n + D$ 满足 $z_n = (\frac{2|n|-1}{4} \operatorname{sgn}(n), 1/4)$, 其中 $n \in \mathbb{Z}^*$，而 D 是以原点为中心的开集。障碍物以外的区域记为 $\Omega := \mathbf{R} \times (0, 1/2) \backslash \cup_{n \in \mathbb{Z}^*} D_n$。我们考虑一个以频率 ω 在波导中传播的时谐标量波。波场 v 满足以下亥姆霍兹方程

$$\Delta v(x) + \omega^2 v(x) = 0 \quad \text{for } x \in \Omega. \tag{1.1}$$

我们在波导壁上施加如下诺伊曼边界条件

$$\frac{\partial v(x)}{\partial x_2} = 0 \quad \text{for } x \in \Gamma_- \bigcup \Gamma_+, \tag{1.2}$$

并在障碍物边界上施加狄利克雷边界条件

$$v(x) = 0 \quad \text{for } x \in \cup_{n \in \mathbb{Z}^*} \partial D_n. \tag{1.3}$$

我们指出，上述关于边界条件的假设并非必要。本文提出的方法也适用于其他边界条件；例如，可以在障碍物边界上施加诺伊曼边界条件。

对于上述周期为$1/2$ 的结构 Ω 的算子 $-\Delta$ 的谱，我们将作出以下假设。Floquet-Bloch理论中涉及的术语请参见第 2.1 节。

假设 1.1。*(1)* 周期-$1/2$ 结构 Ω 的第一谱带 $(p, \mu_1(p))$ 在 $p \in [-2\pi, 2\pi]$ 处是光滑的，并且可以在$\mathbf{R}$的一个复邻域内解析延拓。此外，对应于第一谱带的特征空间是一维的，由 $span\{v_1(\cdot; p)\}$ 给出。 $v_1(\cdot; p)$ 从$\mathbf{R}$ 到其复邻域的解析延拓也成立。

(2) $\mu_1(\cdot)$ 在 $p=\pi$ 处的斜率满足 $\mu_1'(\pi) = \alpha_* > 0$。

(3) $\lambda_* := \mu_1(\pi)$ 不在周期-$1/2$ 结构的点谱中。

(4) $\mu_1(p) \neq \lambda_*$ 对于 $p \neq \pi$，因此 $\lambda_* =$ 最大值$_{0\le p\le\pi}\,\mu_1(p) =$ 最小值$_{\pi\le p\le 2\pi}\,\mu_1(p)$。此外，第一谱带的最大值小于或等于第二谱带的最小值。

注 1.2. 当粒子 D 的尺寸足够小时，假设 *1.1* 中的所有陈述都可以通过渐近分析得到严格证明。

注 1.3. 一般认为，图 *1* 所示周期结构的点谱为空。然而，正如 *[25],* 指出的，其严格证明仍是一个开放问题。

注 1.4. 假设 *1.1* 中的陈述 *(4)* 与 *[15]* 中的谱无折叠假设类似（参见定义 *7.1*）。我们猜想，对于主要结果定理 *1.11* 的成立而言，该条件并非必要。这一问题将在另一篇论文中进一步研究。

下文中，我们将把上述周期-1/2 结构 Ω 视为一种周期-1 结构，其原胞为 $Y = (0,\ 1) \times (0,\ 1_2)$，相应的布里渊区为 $[0, 2\pi]$。对于周期-1 结构，每个周期由两个障碍物组成。我们用 $(\lambda_n(p)\ u_n(\cdot; p))$ $(n \ge 1)$ 表示 n 个谱带的特征对。注意，周期-1 结构的谱带结构可以通过将周期-1/2 结构的能带进行“折叠”而得到。这使得周期-1 结构的谱中、布里渊区内能够形成一个狄拉克点（$p_* = \pi,\ \lambda_*$），如下述命题所述。

命题 1.5。在（$p_*,\ \lambda_*$）处，周期-*1* 结构 Ω 的第一条与第二条色散曲线之间发生线性交叉，并具有以下性质：

(1) $\lambda_* = \lambda_1(p_*) = \lambda_2(p_*)$，且 λ_* 是重数为 *2* 的特征值。

(2) 记 $\mu_2(p) := \mu_1(2\pi - p)$ 和 $v_2(\cdot; p) := v_1(\cdot;\ 2\pi - p)$，则第一和第二谱带及其对应的特征函数可取如下形式：

$$\lambda_1(p) = \begin{cases} \mu_1(p), & p \in [0, \pi), \\ \mu_2(p), & p \in [\pi, 2\pi], \end{cases} \qquad u_1(\cdot, p) = \begin{cases} v_1(\cdot; p), & p \in [0, \pi), \\ v_2(\cdot; p), & p \in [\pi, 2\pi], \end{cases}$$

and

$$\lambda_2(p) = \begin{cases} \mu_2(p), & p \in [0, \pi), \\ \mu_1(p), & p \in [\pi, 2\pi], \end{cases} \qquad u_2(\cdot, p) = \begin{cases} v_2(\cdot; p), & p \in [0, \pi), \\ v_1(\cdot; p), & p \in [\pi, 2\pi]. \end{cases}$$

注 1.6。上文的函数 $v_1(\cdot; p)$ 表示原胞为 $(0,\ 1_2) \times (0,\ 1_2)$ 时的布洛赫特征模。具体而言，$v_1(\cdot; p)$ 满足准周期边界条件 $v_1(x_1 + 1_2, x_2; p) = e^{i\frac{p}{2}} v_1(x_1, x_2; p)$。

我们假设周期结构 Ω 具有反射对称性，这是以下假设的结果。

假设 1.7。障碍物 D 具有反射对称性，其边界 ∂D 在极坐标中参数化为 $\{(\theta, r(\theta) : 0 \le \theta \le 2\pi\}$，其中 $r(\theta) = r(\pi - \theta)$ 对于 $0 \le \theta \le \pi$。

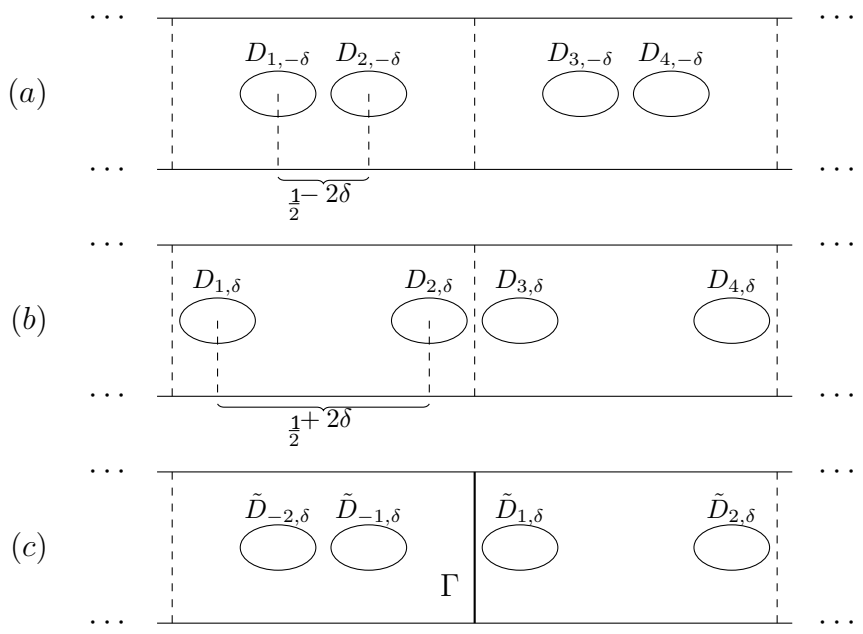

图2：带有扰动的波导：(a) 一个周期单元中每对障碍物之间的距离为 $\frac{1}{2}-2\delta$；(b) 一个周期单元中每对障碍物之间的距离为 $\frac{1}{2}+2\delta$；(c) 沿界面 Γ将(a)和(b)中的结构连接而得到的波导。

对于狄拉克点处的本征模（p_*， λ_*），我们有以下推论。

推论1.8。 在假设*1.1*和*1.7*下，狄拉克点（p_*， λ_*） 处的本征模可以选取为关于 x_1的奇函数和偶函数。更确切地说，*span*$\{u_1$（$\cdot$； π） u_2（$\cdot$； π）$\}$ =*span*$\{\phi_1, \phi_2\}$ 其中

$$\phi_1(-x_1, x_2) = -\phi_1(x_1, x_2), \quad \phi_2(-x_1, x_2) = \phi_2(x_1, x_2).$$

Let

$$\boldsymbol{\varphi}_1(x) = (\partial_n\phi_1|_{\partial D_1}(x+z_1), \partial_n\phi_1|_{\partial D_2}(x+z_2))^T \in (H^{-\frac{1}{2}}(\partial D))^2, \tag{1.4}$$
$$\boldsymbol{\varphi}_2(x) = (\partial_n\phi_2|_{\partial D_1}(x+z_1), \partial_n\phi_2|_{\partial D_2}(x+z_2))^T \in (H^{-\frac{1}{2}}(\partial D))^2, \tag{1.5}$$

then

$$\boldsymbol{\varphi}_1 = (\varphi_{ref}, \varphi), \quad \boldsymbol{\varphi}_2 = (\varphi, -\varphi_{ref}),$$

对于某个实值函数$\varphi \in H^{-\frac{1}{2}}$（$\partial D$） 以及 φ_{ref}（x_1， x_2）：$=\varphi$（$-x_1$， x_2）。

证明。 请参见附录 A。 □

为便于记号，我们将 $v_i = v_i(\cdot, \pi)$ 记为 i =1,2。

注释 1.9。 上述引理中引入的本征模 ϕ_1、ϕ_2 是 v_1 和 v_2的线性组合。我们注意到，由于奇宇称， $\phi_1|_\Gamma$ 为零。因此， $v_1|_\Gamma$ 和 $v_2|_\Gamma$ 都与 $\phi_2|_\Gamma$成正比。后文将用到这一关系。

出于技术上的原因，我们作出以下假设，该假设保证了空波导格林函数的解析性，并将在命题 3.5 的证明中使用。

假设 1.10。狄拉克能级 λ_* 远离奇异频率，使得$\lambda_* \neq$ （$2m+1$）π 对 $m \in \mathbb{N}$成立。

现在，我们沿着波导轴的负向和正向˜部分对周期结构引入扰动。设 $0 < \delta \ll 1$。障碍物 D_n 被平移至 $D_{n,\ \delta}$ ($n \in \mathbb{Z}^*$)，其质心由以下给出。

$$\tilde{z}_{n,\delta} = \begin{cases} z_n + \delta \boldsymbol{e}_1, & \text{n is even,} \\ z_n - \delta \boldsymbol{e}_1, & \text{n is odd.} \end{cases}$$

对应结构如图2(c)所示，可将其视为沿界面Γ拼接图2(a)和图2(b)中的两个半无限周期结构而成的联合结构。定义 $\tilde{\Omega}_\delta := \underline{\mathbf{R}} \times (0, 1\,2) \backslash \bigcup_n \tilde{D}_{n,\delta}$。图2(c)中波导的界面模态 u 是以下谱问题的有限能量解：

$$\begin{cases} (\Delta_x + \lambda) u(x;\lambda) = 0, & x \in \tilde{\Omega}_\delta, \\ u(x;\lambda) = 0, & x \in \cup_{n \in \mathbb{Z}^*} \partial \tilde{D}_{n,\delta}, \\ \dfrac{\partial}{\partial x_2} u(x;\lambda) = 0, & x \in \Gamma_- \bigcup \Gamma_+. \end{cases} \tag{1.6}$$

我们定义 Sobolev 空间。

$$H_b^1(\tilde{\Omega}_\delta; \Delta) := \left\{ u \in H^1(\tilde{\Omega}_\delta) : \Delta u \in L^2(\tilde{\Omega}_\delta), \frac{\partial u}{\partial x_2}|_{\Gamma_- \bigcup \Gamma_+} = 0, u|_{\partial \tilde{D}_{n,\delta}} = 0, n \in \mathbb{Z}^* \right\}.$$

那么，界面模态对应于该算子的一个特征函数。

$$\tilde{\mathcal{L}}_\delta : H_b^1(\tilde{\Omega}_\delta; \Delta) \subset L^2(\tilde{\Omega}_\delta) \to L^2(\tilde{\Omega}_\delta), \quad \phi \mapsto -\Delta \phi.$$

现在我们可以将本文的主要结果表述如下：

定理 1.11。 在假设 *1.1*、*1.7* 和 *1.10* 下，若(3.15) 中定义的 t_* 非零，则存在 $\delta_0 > 0$，使得对于 $|\delta| < \delta_0$，谱问题(1.6) 在$(u^\star, \lambda^\star) \in L^2(\tilde{\Omega}_\delta) \times \mathbf{R}$ 中取得一对特征值与特征函数，其中 $\lambda^\star$ 接近 λ_*。此外，

$$\sigma_p(\tilde{\mathcal{L}}_\delta) \bigcap \left(\lambda_* - |\frac{t_*}{\gamma_*}|\delta, \lambda_* + |\frac{t_*}{\gamma_*}|\delta \right) = \{\lambda^\star\},$$

其中 γ_* 和 t_* 定义见 (3.14)。此外，$u^\star$ 从界面 Γ 向外呈指数衰减，当 $|x_1| \to \infty$ 时。

备注 1.12。 假设 $t_* \neq 0$ 保证图*2(a)*和*2(b)*中的扰动结构在未扰动结构的狄拉克点（p_*、λ_*）附近具有公共带隙；参见推论*3.9*。当障碍物尺寸足够小时，可以利用渐近分析验证该假设。

1.3 概述

本文其余部分的组织结构如下。第2节简要回顾周期微分算子的 Floquet-布洛赫理论，并介绍周期波导结构的格林函数。我们还回顾 Gohberg-Sigal理论，该理论将用于研究谱问题（1.6）。第3节给出图2(a)(b)中周期结构在狄拉克点（p_*，λ_*）附近的布洛赫特征值和特征函数的渐近展开。特别地，我们证明扰动后狄拉克点附近会打开一个带隙。此外，对于这两个周期结构，带边处的特征空间会发生交换。这些结果见定理 3.6和推论3.9。最后，在第4节中，我们利用边界积分方程重新表述谱问题（1.6），并通过分析相关边界积分算子的特征值证明定理 1.11。

2 预备知识

2.1 周期结构的 Floquet-Bloch理论

为清晰起见，我们重点研究图 1 中的周期性波导结构。设 $\mathcal{L}: H_b^1(\Omega;\Delta) \subset L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ 为拉普拉斯算子。波导的特征值问题是求解满足以下方程的所有特征对。

$$\begin{cases} (\mathcal{L}-\lambda)u(x;\lambda)=0, \quad x\in\Omega, \\ u(x;\lambda)=0, \quad x\in \cup_{n\in\mathbb{Z}^*}\partial D_n, \\ \dfrac{\partial}{\partial x_2}u(x;\lambda)=0, \quad x\in\Gamma_-\bigcup\Gamma_+. \end{cases} \tag{2.1}$$

为研究 $\mathcal{L}$ 的谱 $\sigma(\mathcal{L})$，我们考虑一族算子 $\mathcal{L}(p)$，其中 p 位于布里渊区 $B:=[0,2\pi]$。更具体地说，$\mathcal{L}(p)$ 是限制在满足准周期边界条件的函数空间上的拉普拉斯算子：

$$\mathcal{L}(p): H_{p,b}^1(\Omega;\Delta)\subset L_{loc}^2(\Omega)\to L_{loc}^2(\Omega), \quad \phi\to-\Delta\phi.$$

在上述内容中，

$$\begin{aligned} H_{p,b}^1(\Omega;\Delta):=\Big\{u\in H_{loc}^1(\Omega):&\Delta u\in L_{loc}^2(Y), \frac{\partial u}{\partial x_2}|_{\Gamma_-\cup\Gamma_+}=0, u|_{\partial D_n}=0, n\in\mathbb{Z}^*, \\ &u(x+\boldsymbol{e}_1)=e^{ip}u(x), \frac{\partial u}{\partial x_1}(x+\boldsymbol{e}_1)=e^{ip}\frac{\partial u}{\partial x_1}(x)\Big\}. \end{aligned}$$

对于每个 $p\in B$，自伴算子的谱理论（参见 [9, 32]）表明，$\sigma(\mathcal{L}(p))$ 由一组离散的实特征值组成

$$0<\lambda_1(p)\le\lambda_2(p)\le\cdots\le\lambda_n(p)\le\cdots.$$

我们用 $u_n(x;p)$ 表示与特征值 $\lambda_n(p)$ 对应的特征函数，它也称为准动量为 p 时的第 n 个布洛赫模态。关于色散关系 $\lambda_n(p)$，有如下标准结果（参见 [25]）：

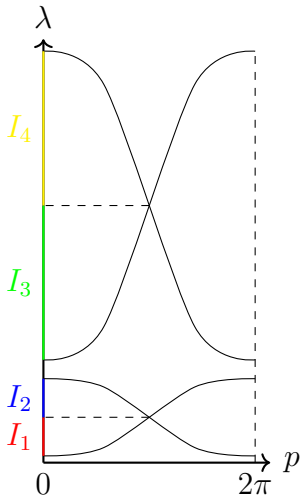

图 3：能带结构示例：图中描绘了谱的前四条能带。注意，第二条与第三条能带之间存在一个谱隙。

命题 2.1. *(1)* $\lambda_n(p)$ $(n \geq 1)$ 关于 $p \in B$ 满足 *Lipschitz* 连续性；*(2)* $\lambda_n(p)$ $(n \geq 1)$ 可周期延拓至 $p \in \mathbf{R}$，周期为 2π，即 $\lambda_n(p+2\pi) = \lambda_j(p)$。此外，$\lambda_n(p) = \lambda_j(-p)$。

对于每个整数 n，令

$$\lambda_n^- = \min_{p\in\mathcal{B}} \lambda_n(p), \quad \lambda_n^+ = \max_{p\in\mathcal{B}} \lambda_n(p).$$

Floquet-Bloch理论指出，谱 $\sigma(\mathcal{L})$ 由下式给出

$$\sigma(\mathcal{L}) = \bigcup_{p\in\mathcal{B}} \sigma(\mathcal{L}(p)) = \bigcup_{n\geq 1} I_n, \quad I_n := \left[\lambda_n^-, \lambda_n^+\right].$$

如果 $\lambda_n^+ < \lambda_{n+1}^-$，我们称第 n 条与第 $n+1$ 条能带之间出现了带隙；示例见图 3。

2.2 周期结构的格林函数及解的表示

我们介绍波导问题 (2.1) 在 $\lambda = \lambda_*$ 处的格林函数 $G(x, y, \lambda)$ 的一些性质。该函数定义为以下方程的唯一物理解：

$$\begin{cases} (\Delta_x + \lambda)G(x, y; \lambda_*) = \tilde{\delta}(x - y), \quad x, y \in \Omega, \\ G_\delta(x, y; \lambda_*) = 0, \quad x \in \cup_{n\in\mathbb{Z}^*} \partial D_n, \\ \dfrac{\partial}{\partial x_2} G(x, y; \lambda_*) = 0, \quad x \in \Gamma_- \bigcup \Gamma_+. \end{cases}$$

˜此处 $\delta(\cdot)$ 表示狄拉克δ函数。我们紧密遵循 [22] 中的讨论。利用极限吸收原理可以证明格林函数的存在性和唯一性，该原理为波传播问题 (2.1) 给出了一个物理解，作为 the

对应的带吸收模型的唯一有限能量解在吸收趋于零时的极限。更确切地说，波导问题 (2.1) 的格林函数可以定义为波导问题 (2.1) 的格林函数 $G(x,\ y;\lambda+i\varepsilon)$ 在 λ 被 $\lambda+i\varepsilon$ 替代且 $\varepsilon\to 0$ 时的极限。

我们应用 Floquet-Bloch理论推导 $G(x,\ y,\ \lambda_*)$ 在无穷远处的渐近行为。回顾一下，$(\lambda_n(p)\ u_n(x;p))$ $n\ \geq\ 1$ 是与周期结构相关联的布洛赫特征对。首先，利用 Floquet 变换，可得格林函数的如下谱表示:

$$G(x,y;\lambda_*)=\lim_{\varepsilon\to 0^+}G(x,y;\lambda_*+i\varepsilon)\ \ =\frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_0^{2\pi}\frac{u_1(x;p)\overline{u_1(y;p)}}{\lambda_*-\lambda_1(p)+i\varepsilon}dp+\frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_0^{2\pi}\frac{u_2(x;p)\overline{u_2(y;p)}}{\lambda_*-\lambda_2(p)+i\varepsilon}dp$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{u_n(x;p)\overline{u_n(y;p)}}{\lambda_*-\lambda_n(p)}dp.$$

注意，由命题 1.5 可知,

$$\int_0^{2\pi}\frac{u_1(x;p)\overline{u_1(y;p)}}{\lambda_*-\lambda_1(p)+i\varepsilon}dp+\int_0^{2\pi}\frac{u_2(x;p)\overline{u_2(y;p)}}{\lambda_*-\lambda_2(p)+i\varepsilon}dp=\int_0^{2\pi}\frac{v_1(x;p)\overline{v_1(y;p)}}{\lambda_*-\mu_1(p)+i\varepsilon}dp+\int_0^{2\pi}\frac{v_2(x;p)\overline{v_2(y;p)}}{\lambda_*-\mu_2(p)+i\varepsilon}dp.$$

令 $\varepsilon\to 0$ 趋于极限可得（参见 [22] 中的注释 8）：

$$\begin{aligned}G(x,y;\lambda_*)=&-\frac{i}{2}\frac{v_1(x)\overline{v_1(y)}}{\alpha_*}+\frac{1}{2\pi}p.v.\int_0^{2\pi}\frac{v_1(x;p)\overline{v_1(y;p)}}{\lambda_*-\mu_1(p)}dp\\&-\frac{i}{2}\frac{v_2(x)\overline{v_2(y)}}{\alpha_*}+\frac{1}{2\pi}p.v.\int_0^{2\pi}\frac{v_2(x;p)\overline{v_2(y;p)}}{\lambda_*-\mu_2(p)}dp\\&+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{n\geq 3}\frac{u_n(x;p)\overline{u_n(y;p)}}{\lambda_*-\lambda_n(p)}dp.\end{aligned}\tag{2.2}$$

此外，可以证明，对于固定的 y， G 具有如下分解（参见 [22] 中的注释 9）：

$$G(x,y;\lambda_*)=G_0^+(x,y;\lambda_*)-i\frac{v_1(x)\overline{v_1(y)}}{\alpha_*},\quad x_1\to\infty,\tag{2.3}$$

and

$$G(x,y;\lambda_*)=G_0^-(x,y;\lambda_*)-i\frac{v_2(x)\overline{v_2(y)}}{\alpha_*},\quad x_1\to-\infty.\tag{2.4}$$

其中， $G_0^+(x,\ y;\lambda)$ $(G_0^-(x,\ y;\lambda))$ 随 $x_1\to+\infty$ $(x_1\to-\infty)$ 指数衰减。我们指出，(2.3)-(2.4) 给出了格林函数 G 的所谓辐射条件，其中 v_1 和 v_2 分别为右行和左行传播模态。

我们将在接下来的两个引理中给出 v_1 和 v_2 的一些性质。

引理 2.2. 存在某个 $\tau\in\mathbb{C}$，使得 $|\tau|=1$ 并且

$$v_2(x_1,x_2)=\tau v_1(-x_1,x_2).$$

证明。 根据备注 1.6 和假设 1.7，不难验证 $v_1(-x_1,x_2)$ 也是一个布洛赫模态，且满足与 v_2 相同的准周期边界条件。最后，回想假设 1.1 中所述特征空间的维数为一，即可完成证明。

□

Let

$$\mathcal{V}(\lambda) := \big\{u \in H^1_{loc}(\Omega) : (\Delta+\lambda)u(x) = 0 \text{ in } \Omega, \frac{\partial u}{\partial x_2}\big|_{\Gamma_-\cup\Gamma_+} = 0, u\big|_{\partial D_n} = 0, n \in \mathbb{Z}^*\big\}.$$

于是 $v_1, v_2 \in \mathcal{V}(\lambda_*)$。此外，我们有以下命题。

引理 2.3。 右传播模态 v_1 和 v_2 左传播模态满足

$$\int_\Gamma \frac{\partial v_1}{\partial x_1}\overline{v_1}dx_2 = \frac{i}{2}\mu_1'(\pi) = \frac{i}{2}\alpha_*, \quad \int_\Gamma \frac{\partial v_2}{\partial x_1}\overline{v_2}dx_2 = -\frac{i}{2}\alpha_*. \tag{2.5}$$

此外，对于每个当 $x_1 \to \infty$ 时呈指数衰减的 $u \in \mathcal{V}(\lambda_*)$，均有

$$\int_\Gamma \frac{\partial v_1}{\partial x_1}\overline{u}dx_2 = \int_\Gamma \frac{\partial \overline{u}}{\partial x_1}v_1dx_2 = \int_\Gamma \frac{\partial v_2}{\partial x_1}\overline{u}dx_2 = \int_\Gamma \frac{\partial \overline{u}}{\partial x_1}v_2dx_2 = 0. \tag{2.6}$$

证明。 我们考虑定义在 $\mathcal{V}(\lambda)$ 上的以下半双线性型:

$$q(v,w;x) = \int_{\Gamma_x}\big(\frac{\partial v}{\partial x_1}\overline{w} - \frac{\partial \overline{w}}{\partial x_1}v\big)dx_2, \quad \Gamma_x := \{x_2 : (x,x_2) \in \Omega\}, \quad v,w \in \mathcal{V}(\lambda).$$

已证明在 [22] 中， $q(v, w; x)$与 $x \in \mathbf{R}$无关，并且,

$$q(v_n, v_m) = i\mu_n'(\pi)\delta_{nm}, \quad n,m = 1,2.$$

利用引理 2.2，我们有

$$0 = q(v_2,v_1) = \int_\Gamma \big(\frac{\partial v_2}{\partial x_1}\overline{v_1} - \frac{\partial \overline{v_1}}{\partial x_1}v_2\big)dx_2 = -\tau\int_\Gamma \big(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\overline{v_1} + \frac{\partial \overline{v_1}}{\partial x_1}v_1\big)dx_2.$$

结合等式 $q(v_1, v_1) = i\mu_1'(\pi)$（其中 $n = 1, 2$），可得 $\int_\Gamma \frac{\partial v_1}{\partial x_1}v_1dx_2 = \frac{i}{2}\mu_1'(\pi)$。类似地，我们有 $\int_\Gamma \frac{\partial v_2}{\partial x_1}v_2dx_2 = -\frac{i}{2}\alpha_*$。接下来，由于 $q(v_i, u; x)\ (i = 1, 2)$ 与 x 无关，因此对于正整数 N,

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma \big(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\overline{u} - \frac{\partial \overline{u}}{\partial x_1}v_1\big)dx_2 &= q(v_1,u) = \int_{\Gamma_N}\big(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\overline{u} - \frac{\partial \overline{u}}{\partial x_1}v_1\big)dx_2,\\
\int_\Gamma \big(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\overline{u} + \frac{\partial \overline{u}}{\partial x_1}v_1\big)dx_2 &= -\frac{1}{\tau}q(v_2,u) = -\frac{1}{\tau}\int_{\Gamma_N}\big(\frac{\partial v_2}{\partial x_1}\overline{u} - \frac{\partial \overline{u}}{\partial x_1}v_2\big)dx_2.
\end{aligned}$$

由于 u 呈指数衰减,

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma \big(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\overline{u} - \frac{\partial \overline{u}}{\partial x_1}v_1\big)dx_2 &= \lim_{N\to+\infty}\int_{\Gamma_N}\big(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\overline{u} - \frac{\partial \overline{u}}{\partial x_1}v_1\big)dx_2 = 0,\\
\int_\Gamma \big(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\overline{u} + \frac{\partial \overline{u}}{\partial x_1}v_1\big)dx_2 &= -\frac{1}{\tau}\lim_{N\to+\infty}\int_{\Gamma_N}\big(\frac{\partial v_2}{\partial x_1}\overline{u} - \frac{\partial \overline{u}}{\partial x_1}v_2\big)dx_2 = 0.
\end{aligned}$$

将这两个恒等式相加，我们得出 $\int_\Gamma \frac{\partial v_1}{\partial x_1}udx_2 = \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial x_1}v_1dx_2 = 0$。按照相同的论证过程，可得 $\int_\Gamma \frac{\partial v_2}{\partial x_1}udx_2 = \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial x_1}v_2dx_2 = 0$。 □

接下来，我们将介绍格林函数 $G(x,\ y;\lambda_*)$ 的一些有用性质。

引理 2.4. 对于 $x, y \in \Omega$ 和 $x \neq y$，式(2.2) 中的格林函数满足

$$G(x,y;\lambda_*) = G(y,x;\lambda_*). \tag{2.7}$$

另一方面，当 $y \in \Gamma := \{0\} \times (0, 1\,2)$ 时，有

$$G((x_1,x_2),y;\lambda_*) = G((-x_1,x_2),y;\lambda_*), \quad \forall (x_1,x_2) \in \Omega. \tag{2.8}$$

证明. 我们仅证明 (2.7)，而 (2.8) 的证明类似。对于 $x \neq y$，定义 $u(z) := G(z,x;\ \lambda_*)$ 和 $w(z) := G(z,y;\ \lambda_*)$。令 $\Omega_{-N,N} := \Omega \bigcap \left((-N,N) \times (0, 1\,2)\right)$，其中 N 为正整数。于是，当 N 充分大时，$x, y \in \Omega_N$。分部积分可得

$$\begin{aligned} w(x) - u(y) &= \int_{\Omega_{-N,N}} (\Delta + \lambda_*)u(z)w(z) - (\Delta + \lambda_*)w(z)u(z)dz \\ &= \int_{\Gamma_N} \left(\frac{\partial u}{\partial z_1} w - \frac{\partial w}{\partial z_1} u \right) dz_2 - \int_{\Gamma_{-N}} \left(\frac{\partial u}{\partial z_1} w - \frac{\partial w}{\partial z_1} u \right) dz_2. \end{aligned} \tag{2.9}$$

由 (2.3) 和引理 2.3，当 $N \to +\infty$ 时，我们有

$$\lim_{N\to+\infty} \int_{\Gamma_N} \frac{\partial u}{\partial z_1} w - \frac{\partial w}{\partial z_1} u dz_2 = -\frac{1}{\alpha_*^2} \left(\overline{v_1(x) \cdot v_1(y)} \int_\Gamma \frac{\partial v_1}{\partial z_1} v_1 dz_2 - \overline{v_1(x) \cdot v_1(y)} \int_\Gamma \frac{\partial v_1}{\partial z_1} v_1 dz_2 \right) = 0.$$

类似地,

$$\lim_{N\to+\infty} \int_{\Gamma_{-N}} \frac{\partial u}{\partial z_1} w - \frac{\partial w}{\partial z_1} u dz_2 = -\frac{1}{\alpha_*^2} \left(\overline{v_2(x) \cdot v_2(y)} \int_\Gamma \frac{\partial v_2}{\partial z_1} v_2 dz_2 - \overline{v_2(x) \cdot v_2(y)} \int_\Gamma \frac{\partial v_2}{\partial z_1} v_2 dz_2 \right) = 0.$$

Thus $w(x) = u(y)$，这意味着根据 w 和 u 的定义，$G(y,x;\lambda_*) = G(x,y;\ \lambda_*)$. □

最后，作为格林函数的一项应用，我们给出半无限结构 $\Omega_+ := \{x = (x_1,x_2) :\ x \in \Omega$ $x_1 > 0\}$ 中亥姆霍兹方程解的表示公式。记

$$\mathcal{V}^+(\lambda) := \left\{ u \in H^1_{loc}(\Omega^+) : (\Delta + \lambda)u(x) = 0 \text{ in } \Omega^+, \frac{\partial u}{\partial x_2}\Big|_{\Gamma_- \bigcup \Gamma_+} = 0, u\big|_{\partial D_n} = 0, n \geq 1 \right\}.$$

命题 2.5。 若 $u \in \mathcal{V}^+(\lambda_*)$ 满足右行条件，使得

$u(x) = c_1 v_1(x) + u_0^+(x)$ 对某个 $c_1 \in \mathbb{C}$ 成立，并且 $u_0^+(x)$ 当 $x_1 \to +\infty$ 时呈指数衰减，

then

$$u(x) = 2 \int_\Gamma G(x,y;\lambda_*) \frac{\partial u}{\partial x_1}(0^+, y_2) dy_2, \quad x \in \Omega^+. \tag{2.10}$$

证明。 设 $u \in \mathcal{V}^+(\lambda_*)$。定义 u 的如下偶延拓:

$$\tilde{u}(x_1,x_2) = \begin{cases} u(x_1,x_2), & x_1 \geq 0, \\ u(-x_1,x_2), & x_1 < 0. \end{cases} \tag{2.11}$$

令 $\Omega_{x,\ y}:=\Omega\bigcap((x,\ \ y)\times(0,\ -1\,2)$。对于 $y=(y_1,\ \ y_2)\in\Omega^+$ 以及正整数 N，通过分部积分可得

$$\begin{aligned}\tilde{u}(y)&=\int_{\Omega_{0,N}}(\Delta_x+\lambda_*)G(x,y;\lambda_*)\tilde{u}(x)-(\Delta_x+\lambda_*)\tilde{u}(x)G(x,y;\lambda_*)dx\\&=\int_{\Gamma_N}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}G(x,y;\lambda_*)\tilde{u}(x)-\frac{\partial}{\partial x_1}\tilde{u}(x)G(x,y;\lambda_*)\right)dx_2\\&\quad-\int_{\Gamma}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}G(x,y;\lambda_*)\tilde{u}(0^+,x_2)-\frac{\partial}{\partial x_1}\tilde{u}(0^+,x_2)G(x,y;\lambda_*)\right)dx_2,\end{aligned}$$

其中 $\tilde{u}(0^+,\ \ x_2)=u(x)\big|_{\Gamma^\circ}$。根据 $u(\cdot)$ 的右行条件，我们有

$$\begin{aligned}&\lim_{N\to+\infty}\int_{\Gamma_N}\Big(\frac{\partial}{\partial x_1}G(x,y;\lambda_*)\tilde{u}(x)-\frac{\partial}{\partial x_1}\tilde{u}(x)G(x,y;\lambda_*)\Big)dx_2\\&\qquad=-\frac{ic_1}{\alpha_*}\overline{v_1(y)}\lim_{N\to+\infty}\int_{\Gamma_N}\left(v_1(x)\frac{\partial}{\partial x_1}v_1(x)-v_1(x)\frac{\partial}{\partial x_1}v_1(x)\right)dx_2=0.\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}\tilde{u}(y)&=-\int_{\Gamma}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}G(x,y;\lambda_*)\tilde{u}(0^+,x_2)-\frac{\partial}{\partial x_1}\tilde{u}(0^+,x_2)G(x,y;\lambda_*)\right)dx_2\\&=-\int_{\Gamma}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}G(x,y;\lambda_*)u(0^+,x_2)-\frac{\partial}{\partial x_1}u(0^+,x_2)G(x,y;\lambda_*)\right)dx_2.\end{aligned}\tag{2.12}$$

类似地，在 $\Omega_{-N,\ 0}$ 上进行分部积分，得到

$$\begin{aligned}0&=\int_{\Omega_{-N,0}}(\Delta_x+\lambda_*)G(x,y;\lambda_*)\tilde{u}(x)-(\Delta_x+\lambda_*)\tilde{u}(x)G(x,y;\lambda_*)dx\\&=-\int_{\Gamma_{-N}}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}G(x,y;\lambda_*)\tilde{u}(x)-\frac{\partial}{\partial x_1}\tilde{u}(x)G(x,y;\lambda_*)\right)dx_2\\&\quad+\int_{\Gamma}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}G(x,y;\lambda_*)\tilde{u}(0^-,x_2)-\frac{\partial}{\partial x_1}\tilde{u}(0^-,x_2)G(x,y;\lambda_*)\right)dx_2\end{aligned}$$

令 $N\to\infty$，我们有

$$\begin{aligned}&\lim_{N\to+\infty}\int_{\Gamma_{-N}}\Big(\frac{\partial}{\partial x_1}G(x,y;\lambda_*)\tilde{u}(x)-\frac{\partial}{\partial x_1}\tilde{u}(x)G(x,y;\lambda_*)\Big)dx_2\\&\qquad=-\frac{ic_1}{\alpha_*}\overline{v_2(y)}\lim_{N\to+\infty}\int_{\Gamma_{-N}}\left(v_1(-x_1,x_2)\frac{\partial v_2}{\partial x_1}(x)+v_2(x)\frac{\partial v_1}{\partial x_1}(-x_1,x_2)\right)dx_2\\&\qquad=-\frac{ic_1}{\tau\alpha_*}\overline{v_2(y)}\lim_{N\to+\infty}\int_{\Gamma_{-N}}\left(v_2(x)\frac{\partial v_2}{\partial x_1}(x)-v_2(x)\frac{\partial v_2}{\partial x_1}(x)\right)dx_2=0,\end{aligned}$$

其中，第一个等式应用了 (2.4)，第二个等式应用了引理 2.2。因此，我们得到

$$0=\int_{\Gamma}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}G(x,y;\lambda_*)\tilde{u}(0^-,x_2)-\frac{\partial}{\partial x_1}\tilde{u}(0^-,x_2)G(x,y;\lambda_*)\right)dx_2.$$

注意，$\tilde{u}(0^-,\ \ x_2)=u(0^+,\ \ x_2)$ 且 $\frac{\partial}{\partial x_1}\tilde{u}(0^-,\ \ x_2)=-\frac{\partial}{\partial x_1}u(0^+,\ \ x_2)$。因此，

$$0=\int_{\Gamma}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}G(x,y;\lambda_*)u(0^+,x_2)+\frac{\partial}{\partial x_1}u(0^+,x_2)G(x,y;\lambda_*)\right)dx_2.$$

Th上述等式结合（2.12）给出了表示公式（2.10） . □

2.3 该（The） 受扰周期结构的格林函数 s

我们为图2(a)(b)中的受扰周期结构引入格林函数。令 $G_\delta(x,\ y;\ \lambda)$为与图2(b)中的受扰波导 Ω_δ 相关的格林函数，该函数通过极限吸收原理得到（另见第2.2节）。更确切地说，$G_\delta(x,\ y;\ \lambda)$是满足以下方程的唯一物理解：

$$\begin{cases}(\Delta_x+\lambda)G_\delta(x,y;\lambda)=\tilde{\delta}(x-y), & x,y\in\Omega_\delta,\\ G_\delta(x,y;\lambda)=0, & x\in\cup_{n\in\mathbb{Z}^*}\partial D_{n,\delta},\\ \dfrac{\partial}{\partial x_2}G_\delta(x,y;\lambda)=0, & x\in\Gamma_-\bigcup\Gamma_+.\end{cases}\tag{2.13}$$

˜此处，$\delta(\cdot)$仍表示狄拉克δ函数。我们特别关注当 λ 位于周期结构的谱带隙中时的格林函数。对于这样的 λ，不存在传播布洛赫模态，因此 $G_\delta(x,\ y;\ \lambda)$在无穷远处呈指数衰减。这给出了 $G_\delta(x,\ y;\ \lambda)$的所谓辐射条件。类似地，我们定义图2(a)所示周期结构的格林函数 $G_{-\delta}(x,\ y;\ \lambda)$。

我们将 $\{(\lambda_{j,\delta}(p)\,u_{j,\delta}(x;p))\}_{j\geq1}$ 记为受扰周期结构 Ω_δ 在每个 $p\in B=[0,2\pi]$下的布洛赫特征对。则 $G_{\pm\delta}$ 在带隙中的谱表示为：

$$G_{\pm\delta}(x,y;\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{u_{n,\pm\delta}(x;p)\overline{u_{n,\pm\delta}(y;p)}}{\lambda-\lambda_{n,\pm\delta}(p)}dp.\tag{2.14}$$

最后，我们 pr esent 两个帕塞瓦尔型恒等式，使用布洛赫特征对 $(\lambda_{j,\delta}(p)\,u_{j,\delta}(x;p))$:

引理2.6。对于由 $u(x)=\int_0^{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}a_{n,\delta}(u;p)u_{n,\delta}(x;p)dp$ 给出的 $u\in H^1(\Omega_\delta)$，

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega_\delta)}=\int_0^{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}|a_{n,\delta}(u;p)|^2dp,\tag{2.15}$$

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega_\delta)}=\int_0^{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(1+\lambda_{n,\delta}(p))|a_{n,\delta}(u;p)|^2dp.\tag{2.16}$$

证明。设 $C_\delta:=Y\cap\Omega=(0,1)\times(0,1-2)\backslash\overline{D_1\cup D_2}$。则由 Floquet 变换的帕塞瓦尔恒等式 [25] 可得（2.15）。另一方面，（2.16）由恒等式

$$\int_{C_\delta}\nabla u_{n,\delta}(x;p)\cdot\overline{\nabla u_{m,\delta}(x;p)}dx=\lambda_{n,\delta}(p)\int_{C_\delta}u_{n,\delta}(x;p)\overline{u_{m,\delta}(x;p)}dx=\delta_{nm}\lambda_{n,\delta}(p).$$

□

2.4 Gohberg–Sigal 理论

我们简要介绍 Gohberg-Sigal 理论，尤其是广义 Rouch´e 定理的解析版本，该定理用于求解积分算子的特征值。关于这一主题的详细论述，请参阅 [5] 的第1.5章。

设 X 和 Y 为两个巴拿赫空间。若算子 $A \in \mathcal{B}(X,Y)$ 的子空间 $\mathrm{Ker}A$ 是有限维的，且子空间 $\mathrm{Ran}A$ 在 Y 中是闭的并具有有限余维，则称该算子为 **Fredholm** 算子。Fredholm 算子 A 的指标定义为

$$\mathrm{ind}(A) := \dim \mathrm{Ker}A - \mathrm{codim}\ \mathrm{Ran}A.$$

以下命题展示了指标的稳定性。

命题 2.7。若 $A:\ X \to Y$ 是 *Fredholm* 算子且 $K:\ X \to Y$ 是紧的，则$A+K$ 是 *Fredholm* 算子，并且 $ind(A+K) = ind(A)$。

命题 2.8。如果 $A:\ X \to Y$ 是 *Fredholm* 算子，则存在 $\epsilon > 0$，使得对于$B \in \mathcal{B}$（X、Y）以及 $\|B\| < \epsilon$，$A+B$ 是 *Fredholm* 算子，并且

$$ind(A+B) = ind(A).$$

令 $\mathfrak{U}(z_0)$ 表示所有取值于 $\mathcal{B}(X,Y)$ 的算子值函数的集合，这些函数在 z_0 的某个邻域内全纯，但在 z_0 处可能存在例外。若存在一个取值于 X 的向量值函数 $\phi(z)$，使得 z_0 被称为 $A(z) \in \mathfrak{U}(z_0)$ 的**特征值**，当且仅当

1. $\phi(z)$ 在 z_0 处全纯，且 $\phi(z_0) \neq 0$,
2. $A(z)\phi(z)$ 在 z_0 处全纯，并在该点处为零。

这里，$\phi(z)$ 称为与特征值 z_0 相关的 $A(z)$ 的**根函数**，而 $\phi(z_0)$ 称为**特征向量**。根据此定义，存在一个整数 $m(\phi) \geq 1$ 以及一个向量值函数 $\psi(z) \in Y$，其在 z_0 处全纯，使得

$$A(z)\phi(z) = (z-z_0)^{m(\phi)}\psi(z), \quad \psi(z_0) \neq 0.$$

数 $m(\phi)$ 称为根函数 $\phi(z)$ 的**重数**。对于 $\phi_0 \in \mathrm{Ker}A(z_0)$，$\phi_0$ 的**秩**（记为 $\mathrm{rank}(\phi_0)$）定义为所有满足 $\phi(z_0) = \phi_0$ 的根函数 $\phi(z)$ 的重数中的最大值。

设 $n = \dim \mathrm{Ker}A(z_0) < +\infty$，且 $\mathrm{Ker}A(z_0)$ 中所有向量的秩均为有限值。特征向量组 $\phi_0^j (j = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 称为与 z_0 相关的 $A(z)$ 的**特征向量规范系统**，如果对于 $j = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$，$\mathrm{rank}(\phi_0^j)$ 等于 $\mathrm{Ker}A(z_0)$ 中由向量 ϕ_0^1、$\cdots$、ϕ_0^{n-1} 的线性张成空间的直和补中的所有特征向量的秩的最大值。我们称

$$N(A(z_0)) := \sum_{j=1}^{n} \mathrm{rank}(\phi_0^j)$$

称为特征值 z_0 的**零空间重数**。假设 $A^{-1}(z)$ 存在，并且在 z_0 的某个邻域内全纯，但在 z_0 处可能除外。那么数目

$$M(A(z_0)) := N(A(z_0)) - N(A^{-1}(z_0))$$

称为 z_0 的**重数**。

现在，设 V 是一个边界为可求长曲线 ∂V 的单连通有界区域。对于解析的算子值函数（或如 [5] 中所述的亚纯算子值函数）$A(z)$，有

关于 ∂V正规，当且仅当：1)$A(z)$ 对所有 $z \in V$ 都是 Fredholm 算子；2)$A^{-1}(z)$ 在 V 中存在，除有限个点外；3)$A(z)$ 对 $z \in \partial V$ 连续。对于这样的函数 $A(z)$，总重数 $\mathcal{M}(A(z); \partial V)$ 计数 $A(z)$ 在 V 中的特征值个数（按其重数计算）。也就是说，

$$\mathcal{M}(A(z); \partial V) := \sum_{i=1}^{\sigma} M(A(z_i)),$$

其中，$z_i (i = 1、2、\cdots、\sigma)$ 是所有位于 V 中的 $A(z)$ 的特征值。广义 Rouch´e 定理表述如下：

定理 2.9 （广义 Rouch´e 定理）。设 $A（z）$ 和 $B（z）$ 是关于 ∂V 正规的两个解析算子值函数，且 $B（z）$ 在 ∂V 上连续，并满足条件

$$\|A^{-1}(z)B(z)\|_{\mathcal{B}(X,Y)} < 1, \quad z \in \partial V.$$

则 $A（z）+B（z）$ 关于 ∂V 也是正规的，并且

$$\mathcal{M}(A(z); \partial V) = \mathcal{M}(A(z) + B(z); \partial V).$$

3 狄拉克点处的带隙开启 （p_*、 λ_*）

本节通过扰动图 1 中的周期性波导，研究狄拉克点（p_*、 λ_*）处的带隙开启。图 2(b) 中的扰动结构是通过将图 1 中的障碍物 D_n 移动到 $D_{n、\delta}$ 而得到的，其中每个 $n \in \mathbb{Z}^*$ 的质心为

$$z_{n,\delta} = \begin{cases} z_n - \delta \boldsymbol{e}_1, & n \text{ is odd and positive, or, } n \text{ is even and negative,} \\ z_n + \delta \boldsymbol{e}_1, & n \text{ is even and positive, or, } n \text{ is odd and negative.} \end{cases}$$

将扰动后的区域记为 $\Omega_\delta := \mathbf{R} \times (0,1) \backslash \bigcup_{n\in\mathbb{Z}^*} D_{n,\ \delta}$。相应的偏微分算子为

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}_\delta : H_b^1(\Omega_\delta) \subset L^2(\Omega_\delta) \to L^2(\Omega_\delta), \quad \phi \mapsto -\Delta\phi, \\ &H_b^1(\Omega_\delta; \Delta) := \left\{ u \in H^1(\Omega_\delta) : \Delta u \in L^2(\Omega), \frac{\partial}{\partial x_2} u|_{\Gamma_- \bigcup \Gamma_+} = 0, u|_{\partial D_{n,\delta}} = 0, n \in \mathbb{Z}^* \right\}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

算子 $\mathcal{L}_\delta$ 的能带结构可通过对每个 $p \in [0, 2\pi]$求解以下特征值问题得到：

$$\begin{cases} (\mathcal{L}_\delta - \lambda)u(x; p, \lambda) = 0, \quad x \in \Omega_\delta, \\ u(x; p, \lambda) = 0, \quad x \in \cup_{n\in\mathbb{Z}^*} \partial D_{n,\delta}, \\ \dfrac{\partial}{\partial x_2} u(x; p, \lambda) = 0, \quad x \in \Gamma_- \bigcup \Gamma_+, \\ u(x + \boldsymbol{e}_1) = e^{ip} u(x), \quad \dfrac{\partial u}{\partial x_1}(x + \boldsymbol{e}_1) = e^{ip} \dfrac{\partial u}{\partial x_1}(x). \end{cases} \tag{3.2}$$

类似地，将上面的 δ 替换为 $-\delta$，即可得到图2(a)所示扰动结构的特征值问题。相应的偏微分算子记为 $\mathcal{L}_{-\delta}$。

我们的目标是证明，在算子 $\mathcal{L}$ 的狄拉克点（p_*, λ_*）附近， $\sigma(\mathcal{L}_\delta)$ 和 $\sigma(\mathcal{L}_{-\delta})$ 存在一个公共带隙。此外，我们推导了狄拉克点附近色散关系及其对应的 Floquet-Bloch 本征模的渐近展开。特别地，我们证明，对于 $\mathcal{L}_\delta$ 和 $\mathcal{L}_{-\delta}$，带边处的特征空间发生了交换。

3.1 特征值问题的边界积分方程表述

我们给出特征值问题 (3.2) 的边界积分方程表述。首先考虑 $\delta = 0$ 的情形，这对应于未扰动周期结构。对于每个 $p \in [0, 2\pi]$，令 $G^e(x, y; p, \lambda)$ 为满足以下方程的空波导准周期格林函数:

$$\begin{cases} (\Delta_x + \lambda)G^e(x, y; p, \lambda) = \tilde{\delta}(x - y), \quad x, y \in \mathbf{R} \times (0, \frac{1}{2}), \\ \dfrac{\partial}{\partial x_2} G^e(x, y; p, \lambda) = 0, \quad x \in \Gamma_- \bigcup \Gamma_+, \\ G^e(x + \boldsymbol{e}_1, y; p, \lambda) = e^{ip} G^e(x, y; p, \lambda) \text{ for each } y, \end{cases}$$

˜其中， $\delta(\cdot)$ 是狄拉克 δ 函数。 $G^e(x, y; p, \lambda)$ 可显式表示为以下傅里叶级数:

$$\begin{aligned} G^e(x, y; p, \lambda) =& \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{e^{\mathrm{i}p_m(x_1 - y_1)}}{\lambda - p_m^2 - (2n\pi)^2} \left(e^{\mathrm{i}2n\pi(x_2 - y_2)} + e^{\mathrm{i}2n\pi(x_2 + y_2)}\right) \\ =& \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{e^{\mathrm{i}p_m(x_1 - y_1)}}{\sqrt{p_m^2 - \lambda}\left(e^{-\sqrt{p_m^2 - \lambda}} - e^{\sqrt{p_m^2 - \lambda}}\right)} \Big(e^{\sqrt{p_m^2 - \lambda}(1 - 2|x_2 - y_2|)} \\ & + e^{-\sqrt{p_m^2 - \lambda}(1 - 2|x_2 - y_2|)} + e^{\sqrt{p_m^2 - \lambda}(1 - 2(x_2 + y_2))} + e^{-\sqrt{p_m^2 - \lambda}(1 - 2(x_2 + y_2))}\Big), \end{aligned} \tag{3.3}$$

其中 $p_m = p + 2m\pi$。我们还可以将 $G^e(x, y; p, \lambda)$ 展开为以下弗洛凯级数:

$$G^e(x, y; p, \lambda) = \sum_{n\geq 1} \frac{u_n^e(x; p)\overline{u_n^e(y; p)}}{\lambda - \lambda_n^e(p)}, \tag{3.4}$$

其中， $\{\lambda_n^e(p)\ u_n^e(x;\ p)\}_{n\geq 1}$ 是空波导中的布洛赫特征对。

利用格林函数 G^e，我们可以将 (3.2) 的特征函数表示为 as

$$u(x; p, \lambda) = \int_{\partial D} G^e(x, y + z_1; p, \lambda)\varphi_1(y)d\sigma(y) + \int_{\partial D} G^e(x, y + z_2; p, \lambda)\varphi_2(y)d\sigma(y), \tag{3.5}$$

其中 $\varphi_i \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial D)$ $(i = 1, 2)$和 $d\sigma(y)$ 是边界曲面 ∂D 的面积元。这里及下文中， $H^{-\frac{1}{2}}(\partial D)$ 和 $H^{\frac{1}{2}}(\partial D)$ 是定义在闭曲线∂D上的标准索伯列夫空间。通过在障碍物边界 ∂D_1 和 ∂D_2上施加狄利克雷边界条件，我们得到以下齐次系统:

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\partial D} G^e(x + z_1, y + z_1; p, \lambda)\varphi_1(y)d\sigma(y) + \int_{\partial D} G^e(x + z_1, y + z_2; p, \lambda)\varphi_2(y)d\sigma(y) = 0, \quad x \in \partial D, \\ \displaystyle\int_{\partial D} G^e(x + z_2, y + z_1; p, \lambda)\varphi_1(y)d\sigma(y) + \int_{\partial D} G^e(x + z_2, y + z_2; p, \lambda)\varphi_2(y)d\sigma(y) = 0, \quad x \in \partial D. \end{cases}$$

注意，对于 $t \in \mathbf{R}$， $G^e(x + t\boldsymbol{e}_1, y + t\boldsymbol{e}_1;\ p, \lambda) = G^e(x, y;\ p, \lambda)$，且 $z_2 - z_1 = \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1$。上述系统等价于

$$T(p,\lambda)\boldsymbol{\varphi} := \begin{pmatrix} T_{11}(p,\lambda) & T_{12}(p,\lambda) \\ T_{21}(p,\lambda) & T_{22}(p,\lambda) \end{pmatrix} \boldsymbol{\varphi} = 0, \tag{3.6}$$

其中 $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1\ \ \varphi_2)^T$ 以及算子 $T_{ij}(p,\ \lambda)$'由下式定义

$$\begin{aligned} T_{11}(p,\lambda) = T_{22}(p,\lambda) &: \phi(x) \mapsto \int_{\partial D} G^e(x, y; p, \lambda)\phi(y)d\sigma(y), \\ T_{12}(p,\lambda) &: \phi(x) \mapsto \int_{\partial D} G^e(x, y + \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1; p, \lambda)\phi(y)d\sigma(y), \\ T_{21}(p,\lambda) &: \phi(x) \mapsto \int_{\partial D} G^e(x + \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1, y; p, \lambda)\phi(y)d\sigma(y). \end{aligned}$$

因此，算子 $\mathcal{L}(p)$ 的谱可以由 $T(p,\ \lambda)$ 的特征值获得。此外，通过求解 (3.6)，利用层势 (3.5) 可以恢复相应的 Bloch特征函数。我们注意到，利用标准的层势理论，可以证明对于 $1 \le i,\ j \le 2$，$T_{ij}(p,\ \lambda) \in \mathcal{B}\left(H^{-\frac{1}{2}}(\partial D)\ H^{\frac{1}{2}}_{-}(\partial D)\right)$。

对于 $\delta \neq 0$，采用类似的步骤，特征值问题 (3.2) 可以利用以下边界积分方程表述:

$$T_\delta(p,\lambda)\boldsymbol{\varphi}_\delta := \begin{pmatrix} T_{11}(p,\lambda) & T_{12,\delta}(p,\lambda) \\ T_{21,\delta}(p,\lambda) & T_{22}(p,\lambda) \end{pmatrix} \boldsymbol{\varphi}_\delta = 0, \tag{3.7}$$

其中算子 $T_{12,\ \delta}(p,\ \lambda)$ 和 $T_{12,\ \delta}(p,\ \lambda)$ 定义为

$$\begin{cases} T_{12,\delta} : \phi(x) \mapsto \int_{\partial D} G^e(x, y + (\frac{1}{2} + 2\delta)\boldsymbol{e}_1; p, \lambda)\phi(y)d\sigma(y), \\ T_{21,\delta} : \phi(x) \mapsto \int_{\partial D} G^e(x + (\frac{1}{2} - 2\delta)\boldsymbol{e}_1, y; p, \lambda)\phi(y)d\sigma(y). \end{cases}$$

引理 3.1。 算子 $T(p_*, \lambda_*)$: $H^{-\frac{1}{2}}(\partial D) \times H^{-\frac{1}{2}}(\partial D) \to H^{\frac{1}{2}}(\partial D) \times H^{\frac{1}{2}}(\partial D)$ 是一个 ***Fredholm*** 算子，且指标为零。此外，$\boldsymbol{Ker}\ T(p_*, \lambda_*) = \boldsymbol{span}\{\boldsymbol{\varphi_1}, \boldsymbol{\varphi_2}\}$，其中 $\boldsymbol{\varphi_1}$ 和 $\boldsymbol{\varphi_2}$ 由推论*1.8*定义。

证明。 下文将证明，$T(p_*,\ \lambda_*)$ 可以分解为一个具有有界逆算子的算子与一个紧算子之和；因此，它是一个指标为零的 Fredholm 算子。

为了构建这样的分解，我们首先将每个 $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1,\ \varphi_2) \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial D) \times H^{-\frac{1}{2}}(\partial D)$ 与 $\tilde{\varphi} \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial D_1 \cup \partial D_2)$ 通过

$$\tilde{\varphi}(x)|_{\partial D_1} = \varphi_1(x - z_1), \quad \tilde{\varphi}(x)|_{\partial D_2} = \varphi_2(x - z_2).$$

注意，对于 $\boldsymbol{\psi},\ \boldsymbol{\varphi} \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial D) \times H^{-\frac{1}{2}}(\partial D)$,

$$
\begin{aligned}
&\langle \overline{\boldsymbol{\psi}}, T(p_*,\lambda_*)\boldsymbol{\varphi}\rangle \\
&= \int_{\partial D\times\partial D} \left(G^e(x,y;p_*,\lambda_*)\varphi_1(y) + G^e(x,y+\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1;p_*,\lambda_*)\varphi_2(y)\right)\overline{\psi_1(x)}d\sigma(y)d\sigma(x) \\
&\quad + \int_{\partial D\times\partial D} \left(G^e(x+\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1,y;p_*,\lambda_*)\varphi_1(y) + G^e(x+\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1,y+\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1;p_*,\lambda_*)\varphi_2(y)\right)\overline{\psi_2(x)}d\sigma(y)d\sigma(x) \\
&= \int_{\partial D\times\partial D} \Big(G^e(x+z_1,y+z_1;p_*,\lambda_*)\varphi_1(y) + G^e(x+z_1,y+z_2;p_*,\lambda_*)\varphi_2(y)\Big)\overline{\psi_1(x)}d\sigma(y)d\sigma(x) \\
&\quad + \int_{\partial D\times\partial D} \Big(G^e(x+z_2,y+z_1;p_*,\lambda_*)\varphi_1(y) + G^e(x+z_2,y+z_2;p_*,\lambda_*)\varphi_2(y)\Big)\overline{\psi_2(x)}d\sigma(y)d\sigma(x) \\
&= \int_{\partial D_1}\int_{\partial D_1} G^e(x,y;p_*,\lambda_*)\tilde{\varphi}(y)\overline{\tilde{\psi}(x)}d\sigma(y)d\sigma(x) + \int_{\partial D_1}\int_{\partial D_2} G^e(x,y;p_*,\lambda_*)\tilde{\varphi}(y)\overline{\tilde{\psi}(x)}d\sigma(y)d\sigma(x) \\
&\quad + \int_{\partial D_2}\int_{\partial D_1} G^e(x,y;p_*,\lambda_*)\tilde{\varphi}(y)\overline{\tilde{\psi}(x)}d\sigma(y)d\sigma(x) + \int_{\partial D_2}\int_{\partial D_2} G^e(x,y;p_*,\lambda_*)\tilde{\varphi}(y)\overline{\tilde{\psi}(x)}d\sigma(y)d\sigma(x) \\
&= \int_{\partial D_1\cup\partial D_2}\int_{\partial D_1\cup\partial D_2} G^e(x,y;p_*,\lambda_*)\tilde{\varphi}(y)\overline{\tilde{\psi}(x)}d\sigma(y)d\sigma(x).
\end{aligned}
$$

~~记 $c_n(\tilde{\varphi}) = \int_{\partial D_1\cup\partial D_2}\varphi(x)u_n(x;\ p_*)d\sigma(x)$。由 (3.4)，我们有~~

$$
\langle \overline{\boldsymbol{\psi}}, T(p_*,\lambda_*)\boldsymbol{\varphi}\rangle = a(\tilde{\varphi},\tilde{\psi}) := \sum_{n\geq 1}\frac{c_n(\tilde{\varphi})\cdot\overline{c_n(\tilde{\psi})}}{\lambda_* - \lambda_n^e(p_*)}.
$$

我们进一步引入以下两个半双线性型。

$$
\begin{aligned}
a^{(0)}(\tilde{\varphi},\tilde{\psi}) &:= \sum_{\{n:\lambda_n^e(p_*)>\lambda_*\}}\frac{c_n(\tilde{\varphi})\cdot\overline{c_n(\tilde{\psi})}}{\lambda_* - \lambda_n^e(p_*)} - \sum_{\{n:\lambda_n^e(p_*)<\lambda_*\}} c_n(\tilde{\varphi})\cdot\overline{c_n(\tilde{\psi})}, \\
a^{(1)}(\tilde{\varphi},\tilde{\psi}) &:= \sum_{\{n:\lambda_n^e(p_*)<\lambda_*\}}\frac{c_n(\tilde{\varphi})\cdot\overline{c_n(\tilde{\psi})}}{\lambda_* - \lambda_n^e(p_*)} + \sum_{\{n:\lambda_n^e(p_*)<\lambda_*\}} c_n(\tilde{\varphi})\cdot\overline{c_n(\tilde{\psi})},
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

及其相伴算子 $\tilde{T}^{(0)}\ \tilde{T}^{(1)} \in \mathcal{B}(H^{-\frac{1}{2}}(\partial D_1\cup\partial D_2)\ H^{\frac{1}{2}}(\partial D_1\cup\partial D_2))$。因此，我们有 $a(\tilde{\varphi},\tilde{\psi}) = a^{(0)}(\tilde{\varphi},\tilde{\psi}) + a^{(1)}(\tilde{\varphi},\tilde{\psi})$；由此可知，只需证明 $\tilde{T}^{(0)}$ 是可逆的，且 $\tilde{T}^{(1)}$ 是紧算子，即可得出 $T(p_*,\lambda_*)$ 是一个零指标的 Fredholm 算子。由于 $\{n:\ \lambda_n^e(p_*) < \lambda_*\}$ 是一个有限集，因此显然 $\tilde{T}^{(1)}$ 具有有限秩，进而是紧算子。所以，我们只需证明 $\tilde{T}^{(0)}$的可逆性。为此，我们将通过以下两个步骤证明半双线性型 $a^{(0)}$ 是强制的且对称的。

步骤1。我们证明以下不等式

$$
|a^{(0)}(\tilde{\varphi},\tilde{\varphi})| \gtrsim \|\tilde{\varphi}\|^2, \tag{3.9}
$$

这保证了 $\tilde{T}^{(0)}$ 具有单射性，且其值域是闭的。首先，(3.8) 表明

$$
|a^{(0)}(\tilde{\varphi},\tilde{\varphi})| = \sum_{\{n:\lambda_n^e(p_*)>\lambda_*\}}\frac{|c_n(\tilde{\varphi})|^2}{|\lambda_* - \lambda_n^e(p_*)|} + \sum_{\{n:\lambda_n^e(p_*)<\lambda_*\}}|c_n(\tilde{\varphi})|^2 \gtrsim \sum_{n\geq 1}\frac{|c_n(\tilde{\varphi})|^2}{|\lambda_* - \lambda_n^e(p_*)|}. \tag{3.10}
$$

接下来，令 Tr： $H^1_{p_*}(Y) \to H^{\frac{1}{2}}(\partial D_1 \cup \partial D_2)$ 为迹算子（$H^1_{p_*}(Y)$ 由满足 x_1- 方向上的 p_*-准周期边界条件的 $H^1(Y)$ 中的函数构成），并令

$$E \quad H^{\frac{1}{2}}\text{-}\partial D_1 \cup \partial D_2 \ \to H^1_{p_*} \ Y \qquad \circ E =: ( ) ( ) \text{ 为}$$
$$id|_{H^{\frac{1}{2}}\text{-}\partial D_1 \cup \partial D_2} \qquad \{u^e_n \ x \ p_* \} \qquad H^1_{p_*} \ Y \qquad E\phi$$

满足 Tr $()$ 的 Sobolev 延拓算子。由于 (;) 构成 ( ) 的一组正交基，因此对于任意 $\phi \in H^{\frac{1}{2}}(\partial D_1 \cup \partial D_2)$, 我们可以将其展开为 $(E\phi)(x) \equiv \sum_{n\geq 1} a_n u^e_n(x; p_*)$。类似于 (2.16)，以下恒等式成立：

$$\|E\phi\|^2_{H^1(Y)} = \sum_{n\geq 1}(1+\lambda^e_n(p_*))|a_n|^2.$$

因此,

$$\begin{aligned}\left|\langle\tilde{\varphi},\overline{\phi}\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial D_1\cup\partial D_2)\times H^{\frac{1}{2}}(\partial D_1\cup\partial D_2)}\right| &= \left|\langle\tilde{\varphi},\overline{\mathrm{Tr}(E\phi)}\rangle\right| = \left|\sum_{n\geq 1}\overline{a_n}\cdot c_n(\tilde{\varphi})\right| \\ &\leq (\sum_{n\geq 1}|\lambda_*-\lambda^e_n(p_*)||a_n|^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(\sum_{n\geq 1}\frac{|c_n(\tilde{\varphi})|^2}{|\lambda_*-\lambda^e_n(p_*)|})^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

由于 $\lim_{n\to+\infty}\lambda^e_n(p_*) = +\infty$, $\sum_{n\geq 1}|\lambda_*-\lambda^e_n(p_*)||a_n|^2 \lesssim \sum_{n\geq 1}(1+\lambda^e_n(p_*))|a_n|^2$。因此我们有

$$\begin{aligned}\left|\langle\tilde{\varphi},\overline{\phi}\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial D_1\cup\partial D_2)\times H^{\frac{1}{2}}(\partial D_1\cup\partial D_2)}\right| &\lesssim (\sum_{n\geq 1}(1+\lambda^e_n(p_*))|a_n|^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(\sum_{n\geq 1}\frac{|c_n(\tilde{\varphi})|^2}{|\lambda_*-\lambda^e_n(p_*)|})^{\frac{1}{2}} \\ &= \|E\phi\|_{H^1(Y)}\left(\sum_{n\geq 1}\frac{|c_n(\tilde{\varphi})|^2}{|\lambda_*-\lambda^e_n(p_*)|}\right)^{\frac{1}{2}} \lesssim \|\phi\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial D_1\cup\partial D_2)}\left(\sum_{n\geq 1}\frac{|c_n(\tilde{\varphi})|^2}{|\lambda_*-\lambda^e_n(p_*)|}\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

因此

$$\|\tilde{\varphi}\| \leq (\sum_{n\geq 1}\frac{|c_n(\tilde{\varphi})|^2}{|\lambda_*-\lambda^e_n(p_*)|})^{\frac{1}{2}}. \tag{3.11}$$

于是，所需的估计 (3.9) 直接由 (3.10) 和 (3.11) 得出。

步骤2。我们证明 $a^{(0)}(\cdot,\ \cdot)$ 是对称的。然后，步骤1中证明的单射性意味着 Ran $T^{(0)}$ 稠密。事实上，根据（3.8）中 $a^{(0)}(\cdot,\ \cdot)$ 的定义，可得

$$\begin{aligned}a^{(0)}(\tilde{\varphi},\tilde{\psi}) &:= \sum_{\{n:\lambda^e_n(p_*)>\lambda_*\}}\frac{c_n(\tilde{\varphi})\cdot\overline{c_n(\tilde{\psi})}}{\lambda_*-\lambda^e_n(p_*)} - \sum_{\{n:\lambda^e_n(p_*)<\lambda_*\}} c_n(\tilde{\varphi})\cdot\overline{c_n(\tilde{\psi})} \\ &= \sum_{\{n:\lambda^e_n(p_*)>\lambda_*\}}\overline{\frac{c_n(\tilde{\varphi})\cdot c_n(\tilde{\psi})}{\lambda_*-\lambda^e_n(p_*)}} - \sum_{\{n:\lambda^e_n(p_*)<\lambda_*\}}\overline{c_n(\tilde{\varphi})\cdot c_n(\tilde{\psi})} \\ &= \overline{a^{(0)}(\tilde{\psi},\tilde{\varphi})}.\end{aligned} \tag{3.12}$$

由步骤1和步骤2可知， $\tilde{T}_{(0)}$ 是双射。根据开映射定理， $\tilde{T}^{(0)}$也可逆，且其逆算子有界。因此， $T(p_*,\lambda_*)$ 是一个零指标的 Fredholm 算子。

最后，很明显，任何 $\boldsymbol{\varphi} \in$ Ker $T(p_*,\lambda_*)$ 都对应于 $\partial D_1 \cup \partial D_2$ 狄拉克点处 (p_*,λ_*) Bloch特征函数的 Neumann迹。由于如命题 1.5 所述，狄拉克点处的特征空间是二维的，推论1.8表明 Ker $T(p_*,\lambda_*)$ =span$\{\boldsymbol{\varphi_1},\boldsymbol{\varphi_2}\}$。

□

3.2 带隙开启与渐近展开

我们使用上一小节提出的积分方程表述，研究 $\mathcal{L}$ 的受扰周期结构在狄拉克点 (p_*, λ_*) 处的带隙开启。首先注意到，式 (3.3) 中的拟周期格林函数 $G^e(x, y; p, \lambda)$ 关于 λ 是解析的；对于 λ 接近 λ_* 的情形（根据假设 1.10），有以下性质：

引理 3.2. 对于 $|p - p_*|, |\lambda - \lambda_*|, |\delta| \ll 1$, $T_\delta(p, \lambda)$ 在 p, λ 中是解析的。此外，存在 T_p, T_λ, $S \in \mathcal{B}\left(H^{-\frac{1}{2}}(\partial D) \times H^{-\frac{1}{2}}(\partial D)\ H^{\frac{1}{2}}(\partial D) \times H^{\frac{1}{2}}(\partial D)\right)$，使得当 $|p - p_*|, |\lambda - \lambda_*|, |\delta| \ll 1$ 时，有

$$T_\delta(p, \lambda) = T(p_*, \lambda_*) + (p - p_*)T_p + (\lambda - \lambda_*)T_\lambda + \delta S + \mathcal{O}((p - p_*)^2, (\lambda - \lambda_*)^2, \delta^2). \tag{3.13}$$

上述算子 T_p, T_λ 和 S 的性质见下文命题 3.3 和 3.5，其中 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示 $H^{-\frac{1}{2}}(\partial D) \times H^{-\frac{1}{2}}(\partial D)$ 与 $H^{\frac{1}{2}}(\partial D) \times H^{\frac{1}{2}}(\partial D)$ 之间的对偶对。

命题 3.3。设 $\boldsymbol{\varphi}_1$、$\boldsymbol{\varphi}_2$ 为狄拉克点处的边界势$(p_*、\ \lambda_*)$，定义见(1.4)-(1.5)。则存在实数 γ_*、θ_*，使得当 i、$j = 1$、2时，

$$\begin{aligned} &\langle \boldsymbol{\varphi_j}, T_\lambda \boldsymbol{\varphi_i} \rangle = \gamma_* \delta_{ij}, \\ &\langle \boldsymbol{\varphi_j}, T_p \boldsymbol{\varphi_i} \rangle = \sqrt{-1}\theta_* (1 - \delta_{ij})(-1)^{i-1}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

命题 3.4. 设 θ_* 和 γ_* 由式 *(3.14)* 定义， α_* 由假设 *1.1* 定义，则有

$$\alpha_* = \left| \frac{\theta_*}{\gamma_*} \right|.$$

命题 3.5。令 $\boldsymbol{\varphi}_1$ 和 $\boldsymbol{\varphi}_2$ 与命题 *3.3* 中的相同。则存在 $t_* \in \mathbf{R}$使得

$$\langle \boldsymbol{\varphi_j}, S \boldsymbol{\varphi_i} \rangle = t_* (-1)^{i-1} \delta_{ij}. \tag{3.15}$$

命题 3.3 和命题 3.5 的证明包含一些技术性计算，分别见附录 B 和附录 C。另一方面，命题 3.4 是下面定理 3.6 的推论，我们将在后文给出其证明。现在，我们准备陈述本节的主要结果，即狄拉克点附近受扰色散关系和本征模的渐近行为。

定理 3.6 (狄拉克点附近的色散关系与本征模**)**。在假设 *1.1*、*1.7*、*1.10* 以及 t_* 在(3.15) 中定义且非零的假设下，存在 $\delta_0 > 0$，使得对于所有 $|\delta| < \delta_0$ 以及满足 $|p - p_*| \ll 1$的准动量 $\boldsymbol{p}$，存在两支色散曲线$(p,\lambda_{2,\delta}(p))$ 和$(p,\lambda_{1,\delta}(p))$ ，它们是(3.7)的特征值。此外，它们具有以下展开：

$$\begin{aligned} \lambda_{2,\delta}(p) &= \lambda_* + \frac{1}{|\gamma_*|}\sqrt{\delta^2 t_*^2 + \theta_*^2 (p - p_*)^2}\,(1 + \mathcal{O}(p - p_*, \delta)), \\ \lambda_{1,\delta}(p) &= \lambda_* - \frac{1}{|\gamma_*|}\sqrt{\delta^2 t_*^2 + \theta_*^2 (p - p_*)^2}\,(1 + \mathcal{O}(p - p_*, \delta)). \end{aligned} \tag{3.16}$$

此外，当 $\delta > 0$ 并进一步假设 γ_*、θ_*、$t_* > 0$ 时，(3.2) 中定义的 *Floquet-Bloch*本征模具有关于 $|p - p_*| \ll 1$ 的渐近展开：

$$\begin{aligned} u_{2,\delta}(x;p) &:= u_\delta(x;p,\lambda_{2,\delta}(p)) = \frac{\sqrt{-1}\theta_*(p-p_*)}{\delta t_* + \sqrt{\delta^2 t_*^2 + \theta_*^2(p-p_*)^2}}\phi_1(x) + \phi_2(x) + \mathcal{O}(p-p_*,\delta), \\ u_{1,\delta}(x;p) &:= u_\delta(x;p,\lambda_{1,\delta}(p)) = \phi_1(x) + \frac{\sqrt{-1}\theta_*(p-p_*)}{\delta t_* + \sqrt{\delta^2 t_*^2 + \theta_*^2(p-p_*)^2}}\phi_2(x) + \mathcal{O}(p-p_*,\delta), \end{aligned} \tag{3.17}$$

其中，ϕ_1 和 ϕ_2 是 $\mathcal{L}$在狄拉克点（π、λ_*）处的本征模。同样地，

$$\begin{aligned} \lambda_{2,-\delta}(p) &= \lambda_* + \frac{1}{|\gamma_*|}\sqrt{\delta^2 t_*^2 + \theta_*^2(p-p_*)^2}\,(1 + \mathcal{O}(p-p_*,\delta)), \\ \lambda_{1,-\delta}(p) &= \lambda_* - \frac{1}{|\gamma_*|}\sqrt{\delta^2 t_*^2 + \theta_*^2(p-p_*)^2}\,(1 + \mathcal{O}(p-p_*,\delta)), \end{aligned} \tag{3.18}$$

and

$$\begin{aligned} u_{2,-\delta}(x;p) &:= u_{-\delta}(x;p,\lambda_{2,-\delta}(p)) = \phi_1(x) - \frac{\sqrt{-1}\theta_*(p-p_*)}{\delta t_* + \sqrt{\delta^2 t_*^2 + \theta_*^2(p-p_*)^2}}\phi_2(x) + \mathcal{O}(p-p_*,\delta), \\ u_{1,-\delta}(x;p) &:= u_{-\delta}(x;p,\lambda_{1,-\delta}(p)) = -\frac{\sqrt{-1}\theta_*(p-p_*)}{\delta t_* + \sqrt{\delta^2 t_*^2 + \theta_*^2(p-p_*)^2}}\phi_1(x) + \phi_2(x) + \mathcal{O}(p-p_*,\delta). \end{aligned} \tag{3.19}$$

注 3.7。 在上述定理中，作出 γ_*、$\theta_* > 0$ 的假设是为了便于阐述。即使没有该假设，仍可使用相同的论证推导出 *Floquet-Bloch*本征值和本征模的类似渐近展开，见（3.16）-（3.19）。

注 3.8。 由（3.16）可观察到，当 $t_* \neq 0$时，扰动后的色散曲线在局部呈抛物线形。此外，定理 *3.6* 意味着

$$\begin{aligned} &\lim_{\delta\to 0+}\lambda_{2,\delta}(p_*) = \lim_{\delta\to 0+}\lambda_{1,\delta}(p_*) = \lim_{\delta\to 0+}\lambda_{2,-\delta}(p_*) = \lim_{\delta\to 0+}\lambda_{1,-\delta}(p_*) = \lambda_*, \\ &\lim_{\delta\to 0+}u_{2,\delta}(x,p_*) = \lim_{\delta\to 0+}u_{1,-\delta}(x,p_*) = \phi_2(x), \\ &\lim_{\delta\to 0+}u_{1,\delta}(x,p_*) = \lim_{\delta\to 0+}u_{2,-\delta}(x,p_*) = \phi_1(x). \end{aligned}$$

换言之，引入扰动后，狄拉克点处的简并被解除；此类示意图见图*4*。非常重要的是，对于 $\delta > 0$和 $\delta < 0$这两种扰动，尽管狄拉克点附近的特征值相同，但相应的本征空间发生了交换。这表明，当 $\delta = 0$时，周期结构在狄拉克点处发生了拓扑相变。

以下 推论说明 $\sigma(\mathcal{L}_\delta)$ 和 $\sigma(\mathcal{L}_{-\delta}$ 的公共带隙存在):

推论3.9 ($\sigma(\mathcal{L}_\delta)$ 和 $\sigma(\mathcal{L}_{-\delta})$ 的公共带隙)。 令 $\delta > 0$ 和 $0 < c < 1$ 为常数。我们沿用定理 *3.6* 中的所有记号和假设，并定义实区间

$$I_\delta = (E_{1,\delta}, E_{2,\delta}) := (\lambda_* - c\delta|\beta_*|, \lambda_* + c\delta|\beta_*|), \tag{3.20}$$

其中 $\beta_* = \frac{t_*}{\gamma_*}$。那么存在 $\delta_0 > 0$，使得对于所有 $0 < \delta < \delta_0$，存在空洞 ds

$$I_\delta \bigcap \sigma(\mathcal{L}_\delta) = I_\delta \bigcap \sigma(\mathcal{L}_{-\delta}) = \emptyset.$$

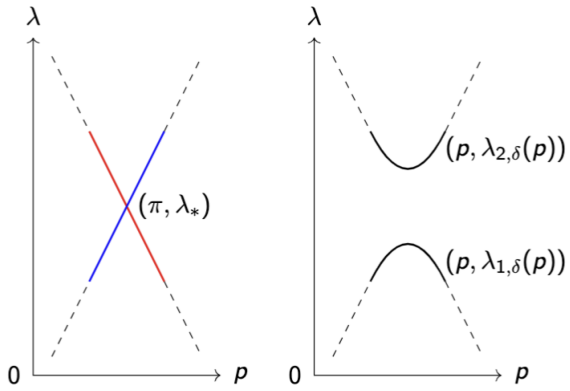

图4：狄拉克点附近简并的解除。

证明。 我们只考虑 $\mathcal{L}_\delta$，而 $\mathcal{L}_{-\delta}$ 的证明完全相同。由定理 3.6，对于任意$c \in (0,1)$，存在 $\delta_0 > 0$，使得对所有 $0 < \delta < \delta_0$，色散关系 $\lambda_{1,\delta}(p)$ 和$\lambda_{2,\delta}(p)$ 满足

$$\max_{|p-p_*|\le\delta} \lambda_{1,\delta}(p) \le \lambda_* - c\delta\beta_*, \qquad \min_{|p-p_*|\le\delta} \lambda_{2,\delta}(p) \ge \lambda_* + c\delta\beta_*.$$

因此，为了证明 I_δ 确实是一个带隙，只需证明对于 $p \in \mathcal{B} \bigcap \{p : \ |p-\pi| \ge \delta\}$、$\lambda_{1,\ \delta}(p)\lambda_{2,\ \delta}(p)$ $\notin I_\delta$，且 $\lambda_{n,\ \delta}(p) \notin I_\delta$ 对所有 $n \ge 3$ 和 $p \in \mathcal{B}$均成立。事实上，这由假设 1.1 可知：只有第一条和第二条色散曲线在狄拉克点（p_*，λ_*）处相切，并且当 $p \ne p_*$时，它们远离 $\lambda = \lambda_*$。□

3.3 命题3.4和定理3.6的证明

定理 *3.6* 的证明。 为便于表述，我们假设命题 3.3 和 3.5 中定义的常数 θ_*, γ_* 和 t_* 均为正。请回顾备注 3.7，这一假设并非必要。

我们首先证明，对于每个 $p$near π 且 δ 足够小的情形，算子 $T_\delta(\lambda; p) := T_\delta(p, \lambda)$ 有两个特征值（按重数计），并满足 $|\lambda - \lambda_*| \ll 1$。为此，只需考虑 $p = \pi$，而 $p \ne \pi$ 的情形可类似处理。

注意， $T(\lambda;\ p_*)$ 的特征值对应于问题 (3.2) 在 $p = p_*$ 和 $\delta = 0$ 处的布洛赫特征值。在复平面上存在 $\lambda = \lambda_*$ 的一个小邻域 $U(\lambda_*)$，使得 $T(\lambda;\ p_*)$ 在 $\overline{U(\lambda_*)}$ 内只有一个特征值 λ_*，且其重数为二。 $T(\lambda;\ p_*)$ 关于变量 λ 的解析性（见引理 3.2 ）意味着 $T(\lambda;\ p_*)$ 关于 $\partial U(\lambda_*)$ 是正规的， $T_\delta(\lambda;\ p_*)$ 也如此。另一方面，由引理 3.2 可知，当 δ 足够小时，对于 $\lambda \in \partial U(\lambda_*)$，有 $\|T(\lambda;\ p_*)^{-1}(T(\lambda;\ p_*) - T_\delta(\lambda;\ p_*))\| < 1$。于是定理 2.9 表明， $T_\delta(\lambda; p_*)$ 在 $\lambda \in U(\lambda_*)$ 时取得两个特征值（按重数计）。

接下来，我们通过微扰论证，计算 $T_\delta(\lambda; p)$ 的特征值及其对应特征向量的渐近展开。

步骤1。我们首先建立进行扰动的框架。在狄拉克点 (p_*, λ_*) 附近，我们将准动量写作

$$p = p_* + p^{(1)}, \tag{3.21}$$

其中 $|p^{(1)}| \ll 1$。我们寻求形式如下的 (3.7) 的解

$$\begin{aligned} &\lambda(p_* + p^{(1)}) = \lambda_* + \lambda^{(1)}, \\ &\boldsymbol{\varphi}(x;\ p_* + p^{(1)}) = \boldsymbol{\varphi}^{(0)} + \boldsymbol{\varphi}^{(1)}, \qquad \boldsymbol{\varphi}^{(0)} = a\boldsymbol{\varphi_1} + b\boldsymbol{\varphi_2} \in \text{核 } T(p_*,\ \lambda_*) \qquad \boldsymbol{\varphi}^{(1)} \in (\text{核 } T(p_*,\ \lambda_*))^{\perp}, \end{aligned} \tag{3.22}$$

其中 $|\lambda^{(1)}| \ll 1$，且 $(\text{Ker } T(p_*,\ \lambda_*))^{\perp}$ 是 $\text{Ker } T(p_*,\ \lambda_*)$ 在 $H^{-\frac{1}{2}}(\partial D) \times H^{-\frac{1}{2}}(\partial D)$ 中的正交补。这里 $\boldsymbol{\varphi_1}$ 和 $\boldsymbol{\varphi_2}$ 在推论1.8中定义。

代入 式 (3.13)、(3.21) 和 (3.22) 到式 (3.7) 中，我们得到关于 $\boldsymbol{\varphi}^{(1}$ 的下列方程 $)$:

$$\begin{aligned} T(p_*, \lambda_*)\boldsymbol{\varphi}^{(1)} = &- \left(p^{(1)}T_p + \lambda^{(1)}T_\lambda + \delta S + \mathcal{O}((p^{(1)})^2, (\lambda^{(1)})^2, \delta^2)\right)\boldsymbol{\varphi}^{(0)} \\ &- \left(p^{(1)}T_p + \lambda^{(1)}T_\lambda + \delta S + \mathcal{O}((p^{(1)})^2, (\lambda^{(1)})^2, \delta^2)\right)\boldsymbol{\varphi}^{(1)}. \end{aligned} \tag{3.23}$$

步骤2。我们通过以下 Lyapunov-Schmidt 约化论证求解 (3.23)。由于 $\text{Ran } (T(p_*,\ \lambda_*))$ 在 $H^{\frac{1}{2}}(\partial D) \times H^{\frac{1}{2}}(\partial D)$ 中是闭的，我们引入正交投影 $Q: H^{\frac{1}{2}}(\partial D) \times H^{\frac{1}{2}}(\partial D) \to$ 值域 $(T(p_*,\ \lambda_*))$。对 (3.23) 应用 Q 后，我们得到

$$\begin{aligned} T(p_*, \lambda_*)\boldsymbol{\varphi}^{(1)} = &- Q\left(p^{(1)}T_p + \lambda^{(1)}T_\lambda + \delta S + \mathcal{O}((p^{(1)})^2, (\lambda^{(1)})^2, \delta^2)\right)\boldsymbol{\varphi}^{(0)} \\ &- Q\left(p^{(1)}T_p + \lambda^{(1)}T_\lambda + \delta S + \mathcal{O}((p^{(1)})^2, (\lambda^{(1)})^2, \delta^2)\right)\boldsymbol{\varphi}^{(1)}. \end{aligned} \tag{3.24}$$

由引理 3.1，$T^{-1}(p_*, \lambda_*) \in \mathcal{B}(\{\text{值域}\}\ (T(p_*, \lambda_*)), (T(p_*, \lambda_*))^{\perp})$。于是 (3.24) 可改写为

$$(I + A)\boldsymbol{\varphi}^{(1)} = -A\boldsymbol{\varphi}^{(0)}, \tag{3.25}$$

其中映射 A 定义为

$$\boldsymbol{f} \mapsto A\boldsymbol{f} := T^{-1}(p_*, \lambda_*)Q\left(p^{(1)}T_p + \lambda^{(1)}T_\lambda + \delta S + \mathcal{O}((p^{(1)})^2, (\lambda^{(1)})^2, \delta^2)\right)\boldsymbol{f}.$$

因此，对于足够小的 $p^{(1)}, \lambda^{(1)}, \delta$，存在 $(I + A)^{-1}$，这意味着 (3.25) 有唯一解:

$$\boldsymbol{\varphi}^{(1)} = -(I + A)^{-1}A\boldsymbol{\varphi}^{(0)}. \tag{3.26}$$

利用 (3.22)，我们可以将 (3.26) 改写为

$$\boldsymbol{\varphi}^{(1)} = \boldsymbol{\varphi}^{(1)}(x; p^{(1)}, \lambda^{(1)}, \delta) = \boldsymbol{g_1}(x; p^{(1)}, \lambda^{(1)}, \delta)a + \boldsymbol{g_1}(x; p^{(1)}, \lambda^{(1)}, \delta)b,$$

其中，映射 $(p^{(1)}, \lambda^{(1)}, \delta) \mapsto \boldsymbol{g_i}(x;\ p^{(1)}, \lambda^{(1)}, \delta)$ $(i = 1,2)$ 是从 $(0, 0, 0)$ 的某个邻域到 $(\text{Ker } T(p_*, \lambda_*))^{\perp}$ 的光滑映射，并满足以下估计:

$$\left\|\boldsymbol{g_i}(x; p^{(1)}, \lambda^{(1)}, \delta)\right\| \lesssim |p^{(1)}| + |\lambda^{(1)}| + |\delta|.$$

步骤 3. 在式 (3.23) 两边与 $\boldsymbol{\varphi}_i$ $(i = 1,2)$ 取对偶对。由恒等式 $\langle\boldsymbol{\psi}, T(p_*, \lambda_*)\boldsymbol{\varphi}\rangle = \langle\boldsymbol{\varphi}, T(p_*, \lambda_*)\boldsymbol{\psi}\rangle$ 对任意 $\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}$ 均成立，可得关于 $(a, b)^T$ 的下列方程:

$$\mathcal{M}(p^{(1)}, \lambda^{(1)}, \delta)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0, \tag{3.27}$$

with

$$\mathcal{M}(p^{(1)}, \lambda^{(1)}, \delta) := \begin{pmatrix} \gamma_*\lambda^{(1)} + t_*\delta & -i\theta_* p^{(1)} \\ i\theta_* p^{(1)} & \gamma_*\lambda^{(1)} - t_*\delta \end{pmatrix} + \mathcal{O}((\lambda^{(1)})^2, (p^{(1)})^2, \delta^2). \tag{3.28}$$

注意，式 (3.28) 中的高阶项在 (0, 0,0) 附近关于 $(p^{(1)}, \lambda^{(1)}, \delta)$ 是光滑的。因此，(p, λ) 及其 $\lambda = \lambda_* + \lambda^{(1)}(p^{(1)}, \delta)$ 是式 (3.7) 中定义的 $T_\delta(p, \lambda)$ 的特征值，当且仅当$\lambda^{(1)} = \lambda^{(1)}(p^{(1)}, \delta)$ 满足下列方程

$$F(p^{(1)}, \lambda^{(1)}, \delta) \equiv \det \mathcal{M}(p^{(1)}, \lambda^{(1)}, \delta) = \gamma_*^2(\lambda^{(1)})^2 - t_*^2\delta^2 - \theta_*^2(p^{(1)})^2 + \rho(p^{(1)}, \lambda^{(1)}, \delta) = 0, \quad (3.29)$$

其中 $\rho(p^{(1)}, \lambda^{(1)}, \delta)$ 在 (0，0，0) 附近光滑，并满足

$$\left\|\rho(p^{(1)}, \lambda^{(1)}, \delta)\right\| = \mathcal{O}((\lambda^{(1)})^3, (p^{(1)})^3, \delta^3). \quad (3.30)$$

步骤 4。对每个 $p^{(1)}$ 和 δ，我们由 (3.29) 求解 $\lambda^{(1)} = \lambda^{(1)}(p^{(1)}, \delta)$。首先注意到，若忽略余项 ρ，则 $\pm\frac{1}{|\gamma_*|}\sqrt{t_*^2\delta^2 + \theta_*^2(p^{(1)})^2}$ 给出两支解。因此，我们寻求具有以下形式的 (3.29) 的解

$$\lambda^{(1)}(p^{(1)}, \delta) = \frac{x}{|\gamma_*|}\sqrt{t_*^2\delta^2 + \theta_*^2(p^{(1)})^2} \quad (3.31)$$

其中 $|x|$ 接近 1。显然，x 依赖于 $p^{(1)}$ 和 δ。将 (3.31) 代入 (3.29)，得到关于 x 的如下方程，其中 $p^{(1)}$ 和 $\delta \neq 0$ 视为两个参数:

$$\begin{aligned} H(x; p^{(1)}, \delta) &:= \frac{1}{t_*^2\delta^2 + \theta_*^2(p^{(1)})^2} F(p^{(1)}, \frac{x}{|\gamma_*|}\sqrt{t_*^2\delta^2 + \theta_*^2(p^{(1)})^2}, \delta) \\ &= x^2 - 1 + \rho_1(x; p^{(1)}, \delta) = 0, \end{aligned} \quad (3.32)$$

其中 $\rho_1(x;\ p^{(1)},\ \delta) := \frac{\rho}{(\frac{x}{|\gamma_*|}\sqrt{t_*^2\delta^2+\theta_*^2(p^{(1)})^2},\ p^{(1)},\ \delta)\, t_*^2\delta^2+\theta_*^2(p^{(1)})^2}$。现在考虑满足 $|x-1| \ll 1$ 的 (3.32) 上支解。注意，由 (3.30)，以下估计对 x 一致成立:

$$\left|\rho_1(x; p^{(1)}, \delta)\right| = \mathcal{O}(p^{(1)}, \delta). \quad (3.33)$$

我们得出结论：对于方程 (3.32)，存在唯一解 $x_s(p^{(1)}, \delta)$，其估计为 $x_s(p^{(1)}, \delta) = 1 + \mathcal{O}(p^1, \delta)$，其中 $\delta, |p^{(1)}| \ll 1$。由 (3.31) 可知，在 $\frac{1}{|\gamma_*|}\sqrt{t_*^2\delta^2 + \theta_*^2(p^{(1)})^2}$ 附近，方程 (3.29) 存在唯一解 $\lambda_+^{(1)}(p^{(1)}, \delta)$。此外，

$$\lambda_+^{(1)}(p^{(1)}, \delta) = \frac{x_s(p^{(1)}, \delta)}{|\gamma_*|}\sqrt{t_*^2\delta^2 + \theta_*^2(p^{(1)})^2}) = \frac{1}{|\gamma_*|}\sqrt{t_*^2\delta^2 + \theta_*^2(p^{(1)})^2})\left(1 + \mathcal{O}(p^{(1)}, \delta)\right).$$

类似地，我们可以推导出娱乐主管

$$\lambda_-^{(1)}(p^{(1)}, \delta) = -\frac{1}{|\gamma_*|}\sqrt{t_*^2\delta^2 + \theta_*^2(p^{(1)})^2})\left(1 + \mathcal{O}(p^{(1)}, \delta)\right).$$

注意到 $\lambda_{1,\delta}(p) = \lambda_* + \lambda_+^{(1)}(p - p_*, \delta)$，$\lambda_{2,\delta}(p) = \lambda_* + \lambda_-^{(1)}(p - p_*, \delta)$，由此得出（3.16）。

步骤 5. 最后，分别将 $\lambda^{(1)}(p) = \lambda_{i,\ \delta}(p) - \lambda_*$ 代入式 (3.27) 中的 $i = 1,\ 2$，即可相应地得到以下解,

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{-1}\theta_*(p-p_*)}{\delta t_* + \sqrt{\delta^2 t_*^2 + \theta_*^2(p-p_*)^2}} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{-1}\theta_*(p-p_*)}{\delta t_* + \sqrt{\delta^2 t_*^2 + \theta_*^2(p-p_*)^2}} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

通过将上述 $(a_i, b_i)^T$ 代入 (3.22)，再利用 (3.5) 中的层势，可得 (3.17) 中本征模 $u_{i,\delta}(\cdot; p)$ 的渐近展开。(3.18) 和 (3.19) 的证明方法类似。

□

命题 *3.4* 的证明。 该命题是定理 3.6 的推论。将 $\delta = 0$ 代入渐近公式 (3.16)，可见未扰动结构在 $p = p^*$ 附近的前两个色散函数具有如下展开：

$$\lambda_1(p) = \lambda_* + \lambda_-^{(1)}(p - p_*) = \lambda_* - \left|\frac{\theta_*}{\gamma_*}\right||p - p_*| + \mathcal{O}((p - p_*)^2),$$
$$\lambda_2(p) = \lambda_* + \lambda_+^{(1)}(p - p_*) = \lambda_* + \left|\frac{\theta_*}{\gamma_*}\right||p - p_*| + \mathcal{O}((p - p_*)^2).$$

因此，色散曲线在交点（即狄拉克点）处的斜率为 $|\frac{\theta_*}{\gamma_*}|$。该斜率与命题 1.5 和假设 1.1 中提出的斜率一致。因此，我们有

$$\alpha_* = \left|\frac{\theta_*}{\gamma_*}\right|.$$

□

4 具有扰动的波导的界面模态

本节证明图2(c)所示波导的界面模态存在性，正如定理 1.11 所述。在第 4.1 节中，我们将特征值问题 (1.6) 重新表述为边界积分方程。在第 4.2 节中，我们针对扰动参数 δ 推导相关边界积分算子的渐近展开。最后，在第 4.3 节中，通过研究相关边界积分算子的特征值，证明定理 1.11。

4.1 含有两个半无限扰动介质的联合系统的边界积分表述

在本小节中，我们利用边界积分方程，重新表述图2(c)中联合系统的特征值问题 (1.6)。其思想是使波导界面 Γ两侧的波场相匹配。为此，我们首先引入一些记号。回顾 $\Gamma := \{0\} \times (0, 1)$。令 $\tilde{\Gamma} := \Gamma \cup ([0, +\infty) \times \{0\}) \cup \left([0, +\infty) \times \{\frac{1}{2}\}\right)$ 为半无限波导 $(0, +\infty) \times (0, 1)$ 的边界。定义

$$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) := \{u = U|_\Gamma : U \in H^{\frac{1}{2}}(\tilde{\Gamma})\},$$

and

$$\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) := \{u = U|_\Gamma : U \in H^{-\frac{1}{2}}(\tilde{\Gamma}) \text{ and } supp(U) \subset \overline{\Gamma}\}.$$

那么，$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ 是 $\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ 的对偶空间，反之亦然。我们还将图2(c)中的左侧和右侧区域分别记为 $\tilde{\Omega}_\delta^- := \tilde{\Omega}_\delta \bigcap ((-\infty, 0) \times (0, 1))$ 和 $\tilde{\Omega}_\delta^+ := \tilde{\Omega}_\delta \bigcap ((0, +\infty) \times (0, 1))$。

假设 $(\lambda; u)$ 是特征值问题 (1.6) 的一个解。我们将 $u(x; \lambda)$ 表示为

$$u(x; \lambda) = \begin{cases} u^+(x), & x \in \tilde{\Omega}_\delta^+, \\ u^-(x), & x \in \tilde{\Omega}_\delta^-, \end{cases} \tag{4.1}$$

其中， u^+ 和 u^- 分别满足以下方程

$$\begin{cases}(\Delta_x+\lambda)u^+(x;\lambda)=0, & x\in\tilde{\Omega}_\delta^+,\\ u^+(x;\lambda)=0, & x\in\partial\tilde{D}_{n,\delta}\ (n=1,2,\cdots),\\ \dfrac{\partial}{\partial x_2}u^+(x;\lambda)=0, & x\in\Gamma_-\bigcup\Gamma_+.\end{cases}\qquad \begin{cases}(\Delta_x+\lambda)u^-(x;\lambda)=0, & x\in\tilde{\Omega}_\delta^-,\\ u^-(x;\lambda)=0, & x\in\partial\tilde{D}_{n,\delta}\ (n=-1,-2,\cdots),\\ \dfrac{\partial}{\partial x_2}u^-(x;\lambda)=0, & x\in\Gamma_-\bigcup\Gamma_+.\end{cases}$$

对于 $\lambda\in I_\delta$，左、右周期结构在狄拉克点附近（p_*， λ_*）存在公共带隙。众所周知（参见 [22]），u^+ 和 u^- 在远离界面Γ 处会指数衰减，其中 $|x_1|\to\infty$ 分别属于 $\tilde{}\Omega_\delta^+$ 和 $\tilde{}\Omega_\delta^-$ 。此外，以下界面条件成立:

$$u(0^-,x_2;\lambda)=u(0^+,x_2;\lambda), \tag{4.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(0^-,x_2;\lambda)=\frac{\partial u}{\partial x_1}(0^+,x_2;\lambda). \tag{4.3}$$

我们有以下关于 $u^\pm$ 的表示公式。

引理 4.1。设 $\lambda\in I_\delta$，则

$$u^+(x;\lambda)=2\int_\Gamma G_\delta(x,y;\lambda)\phi^+(y;\lambda)d\sigma(y),\quad \phi^+=\frac{\partial u^+}{\partial x_1}\Big|_\Gamma, \tag{4.4}$$

$$u^-(x;\lambda)=-2\int_\Gamma G_{-\delta}(x,y;\lambda)\phi^-(y;\lambda)d\sigma(y),\quad \phi^-=\frac{\partial u^-}{\partial x_1}\Big|_\Gamma, \tag{4.5}$$

其中， $G_{\pm\delta}(x,y;\ \lambda)$ 是式(2.13)中定义的格林函数。此外，对于每个 $\phi\in\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$，以下恒等式成立:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\int_\Gamma G_\delta(x,y;\lambda)\phi(y)d\sigma(y)\right)(0^+,x_2)=\frac{\phi(x_2)}{2}. \tag{4.6}$$

证明。我们先证明关于 u^+ 的表示公式。关于 u^- 的公式可用类似方法证明。设 G_δ^Γ 为扰动半无限波导中的格林函数，且在 Γ上满足诺伊曼边界条件:

$$\begin{cases}(\Delta_x+\lambda)G_\delta^\Gamma(x,y;\lambda)=\tilde{\delta}(x-y), & x,y\in\Omega_\delta,\\ G_\delta^\Gamma(x,y;\lambda)=0, & x\in\cup_{n\geq1}\partial D_{n,\delta},\\ \dfrac{\partial}{\partial x_2}G_\delta^\Gamma(x,y;\lambda)=0, & x\in\Gamma_-\bigcup\Gamma_+,\\ \dfrac{\partial}{\partial x_1}G_\delta^\Gamma(x,y;\lambda)=0, & x\in\Gamma.\end{cases}$$

由于 Ω_δ 具有反射对称性，对于 $y\in\Gamma$，有

$$G_\delta^\Gamma(x,y;\lambda)=\lim_{y_1\to0^-}G_\delta(x,y;\lambda)+\lim_{y_1\to0^+}G_\delta(x,y;\lambda)=2G_\delta(x,y;\lambda),$$

其中， $G_\delta(x,\ y;\lambda)$ 是式 (2.13) 中定义的受扰周期结构的格林函数。因此，对于 $\lambda\in I_\delta$，$G_\delta^\Gamma(x,\ y;\lambda)$ 随 $|x_1|\to\infty$ 指数衰减。随后进行分部积分，得到

$$u^+(x;\lambda)=\int_\Gamma G_\delta^\Gamma(x,y;\lambda)\phi^+(y;\lambda)d\sigma(y)=2\int_\Gamma G_\delta(x,y;\lambda)\phi^+(y;\lambda)d\sigma(y),\quad \phi^+=\frac{\partial u^+}{\partial x_1}\Big|_\Gamma,$$

由此可得 u^+ 的表示公式。

接下来，我们证明 (4.6)。令 $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\int_\Gamma G_\delta(x,y;\lambda)\phi(y)d\sigma(y)\right)(0^+,x_2) = \psi_{(x_2)}$。那么，由 (4.4) 可得

$$\int_\Gamma G_\delta(x,y;\lambda)\phi(y)d\sigma(y) = \int_\Gamma G_\delta(x,y;\lambda)\psi(y)d\sigma(y) \quad \text{for } x\in\Omega_\delta^+. \tag{4.7}$$

定义

$$u(x) := \int_\Gamma G_\delta(x,y;\lambda)(\phi(y)-\psi(y))d\sigma(y) \quad \text{for } x\in\Omega_\delta^+. \tag{4.8}$$

然后，(4.7) 表明，对于 $x\in\Omega_\delta^+$，$u(x)\equiv 0$。根据格林函数 $G_\delta(x,y;\lambda)$ 的反射对称性（这可由与引理 2.4 相同的论证得出），(4.8) 中的 $u(x)$ 可以自然地延拓至 $x\in\Omega_\delta^-$。这给出了 u 的偶延拓，即对于 $x_1<0$，$u(x_1,x_2):=u(-x_1,x_2)$。注意，延拓后的 $u(x)$ 在 Ω_δ 中也为零。另一方面，如果我们将u 重写为

$$u(x) = \int_\Gamma G_\delta(x,y;\lambda)(\phi(y)-\psi(y))d\sigma(y) = \int_{\Omega_\delta} G_\delta(x,y;\lambda)(\tilde{\phi}-\tilde{\psi})(y)dy,$$

其中 $(\tilde{\phi}-\tilde{\psi})(y) := \phi(y_2)\delta(y_1) - \psi(y_2)\delta(y_1)$（这里 δ 表示狄拉克 δ 函数），则

$$(\Delta+\lambda)u = \tilde{\phi}-\tilde{\psi}.$$

然而，对于 $\Delta_x+\lambda$，当 $u\equiv 0$ (u) $x\Omega\equiv 0$ 时。因此我们得出 $x\in$，引理 4.1 得证。

□

根据引理 4.1 和 (4.3)，$u^\pm$ 可表示为

$$u^+(x;\lambda) = 2\int_\Gamma G_\delta(x,y;\lambda)\phi(y;\lambda)d\sigma(y), \tag{4.9}$$

$$u^-(x;\lambda) = -2\int_\Gamma G_{-\delta}(x,y;\lambda)\phi(y;\lambda)d\sigma(y), \tag{4.10}$$

对于某个 $\phi\in\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$。将 (4.9) 和 (4.10) 代入界面条件 (4.2)，得到

$$2\int_\Gamma \left(G_\delta((0,x_2),(0,y_2);\lambda)+G_{-\delta}((0,x_2),(0,y_2);\lambda)\right)\phi((0,y_2);\lambda)dy_2 = 0. \tag{4.11}$$

引入以下单层边界积分算子

$$\mathbb{G}_{\pm\delta}(\lambda):\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma), \quad \phi(y)\mapsto 2\int_\Gamma G_{\pm\delta}(x,y;\lambda)\phi(y;\lambda)dy, \tag{4.12}$$

并令

$$\tilde{\mathbb{G}}_\delta(\lambda):\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma), \quad \tilde{\mathbb{G}}_\delta(\lambda)=\mathbb{G}_\delta(\lambda)+\mathbb{G}_{-\delta}(\lambda).$$

那么，式（4.11）等价于以下边界积分方程

$$\tilde{\mathbb{G}}_\delta(\lambda)\phi = 0, \quad \text{for } \phi\in\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma). \tag{4.13}$$

总之，当且仅当 $\lambda\in I_\delta$ 是 $\mathbb{G}_\delta(\lambda)$的特征值时，(1.6)具有界面模态 $u(x;\lambda)$。

4.2 边界积分算子的性质

在此及下文中，对于每个 $\lambda \in I_\delta$，我们将 λ 参数化为 $\lambda := \lambda_* + \delta \cdot h$，其中 $h \in J := (\frac{E_1 - \lambda_*}{\delta}, \frac{E_2 - \lambda_*}{\delta})$。$J$ 的复邻域记为 $\tilde{J} := \{h \in \mathbb{C} : |h| < \frac{E_1 - E_2}{2\delta}\}$。

我们研究 $h \in J$ 下的边界积分算子 $\mathbb{G}_\delta(\lambda_* + \delta \cdot h) = \mathbb{G}_\delta(\lambda_* + \delta \cdot h) + \mathbb{G}_{-\delta}(\lambda_* + \delta \cdot h)$。所得结果将为应用 Gohberg-Sigal理论证明定理 1.11铺平道路。

为此，我们首先定义 $\mathbb{T}_{\pm\delta}(\lambda_* + \delta \cdot h) : \tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$，其定义如下：

$$\begin{aligned}\mathbb{T}_{\pm\delta}(\lambda_* + \delta \cdot h) = &\int_0^{2\pi} \sum_{n \geq 3} \frac{\langle \cdot, \overline{u_{n,\pm\delta}(y;p)} \rangle}{\lambda_* + \delta \cdot h - \lambda_{n,\pm\delta}(p)} u_{n,\pm\delta}(x;p) dp \\ &+ \int_{[0,\pi-\delta^{\frac{1}{3}}] \bigcup [\pi+\delta^{\frac{1}{3}},2\pi]} \frac{\langle \cdot, \overline{u_{2,\pm\delta}(y;p)} \rangle}{\lambda_* + \delta \cdot h - \lambda_{2,\pm\delta}(p)} u_{2,\pm\delta}(x;p) dp \\ &+ \int_{[0,\pi-\delta^{\frac{1}{3}}] \bigcup [\pi+\delta^{\frac{1}{3}},2\pi]} \frac{\langle \cdot, \overline{u_{1,\pm\delta}(y;p)} \rangle}{\lambda_* + \delta \cdot h - \lambda_{1,\pm\delta}(p)} u_{1,\pm\delta}(x;p) dp.\end{aligned} \tag{4.14}$$

这里及下文中，$\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示 $\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ 上的对偶配对。

回忆一下，ϕ_1, ϕ_2 是两个狄拉克本征模，其中 ϕ_1 为奇函数，ϕ_2 为偶函数（见推论1.8）。令 $\mathbb{P}$ 为如下定义的投影算子：

$$\mathbb{P} : \tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma), \quad \psi \mapsto \langle \psi, \overline{\phi}_2 \rangle \phi_2.$$

我们进一步引入以下四个函数：

$$\begin{aligned}f_1(h;\delta) &:= \frac{1}{2\pi} \int_{\pi-\delta^{\frac{1}{3}}}^{\pi+\delta^{\frac{1}{3}}} \frac{1}{\delta \cdot h + \sqrt{\delta^2\beta_*^2 + \alpha_*^2(p-p_*)^2}} \frac{L(p;\delta)}{1+L(p;\delta)} dp, \\ f_2(h;\delta) &:= \frac{1}{2\pi} \int_{\pi-\delta^{\frac{1}{3}}}^{\pi+\delta^{\frac{1}{3}}} \frac{1}{\delta \cdot h - \sqrt{\delta^2\beta_*^2 + \alpha_*^2(p-p_*)^2}} \frac{1}{1+L(p;\delta)} dp, \\ \tilde{f}_1(h;\delta) &:= \frac{1}{2\pi} \int_{\pi-\delta^{\frac{1}{3}}}^{\pi+\delta^{\frac{1}{3}}} \frac{1}{\delta \cdot h + \sqrt{\delta^2\beta_*^2 + \alpha_*^2(p-p_*)^2}} \frac{1}{1+L(p;\delta)} dp, \\ \tilde{f}_2(h;\delta) &:= \frac{1}{2\pi} \int_{\pi-\delta^{\frac{1}{3}}}^{\pi+\delta^{\frac{1}{3}}} \frac{1}{\delta \cdot h - \sqrt{\delta^2\beta_*^2 + \alpha_*^2(p-p_*)^2}} \frac{L(p;\delta)}{1+L(p;\delta)} dp,\end{aligned}$$

其中

$$\alpha_* = \frac{\theta_*}{\gamma_*}, \quad \beta_* = \frac{t_*}{\gamma_*}, \quad L(p;\delta) := \frac{\alpha_*^2(p-p_*)^2}{(\delta\beta_* + \sqrt{\delta^2\beta_*^2 + \alpha_*^2(p-p_*)^2})^2}.$$

算子 $\mathbb{G}_{\pm\delta}$ 具有以下渐近展开。

命题 4.2。存在 $\delta_0 > 0$，使得对于 $0 < \delta < \delta_0$，在(4.12)中定义的算子 $\mathbb{G}_\delta$ 具有如下渐近展开

$$\mathbb{G}_\delta(\lambda_* + \delta \cdot h) = \mathbb{T}_\delta(\lambda_* + \delta \cdot h) + \Big(f_1(h;\delta) + f_2(h;\delta)\Big)\mathbb{P} + \Big(\mathbb{R}_1(h;\delta) + \mathbb{R}_2(h;\delta)\Big), \tag{4.15}$$

˜其中，(4.15) 中的所有函数和算子关于 J 中的 h 均为解析函数。此外，以下˜对 $h \in J$ 一致成立：

$$\lim_{\delta\to 0}\|\mathbb{R}_1(h;\delta)\|_{\mathcal{B}(\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma),H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))}=0,\quad \lim_{\delta\to 0}\|\mathbb{R}_2(h;\delta)\|_{\mathcal{B}(\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma),H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))}=0. \tag{4.16}$$

类似地，

$$\mathbb{G}_{-\delta}(\lambda_*+\delta\cdot h)=\mathbb{T}_{-\delta}(\lambda_*+\delta\cdot h)+\Big(\tilde{f}_1(h;\delta)+\tilde{f}_2(h;\delta)\Big)\mathbb{P}+\Big(\tilde{\mathbb{R}}_1(h;\delta)+\tilde{\mathbb{R}}_2(h;\delta)\Big), \tag{4.17}$$

with

$$\lim_{\delta\to 0}\|\tilde{\mathbb{R}}_1(h;\delta)\|_{\mathcal{B}(\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma),H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))}=0,\quad \lim_{\delta\to 0}\|\tilde{\mathbb{R}}_2(h;\delta)\|_{\mathcal{B}(\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma),H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))}=0. \tag{4.18}$$

证明。 见附录 D。 □

接下来，我们研究算子 $\mathbb{T}_{\pm\delta}$ 在 $\delta\to 0$时的极限行为。为此，我们定义以下积分算子 $\mathbb{T}_0\in\mathcal{B}(\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma),H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))$：

$$\mathbb{T}_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{n\geq 3}\frac{\langle\cdot,\overline{u_n(y;p)}\rangle}{\lambda_*-\lambda_n(p)}u_n(x;p)dp+\frac{1}{2\pi}p.v.\int_0^{2\pi}\sum_{n=1,2}\frac{\langle\cdot,\overline{v_n(y;p)}\rangle}{\lambda_*-\mu_n(p)}v_n(x;p)dp.$$

利用 (2.2)，算子 $\mathbb{T}_0$的核函数（记作 $T_0(x,y;\lambda_*)$）与格林函数 $G(x,y;\lambda_*)$ 的关系为

$$G(x,y;\lambda_*)=T_0(x,y;\lambda_*)-\frac{i}{2}\frac{v_1(x,\pi)\overline{v_1(y,\pi)}}{\alpha_*}-\frac{i}{2}\frac{v_2(x,\pi)\overline{v_2(y,\pi)}}{\alpha_*}. \tag{4.19}$$

下面两个命题给出了算子 $\mathbb{T}_0$的性质。

命题 4.3。 $\mathbb{T}_0$ 的核为

$$Ker\,\mathbb{T}_0=span\left\{\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\Big|_\Gamma\right\}. \tag{4.20}$$

命题 4.4. $\mathbb{T}_0\in\mathcal{B}(\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma),H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))$ 是一个指标为零的 *Fredholm* 算子。

证明。 见附录 E。 □

˜现在我们可以研究算子 $\mathbb{G}_\delta(\lambda_*+\delta\cdot h)$ 的极限。

˜**命题 4.5.** 以下结论对 $h\in J$ 一致成立：

$$\lim_{\delta\to 0}\left\|\tilde{\mathbb{G}}_\delta(\lambda_*+\delta\cdot h)-\Big(2\mathbb{T}_0+\beta(h)\mathbb{P}\Big)\right\|_{\mathcal{B}(\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma),H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))}=0,$$

其中

$$\beta(h)=-\frac{1}{\beta_*\alpha_*}\frac{h}{\sqrt{1-(\frac{h}{\beta_*})^2}}.$$

证明。 参见附录 F。 □

将上述极限算子记为 $\mathbb{G}_0(h) := 2\mathbb{T}_0 + \beta(h)\mathbb{P}$。我们有

命题 4.6。设 $h \in J$。则 $\mathbb{G}_0(h)$ 是一个指标为零的 *Fredholm* 算子，对 $h \in J$ 是解析的，对 $h \in \partial J$ 是连续的。作为 h 的函数，它在 J 中取得唯一的特征值 $h = 0$，其零空间重数为一。此外，对于任意满足 $h \neq 0$ 的 $h \in J$，$\mathbb{G}_0(h)$ 均可逆。

证明。首先，由于 $\mathbb{T}_0$ 和 $\mathbb{P}$ 有界，$\tilde{\mathbb{G}}_0(h) \in \mathcal{B}(\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\ H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))$。通过在 $\mathbb{C}\backslash(-\infty, -\beta_*) \bigcup(\beta_*, +\infty)$ 上选取平方根的主值分支，显然 $\beta(h)$ 在 J 上解析，这由其定义可知，进而 $\mathbb{G}_0(h)$ 的解析性也随之成立；同时，其关于 $h \in \partial\tilde{J}$ 的连续性也显而易见。由命题 4.3 可推得，$\mathbb{T}_0 \in \mathcal{B}(\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\ H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))$ 是一个零指标 Fredholm 算子，且 $\mathrm{Ker}\ \mathbb{T}_0 =$ 张成 $\left\{\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\Big|_\Gamma\right\}$。因此，通过对 $\mathbb{T}_0$ 施加秩一投影算子 $\mathbb{P}$ 的扰动得到的 $\tilde{\mathbb{G}}_0(h)$ 是一个零指标 Fredholm 算子。

现在我们证明，作为 h 的函数，$\mathbb{G}_0(h) = 2\mathbb{T}_0 + \beta(h)\mathbb{P}$ 在 J 中有唯一的特征值 $h = 0$。换言之，以下方程有非平凡解 $w \in \tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ 当且仅当 $h = 0$：

$$\tilde{\mathbb{G}}_0(h)w = 0. \tag{4.21}$$

为此，我们在上述方程两边应用 $\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\Big|_\Gamma$，得到

$$\begin{aligned} 0 &= 2\left\langle \frac{\partial \overline{v_1}}{\partial x_1}\Big|_\Gamma, \mathbb{T}_0 w \right\rangle + \langle w, \overline{\phi_2}\rangle \beta(h) \left\langle \frac{\partial \overline{v_1}}{\partial x_1}\Big|_\Gamma, \phi_2 \right\rangle \\ &= 2\overline{\left\langle \overline{w}, \mathbb{T}_0\Big(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\Big)\Big|_\Gamma \right\rangle} + \langle w, \overline{\phi_2}\rangle \beta(h) \left\langle \frac{\partial \overline{v_1}}{\partial x_1}\Big|_\Gamma, \phi_2 \right\rangle \\ &= \langle w, \overline{\phi_2}\rangle \beta(h) \left\langle \frac{\partial \overline{v_1}}{\partial x_1}\Big|_\Gamma, \phi_2 \right\rangle. \end{aligned}$$

其中第二个恒等式由 $\mathbb{T}_0$ 的定义可得。回顾这一事实：$\phi_2|_\Gamma$ 与 $v_1|_\Gamma$ 成正比（见注释 1.9）。因此，

$$\langle w, \overline{\phi_2}\rangle \beta(h) \left\langle \frac{\partial \overline{v_1}}{\partial x_1}\Big|_\Gamma, v_1 \right\rangle = 0. \tag{4.22}$$

由引理 2.3，$\left\langle \frac{\partial v_1}{\partial x_1}\Big|_\Gamma, v_1 \right\rangle \neq 0$；因此 (4.22) 意味着 $\langle w, \phi_2\rangle \beta(h) = 0$，或等价地

$$\langle w, \overline{v_1}\rangle \beta(h) = 0.$$

若 $\beta(h) \neq 0$，则有 $\langle w, \overline{v_1}\rangle = 0$ 和 $\mathbb{T}_0 w = 0$，由此可知，根据命题 4.3，$w = 0$。但这与假设 $w \neq 0$ 矛盾。因此，我们推得，特征值问题 (4.21) 仅当 $\beta(h) = 0$ 时才有解。解出 $\beta(h) = 0$，得到一个单根 $h = 0$。于是，命题 4.3 表明，$h = 0$ 是重数为一的特征值，其对应的特征向量为 $\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\Big|_\Gamma$。

最后，我们证明 $\mathbb{G}_0(h)$ 在 $h \neq 0$ 时可逆。事实上，由于 $\mathbb{G}_0(h)$ 有唯一的特征值 $h = 0$，它在 $h \neq 0$ 时是单射；因此，注意到 $\mathbb{G}_0(h)$ 是零指标的 Fredholm 算子，可知其可逆。 □

命题 4.7. </style}令 。**则** $(\lambda_* + \delta \cdot h)$ 是一个 *Fredholm* 算子，并且它关于 $h \in J$ 在 处解析。

~证明。 *</style}()* 的解析性源于格林函数(, y; λ) 关于 λ 的解析性；对于满足 $h \in J$ 的任意 $\lambda = \lambda_* + \delta \cdot h$，这一性质都成立。利用命题 4.5 和 4.6，以及 Fredholm 指数在小扰动下保持稳定这一事实（见命题 2.8），我们~ ~得出结论：当 $\delta > 0$ 足够小时， $G_\delta(\lambda_* + \delta \cdot h)$ 对于 $h \in J$ 是一个零指标的 Fredholm 算子。

□

4.3 定理 1.11 的证明

~根据命题 4.5 和 4.6，当 $\delta > 0$ 和 $h \in \partial J$ 足够小时，我们有

$$\left\| \tilde{\mathbb{G}}_0^{-1}(h)\Big(\tilde{\mathbb{G}}_\delta(\lambda_* + \delta \cdot h) - \tilde{\mathbb{G}}_0(h)\Big) \right\|_{\mathcal{B}(\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma))} < 1,$$

其中我们使用了这样一个事实：对于 $h \in \partial \tilde{J}$， $\tilde{\mathbb{G}}_0^{-1}$（$h$）的范数是一致有界的（这是 $\mathbb{G}_0$（h）关于 $h \in \partial J$ 的连续性与可逆性的直接结果）。现在，结合命题 4.6 和 4.7，应用定理 2.9 可知，当 $\delta > 0$ 充分小时，~（4.13）取得唯一的特征值 $\lambda^\star$：$= \lambda_* + h^\star$，其中 $h^\star \in J$。令 $\phi^\star$ 为相应的特征向量，则我们通过令来构造（1.6）的一个解

$$\lambda = \lambda^\star, \quad u^\star = u((x_1, x_2); \lambda^\star) = \begin{cases} \displaystyle\int_\Gamma G_\delta((x_1, x_2), y; \lambda)\phi^\star(y; \lambda) d\sigma(y), & x_1 \geq 0, \\ \displaystyle -\int_\Gamma G_{-\delta}((x_1, x_2), y; \lambda)\phi^\star(y; \lambda) d\sigma(y), & x_1 < 0. \end{cases}$$

与此同时，我们声称 $\lambda^\star \in \mathbf{R}$。否则，$(\lambda^\star, u^\star)$ 给出了特征值问题 (1.6) 的另一个解，因此，$h = \frac{\lambda^\star - \lambda_*}{\delta}$ 是 $h \in \tilde{J}$ 对应的 $\tilde{\mathbb{G}}_\delta(\lambda_* + \delta \cdot h)$ 的另一个特征值，这与 $h^\star$ 不同。但这与 $h \in J$ 对应的 ~ ~$\mathbb{G}_\delta(\lambda_* + \delta \cdot h)$ 的特征值唯一性相矛盾。

最后， $u^\star$ 远离 Γ 时呈指数衰减这一断言，由格林函数 $G_{\pm\delta}$ 的辐射条件得出（参见第 2.3 节）。定理的证明至此完成。

附录

附录 A：推论1.8的证明

推论*1.8*的证明。 令 $v_1(x) = \mathrm{Re}\ v_1(x) + i\mathrm{Im}\ v_1(x)$。我们首先断言 $\mathrm{Re}\ v_1(x)$ 和 $\mathrm{Im}\ v_1(x)$ 线性无关。否则，存在 $c \in \mathbf{R}$ 使得 $\mathrm{Re}\ v_1(x) = c\,\mathrm{Im}\ v_1(x)$。于是，准周期边界条件 $v_1(x + \frac{1}{2}\boldsymbol{e_1}) = iv_1$ 给出

$$v_1(x + \frac{1}{2}\boldsymbol{e_1}) = \mathrm{Re}\ v_1(x + \frac{1}{2}\boldsymbol{e_1}) + i\mathrm{Im}\ v_1(x + \frac{1}{2}\boldsymbol{e_1}) = (c + i)\mathrm{Im}\ v_1(x + \frac{1}{2}\boldsymbol{e_1}),$$
$$v_1(x + \frac{1}{2}\boldsymbol{e_1}) = iv_1(x) = i(\mathrm{Re}\ v_1(x) + i\mathrm{Im}\ v_1(x)) = i(c + i)\mathrm{Im}\ v_1(x),$$

这意味着 $i\,\mathrm{Im}\ v_1(x) = \mathrm{Im}\ v_1(x + \frac{1}{2}\boldsymbol{e_1})$，因此 $\mathrm{Im}\ v_1(x) = \mathrm{Re}\ v_1(x) = 0$。这一矛盾证明了该结论。

接下来，我们证明，可以通过对 Re v_1 和 Im v_1 作线性组合，构造狄拉克点处所需的偶/奇本征模。显然，Re v_1 和 Im v_1 都是命题 1.5 中定义的狄拉克点处的本征模。注意，$v_1(x_1, x_2)$ 和$v_1(-x_1, x_2)$ 都是具有相同准周期边界条件的周期-$\frac{1}{2}$ 结构中的布洛赫特征模。根据假设 1.1，特征空间的维数为一，因此存在 $\theta \in [0, 2\pi)$，使得 $v_1(x_1, x_2) = e^{i\theta} v_1(-x_1, x_2)$。令 $R := \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$。于是有

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Re}\ v_1(x_1, x_2) \\ \mathrm{Im}\ v_1(x_1, x_2) \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\ v_1(-x_1, x_2) \\ \mathrm{Im}\ v_1(-x_1, x_2) \end{pmatrix}.$$

实矩阵 R 有两个特征值，-1 和 1。令 $(a_1, b_1)^T$，$(a_2, b_2)^T \in \mathbf{R}^2$ 为相应的实特征向量，即，

$$R(a_1, b_1)^T = -(a_1, b_1)^T, \quad R(a_2, b_2)^T = (a_2, b_2)^T.$$

我们定义

$$\phi_1 := a_1 \mathrm{Re}\ v_1 + b_1 \mathrm{Im}\ v_1, \quad \phi_2 := a_2 \mathrm{Re}\ v_1 + b_2 \mathrm{Im}\ v_1.$$

然后可以验证 $\phi_1(-x_1, x_2) = -\phi_1(x_1, x_2)$，$\phi_2(-x_1, x_2) = \phi_2(x_1, x_2)$。这就得到了所需的构造。

最后，注意到 ϕ_1 是实值的。因此，ϕ_1 的准周期性和反射对称性使我们能够将相应的边界势 $\boldsymbol{\varphi_1}$ 设为

$$\boldsymbol{\varphi_1} = (\varphi_{ref}, \varphi)^T,$$

其中 $\varphi \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial D)$ 是实值的。将 ϕ_1 关于直线 $x_1 = \frac{1}{4}$ 的反射像取出，我们得到一个偶模 ϕ_2，其边界势为

$$\boldsymbol{\varphi_2} = (\varphi, -\varphi_{ref})^T.$$

由此证明完成。 □

附录 B：命题 3.3 的证明

在附录 B-C 中，括号 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示 $H^{-\frac{1}{2}}(\partial D) \times H^{-\frac{1}{2}}(\partial D)$ 与 $H^{\frac{1}{2}}(\partial D) \times H^{\frac{1}{2}}(\partial D)$ 之间的对偶对。

证明。步骤1。首先，我们证明对于靠近 (π, λ_*) 的 (p, λ)，

$$\langle \boldsymbol{\varphi}, T(p, \lambda)\boldsymbol{\varphi} \rangle = \overline{\langle \boldsymbol{\varphi}, T(p, \lambda)\boldsymbol{\varphi} \rangle} \text{ for real-valued } \boldsymbol{\varphi}. \tag{B.1}$$

注意，式 (3.3) 中定义的空波导的准周期格林函数具有以下性质：

$$\begin{aligned} G^e(x, y; \pi + h_p, \lambda_*) &= \overline{G^e(x, y; \pi - h_p, \lambda_*)}, \\ G^e(x, y; \pi + h_p, \lambda_* + h_\lambda) &= \overline{G^e(y, x; \pi + h_p, \lambda_* + h_\lambda)}, \end{aligned} \tag{B.2}$$

对于充分小的常数 h_p，h_λ。利用边界 ∂D 的极坐标以及推论1.8，我们得到

$$\langle \boldsymbol{\varphi}, T(p, \lambda)\boldsymbol{\varphi} \rangle = V_1(p, \lambda) + V_2(p, \lambda) + V_3(p, \lambda) + V_4(p, \lambda),$$

其中

$$V_1(p,\lambda)=\int_{[0,2\pi]\times[0,2\pi]} G^e(\boldsymbol{r}(\theta_1),\boldsymbol{r}(\theta_2);p,\lambda)\cdot\varphi_1(\theta_2)\varphi_1(\theta_1)\cdot|\boldsymbol{r}'(\theta_2)||\boldsymbol{r}'(\theta_1)|d\theta_2 d\theta_1,$$
$$V_2(p,\lambda)=\int_{[0,2\pi]\times[0,2\pi]} G^e(\boldsymbol{r}(\theta_1),\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{r}(\theta_2);p,\lambda)\cdot\varphi_2(\theta_2)\varphi_1(\theta_1)\cdot|\boldsymbol{r}'(\theta_2)||\boldsymbol{r}'(\theta_1)|d\theta_2 d\theta_1,$$
$$V_3(p,\lambda)=\int_{[0,2\pi]\times[0,2\pi]} G^e(\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{r}(\theta_1),\boldsymbol{r}(\theta_2);p,\lambda)\cdot\varphi_1(\theta_2)\varphi_2(\theta_1)\cdot|\boldsymbol{r}'(\theta_2)||\boldsymbol{r}'(\theta_1)|d\theta_2 d\theta_1,$$
$$V_4(p,\lambda)=\int_{[0,2\pi]\times[0,2\pi]} G^e(\boldsymbol{r}(\theta_1),\boldsymbol{r}(\theta_2);p,\lambda)\cdot\varphi_2(\theta_2)\varphi_2(\theta_1)\cdot|\boldsymbol{r}'(\theta_2)||\boldsymbol{r}'(\theta_1)|d\theta_2 d\theta_1.$$

我们断言 t 带帽的 V_1, V_4，且 V_2+V_3 均为实数。对于 V_1，变量替换得到 s

$$\begin{aligned}2V_1(p,\lambda)=&\int_{[0,2\pi]\times[0,2\pi]} G^e(\boldsymbol{r}(\theta_1),\boldsymbol{r}(\theta_2);p,\lambda)\cdot\varphi_1(\theta_2)\varphi_1(\theta_1)\cdot|\boldsymbol{r}'(\theta_2)||\boldsymbol{r}'(\theta_1)|d\theta_2 d\theta_1\\&+\int_{[0,2\pi]\times[0,2\pi]} G^e(\boldsymbol{r}(\theta_2),\boldsymbol{r}(\theta_1);p,\lambda)\cdot\varphi_1(\theta_1)\varphi_1(\theta_2)\cdot|\boldsymbol{r}'(\theta_1)||\boldsymbol{r}'(\theta_2)|d\theta_1 d\theta_2\\=&\int_{[0,2\pi]\times[0,2\pi]}\Big(G^e(\boldsymbol{r}(\theta_1),\boldsymbol{r}(\theta_2))+G^e(\boldsymbol{r}(\theta_2),\boldsymbol{r}(\theta_1))\Big)\varphi_1(\theta_2)\varphi_1(\theta_1)|\boldsymbol{r}'(\theta_2)||\boldsymbol{r}'(\theta_1)|d\theta_2 d\theta_1.\end{aligned}$$

因此，(B.2) 表明 $V_1(p,\lambda)$ 的被积函数为实数，这意味着 $V_1(p,\lambda)\in\mathbf{R}$。类似地，可以证明 $V_4(p,\lambda)\in\mathbf{R}$。此外，

$$\begin{aligned}V_2(p,\lambda)+V_3(p,\lambda)=&\int_{[0,2\pi]\times[0,2\pi]} G^e(\boldsymbol{r}(\theta_1),\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{r}(\theta_2);p,\lambda)\cdot\varphi_2(\theta_2)\varphi_1(\theta_1)\cdot|\boldsymbol{r}'(\theta_2)||\boldsymbol{r}'(\theta_1)|d\theta_2 d\theta_1\\&+\int_{[0,2\pi]\times[0,2\pi]} G^e(\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{r}(\theta_2),\boldsymbol{r}(\theta_1);p,\lambda)\cdot\varphi_1(\theta_1)\varphi_2(\theta_2)\cdot|\boldsymbol{r}'(\theta_1)||\boldsymbol{r}'(\theta_2)|d\theta_1 d\theta_2\\=&\int_{[0,2\pi]\times[0,2\pi]}\Big(G^e(\boldsymbol{r}(\theta_1),\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{r}(\theta_2))+G^e(\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{r}(\theta_2),\boldsymbol{r}(\theta_1))\Big)\varphi_1(\theta_1)\varphi_2(\theta_2)|\boldsymbol{r}'(\theta_1)||\boldsymbol{r}'(\theta_2)|d\theta_1 d\theta_2,\end{aligned}$$

根据 (B.2)，这也为实数。因此，对于任意实值 $\boldsymbol{\varphi}$，$\langle\boldsymbol{\varphi},T(p,\lambda)\boldsymbol{\varphi}\rangle$ 为实数。

步骤2。我们证明 $\langle\boldsymbol{\varphi_1},T_p\boldsymbol{\varphi_1}\rangle=0$，类似地可得 $\langle\boldsymbol{\varphi_2},T_p\boldsymbol{\varphi_2}\rangle=0$。由（B.2）可知。

$$\langle\boldsymbol{\varphi_1},T(p_*+h,\lambda_*)\boldsymbol{\varphi_1}\rangle=\langle\boldsymbol{\varphi_1},\overline{T(p_*-h,\lambda_*)}\boldsymbol{\varphi_1}\rangle.$$

此外，由于 $\boldsymbol{\varphi}_1$ 是实值的，(B.1) 得出的是

$$\langle\boldsymbol{\varphi_1},\overline{T(p_*-h,\lambda_*)}\boldsymbol{\varphi_1}\rangle=\overline{\langle\boldsymbol{\varphi_1},T(p_*-h,\lambda_*)\boldsymbol{\varphi_1}\rangle}=\langle\boldsymbol{\varphi_1},T(p_*-h,\lambda_*)\boldsymbol{\varphi_1}\rangle.$$

总之，

$$\langle\boldsymbol{\varphi_1},T(p_*+h,\lambda_*)\boldsymbol{\varphi_1}\rangle=\langle\boldsymbol{\varphi_1},T(p_*-h,\lambda_*)\boldsymbol{\varphi_1}\rangle.$$

那么，由于 $\langle\boldsymbol{\varphi_1},T(p,\lambda_*)\boldsymbol{\varphi_1}\rangle$ 在 p 中 $p=\pi$附近的光滑性，我们得到 $\langle\boldsymbol{\varphi_1},T_p\boldsymbol{\varphi_1}\rangle=0$。

Step 3. 我们证明 $\langle \boldsymbol{\varphi_1}, T_p \boldsymbol{\varphi_2} \rangle = -\langle \boldsymbol{\varphi_2}, T_p \boldsymbol{\varphi_1} \rangle$ 是一个纯虚数。首先 t,

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{\varphi_2}, T(p,\lambda)\boldsymbol{\varphi_1} \rangle =& \int_{[0,2\pi]\times[0,2\pi]} G^e(\boldsymbol{r}(\theta_1), \boldsymbol{r}(\theta_2); p, \lambda) \cdot \varphi_{ref}(\theta_2)\varphi(\theta_1) \cdot |\boldsymbol{r}'(\theta_2)||\boldsymbol{r}'(\theta_1)| d\theta_2 d\theta_1 \\
&+ \int_{[0,2\pi]\times[0,2\pi]} G^e(\boldsymbol{r}(\theta_1), \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{r}(\theta_2); p, \lambda) \cdot \varphi(\theta_2)\varphi(\theta_1) \cdot |\boldsymbol{r}'(\theta_2)||\boldsymbol{r}'(\theta_1)| d\theta_2 d\theta_1 \\
&- \int_{[0,2\pi]\times[0,2\pi]} G^e(\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{r}(\theta_1), \boldsymbol{r}(\theta_2); p, \lambda) \cdot \varphi_{ref}(\theta_2)\varphi_{ref}(\theta_1) \cdot |\boldsymbol{r}'(\theta_2)||\boldsymbol{r}'(\theta_1)| d\theta_2 d\theta_1 \\
&- \int_{[0,2\pi]\times[0,2\pi]} G^e(\boldsymbol{r}(\theta_1), \boldsymbol{r}(\theta_2); p, \lambda) \cdot \varphi(\theta_2)\varphi_{ref}(\theta_1) \cdot |\boldsymbol{r}'(\theta_2)||\boldsymbol{r}'(\theta_1)| d\theta_2 d\theta_1 \\
=:& \, U_1(p,\lambda) + U_2(p,\lambda) + U_3(p,\lambda) + U_4(p,\lambda).
\end{aligned} \tag{B.3}$$

注意到格林函数 G^e 可写成如下形式

$$G^e(x, y; p, \lambda) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(\lambda, |p_n|, x_2, y_2) e^{ip_n(x_1 - y_1)}, \tag{B.4}$$

其中 $p_n := p + 2n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$ 和 $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$ 在 λ 接近 λ_*时为实值。因此

$$\begin{aligned}
&G^e(\boldsymbol{r}(\theta_1), \boldsymbol{r}(\pi - \theta_2); p, \lambda) - G^e(\boldsymbol{r}(\pi - \theta_1), \boldsymbol{r}(\theta_2); p, \lambda) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} f\Big(\lambda, |p_n|, r(\theta_1)sin(\theta_1), r(\pi-\theta_2)sin(\pi-\theta_2)\Big) e^{ip_n\Big(r(\theta_1)cos(\theta_1) - r(\pi-\theta_2)cos(\pi-\theta_2)\Big)} \\
&\quad - \sum_{n\in\mathbb{Z}} f\Big(\lambda, |p_n|, r(\pi-\theta_1)sin(\pi-\theta_1), r(\theta_2)sin(\theta_2)\Big) e^{ip_n\Big(r(\pi-\theta_1)cos(\pi-\theta_1) - r(\theta_2)cos(\theta_2)\Big)} \\
&= 2i \sum_{n\in\mathbb{Z}} f\Big(\lambda, |p_n|, r(\theta_1)sin\theta_1, r(\theta_2)sin\theta_2\Big) sin\Big[p_n(r(\theta_1)cos\theta_1 + r(\theta_2)cos\theta_2)\Big],
\end{aligned}$$

其中，上述最后一个等式中用到了 $r(\pi - \theta) = r(\theta)$。因此，

$$\begin{aligned}
&U_1(p,\lambda) + U_4(p,\lambda) \\
&= 2i \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{[0,2\pi]\times[0,2\pi]} f\Big(\lambda, |p_n|, r(\theta_1)sin\theta_1, r(\theta_2)sin\theta_2\Big) sin\Big[p_n(r(\theta_1)cos\theta_1 + r(\theta_2)cos\theta_2)\Big] \\
&\qquad \cdot \varphi(\theta_2)\varphi(\theta_1) \cdot |\boldsymbol{r}'(\theta_2)||\boldsymbol{r}'(\theta_1)| d\theta_2 d\theta_1
\end{aligned} \tag{B.5}$$

当 p 接近 $p_* = \pi$ 且 $\lambda = \lambda_*$时，该式为纯虚数。类似地，我们可以证明，$U_2(p,\lambda) + U_3(p,\lambda)$ 也为纯虚数。因此

$$\langle \boldsymbol{\varphi_2}, T_p \boldsymbol{\varphi_1} \rangle = \frac{\partial}{\partial p}\Big(U_1 + U_2 + U_3 + U_4\Big)(\pi, \lambda_*)$$

也为纯虚数。我们将 $\langle \boldsymbol{\varphi_2}, T_p \boldsymbol{\varphi_1} \rangle = i\theta_*$ 记作某个实数 θ_*。

步骤 4. 我们证明 $\langle \boldsymbol{\varphi_2}, T_\lambda \boldsymbol{\varphi_1} \rangle = \langle \boldsymbol{\varphi_1}, T_\lambda \boldsymbol{\varphi_2} \rangle = 0$。注意到 (B.5) 中第 n 项和第 $(-n-1)$ 项在 $p = \pi$ 处相互抵消。因此 $U_1(\pi,\lambda) + U_4(\pi,\lambda) \equiv 0$ 在 λ 附近成立。类似地，有 $U_2(\pi,\lambda) + U_3(\pi,\lambda) \equiv 0$。由此可得 $\langle \boldsymbol{\varphi_2}, T(\pi,\lambda)\boldsymbol{\varphi_1} \rangle \equiv 0$ 在 λ 附近成立，从而得到 $\langle \boldsymbol{\varphi_2}, T_\lambda \boldsymbol{\varphi_1} \rangle = 0$。等式 $\langle \boldsymbol{\varphi_1}, T_\lambda \boldsymbol{\varphi_2} \rangle = 0$ 可用类似方法证明。

步骤 5. 最后，可以用与 $\langle \boldsymbol{\varphi_2}, T_p \boldsymbol{\varphi_1} \rangle$ 相同的方法证明，对于某个实数 γ_*，等式 $\langle \boldsymbol{\varphi_1}, T_\lambda \boldsymbol{\varphi_1} \rangle = \langle \boldsymbol{\varphi_2}, T_\lambda \boldsymbol{\varphi_2} \rangle = \gamma_* (i = 1, 2)$。 □

附录 C：命题 3.5 的证明

证明。注意，周期介质的扰动是通过移动障碍物引入的。因此，我们只需考虑 $i \neq j$ 对应的非对角项 $\langle \boldsymbol{\varphi_j}, T_\delta \boldsymbol{\varphi_i} \rangle$。特别是，当 $j=1$ 和 $i=2$ 时，

$$
\begin{aligned}
&\left\langle \boldsymbol{\varphi_1}, \begin{pmatrix} 0 & T_{12,\delta}(p_*,\lambda_*) \\ T_{21,\delta}(p_*,\lambda_*) & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{\varphi_2} \right\rangle \\
&= -\int_{[0,2\pi]\times[0,2\pi]} G^e(\boldsymbol{r}(\theta_1), \frac{1+2\delta}{2}\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{r}(\theta_2); p_*, \lambda_*) \cdot \varphi_{ref}(\theta_2)\varphi_{ref}(\theta_1) \cdot |\boldsymbol{r}'(\theta_2)||\boldsymbol{r}'(\theta_1)| d\theta_2 d\theta_1 \\
&\quad + \int_{[0,2\pi]\times[0,2\pi]} G^e(\frac{1+2\delta}{2}\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{r}(\theta_1), \boldsymbol{r}(\theta_2); p_*, \lambda_*) \cdot \varphi(\theta_2)\varphi(\theta_1) \cdot |\boldsymbol{r}'(\theta_2)||\boldsymbol{r}'(\theta_1)| d\theta_2 d\theta_1 \\
&= \int_{[0,2\pi]\times[0,2\pi]} \Big[G^e(\frac{1+2\delta}{2}\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{r}(\theta_1), \boldsymbol{r}(\theta_2); p_*, \lambda_*) - G^e(\boldsymbol{r}(\pi-\theta_1), \frac{1+2\delta}{2}\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{r}(\pi-\theta_2); p_*, \lambda_*) \Big] \\
&\qquad\qquad \cdot \varphi(\theta_2)\varphi(\theta_1) \cdot |\boldsymbol{r}'(\theta_2)||\boldsymbol{r}'(\theta_1)| d\theta_2 d\theta_1 .
\end{aligned} \tag{C.1}
$$

由式 (B.4),

$$
\begin{aligned}
&G^e(\frac{1+2\delta}{2}\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{r}(\theta_1), \boldsymbol{r}(\theta_2); p_*, \lambda_*) - G^e(\boldsymbol{r}(\pi-\theta_1), \frac{1+2\delta}{2}\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{r}(\pi-\theta_2); p_*, \lambda_*) \\
&= \sum_{n\geq 0} f(\lambda_*, |p_n|, r(\theta_1)\sin\theta_1, r(\theta_2)\sin\theta_2) \cos\left((2n+1)\pi \Big(\frac{1+2\delta}{2} + r(\theta_1)\cos\theta_1 - r(\theta_2)\cos\theta_2 \Big) \right) \\
&\quad - \sum_{n\geq 0} f(\lambda_*, |p_n|, r(\pi-\theta_1)\sin(\pi-\theta_1), r(\pi-\theta_2)\sin(\pi-\theta_2)) \\
&\qquad\qquad \cdot \cos\left((2n+1)\pi \Big(r(\pi-\theta_1)\cos(\pi-\theta_1) - r(\pi-\theta_2)\cos(\pi-\theta_2) - \frac{1+2\delta}{2} \Big) \right) \\
&= \sum_{n\geq 0} f(\lambda_*, |p_n|, r(\theta_1)\sin\theta_1, r(\theta_2)\sin\theta_2) \cos\left((2n+1)\pi (\frac{1+2\delta}{2} + r(\theta_1)\cos\theta_1 - r(\theta_2)\cos\theta_2) \right) \\
&- \sum_{n\geq 0} f(\lambda_*, |p_n|, r(\theta_1)\sin\theta_1, r(\theta_2)\sin\theta_2) \cos\left(-(2n+1)\pi (\frac{1+2\delta}{2} + r(\theta_1)\cos\theta_1 - r(\theta_2)\cos\theta_2) \right) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

因此，当 δ 足够小时，

$$
\left\langle \boldsymbol{\varphi_1}, \begin{pmatrix} 0 & T_{12,\delta}(p_*,\lambda_*) \\ T_{21,\delta}(p_*,\lambda_*) & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{\varphi_2} \right\rangle \equiv 0.
$$

类似的计算可得

$$
\left\langle \boldsymbol{\varphi_2}, \begin{pmatrix} 0 & T_{12,\delta}(p_*,\lambda_*) \\ T_{21,\delta}(p_*,\lambda_*) & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{\varphi_1} \right\rangle \equiv 0.
$$

因此，$\langle \boldsymbol{\varphi_2}, S\boldsymbol{\varphi_1}\rangle = \langle \boldsymbol{\varphi_1}, S\boldsymbol{\varphi_2}\rangle = 0$ 回忆起 $S = \frac{\partial T_\delta}{\partial \delta}(p_*,\ \lambda_*; \delta)\Big|_{\delta=0}$。另一方面，(B.4) 还意味着

$$
\begin{aligned}
&G^e(\boldsymbol{r}(\pi-\theta_1), \frac{1+2\delta}{2}\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{r}(\theta_2); p_*, \lambda_*) + G^e(\frac{1+2\delta}{2}\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{r}(\theta_1), \boldsymbol{r}(\pi-\theta_2); p_*, \lambda_*)\\
&= 4\sum_{n\geq 0} f\Big(\lambda_*, (2n+1)\pi, r(\theta_1)\sin\theta_1, r(\theta_2)\sin\theta_2\Big)\cos\left((2n+1)\pi\Big(\frac{1}{2}+\delta+r(\theta_1)\cos\theta_1+r(\theta_2)\cos\theta_2\Big)\right),\\
&G^e(\boldsymbol{r}(\theta_1), \frac{1+2\delta}{2}\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{r}(\pi-\theta_2); p_*, \lambda_*) + G^e(\frac{1+2\delta}{2}\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{r}(\pi-\theta_1), \boldsymbol{r}(\theta_2); p_*, \lambda_*)\\
&= 4\sum_{n\geq 0} f\Big(\lambda_*, (2n+1)\pi, r(\theta_1)\sin\theta_1, r(\theta_2)\sin\theta_2\Big)\cos\left((2n+1)\pi\Big(\frac{1}{2}+\delta-r(\theta_1)\cos\theta_1-r(\theta_2)\cos\theta_2\Big)\right).
\end{aligned}
$$

按照 (C.1) 中相同的推导可得 $\langle \boldsymbol{\varphi_1}, T_\delta(p_*, \lambda_*)\boldsymbol{\varphi_1}\rangle = -\langle \boldsymbol{\varphi_2}, T_\delta(p_*, \lambda_*)\boldsymbol{\varphi_2}\rangle \in \mathbf{R}$，因此我们得出 $\langle \boldsymbol{\varphi_1}, S\boldsymbol{\varphi_1}\rangle = -\langle \boldsymbol{\varphi_2}, S\boldsymbol{\varphi_2}\rangle \in \mathbf{R}$。 □

附录 D：命题 4.2 的证明

证明。这里我们仅证明 (4.15)。(4.17) 的证明完全相同。思路是将格林函数 (2.14) 的积分表达式拆分为不同部分，并对每一部分应用渐近展开。我们从以下分解开始：

$$G_\delta(x, y; \lambda) = T_\delta(x, y; \lambda) + U_1(x, y; \lambda, \delta) + U_2(x, y; \lambda, \delta),$$

其中

$$
\begin{aligned}
T_\delta(x, y; \lambda) = \frac{1}{2\pi}\Bigg(&\int_0^{2\pi}\sum_{n\geq 3}\frac{u_{n,\delta}(x;p)\overline{u_{n,\delta}(y;p)}}{\lambda-\lambda_{n,\delta}(p)}dp\\
&+\int_{[0,\pi-\delta^{\frac{1}{3}}]\bigcup[\pi+\delta^{\frac{1}{3}},2\pi]}\frac{u_{1,\delta}(x;p)\overline{u_{1,\delta}(y;p)}}{\lambda-\lambda_{1,\delta}(p)}dp+\int_{[0,\pi-\delta^{\frac{1}{3}}]\bigcup[\pi+\delta^{\frac{1}{3}},2\pi]}\frac{u_{2,\delta}(x;p)\overline{u_{2,\delta}(y;p)}}{\lambda-\lambda_{2,\delta}(p)}dp\Bigg),\\
U_1(x, y; \lambda, \delta) = \frac{1}{2\pi}&\int_{[\pi-\delta^{\frac{1}{3}},\pi+\delta^{\frac{1}{3}}]}\frac{u_{1,\delta}(x;p)\overline{u_{1,\delta}(y;p)}}{\lambda-\lambda_{1,\delta}(p)}dp,\\
U_2(x, y; \lambda, \delta) = \frac{1}{2\pi}&\int_{[\pi-\delta^{\frac{1}{3}},\pi+\delta^{\frac{1}{3}}]}\frac{u_{2,\delta}(x;p)\overline{u_{2,\delta}(y;p)}}{\lambda-\lambda_{2,\delta}(p)}dp.
\end{aligned}
$$

注意，$T_\delta(x, y; \lambda)$ 是式 (4.14) 中定义的积分算子 $\mathbb{T}_\delta(\lambda)$ 的核函数。我们只需考虑函数 U_1 和 U_2。我们首先研究 U_2 的渐近行为。令 $\alpha_* = \frac{\theta_*}{\gamma_*}$ 和 $\beta_* = \frac{t_*}{\gamma_*}$。根据定理 3.6，对于 $p \in (\pi-\delta^{\frac{1}{3}}, \pi+\delta^{\frac{1}{3}})$，有

$$
\begin{cases}
\lambda_{1,\delta}(p) = \lambda_* - \sqrt{\delta^2\beta_*^2 + \alpha_*^2(p-p_*)^2}\,(1+\mathcal{O}(p-p_*, \delta)),\\
u_{1,\delta}(x;p) = N(p;\delta)\left(\dfrac{i\alpha_*(p-p_*)}{\delta\beta_* + \sqrt{\delta^2\beta_*^2+\alpha_*^2(p-p_*)^2}}\phi_2(x) + r_1(x;p,\delta)\right),\ \ \|r_1(x;p,\delta)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} = \mathcal{O}(\delta^{\frac{1}{3}})
\end{cases}
\tag{D.1}
$$

$$
\begin{cases}
\lambda_{2,\delta}(p) = \lambda_* + \sqrt{\delta^2\beta_*^2 + \alpha_*^2(p-p_*)^2}\,(1+\mathcal{O}(p-p_*, \delta)),\\
u_{2,\delta}(x;p) = N(p;\delta)\left(\phi_2(x) + r_2(x;p,\delta)\right),\quad \|r_2(x;p,\delta)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} = \mathcal{O}(\delta^{\frac{1}{3}}),
\end{cases}
\tag{D.2}
$$

这里我们利用了奇狄拉克特征模 ϕ_1 在界面 Γ 上消失这一事实。归一化因子 $N(p)$ 可展开为：

$$N(p;\delta)=\left(1+L(p;\delta)+\mathcal{O}(\delta^{\frac{1}{3}})\right)^{-\frac{1}{2}},$$

其中 $L(p;\delta)=\frac{\alpha_*^2}{(p-p_*)^2(\delta\beta_*\pm\sqrt{\delta^2\beta_*^2+\alpha_*^2(p-p_*)^2})^2}$。将 (D.2) 代入积分 $U_2(x,y;\lambda,\delta)$，并令 $h:=\frac{\lambda-\lambda_*}{\delta}$，可得

$$\begin{aligned}&U_2(x,y;\lambda,\delta)\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{\pi-\delta^{\frac{1}{3}}}^{\pi+\delta^{\frac{1}{3}}}\frac{\phi_2(x)\overline{\phi_2(y)}+\phi_2(x)\overline{r_2(y;p,\delta)}+r_2(x;p,\delta)\overline{\phi_2(y)}+r_2(x;p,\delta)\overline{r_2(y;p,\delta)}}{\delta\cdot h-\sqrt{\delta^2\beta_*^2+\alpha_*^2(p-p_*)^2}\,(1+\mathcal{O}(p-p_*,\delta))}N^2(p;\delta)dp.\end{aligned}\tag{D.3}$$

注意到，以下估计对 $|p-p^*|\le\delta^{\frac{1}{3}}$和 $h\in\tilde{J}$一致成立：

$$\begin{aligned}&\delta\cdot h-\sqrt{\delta^2\beta_*^2+\alpha_*^2(p-p_*)^2}\,(1+\mathcal{O}(p-p_*,\delta))=\left(\delta\cdot h-\sqrt{\delta^2\beta_*^2+\alpha_*^2(p-p_*)^2}\right)(1+\mathcal{O}(\delta^{\frac{1}{3}})),\\&N(p;\delta)=(1+L(p;\delta))^{-\frac{1}{2}}(1+\mathcal{O}(\delta^{\frac{1}{3}})),\quad\|r_2(x;p,\delta)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}=\mathcal{O}(\delta^{\frac{1}{3}}).\end{aligned}\tag{D.4}$$

可以证明，U_2 的主阶项由 $f_2(h;\delta)\phi_2(x)\phi_2(y)$ 给出，其中

$$f_2(h;\delta)=\frac{1}{2\pi}\int_{\pi-\delta^{\frac{1}{3}}}^{\pi+\delta^{\frac{1}{3}}}\frac{1}{\delta\cdot h-\sqrt{\delta^2\beta_*^2+\alpha_*^2(p-p_*)^2}}\frac{1}{1+L(p;\delta)}dp.$$

余项记为 $R_2(x,y;h,\delta):=U_2-f_2\phi_2(x)\phi_2(y)$。令 $\mathbb{R}_2(h;\delta)$ 为以 $R_2(x,\overline{y;h,\delta})$ 为核的积分算子。注意到 (D.4) 给出

$$\begin{aligned}R_2(x,y;h,\delta)=&\frac{1}{2\pi}\int_{\pi-\delta^{\frac{1}{3}}}^{\pi+\delta^{\frac{1}{3}}}\frac{\phi_2(x)\overline{r_2(y;p,\delta)}+r_2(x;p,\delta)\overline{\phi_2(y)}+r_2(x;p,\delta)\overline{r_2(y;p,\delta)}}{\delta\cdot h-\sqrt{\delta^2\beta_*^2+\alpha_*^2(p-p_*)^2}}\frac{1+\mathcal{O}(\delta^{\frac{1}{3}})}{1+L(p;\delta)}dp\\&+\frac{1}{2\pi}\int_{\pi-\delta^{\frac{1}{3}}}^{\pi+\delta^{\frac{1}{3}}}\frac{\phi_2(x)\overline{\phi_2(y)}}{\delta\cdot h-\sqrt{\delta^2\beta_*^2+\alpha_*^2(p-p_*)^2}}\frac{\mathcal{O}(\delta^{\frac{1}{3}})}{1+L(p;\delta)}dp.\end{aligned}$$

由（D.4）可得 $\max_{|p-p_*|<\delta^{\frac{1}{3}}}\|r_2(x;p,\delta)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}=\mathcal{O}(\delta^{\frac{1}{3}})$。另一方面，

$$\begin{aligned}&\int_{\pi-\delta^{\frac{1}{3}}}^{\pi+\delta^{\frac{1}{3}}}\left|\frac{1}{\delta\cdot h-\sqrt{\delta^2\beta_*^2+\alpha_*^2(p-p_*)^2}}\right|\left|\frac{1}{1+L(p;\delta)}\right|dp\\&\lesssim\int_{\pi-\delta^{\frac{1}{3}}}^{\pi+\delta^{\frac{1}{3}}}\left|\frac{1}{\delta\cdot h-\sqrt{\delta^2\beta_*^2+\alpha_*^2(p-p_*)^2}}\right|dp\\&=\int_{-tan^{-1}(\frac{\alpha_*}{\beta_*}\delta^{-\frac{2}{3}})}^{tan^{-1}(\frac{\alpha_*}{\beta_*}\delta^{-\frac{2}{3}})}\frac{\beta_*}{\alpha_*}\cdot\left|\frac{\sec^2(\theta)}{h-|\beta_*|\sec(\theta)}\right|d\theta=\mathcal{O}(\log(\delta)).\end{aligned}$$

因此，我们可以得出结论：$\|\mathbb{R}_2(h;\delta)\|_{\mathcal{B}(\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\,H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))}=\mathcal{O}(\delta^{\frac{1}{3}}\log(\delta))$，由此可得（4.16）中的第二个等式。

U_1 的分析类似。将其首阶项设为

$$f_1(h;\delta)\phi_2(x)\overline{\phi_2(y)} := \left(\frac{1}{2\pi}\int_{\pi-\delta^{\frac{1}{3}}}^{\pi+\delta^{\frac{1}{3}}} \frac{1}{\delta\cdot h+\sqrt{\delta^2\beta_*^2+\alpha_*^2(p-p_*)^2}}\frac{L(p;\delta)}{1+L(p;\delta)}dp\right)\phi_2(x)\overline{\phi_2(y)}$$

以及余项 $R_1(x,y;\,h,\delta) := U_1(x,y;\,\lambda,\delta) - f_1(h;\,\delta)\phi_2(x)\phi_2(y)$。我们将与 $f_1(h;\,\delta)\phi_2(x)\phi_2(y)$ 和 $R_1(x,y;h,\delta)$ 相关联的算子分别记为 $f_1(h;\,\delta)\mathbb{P}$ 和 $\mathbb{R}_1(h;\,\delta)$。于是，(4.16) 中的第一个等式可直接通过重复估计 f_2和 $\mathbb{R}_2$ 在 f_1 和 $\mathbb{R}_1$上的过程得到，因篇幅所限，这里从略。

综合以上所有结果，即得 (4.15)。最后指出， $\mathbb{G}_\delta$ 和 $\mathbb{G}_{-\delta}$的分析并无本质区别：将 (D.1) 和 (D.2) 替换为 (3.18) 和 (3.19)，沿用相同的论证思路即可推出 (4.17)。

□

附录 E：命题 4.3 和 4.4 的证明

In A附录 E-F 中， $\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ 与 $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ 之间的对偶配对记为 $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

命题 *4.3* 的证明。 我们首先证明 (4.20)。注意，对于 $y\in\Gamma$，由 (4.19) 可得

$$\mathbb{T}_0\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\Big|_\Gamma\right)(y)=\int_\Gamma G(y,x;\lambda_*)\frac{\partial v_1}{\partial x_1}dx_2+\frac{i}{2\alpha_*}\int_\Gamma\left(v_1(y)\overline{v_1(x)}+v_2(y)\overline{v_2(x)}\right)\frac{\partial v_1}{\partial x_1}(x)dx_2.$$

根据命题 2.5，我们有 $\int_\Gamma G(y,x;\,\lambda_*)\frac{\partial v_1}{\partial x_1}dx_2=\frac{1}{2}v_1(y)$；另一方面，引理 2.2 意味着 $\frac{i}{2\alpha_*}\int_\Gamma\left(v_1(y)\overline{v_1(x)}+v_2(y)\overline{v_2(x)}\right)\frac{\partial v_1}{\partial x_1}(x)dx_2=\frac{i}{\alpha_*}\int_\Gamma v_1(y)\overline{v_1(x)}\frac{\partial v_1}{\partial x_1}(x)dx_2$。因此

$$\mathbb{T}_0\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\Big|_\Gamma\right)(y)=\frac{1}{2}v_1(y)+\frac{i}{\alpha_*}v_1(y)\int_\Gamma\overline{v_1(x)}\frac{\partial v_1}{\partial x_1}(x)dx_2.$$

由引理 2.3 可得

$$\mathbb{T}_0\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\Big|_\Gamma\right)(y)=\frac{1}{2}v_1(y)-\frac{1}{2}v_1(y)=0.$$

因此，$\mathrm{span}\{\frac{\partial v_1}{\partial x_1}|_\Gamma\}\subset\mathbf{Ker}\mathbb{T}_0$。反之，假设 $\psi\in\mathbf{Ker}\mathbb{T}_0$且 $\langle\psi,v_1\rangle=0$。我们旨在证明$\psi=0$。注意，(2.3) 和 (4.19) 得出

$$\begin{aligned}0=2\mathbb{T}_0\psi&=\left(2\int_\Gamma\left(G_0^+(x,y;\lambda_*)-\frac{i}{2\alpha_*}v_1(x)\overline{v_1(y)}+\frac{i}{2\alpha_*}v_2(x)\overline{v_2(y)}\right)\psi(y)dy_2\right)\Big|_\Gamma\\&=\left(2\int_\Gamma G_0^+(x,y;\lambda_*)\psi(y)dy_2\right)\Big|_\Gamma-\frac{i}{\alpha_*}v_1(x)\Big|_\Gamma\cdot\int_\Gamma\overline{v_1(y)}\psi(y)dy_2+\frac{i}{\alpha_*}v_2(x)\Big|_\Gamma\cdot\int_\Gamma\overline{v_2(y)}\psi(y)dy_2\end{aligned}$$

于是，引理 2.2 给出

$$\begin{aligned}0&=\left(2\int_\Gamma G_0^+(x,y;\lambda_*)\psi(y)dy_2\right)\Big|_\Gamma-\frac{i}{\alpha_*}v_1(x)\Big|_\Gamma\cdot\int_\Gamma\overline{v_1(y)}\psi(y)dy_2+\frac{i}{\alpha_*}v_1(x)\Big|_\Gamma\cdot\int_\Gamma\overline{v_1(y)}\psi(y)dy_2\\&=\left(2\int_\Gamma G_0^+(x,y;\lambda_*)\psi(y)dy_2\right)\Big|_\Gamma.\end{aligned}$$

因此，如果我们定义 $v(x) := 2\int_\Gamma G_0^+(x,\ y;\lambda_*)\psi(y)dy_2$ 对于 $x \in \Omega^+$，那么有 $v|_\Gamma = 0$。此外，利用（2.3）以及 $\langle \psi, v_1\rangle = 0$ 这一事实，我们还可以得到 $v(x)$ 的另一种表达式

$$v(x) = 2\int_\Gamma G(x,y;\lambda_*)\psi(y)dy_2, \quad x \in \Omega^+. \tag{E.1}$$

接下来我们证明，对于 $x \in \Omega^+$，有 $v(x) \equiv 0$，这将导出所声称的 $\psi = 0$。为此，我们考虑 v 的如下奇延拓：

$$\tilde{v}(x_1,x_2) = \begin{cases} v(x_1,x_2), & x_1 \geq 0, \\ -v(-x_1,x_2), & x_1 < 0, \end{cases}$$

由于 $v|_\Gamma = 0$，注意到 (2.3) 中引入的 G_0^+呈指数衰减，因此有 $\tilde{v} \in \mathcal{V}(\lambda_*)\bigcap L^2(\Omega)$。于是，$\tilde{v}$ 给出了未扰动周期结构 Ω 的一个 L^2-特征模。但根据假设 1.1，λ_* 不是嵌入特征值。因此，$\tilde{v} \equiv 0$，从而对于$x \in\Omega^+$，有 $v(x) \equiv 0$。另一方面，利用引理 2.4，(E.1) 蕴含 $v(x)$ 可延拓至整个空间 Ω。此外，延拓后的函数在 Ω 中恒等于零。由此可得

$$\begin{aligned} 0 = (\Delta_x + \lambda_*)v(x) &= 2(\Delta_x+\lambda_*)\int_\Gamma G(x,y;\lambda_*)\psi(y_2)dy_2 \\ &= 2(\Delta_x+\lambda_*)\int_\Omega G(x,y;\lambda_*)\left(\psi(y_2)\tilde{\delta}(y_1)\right)dy = \psi(y_2)\tilde{\delta}(y_1). \end{aligned}$$

因此，$\psi = 0$ 在 $\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ 中。综上，$\mathrm{Ker}\mathbb{T}_0$ 至多是一维的。最后，由于 $\mathrm{Ker}\mathbb{T}_0 \supset \mathrm{span}\{\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\big|_\Gamma\}$ 且 $\langle \frac{\partial v_1}{\partial x_1}, v_1\rangle \neq 0$，我们得出 $\mathrm{Ker}\mathbb{T}_0 = \mathrm{span}\{\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\big|_\Gamma\}$。 □

命题 *4.4* 的证明。这里的证明与引理 3.1 的思路相同。我们指出证明中的主要差异，并略去类似的步骤。

设 $\mathrm{Tr}: H^1(\Omega) \to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ $f \mapsto f|_\Gamma$ 为迹算子，$E: H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \to H^1(\Omega)$ 为 Sobolev 延拓算子，使得 $\mathrm{Tr}\circ E = id|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}$。对于每个 $\psi \in \tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$，令$c_n(\psi;\ p) := \langle \psi, u_n(\cdot;\ p)\rangle$，其中 $\{u_n(\cdot;\ p)\}_{n\geq 1}$是与图 1 中波导对应、特征值为 $\lambda_n(p)$ 的布洛赫特征模。现在将 $\mathbb{T}_0$ 分解为 $\mathbb{T}_0 = \mathbb{T}_0^{(1)} + \mathbb{T}_0^{(2)}$，其中对于任意 $\psi \in \tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$,

$$\begin{cases} \mathbb{T}_0^{(1)}\psi := \mathrm{Tr}\left(\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\sum_{n\geq 3}\frac{c_n(\psi;p)}{\lambda_*-\lambda_n(p)}u_n(\cdot;p)dp - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{n=1,2}c_n(\psi;p)u_n(\cdot;p)dp\right), \\ \mathbb{T}_0^{(2)}\psi := \mathrm{Tr}\left(\dfrac{1}{2\pi}\mathrm{p.v.}\displaystyle\int_0^{2\pi}\sum_{n=1,2}\frac{c_n(\psi;p)}{\lambda_*-\mu_n(p)}v_n(\cdot;p)dp + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{n=1,2}c_n(\psi;p)u_n(\cdot;p)dp\right). \end{cases}$$

与引理 3.1 的证明类似，我们将证明 $\mathbb{T}_0^{(1)}$ 可逆，而 $\mathbb{T}_0^{(2)}$ 是紧算子，由此可知 $\mathbb{T}_0$ 是零指标 Fredholm 算子。

为了证明 $\mathbb{T}_0^{(1)}$ 的可逆性，我们只需：(1) 建立一个类似于 (3.9) 的估计，由此推出 $\mathbb{T}_0^{(1)}$ 的单射性以及 Ran ($\mathbb{T}_0^{(1)}$) 的闭性；(2) 得到一个与 (3.12) 相对应的恒等式，以证明 Ran ($\mathbb{T}_0^{(1)}$) 在 $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ 中稠密。注意，对于 $\mathbb{T}_0^{(1)}$，(3.12)

当对偶对取为 $\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ 时仍然成立，因此 (2) 得证。现在证明 (1)。注意，下面这个不等式是 (3.10) 的对应形式，显然成立

$$|\langle\overline{\psi},\mathbb{T}_0^{(1)}\psi\rangle|\gtrsim\int_0^{2\pi}\sum_{n\geq1}\frac{|c_n(\psi;p)|^2}{|\lambda_*-\lambda_n(p)|}dp. \tag{E.2}$$

根据 Floquet-Bloch理论，对于每个 $\phi\in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$，我们可以写成 $E\phi=\int_0^{2\pi}\sum_{n\geq1}a_n(p)u_n(x;p)dp$。由此可得

$$\begin{aligned}
\left|\langle\psi,\overline{\phi}\rangle\right|&=\left|\langle\psi,\overline{\mathrm{Tr}(E\phi)}\rangle\right|=\left|\int_0^{2\pi}\sum_{n\geq1}\overline{a_n(p)}\cdot c_n(\psi;p)dp\right|\\
&\leq\left|\int_0^{2\pi}(\sum_{n\geq1}|\lambda_*-\lambda_n(p)||a_n(p)|^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(\sum_{n\geq1}\frac{|c_n(\psi;p)|^2}{|\lambda_*-\lambda_n(p)|})^{\frac{1}{2}}dp\right|\\
&\leq\left(\int_0^{2\pi}\sum_{n\geq1}|\lambda_*-\lambda_n(p)||a_n(p)|^2dp\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{2\pi}\sum_{n\geq1}\frac{|c_n(\psi;p)|^2}{|\lambda_*-\lambda_n(p)|}dp\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\lesssim\left(\int_0^{2\pi}\sum_{n\geq1}(1+\lambda_n(p))|a_n(p)|^2dp\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{2\pi}\sum_{n\geq1}\frac{|c_n(\psi;p)|^2}{|\lambda_*-\lambda_n(p)|}dp\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

利用 (2.16)，我们进一步得到

$$\left|\langle\psi,\overline{\phi}\rangle\right|\lesssim\|E\phi\|_{H^1(\Omega)}\left(\int_0^{2\pi}\sum_{n\geq1}\frac{|c_n(\psi;p)|^2}{|\lambda_*-\lambda_n(p)|}dp\right)^{\frac{1}{2}}.$$

由于 $\|E\phi\|_{H^1(\Omega)}\lesssim\|\phi\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}$，我们可以得出

$$\|\psi\|_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)}\lesssim\left(\int_0^{2\pi}\sum_{n\geq1}\frac{|c_n(\psi;p)|^2}{|\lambda_*-\lambda_n(p)|}dp\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{E.3}$$

那么，所需的估计 $|\langle\psi,\mathbb{T}_0^{(1)}\overline{\psi}\rangle|\gtrsim\|\psi\|_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)}$ 由 (E.2) 和 (E.3 得出).

接下来我们证明 $\mathbb{T}_0^{(2)}:\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ 是紧的。为此，我们固定一个光滑区域 O，使得 $\Gamma\subset O\subset\Omega$。然后，利用$H^2(O)$ 到 $H^1(O)$ 的嵌入的紧性，以及从 $H^1(O)$ 到 $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ 的限制算子的有界性，只需证明 $(\mathbb{T}_0^{(2)}\psi)(x)$ $(x\in O)$ 的自然延拓关于 $H^2(O)$ 范数对 $\|\vec{\psi}\|_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)}\leq1$ 一致有界。这里我们只估计 $u_\psi(x)$ 的 $H^2(O)$ 范数：$=\frac{1}{2\pi}$柯西主值 $\int_0^{2\pi}c_1(\psi;p)\lambda_*-\mu_1(p)v_1(x;p)dp$，而 $\mathbb{T}_0^{(2)}\psi$ 中的其他项可以类似地估计。为继续论证，回顾一下，$\mu_1(p)$ 和 $v_1(x;\overline{p})$ 在 p 中关于 $[0,2\pi]$ 的一个复邻域内均为解析函数，由此利用 Banach 值函数的柯西主值估计可得以下不等式[8],

$$\|u_\psi\|_{H^2(O)}\lesssim\max_{0\leq p\leq2\pi}\left(\|v_1(\cdot;p)\|_{H^2(O)}+\|\partial_pv_1(\cdot;p)\|_{H^2(O)}\right)\|\psi\|_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)}. \tag{E.4}$$

对于 (E.4) 中的第一项，注意到拉普拉斯算子特征函数的正则性意味着$\|v_1(\cdot;\ p)\|_{H^2(O)} < \infty$ 对于每个 $p \in [0, 2\pi]$ 都成立。因此，解析性给出 $\max_{0\le p\le 2\pi} \|v_1(\cdot;p)\|_{H^2(O)} <\infty$。其次，注意到偏导数 $\partial_p v_1(\cdot;p)$ 满足以下方程

$$(\Delta_x + \mu_1(p))\partial_p v_1(x;p) = \mu_1' v_1(x;p), \quad x \in O.$$

于是，椭圆方程的标准正则性理论表明，$\max_{0\le p\le 2\pi} \|\partial_p v_1(\cdot;p)\|_{H^2(O)} <\infty$。因此，由 (E.4) 可知 $\|u_\psi\|_{H^2(O)}$ 一致有界。命题得证。

□

附录 F：命题 4.5 的证明

证明。 步骤1。由 (4.15) 和 (4.17),

$$\begin{aligned}\big(\mathbb{G}_\delta + \mathbb{G}_{-\delta}\big)(\lambda_* + \delta\cdot h) &= \big(\mathbb{T}_\delta + \mathbb{T}_{-\delta}\big)(\lambda_* + \delta\cdot h)\\ &\quad + \Big[(f_1 + f_2 + \tilde{f}_1 + \tilde{f}_2)(h;\delta)\mathbb{P} + (\mathbb{R}_1 + \mathbb{R}_2 + \tilde{\mathbb{R}}_1 + \tilde{\mathbb{R}}_2)(h;\delta)\Big].\end{aligned} \tag{F.1}$$

根据命题 4.2，$\lim_{\delta\to 0}\|\mathbb{R}_1 + \mathbb{R}_2 + \mathbb{R}_1 + \mathbb{R}_2\| = 0$。此外，直接计算可得

$$\begin{aligned}(f_1 + f_2 + \tilde{f}_1 + \tilde{f}_2)(h;\delta) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\pi-\delta^{\frac{1}{3}}}^{\pi+\delta^{\frac{1}{3}}} \left(\frac{1}{\delta\cdot h - \sqrt{\delta^2\beta_*^2 + \alpha_*^2(p-p_*)^2}} + \frac{1}{\delta\cdot h + \sqrt{\delta^2\beta_*^2 + \alpha_*^2(p-p_*)^2}}\right) dp\\ &= -\frac{\delta\cdot h}{\pi}\int_{\pi-\delta^{\frac{1}{3}}}^{\pi+\delta^{\frac{1}{3}}} \frac{1}{\delta^2(\beta_*^2 - h^2) + \alpha_*^2(p-p_*)^2}dp = -\frac{1}{\pi\beta_*\alpha_*}\frac{h}{\sqrt{1-(\frac{h}{\beta_*})^2}}\cdot 2\tan^{-1}(\frac{\alpha_*}{\sqrt{\beta_*^2-h^2}}\delta^{-\frac{2}{3}}).\end{aligned}$$

对于 $h \in J$，可以证明以下收敛是一致的:

$$\lim_{\delta\to 0}(f_1 + f_2 + \tilde{f}_1 + \tilde{f}_2)(h;\delta) = \beta(h) := -\frac{1}{\beta_*\alpha_*}\frac{h}{\sqrt{1-(\frac{h}{\beta_*})^2}}.$$

在证明的其余部分，我们来考察项 $\mathbb{T}_\delta(\lambda_* + \delta\cdot h)$ 的极限。

步骤2。我们分别将算子 $\mathbb{T}_\delta(\lambda)$ 和 $\mathbb{T}_0$ 分解为

$$\mathbb{T}_\delta(\lambda) = \mathbb{T}_\delta^{prop}(\lambda) + \mathbb{T}_\delta^{evan}(\lambda), \quad \mathbb{T}_0 = \mathbb{T}_0^{prop} + \mathbb{T}_0^{evan},$$

with

$$\begin{cases}\mathbb{T}_\delta^{prop}(\lambda) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{[0,\pi-\delta^{\frac{1}{3}}]\bigcup[\pi+\delta^{\frac{1}{3}},2\pi]}\sum_{n=1,2}\frac{\langle\cdot,\overline{u_{n,\delta}(x;p)}\rangle}{\lambda-\lambda_{n,\delta}(p)}u_{n,\delta}(x;p)dp,\\ \mathbb{T}_\delta^{evan}(\lambda) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\sum_{n\ge 3}\frac{\langle\cdot,\overline{u_{n,\delta}(x;p)}\rangle}{\lambda-\lambda_{n,\delta}(p)}u_{n,\delta}(x;p)dp,\end{cases} \tag{F.2}$$

$$\begin{cases}\mathbb{T}_0^{prop} = \dfrac{1}{2\pi}\lim\limits_{\epsilon\to 0}\displaystyle\int_{[0,\pi-\epsilon)\bigcup(\pi+\epsilon,2\pi]}\sum_{n=1,2}\frac{\langle\cdot,\overline{v_n(x;p)}\rangle}{\lambda_*-\lambda_n(p)}v_n(x;p)dp,\\ \mathbb{T}_0^{evan} = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\sum_{n\ge 3}\frac{\langle\cdot,\overline{u_n(x;p)}\rangle}{\lambda_*-\lambda_n(p)}u_n(x;p)dp,\end{cases}$$

其中， v_n 和 μ_n （$n=1$，2）在命题 1.5 中引入。我们进一步引入以下辅助算子

$$\begin{aligned}\mathbb{T}_{0,\delta}^{prop} &= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1,2}\int_{[0,\pi-\delta^{\frac{1}{3}}]\bigcup[\pi+\delta^{\frac{1}{3}},2\pi]}\frac{\langle\cdot,\overline{u_n(x;p)}\rangle}{\lambda_*-\lambda_n(p)}u_n(x;p)dp\\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1,2}\int_{[0,\pi-\delta^{\frac{1}{3}}]\bigcup[\pi+\delta^{\frac{1}{3}},2\pi]}\frac{\langle\cdot,\overline{v_n(x;p)}\rangle}{\lambda_*-\mu_n(p)}v_n(x;p)dp.\end{aligned}$$

步骤 3。在此步骤中，我们证明

$$\lim_{\delta\to 0}\|\mathbb{T}_{\delta}^{prop}(\lambda_*+\delta\cdot h)-\mathbb{T}_0^{prop}\|_{\mathcal{B}(\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma),H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))}=0. \tag{F.3}$$

首先，我们证明以下极限

$$\lim_{\delta\to 0}\|\mathbb{T}_{0,\delta}^{prop}-\mathbb{T}_0^{prop}\|_{\mathcal{B}(\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma),H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))}=0, \tag{F.4}$$

事实上，根据 $\mathbb{T}_{0\,\delta}^{prop}$，和 $\mathbb{T}_0^{prop}$ 的定义可得

$$(\mathbb{T}_{0,\delta}^{prop}-\mathbb{T}_0^{prop})\psi=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=1,2}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{[\pi-\delta^{\frac{1}{3}},\pi-\epsilon)\bigcup(\pi+\epsilon,\pi+\delta^{\frac{1}{3}},2\pi]}\frac{\langle\psi(y),\overline{v_n(y;p)}\rangle}{\lambda_*-\mu_n(p)}v_n(x;p)dp,\quad \psi\in\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

然后，根据 v_n 和 μ_n $(n=1,\ 2)$的解析性可得以下估计

$$\|(\mathbb{T}_{0,\delta}^{prop}-\mathbb{T}_0^{prop})\psi\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}\lesssim\delta^{\frac{1}{3}}\sum_{n=1,2}\left(\|v_n(x;\pi)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}+\|\partial_p v_n(x;\pi)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}\right)\|\psi\|_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)}$$

这与 (E.4) 类似。因此

$$\|\mathbb{T}_{0,\delta}^{prop}-\mathbb{T}_0^{prop}\|_{\mathcal{B}(\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma),H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))}\lesssim\delta^{\frac{1}{3}}\sum_{n=1,2}\left(\|v_n(x;\pi)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}+\|\partial_p v_n(x;\pi)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}\right),$$

其中 (F.4) 得证。

接下来，我们证明

$$\lim_{\delta\to 0}\|\mathbb{T}_{\delta}^{prop}(\lambda_*+\delta\cdot h)-\mathbb{T}_{\delta}^{prop}(\lambda_*)\|=0. \tag{F.5}$$

注意，根据定理 3.6 和假设 1.1，以下估计对所有$h\in\tilde{J}$和 $p\in[0,\pi-\delta^{\frac{1}{3}}]\bigcup[\pi+\delta^{\frac{1}{3}},2\pi]$一致成立

$$|\lambda_*+\delta\cdot h-\lambda_{n,\delta}(p)|\gtrsim\delta^{\frac{1}{3}},\quad \|u_{n,\delta}(\cdot;p)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}=\mathcal{O}(1)\quad (n=1,2).$$

接下来，对于每个 $\psi\in\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$，令 $v:=(\mathbb{T}_{\delta}^{prop}(\lambda_*+\delta\cdot h)-\mathbb{T}_{\delta}^{prop}(\lambda_*))\,\psi\in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$。注意， $v(x)$

可利用 (F.2) 将其延拓至 $x \in \Omega_\delta$。我们可以证明

$$\begin{aligned}
\|v\|^2_{H^1(\Omega_\delta)} &= \Big\| \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1,2} \int_{[0,\pi-\delta^{\frac{1}{3}}] \bigcup [\pi+\delta^{\frac{1}{3}},2\pi]} \frac{\delta \cdot h \langle \psi, \overline{u_{n,\delta}(x;p)} \rangle}{(\lambda_* + \delta \cdot h - \lambda_{n,\delta}(p))(\lambda_* - \lambda_{n,\delta}(p))} u_{n,\delta}(x;p) dp \Big\|^2_{H^1(\Omega_\delta)} \\
&= \sum_{n=1,2} \int_{[0,\pi-\delta^{\frac{1}{3}}] \bigcup [\pi+\delta^{\frac{1}{3}},2\pi]} (1+\lambda_{n,\delta}(p)) \Big| \frac{\delta \cdot h \langle \psi, \overline{u_{n,\delta}(x;p)} \rangle}{(\lambda_* + \delta \cdot h - \lambda_{n,\delta}(p))(\lambda_* - \lambda_{n,\delta}(p))} \Big|^2 dp \\
&\lesssim \delta^{\frac{2}{3}} |h|^2 \sum_{n=1,2} \int_{[0,\pi-\delta^{\frac{1}{3}}] \bigcup [\pi+\delta^{\frac{1}{3}},2\pi]} |\langle \psi, \overline{u_{n,\delta}(x;p)} \rangle|^2 dp \\
&\lesssim \delta^{\frac{2}{3}} |h|^2 \sum_{n=1,2} \int_{[0,\pi-\delta^{\frac{1}{3}}] \bigcup [\pi+\delta^{\frac{1}{3}},2\pi]} \|\psi\|^2_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} dp \lesssim \delta^{\frac{2}{3}} |h|^2 \|\psi\|^2_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)}
\end{aligned} \tag{F.6}$$

其中第二个等号由 (2.16) 推得。因此我们有

$$\| \left(\mathbb{T}^{prop}_\delta(\lambda_* + \delta \cdot h) - \mathbb{T}^{prop}_\delta(\lambda_*) \right) \psi \|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \lesssim \|v\|_{H^1(\Omega_\delta)} \lesssim \delta^{\frac{1}{3}} |h| \|\psi\|_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)},$$

由此可得（F.5）。

接下来我们证明,

$$\|\mathbb{T}^{prop}_\delta(\lambda_*) - \mathbb{T}^{prop}_{0,\delta}\|_{\mathcal{B}(\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))} \lesssim \delta^{\frac{1}{3}} |h|. \tag{F.7}$$

通过与我们在定理 3.6 的证明中所用的类似微扰论证，可得:

$$|\lambda_{n,\delta}(p) - \lambda_n(p)| = \mathcal{O}(\delta), \quad \|u_{n,\delta}(\cdot;p) - u_n(\cdot;p)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} = \mathcal{O}(\delta),$$

对于 $n = 1, 2$ 和 $p \in (0, \pi) \bigcup (\pi, 2\pi)$ 一致成立。再次，对于每个 $\phi \in \tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$，令 $u := \mathbb{T}^{prop}_\delta(\lambda_*)\phi - \mathbb{T}^{prop}_0, \delta \phi$，并将 u 延拓为定义在 Ω_δ 上的函数。于是有

$$\begin{aligned}
u =& \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1,2} \int_{[0,\pi-\delta^{\frac{1}{3}}] \bigcup [\pi+\delta^{\frac{1}{3}},2\pi]} \frac{\langle \psi, \overline{u_{n,\delta}(x;p)} \rangle u_{n,\delta}(x;p)}{\lambda_* - \lambda_{n,\delta}(p)} - \frac{\langle \psi, \overline{u_{n,\delta}(x;p)} \rangle u_n(x;p)}{\lambda_* - \lambda_{n,\delta}(p)} dp \\
&+ \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1,2} \int_{[0,\pi-\delta^{\frac{1}{3}}] \bigcup [\pi+\delta^{\frac{1}{3}},2\pi]} \frac{\langle \psi, \overline{u_{n,\delta}(x;p)} \rangle u_n(x;p)}{\lambda_* - \lambda_{n,\delta}(p)} - \frac{\langle \psi, \overline{u_n(x;p)} \rangle u_n(x;p)}{\lambda_* - \lambda_{n,\delta}(p)} dp \\
&+ \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1,2} \int_{[0,\pi-\delta^{\frac{1}{3}}] \bigcup [\pi+\delta^{\frac{1}{3}},2\pi]} \frac{\langle \psi, \overline{u_n(x;p)} \rangle u_n(x;p)}{\lambda_* - \lambda_{n,\delta}(p)} - \frac{\langle \psi, \overline{u_n(x;p)} \rangle u_n(x;p)}{\lambda_* - \lambda_n(p)} dp.
\end{aligned}$$

对上述等式右端的每一项应用与（F.6）相同的估计方法，即可得到（F.7）。

综上，结合 (F.4)、(F.5) 和 (F.7)，可推得 (F.3)。

步骤 4。我们证明

$$\lim_{\delta \to 0} \|\mathbb{T}^{evan}_\delta(\lambda_* + \delta \cdot h) - \mathbb{T}^{evan}_0\|_{\mathcal{B}(\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))} = 0. \tag{F.8}$$

为此，在 $\mathcal{B}(\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\ H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))$ 中定义以下辅助算子，其中 $p \in [0, 2\pi]$

$$\mathbb{T}^{evan}_\delta(\lambda; p) := \sum_{n \geq 3} \frac{\langle \cdot, \overline{u_{n,\delta}(x;p)} \rangle}{\lambda - \lambda_{n,\delta}(p)} u_{n,\delta}(x;p), \quad \mathbb{T}^{evan}_0(\lambda; p) := \sum_{n \geq 3} \frac{\langle \cdot, \overline{u_n(x;p)} \rangle}{\lambda - \lambda_n(p)} u_n(x;p).$$

于是我们有

$$\mathbb{T}_{\delta}^{evan}(\lambda)=\int_{0}^{2\pi}\mathbb{T}_{\delta}^{evan}(\lambda;p)dp,\quad \mathbb{T}_{0}^{evan}(\lambda)=\int_{0}^{2\pi}\mathbb{T}_{0}^{evan}(\lambda;p)dp. \tag{F.9}$$

我们旨在证明：(1) 对每个 $p\in[0,2\pi]$ and$\delta\ll 1$，$\mathbb{T}_{\delta}^{evan}(\lambda_{*}+\delta\cdot h;\ p)$ 的范数一致有界；(2) $\mathbb{T}_{\delta}^{evan}(\lambda_{*}+\delta\cdot h;\ p)$ 是关于 p 的连续算子值函数；(3) 对几乎处处的 $p\in[0,2\pi]$，$\mathbb{T}_{\delta}^{evan}(\lambda_{*}+\delta\cdot h;\ p)$ 在算子范数下收敛到 $\mathbb{T}_{0}^{evan}(\lambda_{*};p)$。那么 (F.8) 可直接由控制收敛定理推出。下文中，我们将在步骤 5 引入一些记号，并分别在步骤 6、步骤 7 和步骤 8 证明 (1)、(2) 和 (3)。

Step 5. 我们固定一些记号。记 $C_{\delta}:=\Omega_{\delta}\cap Y$，并将 $V_{p,\delta}$ of$H^{1}(C_{\delta})$ 的闭子空间记为 $V_{p,\delta}:=\overline{\text{span}\{u_{n,\delta}(\cdot;p)\}_{n\geq 3}}\subset H^{1}(C_{\delta})$。于是，迹算子可以定义在$V_{p,\delta}$上，即 $\text{Tr}:V_{p,\delta}\to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$。此外，我们用 $M:\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\to(V_{p,\delta})^{*}$ 表示 Tr 的伴随，即 $\bar{M}:=Tr^{*}$。显然，对于每个 $p\in[0,2\pi]$ 和 $\delta\ll 1$，$\|\text{Tr}\|$ and $\|M\|$ 一致有界，因为 $D_{1,\delta}$ 和 $D_{2,\delta}$ 都远离 Γ。

步骤 6。我们证明 $\|\mathbb{T}_{\delta_{*}}^{evan}(\lambda+\delta\cdot h;p)\|$ 在 p 中一致有界。为此，我们定义如下半双线性型 $a_{p,\delta}(\cdot,\cdot)$，其定义于 $V_{p,\delta}$，以及与之对应的算子 $A_{p,\delta}:V_{p,\delta}\to(V_{p,\delta})^{*}$，定义如下：

$$a_{p,\delta}(u,v):=-\sum_{n\geq 3}\lambda_{n,\delta}(p)\langle u(x),\overline{u_{n,\delta}(x;p)}\rangle_{(V_{\delta,p})^{*}\times V_{\delta,p}}\cdot\langle\overline{v(x)},u_{n,\delta}(x;p)\rangle_{(V_{\delta,p})^{*}\times V_{\delta,p}},$$

$$a_{p,\delta}(u,v)\equiv\langle A_{p,\delta}u,v\rangle_{(V_{\delta,p})^{*}\times V_{\delta,p}},$$

那么，当其定义良好时，预解式 $(\lambda+A_{p,\ \delta})^{-1}$ 可以展开为其谱形式。

$$(\lambda+A_{p,\delta})^{-1}=\sum_{n\geq 3}\frac{1}{\lambda-\lambda_{n,\delta}(p)}\langle\cdot,\overline{u_{n,\delta}(x;p)}\rangle_{(V_{\delta,p})^{*}\times V_{\delta,p}}u_{n,\delta}(x;p).$$

因此，$\mathbb{T}_{\delta}^{evan}(\lambda;p)$可分解为：

$$\mathbb{T}_{\delta}^{evan}(\lambda;p)=\text{Tr}\circ(\lambda+A_{p,\delta})^{-1}\circ M. \tag{F.10}$$

我们注意到，对于 $\lambda=\lambda_{*}+\delta\cdot h$ 且满足 $h\in J$ 的情形，根据 (2.16)，存在一个与 δ 和 p 均无关的 $c>0$，使得

$$|a_{p,\delta}(u,u)+\lambda\langle u,u\rangle_{V_{\delta,p}\times V_{\delta,p}}|\geq c\|u\|^{2}$$

对于任意 $u\in V_{p,\ \delta}$。因此，根据拉克斯–米尔格拉姆定理，我们有 $\|(\lambda+A_{p,\ \delta})^{-1}\|\leq c^{-1}$。然后，利用 (F.10) 可得 $\|\mathbb{T}_{\delta}^{evan}(\lambda_{*}+\delta\cdot h;p)\|$ 的一致有界性。

步骤7。我们证明 $\mathbb{T}_{\delta}^{evan}(\lambda;p)$关于 $p\in[0,2\pi]$的连续性。实际上，半双线性$a_{p,\delta}(\cdot,\cdot)$的定义意味着$A_{p,\delta}=\Delta|_{V_{p,\delta}}$。因此，对于每个固定的 δ，算子$e^{-ipx_{1}}A_{p,\delta}e^{ipx_{1}}=(\nabla+ip\boldsymbol{e}_{1})^{2}|_{V_{0,\delta}}$在 p中是A型解析的，其含义是，对于每个$u\in V_{0,\delta}$，$(e^{-ipx_{1}}A_{p,\delta}e^{ipx_{1}})\,u\in(V_{0,\delta})^{*}$ 关于 p 是解析的向量值函数（见 [24]的第七章第二节）。由此，同一章中的讨论表明$e^{-ipx_{1}}A_{p,\delta}e^{ipx_{1}}:V_{0,\ \delta}\to(V_{0,\delta})^{*}$ 是解析的。于是，根据 [24], 第367页的定理1.3，我们得到 $e^{-ipx_{1}}(\lambda+A_{p,\delta})^{-1}e^{ipx_{1}}:(V_{0,\delta})^{*}\to V_{0,\delta}$ 是关于 $\mathbb{T}_{\delta}^{evan}$ 的解析算子值

函数（参见 [24]第七章中的讨论）。另一方面，我们可以将 $\mathbb{T}_\delta^{evan}(\lambda;p)$分解为

$$\mathbb{T}_\delta^{evan}(\lambda;p)=(\mathrm{Tr}\circ e^{ipx_1})\circ(e^{-ipx_1}(\lambda+A_{p,\delta})^{-1}e^{ipx_1})\circ(e^{-ipx_1}\circ M).$$

注意到，上述右侧方括号内的所有算子的定义域均与 p 无关，且关于 p 连续。因此，对于每个固定的 δ， $\mathbb{T}_\delta^{evan}(\lambda;p)$ 关于 $p\in[0,2\pi]$ 连续。

步骤 8. 我们证明，对于几乎处处的 $p\in[0,2\pi]$， $\mathbb{T}_\delta^{evan}(\lambda_*+\delta\cdot h;p)$ 在算子范数意义下收敛到 $\mathbb{T}_0^{evan}(\lambda_*;p)$。为此，我们将 $(\lambda+A_{p,\delta})^{-1}$ 的预解式恒等式应用于 (F.10)，得到

$$\mathbb{T}_\delta^{evan}(\lambda_*+\delta\cdot h;p)-\mathbb{T}_\delta^{evan}(\lambda_*;p)=-\delta\cdot h\left(\mathrm{Tr}\circ(\lambda_*+\delta\cdot h+A_{p,\delta})^{-1}\circ(\lambda_*+A_{p,\delta})^{-1}\circ M\right).$$

由上述右侧算子的等度有界性可得

$$\lim_{\delta\to0}\|\mathbb{T}_\delta^{evan}(\lambda_*+\delta\cdot h;p)-\mathbb{T}_\delta^{evan}(\lambda_*;p)\|_{\mathcal{B}(\tilde H^{-\frac12}(\Gamma),H^{\frac12}(\Gamma))}=0, \tag{F.11}$$

对每个 $p\in[0,2\pi]$ 均成立。若能证明对于几乎处处的 $p\in[0,2\pi]$，则可得所需结论：

$$\lim_{\delta\to0}\|\mathbb{T}_\delta^{evan}(\lambda_*;p)-\mathbb{T}_0^{evan}(\lambda_*;p)\|_{\mathcal{B}(\tilde H^{-\frac12}(\Gamma),H^{\frac12}(\Gamma))}=0. \tag{F.12}$$

(F.12) 的证明思路是将 $\mathbb{T}_\delta^{evan}(\lambda_*;p)$ 表示为一列算子的复合；除有限个 $p\in[0,2\pi]$ 外，这些算子均在算子范数意义下收敛。具体而言，对于任意 $\psi\in\tilde H^{-\frac12}(\Gamma)$，我们将函数 $w_\delta(x;p):=\mathbb{T}_\delta^{evan}(\lambda_*;p)\psi$ 延拓到 $x\in C_\delta$。注意到 w_δ 满足以下方程：

$$\begin{cases}(\Delta_x+\lambda_*)w_\delta(x;p)=(f_\delta^0\psi)(x):=\psi(x_2)\tilde\delta(x_1)-\displaystyle\sum_{n=1,2}\langle\psi,\overline{u_{n,\delta}(x;p)}\rangle u_{n,\delta}(x;p)\in H^{-1}(C_\delta),\\ \dfrac{\partial}{\partial x_2}\Big|_{\Gamma^\pm}(w_\delta(x;p))=w_\delta(x;p)\Big|_{\partial D_{1,\delta}}=w_\delta(x;p)\Big|_{\partial D_{2,\delta}}=0,\\ w_\delta(x;p)(x+\boldsymbol{e}_1;p)=e^{ip}w_\delta(x;p),\quad \dfrac{\partial w_\delta}{\partial x_1}(x+\boldsymbol{e}_1;p)=e^{ip}\dfrac{\partial w_\delta}{\partial x_1}(x;p).\end{cases}$$

其中 $\tilde\delta(\cdot)$ 表示狄拉克δ函数。因此，对于某个整数 $n\}$ ($\lambda_n^e(p)$ 已在（3.4）中引入），$p\notin\mathcal{S}(\lambda_*):=\{\pi\}\cup\{p\in[0,2\pi]:\lambda_*=\lambda_n^e(p)$，我们可以用格林公式表示 $w_\delta(x;p)$

$$\begin{aligned}w_\delta(x;p)=&\int_{C_\delta}G^e(x,y;p,\lambda_*)(f_\delta^0\psi)(y)dy\\&+\int_{\partial D}G^e(x,y+z_1-\delta\boldsymbol{e}_1;p,\lambda_*)\varphi_{1,\delta}(y)d\sigma(y)+\int_{\partial D}G^e(x,y+z_2+\delta\boldsymbol{e}_1;p,\lambda_*)\varphi_{2,\delta}(y)d\sigma(y),\end{aligned} \tag{F.13}$$

对于某些 $\boldsymbol{\varphi}_\delta=(\varphi_{1,\delta},\varphi_{2,\delta})\in H^{-\frac12}(\partial D)\times H^{-\frac12}(\partial D)$。$\partial D_{1,\delta}\cap\partial D_{2,\delta}$上的狄利克雷条件要求

$$T_\delta(p,\lambda_*)\boldsymbol{\varphi}_\delta=-\begin{pmatrix}\left(\int_{\partial D}G^e(x+z_1-\delta\boldsymbol{e}_1,y;p,\lambda_*)(f_\delta^0\psi)(y)dy\right)\Big|_{\partial D}\\ \left(\int_{\partial D}G^e(x+z_2+\delta\boldsymbol{e}_1,y;p,\lambda_*)(f_\delta^0\psi)(y)dy\right)\Big|_{\partial D}\end{pmatrix},$$

其中， $T_\delta(p,\lambda_*)$ 在式（3.7）中引入。

现在我们证明，当 δ 足够小时，对于任意 $p \notin \mathcal{S}(\lambda_*)$， $T_\delta(p,\lambda_*)$ 都是可逆的。事实上，由于 $T(p,\lambda_*)$ 是零指标的 Fredholm 算子（根据引理 3.1），且 $\lim_{\delta\to 0}\|T_\delta(p,\lambda_*) - T(p,\lambda_*)\| = 0$（根据引理 3.2），因此 $T_\delta(p,\lambda_*)$ 也是零指标的 Fredholm 算子。另一方面，对于每个 $p \neq \pi$， λ_* 都不是 $T_\delta(\lambda;p) := T_\delta(p,\lambda)$ 的特征值（参见推论3.9）。因此，对于 $p \notin \mathcal{S}(\lambda_*)$， $T_\delta(p,\lambda_*)$ 是可逆的。由此，我们得到以下表达式。

$$\boldsymbol{\varphi}_\delta = -T_\delta^{-1}(p,\lambda_*)\begin{pmatrix} \left(\int_{\partial D} G^e(x+z_1-\delta\boldsymbol{e}_1,y;p,\lambda_*)(f_\delta^0\psi)(y)dy\right)\Big|_{\partial D} \\ \left(\int_{\partial D} G^e(x+z_2+\delta\boldsymbol{e}_1,y;p,\lambda_*)(f_\delta^0\psi)(y)dy\right)\Big|_{\partial D} \end{pmatrix}. \tag{F.14}$$

此外，$\lim_{\delta\to 0}\|T_\delta^{-1}(p,\ \lambda_*) - T^{-1}(p,\ \lambda_*)\| = 0$。将 (F.14) 代入 (F.13)，再对 Γ 取迹，我们可以将 $\mathbb{T}_\delta^{evan}(\lambda_*;p)$ 表示为一系列算子的复合；对于每个 $p \notin \mathcal{S}(\lambda_*)$，这些算子都在算子范数下收敛。因此，(F.12) 对 $p \in [0,2\pi]$ 几乎处处成立。

步骤9。最后，根据（F.3）、（F.8）以及分解式（F.2），我们有 ve

$$\lim_{\delta\to 0}\|\mathbb{T}_\delta(\lambda_*+\delta\cdot h) - \mathbb{T}_0\|_{\mathcal{B}(\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma),H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))} = 0.$$

沿用相同的证明思路，可以证明

$$\lim_{\delta\to 0}\|\mathbb{T}_{-\delta}(\lambda_*+\delta\cdot h) - \mathbb{T}_0\|_{\mathcal{B}(\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma),H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))} = 0.$$

结合上述结果、步骤1的结果以及（4.16）和（4.18）的估计，我们得出证明。

□

参考文献

[1] Mark J Ablowitz 和 Yi Zhu。浅蜂窝晶格中的非线性波。*SIAM*应用数学杂志，72(1):240–260，2012年。[2] Habib Ammari、Bryn Davies、Erik Orvehed Hiltunen 和 Sanghyeon Yu。亚波长谐振器一维链中的拓扑保护边缘模态。纯粹与应用数学杂志´ ´，144:17–49，2020年。[3] Habib Ammari、Brian Fitzpatrick、Erik Hiltunen 和 Sanghyeon Yu。含缺陷气泡晶体中声波的亚波长局域模态。*SIAM*应用数学杂志，78，2018年4月。[4] Habib Ammari、Brian Fitzpatrick、Erik Orvehed Hiltunen、Hyundae Lee 和 Sanghyeon Yu。蜂窝晶格中的米氏气泡。*SIAM*数学分析杂志，52(6):5441–5466，2020年。[5] Habib Ammari、Brian Fitzpatrick、Hyeonbae Kang、Matias Ruiz、Sanghyeon Yu 和 Hai Zhang。光子学与声子学中的数学与计算方法，第235卷。美国数学学会，2018年。

[6] Habib Ammari、Erik Hiltunen 和 Sanghyeon Yu。含线缺陷气泡晶体中声波的亚波长导模。《欧洲数学学会杂志》，24(7):2279–2313，2022年。[7] Maxence Cassier 和 Michael I Weinstein。蜂窝结构中的高对比度椭圆算子。《多尺度建模与仿真》，19:1784–1856，2021年12月。[8] Philippe Cl´ement 和 Ben de Pagter。关于Banach空间值Hilbert变换的一些评述。《数学研究》，2(4):453–460，1991年。[9] Carlos Conca、Jerome A. Planchard 和 Muthusamy Vanninathan。流体与周期结构。1995年。[10] Alexis Drouot。连续蜂窝晶格的体边对应。偏微分方程通讯，44:1406–1430，2019年。[11] Alexis Drouot、Charles L Fefferman 和 Michael I Weinstein。错位周期介质中的缺陷模。《数学物理通讯》，377(3):1637–1680，2020年。[12] Alexis Drouot 和 Micheal I Weinstein。边缘态与谷霍尔效应。《数学进展》，368:107142，2020年。[13] Charles Fefferman、J Lee-Thorp 和 Michael I Weinstein。一维系统中的拓扑保护态，第247卷。美国数学学会，2017年。[14] Charles Fefferman 和 Michael I Weinstein。蜂窝晶格势与狄拉克点。美国数学会杂志，25(4):1169–1220，2012年。[15] Charles L Fefferman、James P Lee-Thorp 和 Michael I Weinstein。蜂窝结构中的边缘态。《偏微分方程年刊》，2(2):1–80，2016年。[16] Alexander Figotin 和 Abel Klein。随机介质中电磁波与声波的局域化：晶格模型。《统计物理学杂志》，76(3):985–1003，1994年。[17] Alexander Figotin 和 Abel Klein。经典波的局域化 I：声波。《数学物理通讯》，180(2):439–482，1996年。[18] Alexander Figotin 和 Abel Klein。经典波的局域化 II：电磁波。《数学物理通讯》，184(2):411–441，1997年。[19] Alexander Figotin 和 Abel Klein。由缺陷产生的局域经典波。《统计物理学杂志》，86(1):165–177，1997年。[20] Alexander Figotin 和 Abel Klein。无损非均匀电介质中的光局域化。《美国光学学会杂志*A*辑》，15(5):1423–1435，1998年。[21] Alexander Figotin 和 Abel Klein。电介质与声学介质中的带隙中部缺陷模。《*SIAM*应用数学杂志》，58(6):1748–1773，1998年。[22] Sonia Fliss 和 Patrick Joly。周期波导中时间谐波方程的解：渐近行为与辐射条件。有理力学与分析档案，219(1):349–386，2016年。

[23] Vu Hoang 和 Maria Radosz. 二维周期结构中波导不存在束缚态. 数学物理学杂志, 55876134:55–33506, 2014年3月.[24] 加藤敏夫. 线性算子的扰动理论, 第132卷. 施普林格科学与商业媒体, 2013年.[25] Peter Kuchment. 周期椭圆算子概述. 美国数学会通报, 53(3):343–414, 2016年.[26] Peter Kuchment 和 Beng Seong Ong. 光子晶体波导中的导引电磁波. 算子理论及其应用, 339, 2009年12月.[27] James P Lee-Thorp、Michael I Weinstein 和 Yi Zhu. 具有蜂窝对称性的椭圆算子：狄拉克点、边缘态及其在光子石墨烯中的应用. 《理性力学与分析档案》, 232(1):1–63, 2019年.[28] Wei Li、Junshan Lin 和 Hai Zhang. 含不可穿透障碍物的蜂窝晶格中的狄拉克点. *SIAM*应用数学杂志，即将出版, 2023年.[29] Junshan Lin 和 Hai Zhang. 一维拓扑光子材料的数学理论. 《物理学杂志*A*：数学与理论》, 55 495203, 2022年.[30] Tomoki Ozawa、Hannah M Price、Alberto Amo、Nathan Goldman、Mohammad Hafezi、Ling Lu、Mikael C Rechtsman、David Schuster、Jonathan Simon、Oded Zilberberg 等. 拓扑光子学. 《现代物理评论》, 91(1):015006, 2019 年 .[31] Wenjun Qiu 、 Zheng Wang 和 Marin Solja˘ci´c. 基于单向波导定向耦合的宽带环行器. 《光学快报》, 19(22):22248–22257, 2011年.[32] Michael Reed 和 Barry Simon. 《现代数学物理方法》, 第1卷. 爱思唯尔, 1972年.[33] Ping Sheng. 随机介质中经典波的散射与局域化, 第8卷. 世界科技出版公司, 1990年.[34] Costas M Soukoulis. *21*世纪的光子晶体与光局域化, 第563卷. 施普林格科学与商业媒体, 2012年.[35] Guochuan Thiang 和 Hai Zhang. 具有反演对称性的一维拓扑材料的体态-界面对应关系. 《英国皇家学会学报*A*辑》, 479:20220675, 2023年。