arXiv:2304.10915v1 [cs.LO] 21 Apr 2023

异步 TeamLTL 的集合语义：表达能力与复杂性

Juha Kontinen ！ 赫
尔辛基大学，芬兰
Max Sandström[1] ！
谢菲尔德大学，英国；赫尔辛基大学，芬兰
Jonni Virtema ！ 谢
菲尔德大学，英国；赫尔辛基大学，芬兰

摘要

我们提出并发展了异步 TeamLTL 的一种基于集合的语义。在这一框架下，我们考察两种典型逻辑：分别通过布尔析取和布尔否定扩展的 TeamLTL。我们揭示了基于多重集的原始语义与新的基于集合的语义之间引人关注的联系，并展示了时序团队语义领域首批积极的复杂性理论结果之一。具体而言，我们证明这两种逻辑都具有范式，可用于获得有关新逻辑表达能力与复杂性（可判定性）的结果。我们还将研究结果与近期定义的逻辑联系起来并加以应用；这些逻辑通过时间求值函数对异步性进行形式化。

2012年 ACM 学科分类 计算理论 → 逻辑与验证

关键词与短语 超属性、线性时序逻辑、团队语义

数字对象标识符 10.4230/LIPIcs.CVIT.2016.23

资助 *Juha Kontinen*：部分获得芬兰科学院 345634 号项目资助。*Max Sandström*：部分获得芬兰科学院 322795 号项目资助。*Jonni Virtema*：部分获得芬兰科学院 345634 号项目及德国研究联合会 VI 1045/1-1 号项目资助。

1 引言

线性时序逻辑（LTL）是用于规约和验证反应式系统与并发系统的最重要逻辑之一。由 Amir Pnueli 于 1977年 引入的模型检测的核心思想 [20], ，是将程序的正确性规约为一组无限序列，称为轨迹，用于定义系统可接受的执行。在 LTL 模型检测中，关注的是可由 LTL 公式定义的轨迹集。普通 LTL 及其衍生逻辑非常适合规约和验证轨迹属性。这些是可以通过单独检查系统的所有执行来验证的系统属性。这里的一个典型例子是终止；当且仅当系统的每次运行都终止时，系统才终止。然而，并非所有受关注的属性都是轨迹属性。许多极为重要的属性，例如信息流安全中的属性，都需要更丰富的框架。Clarkson 和 Schneider[3]创造了“超属性 ”这一术语，用于指称关联多个执行轨迹的系统属性。这里的一个典型例子是有界终止；仅通过单独检查轨迹，无法判断系统是否会在有界时间内终止。检查超属性对于

[1] 通讯作者

© Juha Kontinen、Max Sandström 和 Jonni Virtema；根据知识共享许可协议 CC-BY 4.0 授权。第42届非常重要主题会议（CVIT 2016年）。编辑：John Q. Open 和 Joan R. Access；文章编号：23；页码：23:1–23:20。莱布尼茨国际信息学会议论文集，德国达格斯图尔，达格斯图尔城堡信息学中心，达格斯图尔出版。

信息流安全至关重要，因为系统的秘密输入与公开可观测输出之间的依赖关系会被视为潜在的安全违规。这类属性中广为人知的有无干扰 [22, 19] 和观察确定性 [28]。超属性并不局限于信息流控制领域。例如，分配性以及容错性等其他系统属性也可以表示为超属性 [5]。

过去十年间，对形式化描述超属性的需求促成了多种新逻辑体系的诞生，因为线性时序逻辑及其他已有的时序逻辑只能描述轨迹性质。这些新逻辑主要分为两大类：所谓的 超逻辑 以及采用团队语义的逻辑。前一种方法将显式的轨迹量化和路径量化引入线性时序逻辑、计算树逻辑和 QPTL 等标准时序逻辑，从而得到 HyperLTL [2], HyperCTL* [2] 和 HyperQPTL [21, 4] 等逻辑。后一种方法（本文也采用这种方法）则通过采用团队语义，直接将时序逻辑的语义提升到轨迹集合上，由此得到 TeamLTL [14, 7] 和 TeamCTL [13, 7] 等逻辑。

Krebs 等人 [14] 提出了两种具有团队语义的线性时序逻辑版本：同步语义和异步变体。二者的区别在于，评估时序算子时，时间演进如何在不同计算轨迹之间关联。在同步语义下，时间以锁步方式推进；而在异步变体下，时间则在每条轨迹上独立推进。例如，公式 “F terminate”（其中 F 表示未来算子，“terminate”是一个命题，表示某条轨迹已经终止）在同步语义下定义了超属性“有界终止”，而在异步语义下表达的是轨迹性质“终止”。

有界终止的优雅定义体现了团队逻辑与超逻辑之间的一个主要区别：团队逻辑能够直接引用任意数量的轨迹。每个超逻辑公式所包含的轨迹量词数量都是固定的，用于界定公式求值时涉及的轨迹。基于团队的逻辑的另一项区别在于，它们能够通过新颖的原子公式扩充逻辑语言，以陈述团队的性质。这些原子中最重要的是依赖原子 dep($\bar{x}$, $\bar{y}$)（表示变量 $\bar{x}$ 的取值函数决定了 $\bar{y}$ 的取值）以及包含原子 $\bar{x} \subseteq \bar{y}$ （表示这样一种包含依赖： $\bar{x}$ 所出现的所有取值也必须作为 $\bar{y}$ 的取值出现）。

例如，设 o_1、.....、o_n 是一些公开可观测量，并假设 c 揭示了一些机密信息。原子式 (o_1, $\ldots o_n$, c) $\subseteq$ (o_1, $\ldots o_n$, $\neg c$) 表示一种不可推断性：观察者无法从输出中推断出机密比特的取值。

尽管 HyperLTL 和其他超逻辑已得到广泛研究，但 TeamLTL 的许多基本性质仍未得到充分理解。Krebs 等人 [14] 证明，同步 TeamLTL 与 HyperLTL 在表达能力上互不可比，而异步变体则可归约为线性时序逻辑[2]。本文考察异步 TeamLTL 的扩展形式，它们具有更强的表达能力。直到 Lück [17] 证明，带有布尔否定 $\sim$ 的同步 TeamLTL 的可满足性和模型检测的复杂性等价于三阶算术的判定问题，人们对 TeamLTL 的复杂性方面知之甚少。随后，Virtema 等人 [27] 开始对同步 TeamLTL 的复杂性进行更细致的分析，发现了一个可判定的句法片段（即所谓的左平坦片段），并证明只需极弱地使用布尔否定，就足以导致不可判定。他们还证明

[2] [14] 中异步语义的定义有一处小错误，我们在此予以修正。

同步 TeamLTL 及其扩展形式可以转换为 HyperQPTL$^+$；HyperQPTL 是通过对命题进行（非一致）量化而扩展 HyperLTL 得到的。Kontinen 和 Sandström [12] 定义了 TeamLTL 的扩展形式与一阶团队逻辑的三变量片段之间的转换，以便在研究 TeamLTL 时利用对一阶团队语义中逻辑性质的更深入理解。他们还证明，任何有效地处于扩展了布尔否定的同步 TeamLTL 与二阶逻辑之间的逻辑，都会继承扩展了布尔否定的 TeamLTL 的复杂性性质。最后，Gutsfeld 等人 [7] 通过提出时间评估函数的概念，重新构想了时序团队语义的框架，使其能够对更丰富的（非）同步形式建模。在重新构想这一框架的同时，他们还发现了一些可判定逻辑，但这些逻辑依赖于将时间评估函数限制为 k-上下文有界 或 k-同步。值得注意的是，近期还有多篇文章研究了异步超逻辑（例如，参见 [8, 1]）。

可以说，此前针对 TeamLTL 得出的几乎所有复杂性理论结果都是负面的，而少数正面结果也要求在语法或语义上施加严格限制。本文重新审视 TeamLTL 的异步变体。近期关于同步 TeamLTL 的研究表明，对同步 TeamLTL 作相当温和的扩展也会导致不可判定。因此，我们对异步 TeamLTL 的研究，部分源于我们希望发现既可判定又具有表达力的超属性逻辑。迄今为止，所有关于时序团队语义的论文都明确或隐含地采用了基于轨迹多重集的语义。在团队语义文献中，这通常称为 严格语义，与 宽松语义 相对；后者实际上是基于集合的语义。在数据库理论中，基于集合语义时计算容易的任务，在多重集情形下往往会变得难以处理。在团队语义中，这一点已可从命题包含逻辑 PL($\subseteq$) 的模型检验问题看出：在宽松语义下它是 P 完全的，而在严格语义下则是 NP 完全的 [10]。

我们提出的新型基于集合的框架采用集合语义，舍弃了采用多重集语义所带来的精确性，以换取更好的计算性质。考虑下面这个公式，它表达了并行计算中的一种强不可推断性：$\mathrm{G}((o_1, \ldots\ldots o_n, c) \subseteq (o_1, \ldots\ldots o_n, \neg c))$，其中，$o_1, \ldots\ldots o_n$ 是可观察的输出，c 是机密信息。在同步设定下，该公式表示：在同步计算过程中，观察者在任何给定时刻都无法根据输出推断出秘密 c 的值。在异步设定下，该公式表达了一个更强的性质，即上述性质对所有计算都成立（而不只是同步计算）。在多重集设定中，并行计算节点的数量是固定的；而在新提出的宽松语义中，我们取消了这一限制，并考虑数量不确定的计算节点。宽松语义下的条件更强；直观而言也更容易被证伪，因此在实践中更容易进行模型检测。

我们的贡献。 我们引入并发展了异步 TeamLTL 的基于集合的语义，并将其命名为宽松语义，记作 TeamLTL^l。我们考察这一设定下两种典型逻辑：在 TeamLTL^l 中分别加入布尔析取 TeamLTL$^l(\vee)$ 和布尔否定 TeamLTL$^l(\sim)$ 所得到的扩展。通过发展宽松异步 TeamLTL 的基础理论，我们发现了严格语义与宽松语义之间一些引人入胜的联系。我们还发现，这两种逻辑都具有范式，可用于得出表达能力和复杂度结果。表 1 和表 2 总结了我们的结果。作为比较，表 3 总结了关于同步 TeamLTL 复杂度的已知结果。

$\mathrm{TeamLTL}^{s/l}$ 例 6		左平坦–$\mathrm{TeamLTL}^{s}(\circledcirc)$ 定理 8	推论 12 $<$	$\mathrm{TeamLTL}^{s}(\circledcirc)$
$\mathrm{TeamLTL}^{l}(\circledcirc)$	定理 10 $\equiv$	左平坦–$\mathrm{TeamLTL}^{l}(\circledcirc)$	† $<$	准平坦–$\mathrm{TeamLTL}^{s/l}(\sim)$ 定理 14 左向下封闭–$\mathrm{TeamLTL}^{l}(\sim)$

表1 本文所考察的异步逻辑的表达能力层级。采用宽松语义或严格语义的逻辑分别以上标 l 和 s表示。关于左平坦性、准平坦性和左向下封闭性的定义，请参见定义7和定义13。†：这是因为只有$\mathrm{TeamLTL}^{l}(\circledcirc)$是向下封闭的（参见定理8和定义13）。定理8表明，对于采用准平坦形式的TeamLTL(∼)公式，严格语义与宽松语义一致。

逻辑（异步语义）	复杂性		参考文献
	模型检测	可满足性	
LTL	PSPACE	PSPACE	[23]
PL(∼)	交替时间复杂度(exp，poly)	交替时间复杂度(exp，poly)	[9]
$\mathrm{TeamLTL}^{l/s}$	PSPACE	PSPACE	[14], 定理5
左扁平 $\mathrm{TeamLTL}^{s/l}(\circledcirc)$	PSPACE	PSPACE	定理17
$\mathrm{TeamLTL}^{l}(\circledcirc)$	PSPACE	PSPACE	定理17
$\mathrm{TeamLTL}^{s}(\circledcirc)$	???	PSPACE	†
$\mathrm{TeamLTL}^{s}$(dep)	NEXPTIME-困难	PSPACE	[14]
左-dc-$\mathrm{TeamLTL}^{l}(\sim)$	属于 TOWER(poly)	属于 TOWER(poly)	定理17

表2 本文的复杂度结果。除非另有说明，所有结果均为完备性结果。PL(∼)指TeamLTL(∼)的命题片段，它也嵌入到left-dc-$\mathrm{TeamLTL}^{l}(\sim)$中。†：严格语义下可满足性和$\mathrm{TeamLTL}^{l}$ 的所有PSPACE-完全结果，均可通过向下封闭性和单元素等价性，直接从经典LTL推出，类似于 [14, 命题5.4]。ATIME-ALT(exp,poly)指具有多项式次交替的交替指数时间，而TOWER(poly)指可由确定性图灵机在时间上界为高度多项式的2的指数塔内判定的问题。

逻辑（同步严格语义）	复杂性		参考文献
	模型检测	可满足性	
TeamLTL	PSPACE	PSPACE	[14]
左扁平 TeamLTL($\circledcirc$)	属于 EXPSPACE	PSPACE	[27]
TeamLTL（依赖）	NEXPTIME-困难	PSPACE	[14]
TeamLTL($\circledcirc$)	???	PSPACE	†
TeamLTL($\circledcirc$, $\subseteq$)	Σ^0_1-困难	Σ^0_1-困难	[27]
TeamLTL(∼)	三阶算术	三阶算术	[17]

表 3 同步严格语义的复杂性结果。除非另有说明，所有结果均为完备性结果。†：可满足性的所有PSPACE-完全性结果均可直接由经典LTL通过向下封闭性和类似于 [14, 命题 54]的单元素等价性得出。

2 预备知识

固定一个 AP 集合，其中包含原子命题。LTL（基于 AP）的公式由以下语法生成：

$$\varphi ::= p \mid \neg p \mid \varphi \vee \varphi \mid \varphi \wedge \varphi \mid \bigcirc \varphi \mid \mathsf{G}\varphi \mid \varphi \,\mathsf{U}\, \varphi, \qquad \text{where } p \in \mathrm{AP}.$$

我们采用以下约定：公式均以否定范式给出，即 $\neg$ 只允许出现在原子命题前。请注意，这是一个表达能力完备的 LTL 公式集合。

AP 上的一个轨迹 t 是来自 $(2^{\mathrm{AP}})^\omega$ 的无限序列。对于自然数 $i \in \mathbb{N}$，我们用 $t[i]$ 表示 t 的第 i 个元素，并用 $t[i,\infty]$ 表示 t 的后缀 $(t[j])_{j \geq i}$。LTL 的语义按通常方式定义：

$$\begin{array}{lcl}
t \models p & \Leftrightarrow & p \in t[0] \\
t \models \neg p & \Leftrightarrow & p \notin t[0] \\
t \models \varphi_1 \vee \varphi_2 & \Leftrightarrow & t \models \varphi_1 \text{ 或 } t \models \varphi_2 \\
t \models \bigcirc \varphi & \Leftrightarrow & t[1,\infty] \models \varphi \\
t \models \mathsf{G}\varphi & \Leftrightarrow & \forall i \geq 0.\ t[i,\infty] \models \varphi \\
t \models \varphi_1 \,\mathsf{U}\, \varphi_2 & \Leftrightarrow & \exists i \geq 0.\ t[i,\infty] \models \varphi_2 \\
 & & \text{且 } \forall j\colon\ 0 \leq j < i \Rightarrow t[j,\infty] \models \varphi_1
\end{array}$$

公式 φ 在轨迹 t 上的真值 记作 $[\![\varphi]\!]_t \in \{0,1\}$。

逻辑常量 $\top, \bot$ 以及算子 F 和 W 可以按通常方式定义：$\bot := p \wedge \neg p$, $\top := p \vee \neg p$, $\mathsf{F}\ \varphi := \top \,\mathsf{U}\, \varphi$，以及 $\varphi \,\mathsf{W}\, \psi := (\varphi \,\mathsf{U}\, \psi) \vee \mathsf{G}\ \varphi$。

接下来，我们给出文献 [14]中引入的 LTL 的所谓异步团队语义。在[14], 中，释放算子的定义存在一个小错误；我们在此将 G 作为原始算子来修正这一问题。非正式地说，轨迹的多重集 T 是一个允许重复元素的轨迹集合。形式上，我们将 T 表示为一组有序对 (i,t)，其中 i 是一个索引（取自某个足够大的集合），t 是一条轨迹。我们规定，多重集中的元素具有不同的索引。今后，我们将始终省略索引，并用 t 代替 (i,t)。对于多重集 T 和 S，$T \uplus S$ 表示 T 和 S 的不相交并（通过规定 S 和 T中的轨迹具有不相交的索引集来得到）。注意，所有定义域为 T 的函数 f 实际上都具有形式 $f((i,t))$，并且可以对轨迹 t 的不同副本作出不同映射。团队（多团队）是轨迹的集合（多重集）。若 $f\colon T \to \mathbb{N}$ 是一个函数，我们将团队经由 $T[f,\infty]$ 的更新定义为：$=\{t[f(t)\ \infty] \mid t \in T\}$，其中函数 f确定每条轨迹更新到的时间点。对于上述函数 f 和 f'，若对所有 $t \in T$均有 $f'(t) < f(t)$，则记作 $f' < f$。多团队 T 的底层团队 $\mathrm{support}(T) := \{t \mid (i,t) \in T\}$ 称为 T的支撑。

▶ **定义 1**（线性时序逻辑的团队语义）。设 T 为一个多团队，$l \in \{p, \neg p \mid p \in$ 原子命题集$\}$ 为一个文字，且 φ 和 ψ 为线性时序逻辑公式。TeamLTL 的异步团队语义定义如下。

$$\begin{array}{lcl}
T \models l & \Leftrightarrow & t \models l \textit{ for all } (i,t) \in T \\
T \models \varphi \wedge \psi & \Leftrightarrow & T \models \varphi \textit{ and } T \models \psi \\
T \models \varphi \vee \psi & \Leftrightarrow & \exists T_1, T_2 \textit{ s.t. } T_1 \uplus T_2 = T \textit{ and } T_1 \models \varphi \textit{ and } T_2 \models \psi \\
T \models \bigcirc \varphi & \Leftrightarrow & T[1,\infty] \models \varphi, \textit{ where } 1 \textit{ is the constant function } t \mapsto 1
\end{array}$$

$$
\begin{aligned}
T \models \mathsf{G}\,\varphi \quad &\Leftrightarrow \quad \forall f\colon T \to \mathbb{N} \quad T[f,\infty] \models \varphi \\
T \models \varphi\,\mathsf{U}\,\psi \quad &\Leftrightarrow \quad \exists f\colon T \to \mathbb{N} \quad T[f,\infty] \models \psi \ \textit{and}\ \forall f' < f\colon T'[f',\infty] \models \varphi, \\
&\qquad\qquad \textit{where}\ T' := \{t \in T \mid f(t) \neq 0\}
\end{aligned}
$$

只需令 f 仅取常函数，即可得到该语义的同步变体。

我们还考虑以下布尔连接词：布尔析取 $\otimes$ 和 布尔否定 $\sim$，其解释方式与通常相同。

$$
T \models \varphi \otimes \psi \quad \text{iff} \quad T \models \varphi \text{ or } T \models \psi \qquad\qquad T \models {\sim}\varphi \quad \text{iff} \quad T \not\models \varphi
$$

本文将异步语义作为标准语义，并用 TeamLTL 指代异步 TeamLTL。

接下来，我们定义文献中研究过的一些重要语义性质：**(向下封闭性)** 若 $T \models \varphi$ 且 $S \subseteq T$，则 $S \models \varphi$。**(空团队性质)** $\emptyset \models \varphi$。**(平坦性)** $T \models \varphi$ 当且仅当 $\{t\} \models \varphi$ 对所有 $t \in T$。**(单元素等价性)** $\{t\} \models \varphi$ 当且仅当 $t \models \varphi$。

如果某逻辑中的每个公式都具有上述某一性质，则称该逻辑具有该性质。容易验证，TeamLTL 具有上述所有性质 [14]。

现在我们来说明为何选择这种语义。文字、合取和析取的语义规则是团队语义中的标准规则，文献中也曾多次阐释其动机 [24]。逻辑所应具备的两个主要理想性质是平坦性和单元素等价性，这两者也促成了异步 TeamLTL 最初定义的提出 [14]。对于而言，所给出的语义是唯一满足平坦性的语义。F（即 $\top\mathsf{U}\ \varphi$）和 G 的情形也一样；此外，这些语义显然分别体现了对未来异步地成立和全局异步地成立的直观含义。所给出的 U 语义保留了平坦性和单元素等价性，也恰当地体现了异步直到的直观含义。异步 TeamLTL 框架还使我们能够定义熟悉的时序算子的不同变体。例如，$\varphi\mathsf{W}_1\,\psi := \mathsf{G}\ \varphi \vee \varphi\,\mathsf{U}\ \psi$ 和 $\varphi\,\mathsf{W}_2\,\psi := \mathsf{G}\ \varphi \otimes \varphi\,\mathsf{U}\ \psi$ 定义了弱直到的不同变体；第一种具有平坦性，而第二种则不具有平坦性。

$$
\begin{aligned}
T \models \varphi\,\mathsf{W}_1\,\psi \quad &\Leftrightarrow \quad \exists T_1, T_2 \text{ s.t. } T_1 \uplus T_2 = T,\ T_1 \models \mathsf{G}\,\varphi \text{ and } T_2 \models \varphi\,\mathsf{U}\,\psi \\
T \models \varphi\,\mathsf{W}_2\,\psi \quad &\Leftrightarrow \quad T \models \mathsf{G}\,\varphi \text{ or } T \models \varphi\,\mathsf{U}\,\psi
\end{aligned}
$$

类似地，$\varphi\mathsf{R}_1\,\psi := \psi\mathsf{U}((\psi \wedge \varphi) \vee \mathsf{G}\ \psi)$ 和 $\varphi\,\mathsf{R}_2\,\psi := \psi\mathsf{U}((\psi \wedge \varphi) \otimes \mathsf{G}\ \psi)$ 会产生 释放 的不同变体。此外，借助 $\sim$ 还可以定义其他对偶算子。

团队语义的一个显著特点是能够通过模块化的方式，为逻辑加入描述团队性质的新原子语句。例如，依赖原子$\mathsf{dep}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi)$ 和 包含原子 $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \subseteq \psi_1, \ldots, \psi_n$，其中 $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi, \psi_1, \ldots, \psi_n$是 LTL 公式，已在一阶团队语义和模态团队语义中得到广泛研究。依赖原子表示，ψ 的真值由 $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ 的真值函数性地决定；而包含原子表示，$\varphi_1, \ldots, \varphi_n$的每种取值组合也必须作为 $\psi_1, \ldots, \psi_n$的一种取值组合出现。这些原子的语义可定义如下：

$$
T \models \mathrm{dep}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi) \ \text{ iff } \ \forall t, t' \in T : \Big(\bigwedge_{1 \leq j \leq n} [\![\varphi_j]\!]_t = [\![\varphi_j]\!]_{t'} \Big) \Rightarrow [\![\psi]\!]_t = [\![\psi]\!]_{t'}
$$

$$T \models \varphi_1, \ldots, \varphi_n \subseteq \psi_1, \ldots, \psi_n \text{ iff } \forall t \in T\, \exists t' \in T : \bigwedge_{1 \le j \le n} [\![\varphi_j]\!]_t = [\![\psi_j]\!]_{t'}$$

考虑以下包含依赖原子的公式示例：

$$\mathsf{G}\,\mathrm{dep}(i_1, i_2, o) \vee \mathsf{G}\,\mathrm{dep}(i_2, i_3, o)$$

该公式表明，系统的执行可以分解为两部分；在第一部分中，输出 o 由输入 i_1 和 i_2决定；在第二部分中， o由输入 i_2 和 i_3决定。

若$\mathcal{A}$ 是一个由原子和联结词构成的集合，则 TeamLTL($\mathcal{A}$) 表示将 TeamLTL 扩展为包含 $\mathcal{A}$ 中的原子和联结词。很容易看出（类比模态团队语义的情形 [11]），上述任意依赖都由有限个 n元布尔关系确定。设 B 是一个由 n元布尔关系构成的集合。对于一个由 LTL 公式构成的 n元组 $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$，我们定义性质 $[\varphi_1, \ldots, \varphi_n]_B$：

$$T \models [\varphi_1, \ldots, \varphi_n]_B \quad \text{iff} \quad \{([\![\varphi_1]\!]_t, \ldots, [\![\varphi_n]\!]_t) \mid t \in T\} \in B.$$

形如 $[\varphi_1, \ldots, \varphi_n]_B$ 的表达式称为广义原子。文献 [27] 已证明，在同步情形下，TeamLTL($\sim$) 对所有广义原子而言在表达能力上是完备的；而将所谓的扁平化算子 加入 TeamLTL($\Diamond$) 后，可以表达任意向下封闭的广义原子。这些结果可以直接推广到异步情形。此外，由于异步 TeamLTL 具有平坦性，扁平化算子也就不再必要。这些结果意味着，例如，（向下封闭的）依赖原子可以在逻辑 TeamLTL($\sim$) 和 TeamLTL($\Diamond$) 中表达，而包含原子则可以在 TeamLTL($\sim$) 中表达。下述定理的证明与 [26, 命题 17] 的证明基本相同。

▶**定理2**。 设 A、D 分别为所有广义原子和所有向下封闭广义原子的集合。则 $\mathrm{TeamLTL}(A\ \Diamond) \equiv \mathrm{TeamLTL}(\Diamond)$ 以及 $\mathrm{TeamLTL}(D\ \sim) \equiv \mathrm{TeamLTL}(\sim)$。

上述 $L \equiv L'$ 表示逻辑 L 与 L'的等价性。

3 基于集合的语义TeamLTL

接下来我们定义异步语义的一个宽松版本。由于它对应于一阶团队语义中所谓的宽松语义（例如参见 [6]），因此称为宽松 语义。从现在起，我们将定义1中的语义称为严格语义。早在 [18] 中，Lück 就提出了为 TeamLTL 考虑宽松语义的可能性，但当时并未给出完整定义。直观地说，通过考察以下情况，总可以从严格语义得到宽松语义：如果用每条轨迹的无界多个副本来丰富多重团队，严格语义将得出什么结果。宽松语义的一个定义性特征是它无法区分重数，这一点由下面的命题4形式化表述。

我们需要一些记号来表示新的定义。我们用$\mathcal{P}(\mathbb{N})^+$ 表示$\mathcal{P}(\mathbb{N})\setminus\{\emptyset\}$。对于一个团队 T和函数 $f\colon T \to \mathcal{P}(\mathbb{N})^+$，我们用 $T[f,\infty]$ 表示团队$\{t[s,\infty] \mid t \in T, s \in f(t)\}$。对于 $T' \subseteq T$, $f\colon T \to \mathcal{P}(\mathbb{N})^+$和 $f'\colon T' \to \mathcal{P}(\mathbb{N})^+$，我们定义： $f' < f$当且仅当

$\forall t \in T'\colon \min(f'(t)) \le \min(f(t))$ 且 $\max(f'(t)) < \max(f(t))$（假设 $\max(f(t))$ 存在）。

现在对于 $f \neq f'$，当且仅当存在一个函数 $g\colon T'[f',\infty] \to \mathcal{P}(\mathbb{N})^+$ 使得 $\big(T'[f',\infty]\big)[g,\infty] = T'[f,\infty]$时， $f' < f$ 成立。

▶**定义 3** ($\mathrm{TeamLTL}^l$)。 假设 T 是一个团队， φ 和 ψ 是 TeamLTL 公式。宽松语义定义如下。我们仅列出与标准语义不同的情况。

$T \models^l \varphi \vee \psi \quad \Leftrightarrow \quad \exists T_1, T_2$ 使得 $T_1 \cup T_2 = T$ 且 $T_1 \models \varphi$ 且 $T_2 \models \psi T \models^l G$
$\varphi \quad \Leftrightarrow \quad \forall f\colon T \to P(\mathbb{N})^+$ 成立 $T[f,\infty] \models^l \varphi T \models^l \varphi U \psi \quad \Leftrightarrow \quad \exists f\colon T \to P(\mathbb{N})^+$ 使得 $T[f,\infty] \models^l \psi$ 且$\forall f'\colon T' \to P(\mathbb{N})^+$使得 $f' < f$，成立 $T'[f',\infty] \models^l \varphi$或 $T' = \emptyset$，
其中 $T' := \{t \in T \mid max(f(t)) \neq 0\}$

在本文所考虑的上下文中，直到算子 U 的定义中，子公式 φ 始终具有空团队性质，因此在证明中我们忽略团队 T' 为空的可能性，因为这种情况可由空团队性质推出。

上述基于集合的语义也可以用多重集来理解。在这种情况下，函数 f 以统一的方式量化，即我们将考察范围限制为满足$f(i,\ t) = f(j,\ t)$的函数。此外，析取的语义定义方式不涉及对重数的引用。我们通过规定$T \models^l \varphi$ 当且仅当support(T) $\models^l \varphi$，将宽松语义扩展到多团队 T。这一规定使我们更容易将新逻辑与旧的基于多团队的逻辑联系起来。

以下定理表明，$\mathrm{TeamLTL}^l(\sim)$满足所谓的局部性 性质，证明见附录A。对于一个在AP′ 上、且 $\mathrm{AP} \subseteq \mathrm{AP}'$, 的轨迹 t， t 到AP的约简 $t_{\restriction \mathrm{AP}}$是一个来自$(2^{\mathrm{AP}})^\omega$ 的序列，满足：对所有 $p \in$AP及$i \in \mathbb{N}$, $p \in t[i]$ 当且仅当 $p \in t_{\restriction \mathrm{AP}}[i]$。对于一个在AP′ 上的团队 T，我们将 T 到AP的约简 定义为 $T_{\restriction \mathrm{AP}} = \{t_{\restriction \mathrm{AP}} \mid t \in T\}$。

▶**命题4.** 设 T 是一个团队， φ 是一个变量取自AP的$\mathrm{TeamLTL}^l(\sim)$公式。现在，当且仅当 $T_{\restriction \mathrm{AP}} \models^l \varphi$时， $T \models^l \varphi$ 。

下一个定理表明，宽松语义具有与其严格语义对应形式相同的基本性质。证明可通过直接归纳法得到，详情见附录A。

▶**定理5.** $\mathrm{TeamLTL}^l$ 满足向下封闭性、空团队性质、单元素等价性和平坦性。

下面的例子说明，新的宽松语义不同于严格语义，并且在旧语义中，重数会产生影响。此外，通过证明后者不具平坦性，我们得到 $\mathrm{TeamLTL}^l <\mathrm{TeamLTL}^l(\oslash)$。

▶ 例6. 设公式 φ 为 G($p \oslash q$)， $T_1 := \{t\}$，且 $T_2 := \{(1,t),(2,t)\}$，其中$t := \{p\}\{q\}^\omega$。容易验证，$T_1 \models \varphi$ ，但 $T_1 \not\models^l \varphi$ （这可由 $T[f,\infty] \not\models^l p \oslash q$ 对于 $f(t) := \{0,1\}$ 见证）。同样， $T_2 \not\models \varphi$。此外，对于 $i \in \{1,2\}$，$\{s_i\} \models^l \varphi$，但 $\{s_1, s_2\} \not\models^l \varphi$，其中 $s_1 := \{p\}^\omega$ ，且 $s_2 := \{q\}^\omega$。

我们还将考虑 TeamLTL($\oslash$) 和 TeamLTL($\sim$) 的以下片段。

▶**定义 7.** 如果公式 φ 的所有形如 G ψ 和 ψUθ 的子公式中，子公式 ψ 都是一个线性时序逻辑公式，那么称 $\mathrm{TeamLTL}(\oslash)$ 中的公式 φ 为左扁平公式。如果公式 φ 的所有形如 Gψ 和 ψUθ 的子公式中，子公式 ψ 都是一个$\mathrm{TeamLTL}(\oslash)$公式，那么称 $\mathrm{TeamLTL}(\sim,\oslash)$中的公式 φ 为左向下封闭公式。

我们稍后将证明，上述针对平坦性的语法限制也可以替换为语义限制（见推论11）。以下定理的证明见附录A。

▶ **定理8**。 对于所有 $\varphi \in \mathrm{TeamLTL}^l(\circledvee)$，以下两条结论成立：**1.** φ 是向下封闭的，并且**2.** 若 φ 是左平坦的，则 $T \models \varphi$ 当且仅当 $\mathrm{support}(T) \models^l \varphi$ 对于所有多团队 T 成立。由例6可知，上述情况（2）中对左平坦公式的限制是必要的。

4 范式定理

在本节中，我们将为这些逻辑构造范式，并利用它们获得强有力的表达能力和复杂度结果。

4.1 带有布尔析取的 TeamLTL

▶ **定义 9**。公式 φ 若具有 $\bigcirc\!\!\!\!\vee_{i\in I}\alpha_i$ 的形式，其中 α_i 是线性时序逻辑公式，则称其为 $\circledvee$-析取范式。
接下来我们将证明，$\mathrm{TeamLTL}^l(\circledvee)$ 的每个公式都可以转换为等价的$\circledvee$-析取范式。该结果与 [25] 中针对基于团队的模态逻辑 $\mathrm{ML}(\circledvee)$ 所证明的结果类似。

▶**定理 10.** 每个公式 $\varphi \in \mathrm{TeamLTL}^l(\circledvee)$ 在逻辑上都等价于一个$\varphi^* = \bigcirc\!\!\!\!\vee_{i\in I}\alpha_i$ 的 $\circledvee$-析取范式公式，其中 $|\alpha_i| \le |\varphi|$ 且 $|I| = 2^k$，其中 k 是 φ中 $\circledvee$ 的数量。

证明。 证明通过对公式的结构进行归纳法得出。注意，原子公式已经处于范式中，且 $\circledvee$ 的情形是平凡的。其余情形定义如下：

$$(\psi \wedge \theta)^* := \bigcirc\!\!\!\!\vee_{i\in I, j\in J}(\alpha_i^\psi \wedge \alpha_j^\theta) \qquad (\psi \vee \theta)^* := \bigcirc\!\!\!\!\vee_{i\in I, j\in J}(\alpha_i^\psi \vee \alpha_j^\theta)$$

$$(\bigcirc\psi)^* := \bigcirc\!\!\!\!\vee_{i\in I}\bigcirc\alpha_i^\psi \qquad (\mathsf{G}\,\psi)^* := \bigcirc\!\!\!\!\vee_{i\in I}\mathsf{G}\,\alpha_i^\psi$$

$$(\psi\,\mathsf{U}\,\theta)^* := \bigcirc\!\!\!\!\vee_{i\in I, j\in J}(\alpha_i^\psi\,\mathsf{U}\,\alpha_j^\theta).$$

其中 α_i^ψ 和 α_j^θ 分别是 ψ 和 θ 的析取范式中的扁平公式，而 I 和 J 分别是对应的索引集。

假设 $\varphi = \psi \wedge \theta$，且 $\psi \equiv \bigcirc\!\!\!\!\vee_{i\in I}\alpha_i^\psi$ 和 $\theta \equiv \bigcirc\!\!\!\!\vee_{i\in J}\alpha_j^\theta$（归纳假设）。现在，$T \models^l \varphi$ 当且仅当 $T \models^l \psi$ 和 $T \models^l \theta$。后者成立，当且仅当对于某些 k 和 l，$T \models^l \alpha_k^\psi$ 和 $T \models^l \alpha_l^\theta$成立。这可以等价地表示为 $T \models^l \bigcirc\!\!\!\!\vee_{i,j}(\alpha_i^\psi \wedge \alpha_j^\theta)$，即 $T \models^l \varphi^*$。

假设 $\varphi = \psi \vee \theta$ 并且 $\psi \equiv \bigcirc\!\!\!\!\vee_{i\in I}\alpha_i^\psi$ 和 $\theta \equiv \bigcirc\!\!\!\!\vee_{i\in J}\alpha_j^\theta$。根据定义，$T \models^l \varphi$ 当且仅当存在 $T' \cup T'' = T$使得 $T' \models^l \psi$和 $T'' \models^l \theta$。根据归纳假设，后者等价于 $T' \models^l \bigcirc\!\!\!\!\vee_{i\in I}\alpha_i^\psi$ 和 $T'' \models^l \bigcirc\!\!\!\!\vee_{j\in J}\alpha_j^\theta$。根据定义，这成立当且仅当存在 k和 l使得 $T' \models^l \alpha_k^\psi$和 $T'' \models^l \alpha_l^\theta$；根据定义，这等价于 $T \models^l \alpha_k^\psi \vee \alpha_l^\theta$。因此，等价地，$T \models^l \bigcirc\!\!\!\!\vee_{i\in I,\ j\in J}(\alpha_i^\psi \vee \alpha_j^\theta)$。

假设 $\varphi = \bigcirc\psi$ 并且 $\psi \equiv \bigcirc\!\!\!\!\vee_{i\in I}\alpha_i^\psi$。根据定义，$T \models^l \varphi$ 等价于$T[1,\infty] \models^l \psi$。根据归纳假设，后者成立当且仅当 $T[1,\infty] \models^l \bigcirc\!\!\!\!\vee_{i\in I}\alpha_i^\psi$；根据定义，这等价于存在某个 $k \in I$使得 $T[1,\infty] \models^l \alpha_k^\psi$。后者成立当且仅当存在某个 $k \in I$使得 $T \models^l \bigcirc\alpha_k^\psi$，这等价于 $T \models^l \bigcirc\!\!\!\!\vee_{i\in I}\bigcirc\alpha_i^\psi$。

假设 $\varphi = \mathsf{G}\,\psi$，且 $\psi \equiv \bigcirc\!\!\!\!\vee_{i\in I}\alpha_i^\psi$。假设 $T \models^l \varphi$。根据定义，对于所有函数 f：$T \to \mathcal{P}(\mathbb{N})^+$，都有 $T[f,\infty] \models^l \psi$。根据归纳假设

$T[f,\infty] \models^l \bigotimes_{i\in I} \alpha_i^\psi$ 对于所有 f。特别地，这对如下定义的全函数也成立：对每个$t \in T$，定义 $f_{max}(t) := \mathbb{N}$。因此，对于某个 k，有 $T[f_{max},\infty] \models^l \alpha_k^\psi$。根据向下封闭性，对于所有 $f' \le f_{max}$，都有 $T[f',\infty] \models^l \alpha_k^\psi$。因此 $T \models^l \mathsf{G}\ \alpha_k^\psi$，从而 $T \models^l \bigotimes_{i\in I} \mathsf{G}\ \alpha_i^\psi$。反方向的证明类似。

假设 $\varphi = \psi \mathsf{U}\ \theta$，并且 $\psi \equiv \bigotimes_{i\in I} \alpha_i^\psi$ 和 $\theta \equiv \bigotimes_{j\in J} \alpha_j^\theta$。假设 $T \models^l \varphi$。根据定义，存在一个函数 $f\colon T \to \mathrm{P}(\mathbb{N})^+$，使得 $T[f,\infty] \models^l \theta$，并且对于所有满足 $f' < f$ 的函数 $f'\colon T' \to \mathrm{P}(\mathbb{N})^+$，都有 $T'[f',\infty] \models^l \psi$，其中 $T' := \{t \in T \mid f(t) \neq 0\}$。因此，根据归纳假设 $T[f,\infty] \models^l \bigotimes_{j\in J} \alpha_j^\psi$，这等价于对某个 $k \in J$ 有 $T[f,\infty] \models^l \alpha_k^\psi$；而对于函数 $f_{max}(t) := \{n \in \mathbb{N} \mid n < m$，对某个 $m \in f(t)\}$，有 $T[f_{max},\infty] \models^l \bigotimes_{i\in I} \alpha_i^\theta$，这又等价于对某个 $l \in I$ 有 $T[f_{max},\infty] \models^l \alpha_l^\psi$。根据向下封闭性，后者对所有中间函数都成立，因此 $T \models^l \alpha_k^\theta \mathsf{U}\ \alpha_l^\psi$，最终得到 $T \models^l \bigotimes_{i\in I, j\in J} (\alpha_i^\theta \mathsf{U}\ \alpha_j^\psi)$，正如所需。反方向的证明类似。

为了证明定理中给出的规模估计，只需注意到，我们向 $\otimes$-析取范式的转换可以等价地表述如下：

$$\varphi \equiv \bigotimes_{i\in I} \alpha_i^\psi = \bigvee_{f\in F} \varphi^f,$$

其中，F 是所有选择函数 f 的集合；对于每个出现位置，这些函数分别选择 $\psi \otimes \theta$ of φ 形式的每个子公式的左析取项 ψ 或右析取项 θ；而 φ^f 表示将 φ 中每个类型为 $(\psi \otimes \theta)$ 的子公式出现位置替换为 $f(\psi \otimes \theta)$ 后得到的公式。由此立即可得规模估计。◀

以下两个推论的证明见附录 A。

▶**推论 11.** 对于每个平坦的 $\mathrm{TeamLTL}^l(\otimes)$ 公式，都存在一个等价的 $\mathrm{TeamLTL}^l$ 公式。

▶ **推论 12.** $\mathrm{TeamLTL}^l(\otimes) <$ TeamLTL$(\otimes)$

4.2 带布尔否定的 TeamLTL

与定理 10 中的范式类似，扩展了布尔否定的 TeamLTL 也可以得到一种范式。不过，由于这种扩展不再是向下封闭的，该范式仅适用于逻辑的一个特定片段。 [16, 15] 中引入并使用了以下范式，以分析团队语义背景下模态团队逻辑和 FO^2 的复杂性。下文中，φ^d 表示按照 LTL 中的标准方法将 $\neg\varphi$ 转换为否定范式后得到的公式。

▶**定义 13.** 若公式 φ 满足 φ 具有以下形式，则称其为准扁平的：

$$\bigvee_{i\in I} (\alpha_i \wedge \bigwedge_{j\in J_i} \exists \beta_{i,j}),$$

其中，α_i 和$\beta_{i,\,j}$ 是 线性时序逻辑公式，而 $\exists\beta_{i,\,j}$ 是公式 $\sim \beta_{i,\,j}^d$的缩写。

注意，对于 LTL 公式 α 和 β，对所有 $t \in T$，$T \models^l \alpha$ 当且仅当 $t \models \alpha$。此外，$T \models^l \exists\beta$ 当且仅当存在某条轨迹 $t \in T$ 使得 $t \models \beta$。

▶ **定理 14.** 每个左向下封闭的公式 $\varphi \in \mathrm{TeamLTL}^l(\sim, \otimes)$ 在逻辑上等价于一个准平坦公式 φ^*。

证明。 通过对 φ的结构进行归纳法证明。原子公式是平坦的，因此处于范式中。对于合取、析取和布尔否定的情形，其翻译以及正确性证明与更简单的模态框架 [16, 15]类似。

设 $\varphi = \psi \wedge \theta$，并假设 ψ 等价于 $\bigotimes_{i\in I}(\alpha_i^{\psi} \wedge \bigwedge_{j\in J_i} \exists\beta_{i,j}^{\psi})$，且 θ 等价于 $\bigotimes_{i\in I'}(\alpha_i^{\theta} \wedge \bigwedge_{j\in J_i'} \exists\beta_{i,j}^{\theta})$。根据合取和析取的分配律，$\varphi$ 显然等价于

$$\bigotimes_{i\in I,k\in I'} (\alpha_i^{\psi} \wedge \alpha_k^{\theta} \wedge \bigwedge_{j\in J_i} \exists\beta_{i,j} \wedge \bigwedge_{j\in J_k'} \exists\beta_{k,j}).$$

设 $\varphi = \psi \vee \theta$。根据归纳假设，并采用与定理 10 证明中析取情形类似的论证，φ 等价于

$$\bigotimes_{i\in I,k\in I'} \big((\alpha_i^{\psi} \wedge \bigwedge_{j\in J_i} \exists\beta_{i,j}^{\psi}) \vee (\alpha_k^{\theta} \wedge \bigwedge_{j\in J_j'} \exists\beta_{k,j}^{\theta})\big). \tag{1}$$

上述公式表达的是，T 可以拆分为两部分：T_1，其中每条轨迹都满足 α_i，而子公式 $\beta_{i,j}$ 由某些轨迹满足；以及 T_2，其中每条轨迹都满足 α_k，而子公式 $\beta_{k,j}$ 由某些轨迹满足。但这等价于说，T 可以拆分为两部分：T_1，其中每条轨迹都满足 α_i；以及 T_2，其中每条轨迹都满足 α_k；而子公式 $\alpha_i \wedge \beta_{i,j}$ 和 $\alpha_k \wedge \beta_{k,j}$ 均由 T 中的某些轨迹满足，因此公式 (1) 等价于

$$\bigotimes_{i\in I,k\in I'} \big((\alpha_i^{\psi} \vee \alpha_k^{\theta}) \wedge \bigwedge_{j\in J_i} \exists(\alpha_i^{\psi} \wedge \beta_{i,j}^{\psi}) \wedge \bigwedge_{j\in J_k'} \exists(\alpha_j^{\theta} \wedge \beta_{k,j}^{\theta})\big)$$

属于范式。

设 $\varphi = \sim\psi$，并假设 ψ等价于 $\bigotimes_{i\in I}(\alpha_i \wedge \bigwedge_{j\in J_i} \exists\beta_{i,j})$。现在，$\varphi$显然等价于 $\bigwedge_{i\in I}(\exists\alpha_i^d \otimes \bigotimes_{j\in J_i} \beta_{i,j}^d)$。利用命题逻辑的分配律，可以将该公式展开回范式，但会产生指数级膨胀。

设 $\varphi = \bigcirc\psi$，并假设 ψ 等价于 $\bigotimes_{i\in I}(\alpha_i \wedge \bigwedge_{j\in J_i} \exists\beta_{i,j})$。现在很容易验证，$\varphi$ 等价于 $\bigotimes_{i\in I}(\alpha_i \wedge \bigwedge_{j\in J_i} \exists\bigcirc\beta_{i,j})$。 ○

设 $\varphi = \mathsf{G}\psi$。由于假设 φ 是左向下封闭的，ψ 等价于一个形如 $\oslash_i\alpha$的公式。现在，我们可以像前一个定理中那样，将 φ 转换为范式。

假设 $\varphi = \psi \,\mathsf{U}\, \theta$。根据假设，$\varphi$是左向下封闭的，因此 ψ等价于形如 $\oslash_{i\in I}\alpha_i^{\psi}$ 的公式（根据前述定理），而 θ 等价于$\bigotimes_{k\in I'}(\alpha_k^{\theta} \wedge \bigwedge_{j\in J_k} \exists\beta_{k,j}^{\theta})$。现在利用 ψ 是向下封闭的这一事实，容易看出 φ 在逻辑上等价于以下公式：

$$\bigotimes_{i\in I,k\in I'} (\alpha_i^{\psi} \,\mathsf{U}(\alpha_k^{\theta} \wedge \bigwedge_{j\in J_k} \exists\beta_{k,j}^{\psi})). \tag{2}$$

现在只需证明，式 (2) 的各析取项（对任意 $i \in I$，$k \in I'$）都可以等价地表示为：

$$(\alpha_i^{\psi} \,\mathsf{U}\, \alpha_k^{\theta} \wedge \bigwedge_{j\in J_k} \exists(\alpha_i^{\psi} \,\mathsf{U}(\alpha_k^{\theta} \wedge \beta_{k,j}^{\psi}))). \tag{3}$$

我们将证明从 (3) 到 (2) 的逻辑蕴含。假设

$$T \models^{l} (\alpha_i^{\psi} \,\mathsf{U}\, \alpha_k^{\theta} \wedge \bigwedge_{j\in J_k} \exists(\alpha_i^{\psi} \,\mathsf{U}(\alpha_k^{\theta} \wedge \beta_{k,j}^{\psi}))).$$

设 f 满足 $T[f,\infty] \models^l \alpha_k^\theta$，并且对所有 $g < f$ 都有 $T[g,\infty] \models^l \alpha_i^\psi$。为了证明

$$T \models^l \alpha_i^\psi \,\mathsf{U}(\alpha_k^\theta \wedge \bigwedge_{j\in J_k} \exists \beta_{k,j}^\psi), \tag{4}$$

我们需要确保能够在 $T[f,\infty]$ 中找到见证公式 $\exists\beta_{k,j}^\psi$ 为真的轨迹。在这里，我们可以使用 $T \models^l \bigwedge_{j\in J_k} \exists(\alpha_i^\psi \,\mathsf{U}(\alpha_k^\theta \wedge \beta_{k,j}^\psi))$ 的假设，该假设意味着，对于每个 $j \in J_k$，都存在 $t_j \in T$，使得 $t_j \models \alpha_i^\psi \,\mathsf{U}(\alpha_k^\theta \wedge \beta_{k,j}^\psi)$。现在，令 n_j 满足 $t_j[n_j,\infty] \models \alpha_k^\theta \wedge \beta_{k,j}^\psi$，并且对所有 $l < n_j$ 都有 $t_j[l,\infty] \models \alpha_i^\psi$。根据公式 α_i^ψ，α_k^θ 和 $\beta_{k,j}^\psi$ 的平坦性，由 f' 定义的函数

$$f'(t) := \begin{cases} f(t) \cup \{t_j[n_j,\infty]\} & \text{if } t = t_j, \text{ for some } j \in J_k \\ f(t) & \text{otherwise} \end{cases}$$

见证式（4）。逆向结论的证明类似。 ◀

下面的例子表明，在上述定理中，证明要成立，就必须限制为左向下闭公式。

▶ **例15.** 令 φ 为公式 $\mathsf{G}(\exists p_1 \between \exists p_2)$，且 $T := \{t\}$，其中 $t := (\{p_1\}\{p_2\})^\omega$。现在很容易验证 $T \models^l \varphi$，但对于 $i \in \{1,2\}$，$T \not\models^l \mathsf{G}\exists p_i$。

5 计算性质

本节分析上一节所研究逻辑的计算性质。我们重点关注模型检测问题和可满足性问题的复杂性。

对于模型检验问题，需要确定由给定有限 Kripke结构生成的轨迹团队是否满足给定公式。我们考虑如下形式的 Kripke结构 $\mathsf{K} := (W, R, \eta, w_0)$，其中 W 是有限状态集，$R \subseteq W^2$ 是左全转移关系，$\eta\colon W \to 2^{\mathrm{AP}}$ 是标记函数，且 $w_0 \in W$ 是 W的初始状态。K 上的路径 σ是一个无限序列 $\sigma \in W^\omega$，满足 $\sigma[0] := w_0$，并且对每个 $i \geq 0$，都有 $(\sigma[i], \sigma[i+1]) \in R$。$\sigma$ 的轨迹定义为 $t(\sigma) := \eta(\sigma[0])\eta(\sigma[1]) \cdots \in (2^{\mathrm{AP}})^\omega$。于是，Kripke结构 K 生成轨迹集 $\mathsf{Traces}(\mathsf{K}) := \{t(\sigma) \mid \sigma \text{ 是 K 上的一条路径}\}$。

▶ **定义 16.** 逻辑 L 的模型检测问题 是如下判定问题：给定公式 $\varphi \in L$ 和定义在 AP 上的 *Kripke*结构 K，判断 $\mathit{Traces}(K) \models \varphi$ 是否成立。逻辑 L 的（可数）可满足性问题 是如下判定问题：给定公式 $\varphi \in L$，判断是否存在某个（可数） $T \neq \emptyset$，使得 $T \models \varphi$。

下文将用到如下事实：LTL 的模型检测问题和可满足性问题是 PSPACE-完全的 [23]。此外，我们还将用到如下事实：命题团队逻辑 PL($\sim$) 的可满足性问题是 ATIME-ALT(exp,poly)-完全的 [9]，，而模态团队逻辑的复杂度是 TOWER(poly) 类完全问题：$= \mathsf{TIME}(\exp_{n^{O(1)}}(1))$，其中 $\exp_0(1) := 1$，且 $\exp_{k+1}(1) := 2^{\exp_k(1)}$ [16, 15]。

▶**定理17**。 1. *TeamLTL* 的模型检测和可满足性问题$\mathrm{TeamLTL}^l(\between)$ 是PSPACE-完全的。
2. *TeamLTL*($\mathrm{TeamLTL}(\between)$的左扁平片段的模型检测和可满足性问题是PSPACE-完全的。
3. *TeamLTL*$\mathrm{TeamLTL}^l(\sim, \between)$ 的左向下闭片段的模型检测问题是PSPACE-困难的，且属于$\mathrm{TOWER}(\mathrm{poly})$。

4. *TeamLTL*TeamLTL$^{l}(\sim, \Qbbb)$ 的左向下闭片段的可满足性问题是ATIME-ALT(exp, poly)-困难的，且属于TOWER(poly)。

证明。我们先考察命题 1 和 2 的证明。注意，对于 LTL 公式，可满足性问题已经是 PSPACE-困难的，因此只需证明其属于 PSPACE。此外，注意命题 2 可由命题 1 和定理8立即推出。设输入为一个公式 $\varphi \in$TeamLTL$^{l}(\Qbbb)$ 和一个 Kripke结构 K。根据定理 10，φ 在逻辑上等价于一个形如 $\Qbbb_{f\in F}\varphi^{f}$ 的公式，其中 f 遍历选择函数；对于每次出现，这些函数分别从 φ 的每个形如 $\psi \Qbbb \theta$ 的子公式中选择左析取项 ψ 或右析取项 θ。现在，无需构造完整公式 $\Qbbb_{f\in F}\varphi^{f}$，只需使用相对于 φ 大小的多项式空间，就可以检查是否存在某个 $f \in F$ 使得 Traces(K) $\models \varphi_f$。因此，根据 LTL 模型检测属于 PSPACE，可得上述上界。可满足性的上界也可类似地推出。

接下来考虑命题 (4) 的证明。命题 (3) 的证明与此类似。对于下界，只需注意到命题团队逻辑 PL(∼) 是 TeamLTL$^{l}(\sim, \Qbbb)$ 的左向下闭片段的一个片段，因此其可满足性问题可以直接归约到该左向下闭片段的可满足性问题。由 [9] 的结果可知，交替时间复杂度(exp, poly)-困难性成立。

对于上界，我们首先将一个输入公式 φ 转换为与之等价的准平坦形式公式，其形式为

$$\Qbbb_{i\in I}(\alpha_i \wedge \bigwedge_{j\in J_i}\exists\beta_{i,j}). \tag{5}$$

与 [16, 15]，类似，该公式可以在 TIME(exp$^{O(|\varphi|)}$(1)) 时间内计算得到。现在很容易看出，公式 (5) 可满足，当且仅当存在 $i \in I$，使得对于所有 $j \in J_i$，SAT($\alpha_i \wedge \beta_{i,j}$) $= 1$。由于 LTL 可满足性判定属于 PSPACE $\subseteq$ TIME($2^{n^{O(1)}}$)，上述过程的总体复杂度为 TIME(exp$_{(|\varphi|^{O(1)})}$(1))。◀

6 与其他异步形式的联系

在 [7] 中，作者提出了一种新颖的基于团队的逻辑，可通过所谓的时间求值函数 （tefs）处理不同模式的异步超属性。时间求值函数支持轨迹之间细粒度的异步交互。直观地说，给定一条轨迹 $t \in T$和全局时钟的一个值 $i \in \mathbb{N}$，tef τ会输出轨迹 t 在全局时间 i时的局部时钟值 $\tau(i, t)$。如果 T 是一个轨迹多重集，那么，针对 T的时间求值函数 是一个满足以下两个条件的函数 τ: $\mathbb{N} \times T \to \mathbb{N}$。我们用 $\tau(i)$表示由 $t \mapsto \tau(i, t)$定义的函数 $T \to \mathbb{N}$。

- 逐步性– $\forall i \in \mathbb{N}\,\forall t \in T$: $\tau(i+1, t) \in \{\tau(i, t)\ \tau(i, t)+1\}$,
- 严格单调性 – $\forall i \in \mathbb{N}$: $\tau(i) \neq \tau(i+1)$。

若对每个 $t \in T$，$\tau(0, t) = 0$，则 tef 是初始的。

文献 [7] 已证明，假设 tef 是同步的，我们得到的恰好是文献 [14] 中定义的同步 TeamLTL。本节将进一步探讨异步 TeamLTL 与带有 tef 的基于团队的逻辑之间的联系。我们找到了一个带有 tef 的逻辑，它几乎与异步 TeamLTL 以及异步 TeamLTL($\Qbbb$) 的左平坦片段完全对应。这一联系为 tef 逻辑确立了首个非平凡的可判定性结果，且无需对 tef 施加严格限制。

我们给出带有额外同步下一步算子的 TeamCTL 语法，该算子已在 [7] 中证明可以通过简单构造在逻辑中表达。

$$\varphi ::= p \mid \neg p \mid (\varphi \wedge \psi) \mid (\varphi \vee \psi) \mid \bigcirc\varphi \mid \bigcirc_{\exists}\varphi \mid \bigcirc_{\forall}\varphi \mid \mathsf{G}_{\exists}\varphi \mid \mathsf{G}_{\forall}\varphi \mid [\varphi\,\mathsf{U}_{\exists}\,\psi] \mid [\varphi\,\mathsf{U}_{\forall}\,\psi]$$

23:14 AsynchronousTeamLTL 的集合语义：表达能力与复杂性

接下来介绍语义。在 [7] TeamCTL*-公式的求值中，我们使用相对于对 (T,τ) 的方式；但由于我们在此只考虑 TeamCTL，因此选择将 τ 内化到 T 中。命题原子、布尔连接词的情形与异步 TeamLTL 相同（见定义 1）。请注意，此处的函数 $\tau(\textcircled{i})$ 起到定义 1 中函数f 的作用。

$T \models \bigcirc_{\exists}\varphi$ $\Leftrightarrow$ 存在一个初始 tef τ使得 $T[\tau(1)\ \infty] \models \varphi T \models \bigcirc_{\forall}\varphi$ $\Leftrightarrow$ 对于所有初始 tef τ，都有 $T[\tau(1)\ \infty] \models \varphi T \models \mathsf{G}_{\exists}\varphi$ $\Leftrightarrow$ 存在一个初始 tef τ 使得 $T[\tau(k)\ \infty] \models \varphi$，对于所有 $k \in \mathbb{N} T \models \mathsf{G}_{\forall}\varphi$ $\Leftrightarrow$ 对于所有初始 tef τ，都有 $T[\tau(k)\ \infty] \models \varphi$，对于所有 $k \in \mathbb{N} T \models [\varphi\,\mathsf{U}_{\exists}\,\psi]$ $\Leftrightarrow$ 存在一个初始 tef τ和 $k \in \mathbb{N}$ 使得 $T[\tau(k)\ \infty] \models \psi$ 并且$\forall m$： $0 \le m < k \Rightarrow T[\tau(m)\ \infty] \models \varphi T \models [\varphi\,\mathsf{U}_{\forall}\,\psi]$ $\Leftrightarrow$ 对于所有初始 tef τ， $\exists k \in \mathbb{N}$ 使得 $T[\tau(k)\ \infty] \models \psi$ 并且$\forall m$： $0 \le m < k \Rightarrow T[\tau(m)\ \infty] \models \varphi$

我们确定了上述时序算子的一个集合，使其尽可能与异步 TeamLTL 的算子相匹配。对于时序算子的集合 $\mathcal{C}$，我们用 TeamCTL($\mathcal{C}$) 表示这样一种逻辑：它由命题原子出发，使用 $\wedge$、 $\vee$ 以及 $\mathcal{C}$ 中的算子构成。

为了处理异步直到算子，我们需要作出两点让步。首先，我们需要将自身限制在左平坦片段内（参见定义7）。其次，我们不使用直到，而是使用由 $[\psi\,\mathcal{M}\,\varphi] := [\varphi\,\mathsf{U}\,\varphi \wedge \psi]$ 定义的强释放算子。F 和 G 模态可以不受任何限制地使用。最后，如果对所有有限多团队 T， $T \models \varphi \Leftrightarrow T \models \psi$ 都成立，则称两个公式 φ和 ψ 是有限等价的。在这些限制下，我们可以证明以下定理。

▶ **定理18**。 对于每个左平坦-TeamCTL(、$\mathsf{G}_{\forall}$、$\bigcirc\!\!\!\!\mathcal{M}_{\exists}$、 $\textcircled{\vee}$)-公式，都存在一个使用 M 替代 U的有限等价 $\mathrm{TeamLTL}^{l}(\textcircled{\vee})$ 公式，反之亦然。

证明。 容易检查，所讨论的所有逻辑都是向下封闭的（参见附录中定理5的证明）。我们证明它与左平坦的$\mathrm{TeamLTL}^{l}$（$\textcircled{\vee}$）等价；根据定理8和定理10，这又等价于TeamLTL（$\textcircled{\vee}$）。

这些翻译只需将$\mathcal{M}$ 替换为$\mathcal{M}_{\exists}$，并将G替换为$\mathsf{G}_{\forall}$。翻译的正确性可以通过对公式结构进行归纳法证明。唯一非平凡的情形是强释放和全局算子的情形。

全局算子的情形可由以下等价关系链推出：

$$
\begin{aligned}
T \models^{l} \mathsf{G}\,\varphi \quad &\Leftrightarrow \quad \forall f\colon T \to \mathbb{N} \quad T[f,\infty] \models \varphi \\
&\Leftrightarrow \quad \text{for all initial tefs } \tau, \text{ we have } T[\tau(k),\infty] \models \varphi, \text{ for all } k \in \mathbb{N} \\
&\Leftrightarrow \quad T \models \mathsf{G}_{\forall}\,\varphi.
\end{aligned}
$$

容易检查第二个等价关系成立（回忆一下， φ 是平坦的）。第一个和最后一个等价关系只是相应算子的语义。

假设 $[\varphi\mathsf{U}\ \varphi \wedge \psi]$ 满足 φ 是扁平的。现在

$$
\begin{aligned}
T \models^{l} [\varphi\,\mathsf{U}\,\varphi \wedge \psi] \quad \Leftrightarrow \quad & \exists f\colon T \to \mathcal{P}(\mathbb{N}) \text{ such that } T[f,\infty] \models \varphi \wedge \psi \text{ and} \\
& \forall f'\colon T' \to \mathcal{P}(\mathbb{N}) \text{ s.t. } f' < f, \text{ we have } T'[f',\infty] \models \varphi \\
& \text{where } T' := \{t \in T \mid \max(f(t)) \neq 0\}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \quad \text{there is an initial tef } \tau \text{ and } k \in \mathbb{N} \text{ s.t. } T[\tau(k), \infty] \models \varphi \wedge \psi \text{ and} \\ &\qquad\quad \forall m : 0 \leq m < k \Rightarrow T[\tau(m), \infty] \models \varphi \\ &\Leftrightarrow \quad T \models [\varphi \mathsf{U}_{\exists} \varphi \wedge \psi]. \end{aligned}$$

第一个等价式是直到语义，第二个等价式由 φ 的平坦性、T 的有限性以及归纳假设得出。最后一个等价式是 $\mathsf{U}_{\exists}$ 的语义。◀

▶ **推论19**。对于每个TeamCTL(、$\mathsf{G}_{\forall}$、$M_{\exists}$)公式，都存在一个与其有限等价的TeamLTL公式，该公式使用 M 而非U，反之亦然。（注意，TeamLTL 与TeamLTL^{l}之间没有区别。）

结合定理18与定理8和定理17，我们得到以下结论：

▶ **推论20**。限制在有限团队上的左平坦TeamCTL(、$\mathsf{G}_{\forall}$、$M_{\exists}$、) 的PSPACE模型检验问题是完备的。

我们证明了，在有限轨迹集上，TeamCTL(,$\mathsf{G}_{\forall}$,$\mathcal{M}_{\exists}$,) 的左平坦片段与使用 而非 U 的 TeamLTL( ) 左平坦片段相一致。下面的例子表明，在任意轨迹集上，这一结论并不成立。

▶ **例21.** 令 T由轨迹 $\{p\}^k\{q\}^\omega$，$k \in \mathbb{N}$组成。显然，在异步 TeamLTL 中，$T \models^{l} p\mathsf{U}\, q$成立，但在 TeamCTL 中，$T \not\models p\mathsf{U}_{\exists}\, q$ 成立。

7 结论

我们为异步 TeamLTL 引入了一种新颖的基于集合的语义。我们展示了若干关于通过布尔析取 TeamLTL^{l} (^{l}) 和布尔否定 TeamLTL^{l}(∼) 扩展 TeamLTL 的表达能力与复杂性的结果。特别是，我们的结果表明，前一种逻辑的复杂性特征与线性时序逻辑相当，而后一种逻辑的左向下闭片段也具有可判定的模型检验和可满足性问题。关于表达能力结果的概览，请参见第4页的表1；复杂度结果见表2。我们通过范式得到了关于 TeamLTL^{l}( ) 和 TeamLTL^{l}(∼) 的这些结果；这些范式也使我们能够将这些逻辑的表达能力与严格语义下相应逻辑的表达能力联系起来。我们的结果表明，同步 TeamLTL 可以被视为二阶逻辑的一个片段，而宽松语义下的异步 TeamLTL( ) 是 HyperLTL 的子逻辑（定义见 [2]）。此外，我们的可判定性结果表明，例如，或许可以为该逻辑构造一个完备证明系统。最后，我们提出一些开放问题：

- 定理14是否扩展到TeamLTL^{l}(∼)的所有公式？注意，任何准扁平的TeamLTL(∼)公式都可以改写为HyperLTL。定理17的结论(iii)是否可以配上匹配的下界（即
- TOWER(poly)困难性结果）？能否为TeamLTL^{l}(∼)的向下闭片段获得一种句法刻画（类似于推论11）？我们认为，TeamLTL^{l}( )是一个很有前景的候选，因为它扩展后加
- 入无限合取和析取，便足以表达团队的所有向下闭性质。严格语义下TeamLTL( )的模型检测复杂性如何？

参考文献

1 Jan Baumeister、Norine Coenen、Borzoo Bonakdarpour、Bernd Finkbeiner 和 César Sánchez。《一种用于异步超属性的时序逻辑》。载于 CAV (1)，计算机科学讲义第 12759 卷，第 694–717 页。Springer，2021年。 2 Michael R. Clarkson、Bernd Finkbeiner、Masoud Koleini、Kristopher K. Micinski、Markus N. Rabe 和 César Sánchez。《用于超属性的时序逻辑》。载于 POST 2014，第 265–284 页，2014年。 3 Michael R. Clarkson 和 Fred B. Schneider。《超属性》。Journal of Computer Security，18(6):1157–1210，2010年。 4 Norine Coenen、Bernd Finkbeiner、Christopher Hahn 和 Jana Hofmann。《超逻辑的层次结构》。载于 LICS 2019，第 1–13 页。IEEE，2019年。 5 Bernd Finkbeiner、Christopher Hahn、Philip Lukert、Marvin Stenger 和 Leander Tentrup。《从超属性进行综合》。Acta Informatica，57(1-2):137–163，2020年。 6 Pietro Galliani。《团队语义中的包含依赖与排除依赖：关于不完备信息逻辑的一些研究》。Annals of Pure and Applied Logic，163(1):68–84，2012年。 7 Jens Oliver Gutsfeld、Arne Meier、Christoph Ohrem 和 Jonni Virtema。《重新审视时序团队语义》。载于 Christel Baier 和 Dana Fisman 编，《LICS '22：第 37 届 ACM/IEEE 计算机科学逻辑年会研讨会》，以色列海法，2022年8月2日至5日，第 44:1–44:13 页。ACM，2022年。 8 Jens Oliver Gutsfeld、Markus Müller-Olm 和 Christoph Ohrem。《用于异步超属性的自动机与不动点》。Proc. ACM Program. Lang.，5(POPL):1–29，2021年。 9 Miika Hannula、Juha Kontinen、Jonni Virtema 和 Heribert Vollmer。《团队语义中命题逻辑的复杂性》。ACM Trans. Comput. Log.，19(1):2:1–2:14，2018年。 10 Lauri Hella、Antti Kuusisto、Arne Meier 和 Jonni Virtema。《命题包含逻辑与模态包含逻辑中的模型检测和有效性》。J. Log. Comput.，29(5):605–630，2019年。 11 Juha Kontinen、Julian-Steffen Müller、Henning Schnoor 和 Heribert Vollmer。《模态依赖逻辑》。载于 Rajeev Goré、Barteld P. Kooi 和 Agi Kurucz 编，《模态逻辑进展 10：2014年8月5日至8日在荷兰格罗宁根举行的第十届"模态逻辑进展"会议邀请论文与投稿论文》，第 353–372 页。College Publications，2014年。 12 Juha Kontinen 和 Max Sandström。《关于团队LTL与一阶团队逻辑在超属性上的表达能力》。载于 WoLLIC，计算机科学讲义第 13038 卷，第 302–318 页。Springer，2021年。 13 Andreas Krebs、Arne Meier 和 Jonni Virtema。《CTL 的一种基于团队的变体》。载于 Fabio Grandi、Martin Lange 和 Alessio Lomuscio 编，《第 22 届国际时序表示与推理研讨会，TIME 2015》，德国卡塞尔，2015年9月23日至25日，第 140–149 页。IEEE计算机学会，2015年。 14 Andreas Krebs、Arne Meier、Jonni Virtema 和 Martin Zimmermann。《用于超属性规范与验证的团队语义》。载于 Igor Potapov、Paul Spirakis 和 James Worrell 编，MFCS 2018，第 117 卷，第 10:1–10:16 页，德国达格施图尔，2018年。达格施图尔城堡—莱布尼茨信息学中心。 15 Martin Lück。《团队逻辑的公理化》。Ann. Pure Appl. Log.，169(9):928–969，2018年。 16 Martin Lück。《团队逻辑及其二变量片段的复杂性》。载于 MFCS，LIPIcs 第 117 卷，第 27:1–27:22 页。达格施图尔城堡—莱布尼茨信息学中心，2018年。 17 Martin Lück。《团队语义下线性时序逻辑的复杂性》。Theoretical Computer Science，2020年。 18 Martin Lück。《团队逻辑：公理、表达能力与复杂性》。博士论文，汉诺威大学，德国汉诺威，2020年。 19 John McLean。《使用轨迹证明无干扰性与函数正确性》。Journal of Computer Security，1(1):37–58，1992年。 20 Amir Pnueli。《程序的时序逻辑》。载于第 18 届年度计算机科学基础研讨会，第 46–57 页。IEEE计算机学会，1977年。

21 Markus N. Rabe。 信息流控制的时序逻辑方法。博士论文，萨尔兰大学，2016年。22 A. W. Roscoe。安全建模中的通信顺序进程与确定性。载于*1995*年*IEEE*安全与隐私研讨会论文集，美国加利福尼亚州奥克兰，*1995*年*5*月*8*日至*10*日，第114–127页。IEEE计算机学会，1995年。23 A. P. Sistla 和 E. M. Clarke。命题线性时序逻辑的复杂性。 《*ACM*期刊》，32(3)：733–749，1985年7月。24 Jouko Väänänen。 依赖逻辑。剑桥大学出版社，2007年。25 Jonni Virtema。命题依赖逻辑有效性的复杂性。 《信息与计算》，253：224–236，2017年。26 Jonni Virtema、Jana Hofmann、Bernd Finkbeiner、Juha Kontinen 和 Fan Yang。具有团队语义的线性时序逻辑：表达能力与复杂性。 *CoRR*，abs/2010.03311，2020年。27 Jonni Virtema、Jana Hofmann、Bernd Finkbeiner、Juha Kontinen 和 Fan Yang。具有团队语义的线性时序逻辑：表达能力与复杂性。载于 Mikolaj Bojanczyk 和 Chandra Chekuri（编辑）， 第*41*届*IARCS*软件技术与理论计算机科学基础年会，*FSTTCS 2021*，*2021*年*12*月*15*日至*17*日，线上会议，收录于 *LIPIcs*，第213卷，第52:1–52:17页。达格施图尔城堡—莱布尼茨信息学中心，2021年。28 Steve Zdancewic 和 Andrew C. Myers。并发程序安全的观察确定性。载于第*16*届*IEEE*计算机安全基础研讨会（*CSFW-16 2003*），*2003*年*6*月*30*日至*7*月*2*日，美国加利福尼亚州太平洋丛林，第29页。IEEE计算机学会，2003年。

A 附录

▶**命题4**。 设 T 是一个团队， φ 是一个变量取自AP的 $\mathrm{TeamLTL}^{l}(\sim)$公式。现在，$T \models^{l} \varphi$ 当且仅当 $T_{\restriction \mathrm{AP}} \models^{l} \varphi$。

证明。 通过对 φ的结构进行归纳法可得。

设 φ 是一个文字。根据定义， $T \models^{l} \varphi$ 当且仅当对所有 $t \in T$都有 $t \models \varphi$ 。现在，由于φ 是 AP 中的一个文字，后者等价于对所有 $t \in T_{\restriction \mathrm{AP}}$都有 $t \models \varphi$ 。根据定义，这又等价于 $T_{\restriction \mathrm{AP}} \models^{l} \varphi$。

设 $\varphi = \psi_1 \wedge \psi_2$。根据定义， $T \models^{l} \varphi$ 当且仅当 $T \models^{l} \psi_1$ 且 $T \models^{l} \psi_2$。根据归纳假设，后者成立当且仅当 $T_{\restriction \mathrm{AP}} \models^{l} \psi_1$ 且 $T_{\restriction \mathrm{AP}} \models^{l} \psi_2$；根据定义，这等价于 $T_{\restriction \mathrm{AP}} \models^{l} \varphi$。

假设 $\varphi = \psi' \vee \psi''$。根据定义， $T \models^{l} \varphi$ 当且仅当存在子团队 $T' \cup T'' = T$，使得 $T' \models^{l} \psi'$ 且 $T'' \models^{l} \psi''$。根据归纳假设，后两个断言分别等价于 $T'_{\restriction \mathrm{AP}} \models^{l} \psi'$ 和 $T''_{\restriction \mathrm{AP}} \models^{l} \psi''$。现在 $T'_{\restriction \mathrm{AP}} \cup T''_{\restriction \mathrm{AP}} = T_{\restriction \mathrm{AP}}$，因此 $T_{\restriction \mathrm{AP}} \models^{l} \varphi$。反过来，假设 $T_{\restriction \mathrm{AP}} \models^{l} \varphi$ 由子团队 $T'_{\restriction \mathrm{AP}}$ 和 $T''_{\restriction \mathrm{AP}}$ 见证。现在很容易验证， $T' = \{t \in T \mid t_{\restriction \mathrm{AP}} \in T'_{\restriction \mathrm{AP}}\}$ 和 $T'' = \{t \in T \mid t_{\restriction \mathrm{AP}} \in T''_{\restriction \mathrm{AP}}\}$ 见证$T \models^{l} \varphi$。

假设 $\varphi = \bigcirc \psi$。根据定义， $T \models^{l} \varphi$ 当且仅当 $T[1,\infty] \models^{l} \psi$，而根据归纳假设，这等价于 $T[1,\infty]_{\restriction \mathrm{AP}} \models^{l} \psi$。注意， $T[1,\infty]_{\restriction \mathrm{AP}} = T_{\restriction \mathrm{AP}}[1,\infty]$，因此 $T \models^{l} \bigcirc \psi$ 成立当且仅当 $T_{\restriction \mathrm{AP}} \models^{l} \bigcirc \psi$ 成立。

假设 $\varphi = \mathsf{G}\, \psi$。根据定义， $T \models^{l} \varphi$等价于：对于所有函数 f， $T[f,\infty] \models^{l} \psi$：$T \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^{+})$。根据归纳假设，后者对于之前的函数 f等价于 $T[f,\infty]_{\restriction \mathrm{AP}} \models^{l} \psi$。现在对于任意 f'： $T_{\restriction \mathrm{AP}} \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^{+})$，存在某个 f，使得 $T[f,\infty]_{\restriction \mathrm{AP}} = T_{\restriction \mathrm{AP}}[f',\infty]$，因为我们可以选取函数 $f(s) = f'(t)$，对于所有满足 $s_{\restriction \mathrm{AP}} = t$ 的 $s \in T$。类似地，对于每个 f，通过取其对 AP 的限制，我们可以得到相应的 f'。因此，对于所有 f， $T[f,\infty] \models^{l} \psi$ 成立，当且仅当对于所有 f'， $T_{\restriction \mathrm{AP}}[f',\infty] \models^{l} \psi$ 成立，从而 $T \models^{l} \mathsf{G}\, \psi$等价于 $T_{\restriction \mathrm{AP}} \models^{l} \mathsf{G}\, \psi$。

假设 $\varphi = \psi_1 \mathsf{U}\, \psi_2$。假设 $T \models^l \varphi$。根据定义，存在一个函数 $f_1\colon T \to \mathrm{P}(\mathbb{N}^+)$，使得 $T[f_1,\infty] \models^l \psi_1$并且对于所有 $f_2 < f_1$，都有 $T^0[f_2,\infty] \models^l \psi_2$，其中$T^0 := \{t \in T \mid \max(f(t)) \neq 0\}$。根据归纳假设，则有 $T[f_1,\infty]_{\uparrow \mathrm{AP}} \models^l \psi_1$并且对于 f_1和 f_2，有$T^0[f_2,\infty]_{\uparrow \mathrm{AP}} \models^l \psi_2$，如前所述。我们通过设定 $f_1'(s) := \bigcup_i f_1(t^i)$ 来定义函数 $f_1'\colon T_{\uparrow \mathrm{AP}} \to \mathrm{P}(\mathbb{N}^+)$，其中 $t^i \in T$ 满足 $t^i_{\uparrow \mathrm{AP}} = s$。现在 $T_{\uparrow \mathrm{AP}}[f_1',\infty] = T[f_1,\infty]_{\uparrow \mathrm{AP}}$。此外，通过类似定义的 f_2'，我们得到 $T^0_{\uparrow \mathrm{AP}}[f_2',\infty] = T^0[f_2,\infty]_{\uparrow \mathrm{AP}}$。因此，$T[f_1,\infty]_{\uparrow \mathrm{AP}} \models^l \psi_1$ 当且仅当 $T_{\uparrow \mathrm{AP}}[f_1',\infty] \models^l \psi_1$，并且对于所有 $f_2 < f_1$，都有 $T^0[f_2,\infty]_{\uparrow \mathrm{AP}} \models^l \psi_2$ 当且仅当 $T^0_{\uparrow \mathrm{AP}}[f_2,\infty] \models^l \psi_2$。因此 $T_{\uparrow \mathrm{AP}} \models^l \varphi$。逆向蕴含类似可得。

假设 $\varphi = \sim \psi$。根据定义，$T \models^l \varphi$ 当且仅当 $T \not\models^l \psi$，而根据归纳假设，这又等价于 $T_{\uparrow \mathrm{AP}} \not\models^l \psi$。此外，由定义可知，这等价于 $T_{\uparrow \mathrm{AP}} \models^l \varphi$。◀

▶**定理5**。 $\mathrm{TeamLTL}^l$ 满足向下封闭性、空团队性质、单元素等价性和平坦性。

证明。 证明通过对公式的结构进行归纳得出。注意，虽然向下封闭性可由平坦性推出，但为了将结果推广到逻辑的非平坦扩展，我们需要归纳步骤只依赖较弱的向下封闭性假设。

向下封闭性： 设 $\varphi \in \mathrm{TeamLTL}$ 是一个公式，且 T，S 是团队，并且 $S \subseteq T$ 和 $T \models^l \varphi$。我们需要证明 $S \models^l \varphi$ 也成立。

对于原子 φ，该断言立即成立：$T \models^l \varphi$ 当且仅当 $t \models \varphi$ 对所有 $t \in T$都成立，而这对所有 $t \in S$也成立，因此 $S \models^l \varphi$。

对于合取，该断言可由归纳假设立即得到。下面考虑析取的情形。假设 $T \models^l \varphi \vee \psi$。根据定义，存在 T_1，$T_2 \subseteq T$使得 $T_1 \models^l \varphi$ 且 $T_2 \models^l \psi$。根据归纳假设，$S \cap T_1 \models^l \varphi$ 且 $S \cap T_2 \models^l \psi$，因为$S \cap T_1 \subseteq T_1$且 $S \cap T_2 \subseteq T_2$。此外，$(S \cap T_1) \cup (S \cap T_2) = S$，因此 $S \models^l \varphi \vee \psi$。

对于的情形是显然的。假设 $T \models^l \bigcirc \varphi$。根据定义，$T[1,\infty] \models^l \varphi$。由于 $S[1,\infty] \subseteq T[1,\infty]$由 $S \subseteq T$推出，我们根据归纳假设得到 $S[1,\infty] \models^l \varphi$。因此 $S \models \bigcirc \varphi$。

接下来，假设 $T \models^l \mathsf{G}\varphi$。根据定义，对于所有 $f\colon T \to \mathcal{P}(\mathbb{N})^+$，都有$T[f,\infty] \models^l \varphi$。现在，对于所有 $f\colon S \to \mathcal{P}(\mathbb{N})^+$, $S[f,\infty] \subseteq T[f',\infty]$，其中 f'是f到 T的任意扩展。因此，根据归纳假设，$S[f,\infty] \models^l \varphi$对于所有 f和 $S \models^l \mathsf{G}\ \varphi$均成立。

接着假设 $T \models^l \varphi \mathsf{U}\ \psi$。对于任意函数 $h\colon T \to \mathcal{P}(\mathbb{N})^+$，令 h_S表示 h 在定义域 S上的约化。由 $S \subseteq T$可得

$$S[h_S,\infty] \subseteq T[h,\infty]. \tag{6}$$

根据定义，存在函数 $f\colon T \to \mathrm{P}(\mathbb{N})^+$，使得 $T[f,\infty] \models^l \psi$。此外，对于所有满足 $f' < f$ 的$f'\colon T_0 \to \mathrm{P}(\mathbb{N})^+$，都有 $T_0[f',\infty] \models^l \varphi$，其中 $T_0 := \{t \in T \mid \max(f(t)) \neq 0\}$。根据归纳假设和 (6)，可得 $S[f_S,\infty] \models^l \psi$。此外，对于所有$g\colon S_0 \to \mathrm{P}(\mathbb{N})^+$，其中 $S_0 := \{t \in S \mid \max(f_S(t)) \neq 0\}$，若满足 $g < f_S$，则 $S[g,\infty] \models^l \varphi$由归纳假设以及每个 g 都等于某个适当的 f'对应的 f'_S 这一事实可得。因此，$S \models^l \varphi \mathsf{U}\, \psi$。

空团队性质：假设 $T = \emptyset$。对于原子公式，这一结论显然成立；由于团队为空，对于所有 $p \in \mathrm{AP}$ 和 $t \in T$，$p \in t(0)$ 和 $p \notin t(0)$ 均成立。合取和析取的情形可由归纳假设立即得出。时序算子的情形也可由归纳假设立即得出，因为$\emptyset[f,\infty] = \emptyset$ 对于任意 $f\colon T \to \mathcal{P}(\mathbb{N})^+$。

平坦性：我们通过对 φ 进行归纳法证明： $T \models \varphi$ 如果对于所有 $t \in T$，对于每个团队 T，都有 $\{t\} \models \varphi$ 。唯一的“仅当”方向直接由向下封闭性推出。

原子公式的情形根据定义成立，而合取和下一步算子的情形则可直接由归纳假设得出。下面考虑析取的情形。假设对于所有 $t \in T$，$\{t\} \models \varphi$ 或 $\{t\} \models \psi$。令 T_1 和 T_2 分别表示 T 中满足 φ 和 ψ的轨迹集合。显然， $T_1 \cup T_2 = T$，且根据归纳假设， $T_1 \models^l \varphi$ 和 $T_2 \models^l \psi$。因此， $T \models^l \varphi \vee \psi$。

对于直到的情况，假设 $\{t\} \models^l \varphi \mathsf{U}\ \psi$ 对所有 $t \in T$ 均成立。现在，对于每个 $t \in T$，存在一个函数 $f_t\colon \{t\} \to \mathrm{P}(\mathbb{N})^+$，使得 $\{t\}[f_t, \infty] \models \psi$，并且对于所有中间的 $f_t'\colon \{t\} \to \mathrm{P}(\mathbb{N})^+$，定义在满足 $\max(f(t)) \neq 0$ 的此类轨迹 t 上，使得 $f_t' < f_t$ 成立，即 $\{t\}[f_t', \infty] \models \varphi$。我们通过 $f(t) := f_t(t)$ 和 $g(t) := \{j \in \mathbb{N} \mid j < \sup(f(t))\}$ 定义函数 $f\colon T \to \mathrm{P}(\mathbb{N})^+$ 和 $g\colon T' \to \mathrm{P}(\mathbb{N})^+$。根据归纳假设 $T[f, \infty] \models^l \psi$ 和 $T'[g, \infty] \models^l \varphi$。令 $f'\colon T' \to \mathrm{P}(\mathbb{N})^+$ 为任意满足 $f' < f$ 的函数。如果我们能证明 $T'[f', \infty] \models^l \psi$，则可得到 $T \models \varphi \mathsf{U}\ \psi$，从而完成证明。为此，显然 $T'[f', \infty] \subseteq T'[g, \infty]$，因此根据向下封闭性可得到 $T'[f', \infty] \models^l \psi$。

最后考虑 G 的情形，假设 $\{t\} \models^l \mathsf{G}\ \varphi$ 对所有 $t \in T$ 都成立。现在，对于每条轨迹 t 和函数 $f\colon \{t\} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})^+$，都有 $\{t\}[f, \infty] \models^l \varphi$。根据归纳假设，对于所有满足 $F(t) := f(t)$ 的函数 F，都有 $T \to \mathcal{P}(\mathbb{N})^+$ $T[F, \infty] \models^l \varphi$。函数 F 涵盖了所有可能的函数。因此 $T \models^l \mathsf{G}\varphi$。

单元素等价性： 我们对 φ 进行归纳证明：对于每条轨迹 t，$\{t\} \models^l \varphi$ 当且仅当 $t \models^l \varphi$。

文字的情形在定义中给出，而合取的情形可直接由归纳假设推出。因此，考虑下一步算子。假设 $\varphi = \bigcirc\psi$。根据定义，$\{t\} \models^l \varphi$ 等价于 $\{t\}[1, \infty] \models^l \psi$，而后者根据归纳假设当且仅当 $t[1, \infty] \models \psi$ 。根据下一步算子的定义，后者等价于 $t \models \bigcirc\psi$。

假设 $\varphi = \psi \vee \theta$。根据定义，$\{t\} \models^l \varphi$ 等价于 $\{t\} \models^l \psi$ 或 $\{t\} \models^l \theta$。根据归纳假设，后两者分别等价于 $t \models \psi$ 和 $t \models \theta$，因此根据定义， $t \models \psi \vee \theta$ 当且仅当 $\{t\} \models^l \varphi$。

假设 $\varphi = \psi_1 \mathsf{U}\ \psi_2$。假定 $\{t\} \models^l \varphi$。根据定义，存在一个函数 $f\colon \{t\} \to \mathrm{P}(\mathbb{N})^+$，使得 $\{t\}[f, \infty] \models^l \psi_2$，并且对于所有中间函数 $f'\colon T' \to \mathrm{P}(\mathbb{N})^+$，都有 $T'[f', \infty] \models^l \psi_1$，其中 $T' := \{t\}$，若 $f(t) \neq \{0\}$，则取此值，否则为 $T' = \emptyset$。我们假设 $f(t) \neq \{0\}$，因为另一种情况显然成立。令 $k := \min(f(t))$。根据归纳假设和向下封闭性， $t[k, \infty] \models \psi_2$。现在，对于每个由 $f'(t) := \{k'\}$ 定义的单值函数 $f'\colon T' \to \mathrm{P}(\mathbb{N})^+$，若满足 $k' < k$，则有 $\{t\}[f', \infty] \models^l \psi_1$。因此，根据归纳假设，对于所有 $k' < k$ ，都有 $t[k', \infty] \models \psi_1$。由此可得 $t \models \varphi$。

现在假设 $t \models \varphi$。根据定义，存在一个数 $k \geq 0$ ，使得 $t[k, \infty] \models \psi_2$ ，并且对于所有 $0 \leq k' < k$ ，都有 $t[k', \infty] \models \psi_1$。因此，我们可以定义一个函数 $f\colon \{t\} \to \mathrm{P}(\mathbb{N})^+$，使得 $f(t) := \{k\}$，以及函数 $f'\colon \{t\} \to \mathrm{P}(\mathbb{N})^+$，使得 $f'(t) := \{k'\}$。现在根据归纳假设 $\{t\}[f, \infty] \models^l \psi_2$ 和 $\{t\}[f', \infty] \models^l \psi_1$；此外，根据平坦性，后者实际上对所有中间函数 g 都成立。因此 $\{t\} \models^l \varphi$。

假设 $\varphi = \mathsf{G}\psi$。假设 $\{t\} \models^l \varphi$。根据定义，对于所有函数 $f\colon \{t\} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})^+$，都有 $\{t\}[f, \infty] \models^l \psi$。特别地，这对每个满足 $f_k(t) := \{k\}$ 的函数 f_k 都成立。因此，根据归纳假设，对于所有 k，都有 $t[k, \infty] \models \psi$。于是根据定义， $t \models \mathsf{G}\psi$。

现在假设 $t \models \varphi$。根据定义，对所有 $k \geq 0$ ，都有 $t[k, \infty] \models \psi$。根据归纳假设可知，对于所有 $f\colon \{t\}[f, \infty] \models^l \psi\colon \{t\} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})^+$，使得 $f = \{k\}$。因此，根据平坦性，对于所有函数 $f'\colon \{t\} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})^+$。因此 $\{t\} \models^l \mathsf{G}\ \psi$。◀

▶ **定理8。** 对于所有 $\varphi \in \mathrm{TeamLTL}^l(\mathbb{V})$ ，以下两个断言成立：

1. φ 是向下封闭的，并且2. 如果 φ 是左平坦的，那么 $T \models \varphi$ 当且仅当 $\mathrm{support}(T) \models^l \varphi$ 对所有多团队 T成立。

证明。 为了证明（1），只需在定理5的证明中补充以下情况 $\otimes$：令 T为一个轨迹团队，并令 $S \subseteq T$。假设 $T \models^l \psi \otimes \varphi$。根据定义 $T \models^l \psi$ 或$T \models^l \varphi$。不失一般性，我们可以假设 $T \models^l \psi$，由此根据归纳假设可得 $S \models^l \psi$ 以及 $S \models^l \psi \otimes \varphi$。

命题 (2) 的证明是对 φ 的结构进行简单归纳。我们证明 $\varphi = \alpha \mathsf{U} \psi$ 的情形，其中 α 是一个 LTL 公式。假设 $T \models \varphi$。那么存在 $f\colon\ T \to \mathbb{N}$，使得 $T[f,\infty] \models \psi$；并且由平坦性可知，对于所有 $(i,t) \in T$ 和 $k < f((i,t))$，都有 $\{(i, t[k,\infty])\} \models \alpha$。定义 $F\colon\ T \to \mathsf{P}(\mathbb{N})^+$，使得 $F(t) := \{f((i,t)) \mid i \in \mathbb{N}\}$。容易验证，$\mathsf{support}(T[f,\infty]) = \mathsf{support}(T)[F,\infty]$。现在应用归纳假设可得 $\mathsf{support}(T)[F,\infty] \models^l \psi$。类似地，对于所有 $F' < F$，其中 $F'\colon\ T \to \mathsf{P}(\mathbb{N})^+$ 的定义方式与 F 类似，由 α 的平坦性可得 $\mathsf{support}(T)[F',\infty] \models^l \alpha$。反向蕴含的证明类似。假设 $\mathsf{support}(T) \models^l \varphi$，并令 $G\colon\ \mathsf{support}(T) \to \mathsf{P}(\mathbb{N})^+$ 满足 $\mathsf{support}(T)[G,\infty] \models^l \psi$。根据向下封闭性，我们可以假设 G 是单值的。现在容易选取 $g\colon\ T \to \mathbb{N}$，使得 $\mathsf{support}(T[g,\infty]) = \mathsf{support}(T)[G,\infty]$。由归纳假设可得 $T[g,\infty] \models \psi$。与上文类似，利用 α 是平坦的这一事实，可得 $T \models \varphi$。◀

▶**推论 11**。 对于每个平坦的 $\mathrm{TeamLTL}^l(\otimes)$-公式，都存在一个与之等价的 $\mathrm{TeamLTL}^l$-公式。

证明。 设 $\varphi \in \mathrm{TeamLTL}^l(\otimes)$ 是平坦的，并设 $\bigotimes_i \psi_i$ 是由定理 10 给出的一个与之等价的公式，其中 ψ_i 是 $\mathrm{TeamLTL}^l$-公式。以下等价关系成立：

$$T \models^l \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \forall t \in T : \{t\} \models^l \bigotimes_i \psi_i \quad \Leftrightarrow \quad \forall t \in T : \{t\} \models^l \bigvee_i \psi_i \quad \Leftrightarrow \quad T \models^l \bigvee_i \psi_i$$

第一个等价关系由上述定理以及 φ 的平坦性得出。第二个等价关系成立是因为容易验证：对于具有空团队性质的逻辑，在单例团队上，$\bigotimes_i$ 和 $\bigvee_i$ 可以互换。最后一个等价关系由 $\mathsf{TeamLTL}^l$ 的平坦性得出（定理 5 ）。◀

▶ **推论 12**。 $\mathsf{TeamLTL}^l(\otimes) <\mathsf{TeamLTL}(\otimes)$

证明。 设 φ 是一个 $\mathrm{TeamLTL}^l(\otimes)$-公式。根据定理 10，$\varphi$ 可以等价地写成一个析取式 $\bigotimes_i \alpha_i$，其中的每个项都是 $\mathrm{TeamLTL}^l$-公式。现在，对于每个多团队 T，

$$\mathrm{support}(T) \models^l \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{support}(T) \models^l \bigotimes_i \alpha_i \quad \Leftrightarrow \quad T \models \bigotimes_i \alpha_i,$$

其中，最后一个等价关系是由定理8以及公式 α_i 是平坦的这一事实得出的。因此，对于任意给定的 $\mathsf{TeamLTL}^l(\otimes)$-公式，范式公式 $\bigotimes_i \alpha_i$ 实际上是一个等价的 $\mathsf{TeamLTL}(\otimes)$ 公式，由此可得 $\mathsf{TeamLTL}^l(\otimes) \leq \mathsf{TeamLTL}(\otimes)$。

为了证明严格包含关系，我们推广示例 6 的结果，并证明对于 $\mathsf{TeamLTL}(\otimes)$ 公式 $\mathsf{G}(p \otimes q)$，不存在与之等价的 $\mathsf{TeamLTL}^l(\otimes)$ 公式。反设 $\varphi \in \mathsf{TeamLTL}^l(\otimes)$ 与 $\mathsf{G}(p \otimes q)$ 等价。根据定理 10，我们可以假设 φ 是 n $\mathsf{TeamLTL}^l$ 公式的析取 $\bigotimes_i \alpha_i$。定义 $t_i := \{p\}^i\{q\}^\omega$ 对于 $i \leq n+1$。显然，$\{(1,t_i)\} \models \mathsf{G}(p \otimes q)$，因此对于每个 i，$\{t_i\} \models^l \varphi$。根据 $\otimes$ 的语义，这意味着对于每个 i，都存在 $j_i \leq n$ 使得 $\{t_i\} \models^l \alpha_{j_i}$。由鸽巢原理，存在 $1 \leq k < l \leq n+1$ 使得 $j_k = j_l$。因此，$\{t_k\} \models^l \alpha_{j_k}$ 且 $\{t_l\} \models^l \alpha_{j_k}$；由 α_{j_k} 的平坦性可得 $\{t_k, t_l\} \models^l \alpha_{j_k}$。于是，$\{t_k, t_l\} \models^l \varphi$，并且 $\{(1,t_k),(1,t_l)\} \models \mathsf{G}(p \otimes q)$，这显然是错误的。◀