arXiv:2304.10918v1 [math.CV] 21 Apr 2023

解析函数的边界行为和逼近理论

by

Spyros Pasias

一篇为部分满足获得哲学博士学位（纯数学方向）要求而提交的论文南佛罗里达大学文理学院数学与统计学系

主指导教授：Arthur Danielyan，博士；Chris Ferekides，博士；Sherwin Kouchekian，博士；Boris Shekhtman，博士。

批准日期：2022年6月27日

关键词：Fatou 定理、Blaschke乘积、径向极限、Baire 定理、阿拉克良集、G-孔。

版权所有 © 2022，Spyros Pasias

致谢

首先，我谨向我的博士导师 Arthur Danielyan 博士致以深切的谢意，感谢他指导我研究解析函数与复逼近理论，并始终给予我鼓励和支持。此外，我还要诚挚感谢我的家人，以及委员会的其他成员 Chris Ferekides 博士、Sherwin Kouchekian 博士和 Boris Shekhtman 博士。在我就读南佛罗里达大学期间，他们一直是启发我的导师，并在许多方面给予我极大的帮助。

最后，我谨向 Dmytro Savchuk 博士在我的求学历程中给予的所有帮助和宝贵建议表示感谢。

目录

摘要.ii 第1章：预备知识.2 1.1 测度与积分.2 1.2 近似恒等元与泊松核.4 第2章：布拉施克乘积与边界行为问题.16 2.1 Blaschke乘积.16 2.2 一些辅助结果.19 2.3 特征定理 2.1.9 的证明.20 2.4 统一化问题.22 第3章：弗罗斯特曼条件与 Collwel 定理.28 3.1 弗罗斯特曼条件在边界行为问题中的应用.28 3.2 Collwel 定理.29 3.3 辅助结果.30 3.4 证明.31 3.5 进一步讨论.33 第4章：Arakeljan定理.35 4.1 引言.35

摘要

在本论文中，我们研究有关解析函数的边界行为以及逼近理论的问题。首先，我们将刻画这样一个集合：在该集合上，Blaschke 乘积不存在径向极限，而在其补集上则存在非切向极限。

接下来，我们将继续讨论并解决 [22] 中提出的一个开放问题的若干特殊情形。该问题旨在将两个已知定理统一起来，从而建立一个更强的定理；具体而言，我们希望找出单位圆上的集合 $E_1 \subset E_2$ 所满足的充要条件，使得存在一个有界解析函数，该函数恰好在 E_1 上不存在径向极限，而恰好在 E_2 的补集上存在非切向极限。其中一个特殊情形扩展了 Peter Colwell 在 [10] 中证明的关于 Blaschke乘积边界行为的主要定理。

此外，我们还将为[10]中主要结果的必要性部分提供一个更简短的证明，该证明依赖于 R. Baire 证明的一个经典结果。随后，我们将利用该结果的充分性部分，简化 A.J Lohwater 和 G. Piranian 在 [23] 中给出的另一个证明。

最后，我们将推广阿拉克良关于逼近闭集上连续函数的一个著名定理：这些函数在该闭集的内部解析，而逼近函数则在更大的域上解析。

引言

本论文旨在探讨解析函数理论和逼近理论中的若干主题，并介绍已经取得的一些原创性研究成果。本手稿内容完备，因此可以呈现给广大数学家。

在第 1 章中，我们回顾一些基础概念，这些概念也将在后续章节中使用。特别是，我们将介绍经典逼近论著作中的各种内容。因此，第 1 章介绍复分析中的一些基础概念，并作为通往后续章节的桥梁，后续章节中将呈现原创研究。

在接下来的章节中，我们将首先考察一类特殊的有界解析函数，即 Blaschke乘积；这是一类模不超过 1 的特殊有界解析函数。Blaschke乘积是解析函数论中的一类重要函数，这不仅是因为它们在因子分解定理中发挥着作用，还因为它们在构造例子方面具有实用价值。接下来，我们将通过证明一个关于 Blaschke乘积边界行为的刻画定理展开讨论。证明这一结果所使用的技术涉及有关 Blaschke乘积边界行为的深刻定理。在下一节中，我们将解决一个开放问题中的若干特殊情形，该问题旨在统一两个关于有界解析函数边界行为的已知定理。

在接下来的章节中，我们将看到，如何基于关于第一类贝尔函数的贝尔定理，证明 [21] 中有关布拉施克乘积边界行为的一个定理的必要性。此外，我们还将看到，如何利用 [21] 中的定理来简化 [36]中的一个定理的证明。

在最后一章中，我们将推广逼近论中的一个经典定理，即阿拉克良定理。本章证明所采用的方法沿用 [26] 中介绍的方法。我们将引入一种描述阿拉克良集的另一种视角。这种新的描述将为该章证明所依据的思路提供动机。

第 1 章

预备知识

1.1 测度与积分

本节将按照 [33] 中的介绍，回顾一些关于测度与积分理论的基础知识。

为此，设 X 是一个集合， $P(X)$ 是 X 的所有子集的集合。那么，在以下运算（$P(X)$ $+$， $*$）下， $P(X)$ 是一个环

$$A + B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$
$$A * B = A \cap B$$

定义 1.1.1. 环 $P(X)$ 的一个子环称为 σ–环 X，如果它在可数并运算下封闭。

定义 1.1.2. 设 I 为一个闭区间。 I 的博雷尔子集是包含所有半开区间 $[a, b) \subset I$的 I 的最小 σ–环中的元素。

定义 1.1.3。 I 上的有限正博雷尔测度是一个函数 $\mu:\ P(I) \to \mathbb{R}_{>0}$，满足对于任意可数个两两不交的博雷尔子集 $\{A_i\}$

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

对于闭区间 I，每个左连续的有界变差函数 F 都对应一个有限测度 μ。事实上，设 $[a, b) \subset I$ 为一个半闭区间，我们定义

$$\mu([a, b)) = F(b) - F(a).$$

那么， μ 有唯一的延拓，可成为 I上的博雷尔测度。

注 1.1.1. 在 I 中，每个博雷尔测度都由这样的递增函数构造而成F。此外，递增函数 $F(x)$ $= x$ 在 I 上诱导出勒贝格测度。

注 1.1.2. I 上的有限符号测度 μ 定义为测度 $\mu = \mu_1 - \mu_2$，其中 μ_1 和 μ_2 是 I上的有限正博雷尔测度。类似地，复博雷尔测度μ 是测度 $\mu = \mu_1 + i\mu_2$，其中 μ_1 和 μ_2 是有限测度。

定义 1.1.4. 对于 μ ，简单函数是一个复值函数 $f : I \to \mathbb{C}$ ，其形式为

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{E_k}(x)$$

满足:

i. a_1、a_2、...、a_n 是复数

ii. 集合 E_k 是 I 中的互不相交的博雷尔子集，且具有有限的 μ 测度

iii. 函数 $\chi_{E_k}(x)$表示 E_k上的示性函数

对于这样的简单函数，我们定义

$$\int_I f d\mu = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{E_k}$$

备注 1.1.3. 显然，如果 f 是简单函数，那么 $|f|$ 也是简单函数。此外，根据三角不等式，显然有

$$\left| \int_I f d\mu \right| \leq \int_I |f| \, d\mu$$

定义 1.1.5. Borel 函数 $f : I \to \mathbb{C}$ 关于 μ 可积，是指存在一个序列 $\{f_n\}$ ，使得:

i. 每个函数 f_n 都是简单 Borel 函数。

ii. $\lim_{m,\ n\to\infty} \int_I |f_n - f_m| = 0.$

iii. 序列 $\{f_n\}$ 依测度收敛于 f，即对于每个 $\epsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{x \in I : |f_n - f|(x) \geq \epsilon\}) = 0.$$

对于满足条件（$i - iii$）的每个简单函数序列 $\{f_n\}$ ，我们定义 f 的积分如下:

$$\int_I f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n d\mu.$$

注 1.1.4。 f 的积分定义良好。也就是说，对于任意这样的序列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$，我们有 $\lim_{n\to\infty}\int_I f_n d\mu < \infty$。此外，如果我们选取另一个满足条件（$i-iii$）的简单函数序列 $\{g_n\}$，那么

$$\int_I f d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_I f_n d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_I g_n d\mu.$$

我们将关于测度 μ 可积的函数类记为 $L^1(d\mu)$。注意，当且仅当 $|f| \in L^1(d\mu)$ 时，$f \in L^1(d\mu)$。这正是黎曼积分与勒贝格积分之间的明显区别。类似地，对于 $p > 0$，当且仅当 $|f|^p$ 关于 μ 可积时，我们称 $f \in L^p(d\mu)$。

定义 1.1.6. 若子集 S 属于 I，且对任意 $\epsilon > 0$，都存在一个博雷尔集 $B \supset S$，使得 $\mu(B) = 0$，则称 S 是 I 中的 μ–零测集。

除在一个 μ–零测集上之外处处发生的现象，称为相对于 μ 几乎处处发生。

下面的定理在测度与积分理论中具有基础性作用。它为我们提供了一个强有力的工具，用于判断函数 f 是否可积。

定理 1.1.1（勒贝格控制收敛定理）。设 $\{f_n\}$ 是一列可积函数，且极限 $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ 几乎处处存在；若存在一个 $g \in L_1(d\mu)$，使得对所有 n 都有 $|f_n| \le g$，则 f 可积，并且

$$\int_I f d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_I f_n d\mu.$$

积分理论中的另一个基本结果是 Hölder 不等式。它为判断函数的可积性以及求积分的上界提供了一个有用的工具。

定理 1.1.2（H¨older 不等式）。设 $f \in L^p(d\mu)$ 和 $g \in L^q(d\mu)$，其中 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$。则函数 $fg \in L_1(d\mu)$ 和

$$\int_I |fg| d\mu \le (\int_I |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}} (\int_I |g|^q d\mu)^{\frac{1}{q}}.$$

1.2 近似恒等元与泊松核

本节将介绍一种在逼近论中用途广泛的巧妙构造，即近似恒等元。在定义近似恒等元之前，我们先回顾一些泛函分析的基本知识。

定义 1.2.1. 设 X 为实或复向量空间。 X 上的范数是一个取正实数值的函数，记作 $\| ... \|$，并满足以下性质

i. $\| x \| \geq 0$；并且 $x = 0$ 当且仅当 $x = 0$。

ii. $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$ （三角不等式）。

iii. $\| \lambda x \| = |\lambda| \| x \|$.

定义 1.2.2. 配备范数函数 $\| ... \|$ 的复向量空间或实向量空间 X 在距离函数下成为一个度量空间

$$\rho(x, y) = \| x - y \|$$

如果这个度量空间是完备的，就称为巴拿赫空间。

定义 1.2.3. 设 $I = [a, b]$ 是一个闭区间，且 μ 是 I 上的博雷尔测度。我们将类 L^p 定义为函数 f 的等价类 (∼)，其中 $|f|^p$ 可积。此外，我们要求 $f \sim g$ 当且仅当 $f - g = 0$ 几乎处处成立。这里，我们还希望包含特殊情形 $p = \infty$。在 L^∞ 的情形下，范数定义如下

$$\| f \|_\infty \equiv \inf_x \{C \geq 0 : |f(x)| \leq C \text{ for almost all } x\}.$$

正如 L^p 一样，如果两个函数在 L^∞ 上几乎处处相等，我们就将它们视为同一个函数。

空间 L^p赋予 L^p范数 $\| f \|_p = (\int_a^b |f|^p)^{\frac{1}{p}}$。通过验证定义 1.2.1 的条件得到满足，可以检查这确实是一个范数。在L^p 范数下，我们的空间 L^p 是一个完备的度量空间，因此是巴拿赫空间。也就是说，对于满足柯西条件的每个函数序列 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$

$$\lim_{m,n \to \infty} \| f_n - f_m \|_p = 0.$$

存在一个 f 属于 L^p ，使得 $\| f - f_n \|_p \to 0$。类似地，空间 L^∞ 也是一个完备的赋范空间，因此是巴拿赫空间。

现在我们注意到，函数 f_n 不一定逐点收敛于 f。然而，根据下面的定理以及 F. 里斯的一个定理，总能找到一个子序列，使其几乎处处收敛。

定理 1.2.1。如果 $\{f_n\} \subset L^p$ 是定义在 $[a, b]$ 上的序列，并且在 L^p范数下收敛到函数$f(x)$，那么它在测度意义下收敛到 $f(x)$。

证明。令 $\epsilon > 0$ 为任意值，并令

$$E_n(\epsilon) \equiv \{x \in [a,b] : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}.$$

Then

$$\int_a^b (f_n - f)^2 dx \geq \int_{E_n(\epsilon)} (f_n - f)^2 dx \geq \epsilon^2 m(E_n(\epsilon)).$$

由于 ϵ 是固定的,

$$m(E_n(\epsilon)) \to 0$$

□

定理 1.2.2（F. Riesz）。设 $\{f_n(x)\}$ 是一个函数序列，它依测度收敛于函数 $f(x)$。那么存在一个子序列，几乎处处收敛于函数$f(x)$。

证明。证明可见（[37], 第98页）。 □

推论1.2.1.如果序列 $\{f_n(x)\}$ 在 L^p 范数下收敛于 $f(x)$，那么存在一个子序列 $\{f_{n_k}(x)\}$，它几乎处处收敛于 $f(x)$。

现在设 X 是一个巴拿赫空间，并考虑由 X 上所有连续线性泛函 F 构成的空间 X^*，即:

$$\| x_n - x \| \to 0 \Rightarrow \| F(x_n) - F(x) \| \to 0$$

于是， X^* 上有一个自然的范数，其定义如下。

$$\| F \| = \sup_{\|x\| \leq 1} |F(x)|$$

在此范数下， X^* 成为一个巴拿赫空间，即 X的共轭空间。设 $1 \leq p < \infty$，泛函分析中的一个标准结果是， L^p 的共轭空间为 L^q，其中$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$。若 $g \in L^q$，则它在 L^p 上诱导出一个线性泛函 F，定义如下:

$$F(f) = \int_a^b fg dx$$

每个连续线性泛函在 L^p 上都具有这种形式，并且

$$\| F \| = \| g \|_q$$

L^∞ 的共轭空间包含 L^1；但除平凡情况外，它大于 L^1。

定义 1.2.4. 设 H 是一个实或复向量空间。在 H 上的内积是一个函数 $\langle \cdot, \cdot \rangle$，它为 H 中的每一对有序向量指定一个标量，并满足

i. $\langle x_1 + x_2, y\rangle = \langle x_1, y\rangle + \langle x_2, y\rangle$.

ii. $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$.

iii. $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$.

iv. $\langle x, x\rangle \geq 0; \langle x, x\rangle = 0$ iff $x = 0$.

这样的空间 H，连同其上指定的内积 H，称为内积空间。在任意内积空间中，都有柯西-施瓦茨不等式：

$$|(x, y)|^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$$

当 $y = 0$ 时，这个不等式显然成立。若 $y \neq 0$，则由 $0 \leq \langle x + \lambda y, x + \lambda y\rangle$ 可轻易推出该不等式，其中 λ 是标量

$$\lambda = -\frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}.$$

由柯西-施瓦茨不等式可轻易证明，$\| x \| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$ 是 H 上的一个范数。若 H 在此范数下是完备的，我们就称 H 为希尔伯特空间。因此，希尔伯特空间是范数由内积诱导的巴拿赫空间。

例 1.2.1。空间 $L^2[a, b]$ 配备内积 $\langle f, g\rangle = \int_a^b f\overline{g}dx$ 后是一个希尔伯特空间。

定义 1.2.5。近似恒等元是一族实值正函数 $\{k_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda\subset\mathbb{R}}$，属于 $L_1[-\pi, \pi]$，且满足：

1. $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} k_\lambda dx = 1$

2. 设 I 是包含 $x = 0$ 的任意开区间，且 $\lambda_0 = \sup\{\lambda : \lambda \in \Lambda \subset \mathbb{R}\}$，则

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} \sup_{x\notin I} |k_\lambda(x)| = 0.$$

现在我们将考察一个定理，该定理展示了近似恒等元在解析函数理论中的作用。

定理 1.2.3. 设 $\{k_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是一个近似恒等元。则对于所有的 $f \in L_p[-\pi, \pi]$、$p > 1$，我们有：

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} |f - \sigma_\lambda| = 0$$

其中

$$\sigma_\lambda(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)k_\lambda(t)dt$$

表示 2π 的周期延拓与 k_λ 的卷积。此外，若 f 是连续的，且 $f(-\pi) = f(\pi)$，则 $f * k_\lambda$ 一致收敛到 f。

证明。首先考虑 f 连续且 $f(\pi) = f(-\pi)$ 的情形。由于 f 在端点处取值相同，我们可以将其周期延拓为定义在实数轴上的连续函数。于是，我们的目标是证明 $\lim_{\lambda\to\lambda_0} |\sigma_\lambda(x) - f(x)| \to 0$

由于对所有 λ 都有 $\int_{-\pi}^{\pi} k_\lambda(x)dx = 1$，因此对 $\delta > 0$ 有

$$\sigma_\lambda(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}[f(x-t) - f(x)]k_\lambda(t)dt + \int_{|t|>\delta}[f(x-t) - f(x)]k_\lambda(t)dt,$$

由此可见

$$|\sigma_\lambda(x) - f(x)| \le \sup_{-\delta<t<\delta}|f(x-t) - f(x)| + 2 \parallel f \parallel_\infty \sup_{t>|\delta|} k_\lambda(t). \qquad (\star)$$

Now 固定 $\epsilon > 0$。由于 f 连续，显然当 δ 充分小时，我们有 t

$$\sup_{-\delta<t<\delta}|f(x-t) - f(x) < \frac{\epsilon}{2}$$

此外，根据定义 1.2.5 中的性质 2，我们有 $\lim_{\lambda\to\lambda_0}\sup_{x\notin I}|k_\lambda(x)| = 0$。因此，我们可以选取 $\delta_0 > 0$ 使得

$$\sup_{t>|\delta|}\{k_\lambda(t)|\lambda \in (\lambda_0 - \delta_0, \lambda_0)\} < \frac{\epsilon}{2}.$$

因此，根据（$\star$），我们得出：对于所有 $\epsilon > 0$，存在充分小的 δ，使得$\lambda \in (\lambda - \delta, \lambda_0)$ 蕴含 $|\sigma_\lambda(x) - f(x)| < \epsilon$。一致收敛的证明至此完成。

现在，对于 $f \in L^p$，我们希望估计

$$\parallel \sigma_\lambda(x) - f(x) \parallel_p$$

设 $g \in L^q$ 为任意函数，其中 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$。那么

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\sigma_\lambda(x) - f(x)]g(x)dx = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x-t)) - f(x)]g(x)k_\lambda(t)dxdt$$

因此

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\sigma_\lambda(x) - f(x)]g(x)dx\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\pi}[f(x-t) - f(x)]g(x)dx\right|k_\lambda(t)dt$$

利用 H¨older 不等式，内部积分的模不大于

$$\| g \|_q \cdot \| f_t - f \|_p,$$

其中 $f_t(x) = f(x-t)$ 表示将 f 向右平移 t 个单位。因此 ，

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\sigma_\lambda(x) - f(x)] g(x) dx \right| \leq \| g \|_q \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \| f_t - f \|_p \, k_\lambda(t) dt$$

对每个 $g \in L^q$均成立。因此,

$$\| \sigma_\lambda - f \|_p \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \| f_t - f \|_p \, k_\lambda(t) dt.$$

我们知道 L_q 是 L^p的共轭空间。现在，由于范数 $\| \cdot \|_p$ 显然是 L^p 上的线性泛函，若给定 L^p 中的函数 h ，我们便可以（根据 Hahn-Banach定理）找到一个 $g \in L^q$ ，使得 $\| g \|_q = 1$ 且 $\int hg = \| g \|_p$。因此，对于 $\delta > 0$ ，我们写作

$$\begin{aligned} \| \sigma_\lambda - f \|_p &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \| f - f_t \|_p \, k_\lambda(t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_{t>|\delta|} \| f_t - f \|_p \, k_\lambda(t) dt \\ &\leq \sup_{-\delta<t<\delta} \| f_t - f \|_p + 2 \| f \|_p \cdot \sup_{t \geq |\delta|} k_\lambda(t) \end{aligned}$$

显然，平 移是 L^p 范数下的连续运算，因此当 δ 较小时，我们有 e

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \| \sigma_\lambda(x) - f(x) \|_p = 0.$$

因此证明完毕。 □

近似恒等元最常见的例子是泊松核:

$$p_r(\theta) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta) + r^2} = Re\left(\frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z}\right)$$

从该表达式可以很容易地验证:

i。 $p_r(\theta) \geq 0$。

ii. $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p_r(\theta) d\theta = 1$, $0 \leq r < 1$.

iii. 对于关于 $\theta = 0$ 的任意开区间 I ,
$\lim_{r \to 1} \sup_{x \notin I} |p_r(\theta)| = 0$。

因此，泊松核确实是一个近似恒等元。

泊松核是一种特殊的调和函数。事实上，它在函数论中至关重要，因为很容易证明，任意给定的 $|z| < R(R > 1)$中的复调和函数，都可以仅通过其边界函数在单位圆上的幂级数展开，恢复其在开单位圆盘中的值。只需将其与泊松核进行卷积即可实现这一点，同时注意到 $p_r(\theta)$的幂级数 $= \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{in\theta}$。实际上，一般调和函数的傅里叶级数为 $u(re^{i\theta})$ $= \sum_{-\infty}^{\infty} c_n r^{|n|}e^{in\theta}$ ，且该级数在 $|z| < R$的紧子集上一致收敛。现在，由于卷积将 $u(e^{i\theta})$的傅里叶级数系数与泊松核 $p_r(\theta)$的傅里叶级数系数逐点相乘，结论便随之成立。此外，条件 $R > 1$ 也可以去掉，因为泊松核是一个近似恒等元。也就是说，任意给定的定义在单位圆上的可积函数，都可以通过与泊松核进行卷积，在单位圆盘上生成唯一的调和函数。

定理 1.2.4。设 f 是单位圆上的 L^p 中的复值函数，其中 $1 \leq p <\infty$。在单位圆盘中定义 f 为

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)p_r(\theta - t)dt.$$

于是，扩展函数 f 在开单位圆盘内是调和函数，并且当 $r \to 1$ 时，函数 $f_r \equiv f(re^{i\theta})$ 在 L^p 范数下收敛于 f。如果 f 在单位圆周上连续，则 f_r 一致收敛于 f。因此，扩展函数 f 在单位圆盘上连续，并且在其内部是调和函数。

有界解析函数理论中的另一个基本结果是 Fatou 定理。其证明可直接利用近似恒等元（[33], 第 30-33 页）和 Lindel ¨of 的一个著名定理得出。

定理 1.2.5（Fatou 定理）。设 μ 是单位圆 T 上的有限复测度，并设 f 是单位圆盘内由下式定义的调和函数。

$$f(r, \theta) = \int_{-\pi}^{\pi} p_r(\theta - t)d\mu(t).$$

令 θ_0 为 μ 关于勒贝格测度可微的任意一点。于是

$$\lim_{r\to 1} f(r, \theta_0) = 2\pi(\frac{d\mu}{d\theta})(\theta_0) = 2\pi\mu'(\theta_0)$$

证明。设 $F:[-\pi,\pi]\to\mathbb{C}$ 是诱导出 μ 的有界变差复值函数。也就是说，对于所有关于我们的测度 μ 可积的 g

$$\int_{-\pi}^{\pi} g d\mu = \int_{-\pi}^{\pi} g dF.$$

因此，我们必须证明，如果 F 在 θ_0 处可微，那么

$$\lim_{r\to 1} f(r,\theta_0) = F'(\theta_0)$$

以非切向方式作为 $re^{i\theta}\to e^{i\theta_0}$。

首先，我们注意到，对于 μ 是勒贝格测度 $d\theta$ 的情形，Fatou 定理显然成立。因此，不失一般性（必要时减去一个适当的常数），我们可以假设 $\mu(T)=0$；从而 $F(-\pi)=F(\pi$。

现在令

$$F(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(r,\theta-t)F(t)dt.$$

然后应用分部积分可得，

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} p_r'(\theta-t)F(t)dt = -\frac{1}{2\pi}\Big[p_r(\theta-t)F(t)dt\Big]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} p_r(\theta-t)dF(t)$$

由于不失一般性，我们可以假设 F 是周期的，

$$\frac{1}{2\pi}f(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} p_r'(\theta-t)F(t)dt.$$

因此，

$$\begin{aligned} f(r,\theta) &= \int_{-\pi}^{\pi} p_r'(\theta-t)F(t)dt \\ &= \int_{-\pi}^{0} p_r'(\theta-t)F(t)dt + \int_{0}^{\pi} p_r'(\theta-t)F(t)dt \\ &= \int_{0}^{\pi} p_r'(t)[F(\theta-t)-F(\theta+t)]dt \\ &= \int_{0}^{\pi} [-\sin(t)p_r'(t)]\frac{F(\theta-t)-F(\theta+t)}{\sin(t)}dt. \end{aligned}$$

现在注意到，由于泊松核显然是偶函数，其导数 $p'(r,t)$ 必定是奇函数。因此，

$$\frac{1}{2\pi}f(r,\theta) = \frac{r}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_r(t)\frac{F(\theta+t)-F(\theta-t)}{2\sin(t)}dt$$

其中记作，

$$K_r(t) \equiv -\frac{1}{r}\sin(t)p_r'(t).$$

容易验证，函数 $\{K_r\}$ 在 $L_1[-\pi,\pi]$.上构成一个近似恒等元。此外，如果 F 在 θ_0处可微，那么函数

$$G(t)=\frac{F(\theta_0+t)-F(\theta_0-t)}{2\sin(t)}$$

在 $t=0$ 处连续，并且取值为

$$G(0)=\lim_{t\to 0}\frac{F(\theta_0+t)-F(\theta_0-t)}{2\sin(t)}=F'(\theta_0).$$

现在，由于函数 $\{K_r\}$ 构成一个近似恒等元，且由于 G 在 $t=0$ 处连续，因此可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}f(r,\theta_0)&=\lim_{r\to 1}\int_{-\pi}^{\pi}K_r(t)G(t)dt\\&=G(0)\\&=F'(\theta_0).\end{aligned}$$

因此，径向收敛得证。

关于非切向收敛，我们引用 Lindel¨of 定理，该定理表述如下：

设 f 是单位圆盘上的有界解析函数；那么，如果 f 沿着某条终止于点 $e^{i\theta_0}$ 的曲线存在极限（特别是径向收敛），则该点处存在非切向极限。关于不利用 Lindel¨of 定理证明非切向收敛，可参阅（[33], 第 36-37 页）。证明完毕。

□

Fatou 定理蕴含一些重要的推论。首先，我们注意到，根据 Lebesgue 分解定理，每个有限测度 μ 都可以分解为相对于勒贝格测度的绝对连续部分和奇异部分，即

$$d\mu=fd\theta+d\mu_s$$

其中 f 是 Lebesgue 可积的， μ_s 是奇异测度。于是， μ 几乎处处可微，且 $\frac{d\mu}{d\theta}=\frac{1}{2\pi}f$ 几乎处处成立。因此，应用 Fatou 定理可知，有限测度的 Poisson 积分相对于归一化 Lebesgue 测度几乎处处具有非切向极限。

推论 1.2.2. 设 f 是单位圆盘中的复值调和函数，并假设积分

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(re^{i\theta})|^p d\theta$$

对某些 p、 $1 \leq p < \infty$ 有界，即 $r \to 1$。那么对于几乎所有 θ，径向极限

$$\tilde{f}(\theta) = \lim_{r \to 1} f(re^{i\theta})$$

˜存在，并在圆周上定义一个函数 f，属于 L^p。若 $p > 1$，则 f 是某个唯一有限测度的 Poisson 积分，其绝对连续部分为 $\frac{1}{2\pi}\tilde{f}d\theta$。若 f 是有界调和函数，则其边界值几乎处处存在，并定义一个有界可测函数˜，其 Poisson 积分为 f。

注 1.2.1. 关于若 $p > 1$、 f 可表示为某个唯一有限测度的 Poisson 积分这一事实，其唯一性部分通常称为赫尔格洛茨表示定理，我们将在下文给出证明。

定理 1.2.6. 设 $U(z)$是单位圆盘上的调和函数，可写成 s

$$U(z) = \int_{-\pi}^{\pi} p(r, \theta - t) d\mu(t)$$

则 $\mu(t)$本质上是唯一的。

证明。首先回顾一下，圆周上的每个测度 $d\mu$ 都由一个有界变差函数 μ 以如下方式生成。 $\mu[e^{ia}, e^{ib}] = \mu(e^{ia}) - \mu(e^{ib})$。现在，假设存在两个有界变差函数 μ_1 和 μ_2，使得

$$U(z) = \int_{-\pi}^{\pi} p(r, \theta - t) d\mu_k(t) \quad k = 1, 2.$$

然后我们断言 $\omega(t) \equiv \mu_1(t) - \mu_2(t)$ 几乎处处为常数。显然，由于 μ_1 和 μ_2 都具有有界变差，因此 $\omega(t)$ 也具有有界变差。因此，$0 = \int_{-\pi}^{\pi} p(r, \theta - t) d\omega(t)$ 定义良好。回忆一下泊松核。

$$p(r, t) = Re\left(\frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}\right)$$

对于 $|z| < 1$。现在，由于零调和函数的解析补充是常数函数，因此可得

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} d\omega(t) = i\gamma, \quad \gamma \in \mathbb{R}$$

因此，若令 $z = 0$，便得到 $\omega(\pi) - \omega(-\pi) = i\gamma$。但由于左边是实数，可得 $\gamma = 0$。

Now,

$$\frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} (ze^{-it})^k$$

因此，

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left[1+2\sum_{k=1}^{\infty}z^k e^{-ikt}\right]d\omega(t)=0$$
$$\Rightarrow[\omega(t)]_{-\pi}^{\pi}+2\sum_{k=1}^{\infty}z^k\int_{-\pi}^{\pi}e^{-ikt}d\omega(t)=0$$
$$\Rightarrow\int_{-\pi}^{\pi}e^{-ikt}d\omega(t)=0,\quad k\in\mathbb{N}$$

现在，由于 Stieltjes 积分的共轭等于被积函数取共轭后的 Stieltjes 积分，因此可得 $\int_{-\pi}^{\pi}e^{ikt}d\omega(t)=0, k\in\mathbb{Z}$。

令 $k\neq 0$，并进行分部积分

$$0=\int_{-\pi}^{\pi}e^{ikt}d\omega(t)=[\omega(t)e^{ikt}]_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{ik}\int_{-\pi}^{\pi}\omega(t)e^{ikt}dt$$

由此可得 $\int_{-\pi}^{\pi}\omega(t)e^{ikt}dt=0$。现在记 $c=\int_{-\pi}^{\pi}\omega(t)dt$。于是，

$$\int_{-\pi}^{\pi}[\omega(t)-c]e^{-ikt}dt=\int_{-\pi}^{\pi}\omega(t)e^{-ikt}dt=-c\int_{-\pi}^{\pi}e^{ikt}dt=0$$

现在，由于 $\omega(t)-c\in L_2[-\pi,\pi]$，根据帕塞瓦尔恒等式可得 $\int_{-\pi}^{\pi}|\omega(t)-c|^2dt=0$。因此，在所有连续点上必有 $\omega(t)=c$。然而，由于 $\omega(t)$ 是有界变差函数，它几乎处处连续，因此证明完成。

□

关于调和函数的结果同样适用于解析函数；解析函数是复调和函数的一种特殊情形。对于 $0<p\leq\infty$，用 H^p 表示单位圆盘内解析函数 f 的类，其中函数 $f_r(\theta)=f(re^{i\theta})$ 在 L^p 范数下有界，且 $r\to 1$。若 $1\leq p\leq\infty$，则 H^p 在该范数下构成一个巴拿赫空间

$$\|f\|=\lim_{r\to 1}\|f_r\|_p.$$

现在我们将继续说明，H^p 中的每个函数都可以唯一地分解为三种不同类型函数的乘积。这个因子分解定理意义重大，因为它使我们能够通过分别考察函数的各个因子来分析 H^p 中的函数。事实上，在下一章中，我们将尝试解决[22]中提出的一个问题，研究因子分解中所包含的三类函数之一，即布拉施克乘积。随后，人们还可以继续研究，在因子分解定理中其余类型函数的视角下考察该问题。希望通过考察

每一种类型的函数来研究这个问题，最终能够解决 H^p中的一般函数所对应的问题。

定义 1.2.6. 内函数是定义在单位圆盘 g 内的解析函数，满足$|g(z)| \leq 1$ ，且 $|g(e^{i\theta}| = 1$ 在单位圆周上几乎处处成立。外函数是定义在单位圆盘 F 内的解析函数，其形式为

$$F(z) = \lambda \exp\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}k(\theta)d\theta\right]$$

其中， k 是圆周上的实值可积函数， λ是模为 1 的复数。

定理 1.2.7。设 f 是 H^1 中的一个非零函数。那么 f 可以写成如下形式：$f = gF$，其中 g 是一个内函数，而 F 是一个外函数。此外，这种因子分解在模为 1 的常数因子意义下是唯一的。

第 2 章

布拉施克乘积与边界行为问题

2.1 布拉施克乘积

现在，我们将把每个内函数分解为两个特殊情形的内函数之积。第一个因子称为Blaschke乘积，它包含了该内函数的所有零点。第二个因子由一个关于单位圆上的勒贝格测度奇异的测度决定。我们指出，本章的许多结果取自近期论文 [13]。

下文中， D 和 T 分别表示复平面中的开单位圆盘和单位圆。设 m 为 T上的勒贝格测度。Blaschke乘积构成了著名空间 H^∞ 中的一个重要子类；该空间由 D中的所有有界解析函数组成。本节首先介绍 Blaschke乘积定义的动机，然后探讨有关 Blaschke乘积边界行为的一些问题。

定理 2.1.1. 设 f 是 D 中的一个有界解析函数，并假设 $f(0) \neq 0$。若 $\{a_n\}$是 f 在 D中的零点序列，每个零点按其在 f中的重数重复计入，则乘积$\prod_n |a_n|$ 收敛，即

$$\sum_n 1 - |a_n| < \infty.$$

证明。证明很简单，可参见（[33], 第 63–64 页）。 □

现在我们的目标是定义一个内函数，使其零点与 f 相同，这样我们就可以除以 f，得到一个无零点的内函数。最直观的构造方法是定义无穷乘积

$$\prod_n \frac{z - a_n}{1 - \overline{a_n} z}.$$

遗憾的是，这个无穷乘积不一定收敛。然而，如果我们仅将每一项乘以一个因子为 $-\frac{\overline{a_n}}{|a_n|}$ 的旋转因子，那么该无穷乘积便会收敛。证明请参见（ [33], 第 64–65 页）。上述讨论引出了关于布拉施克乘积的以下定义。

定义 2.1.1. 设 $\{a_n\}$ 是开单位圆盘中的一个复数序列，满足条件 $\sum_n 1-|a_n|<\infty$，则无穷乘积

$$B(z)\equiv\prod_{n=1}^{\infty}-\frac{\overline{a_n}}{|a_n|}\frac{z-a_n}{1-\overline{a_n}z}$$

在单位圆盘中有定义，称为 Blaschke乘积。

关于单位圆盘中布拉施克乘积边界行为的下述著名定理可见（[33], 第 68 页）。该定理实际上讨论的是整个复平面 $\mathbb{C}$ 中的收敛性，但就本论文而言，我们将定理的范围限定在单位圆盘 D内。

定理 2.1.2。若 B（z）是一个零点为 $\{a_n\}$的 Blaschke乘积，则 B（z）在 D的紧子集上一致收敛。此外，除闭集 K 外， B（z）在 T 上的非切向极限处处存在，且模为 1；该闭集由 T 中所有作为 $\{a_n\}$的聚点的点组成。 B（z）的非切向极限在 K上不存在。

现在我们将看到，Blaschke乘积确实是一个内函数。

定理 2.1.3（Riesz 定理）。Blaschke乘积 B的径向极限的模在 T上几乎处处等于 1。

证明。设

$$B_n(z)=\prod_{k=1}^{n}\frac{\overline{a_k}}{|a_k|}\frac{a_k-z}{1-\overline{a_k}z}$$

是我们的 Blaschke乘积 $B(z)$ 的第 n 个部分乘积。我们首先证明 $\{B_n(e^{i\theta})\}_{n=1}^{\infty}$ 在边界圆上于 H^2 收敛。事实上,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|B_m(e^{i\theta})-B_n(e^{i\theta})|^2d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[|B_m(e^{i\theta})|^2+|B_n(e^{i\theta})|^2-2Re(B_n(e^{i\theta})\overline{B_m(e^{i\theta})}]d\theta.$$

现在，每个有限 Blaschke乘积在边界圆 T 上处处模为 1。因此，对于所有 $\theta\in[-\pi,\pi]$，我们有 $|B_m(e^{i\theta})|=|B_n(e^{i\theta})|=1$，且 $B_m(e^{i\theta})=\overline{B_m}^{1}(e^{i\theta})$，于是:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|B_m(e^{i\theta})-B_n(e^{i\theta})|^2d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}2-2Re\frac{B_n(e^{i\theta})}{B_m(e^{i\theta})}d\theta.$$

现在我们注意到，对于 $n>m$ 函数 $(\frac{B_n}{B_m})(z)$ 是解析的，因此根据柯西积分公式，我们有:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{B_n(e^{i\theta})}{B_m(e^{i\theta})}d\theta=\frac{B_n}{B_m}(0)=\prod_{k=m+1}^{n}|a_k|$$

因此，可得

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|B_m(e^{i\theta})-B_n(e^{i\theta})|^2d\theta=2(1-\prod_{m+1}^{n}|a_k|).$$

现在，由于 $\prod_{k=1}^{\infty}|a_k|$ 收敛，因此可得 $\lim_{m\to\infty}\prod|a_k|_{k=m+1}^{\infty}=1$，进而序列$\{B_k(e^{i\theta})\}_{k=1}^{\infty}$显然在 L^2 范数下是柯西序列。由于我们处于 $H^2(T)$ 中，而它是一个众所周知的希尔伯特空间，因此可得 $B_n(e^{i\theta})\to B(e^{i\theta})$ 在 $H^2(T)$ 中成立。当然， $B(e^{i\theta})$ 是 $B(z)$ 在 T 上的延拓，其径向值几乎处处存在，这由 Fatou 定理保证。我们有:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}|B_n(e^{i\theta})-B(e^{i\theta})|^2d\theta=0$$

因此，根据推论 1.2.1，存在 $B_n(e^{i\theta})$ 的一个子序列，使其几乎处处逐点收敛到 $B(e^{i\theta})$。因此， $B(e^{i\theta})$ 在几乎所有 $\theta\in[0,2\pi]$ 上的模均为 1，证明完毕。

□

以下定理可见于（[33], 第 66–67 页），它们是接下来将要给出的因子分解定理的最后几个组成要素。

定理 2.1.4. 设 f 是单位圆盘中的一个非零有界解析函数。那么 f可以唯一地表示为 $f=Bg$，其中 B 是一个 Blaschke乘积，而 g 是一个无零点的有界解析函数。

定理 2.1.5. 设 g 是一个无零点的内函数，且假设 $g(0)$ 为正。那么单位圆上存在唯一的奇异正测度 μ，使得

$$g(z)=exp\left[-\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}d\mu(\theta)\right]$$

现在我们可以陈述并证明因子分解定理了。

定理 2.1.6（因子分解定理）。设 $f\neq 0$ 是单位圆盘中的一个 H^1 函数。那么 f 可以唯一地表示为 $f=BSF$，其中 B 是一个 Blaschke乘积， S 是一个奇异函数，而 F 是一个外函数（在 H^1中）。

证明。由定理 1.2.7 可知 $f=gF$，其中 g 是内函数， F 是外函数，并且此因子分解在模为 1 的常数意义下是唯一的。如果 B 是由 f 的零点构成的 Blaschke乘积，那么 $g=BS$，其中 S 是无零点内函数。将 g 乘以一个模为 1 的常数后，我们可以假设没有五分彩

不失一般性，设 $S(0) > 0$，由上述定理可知， S 是一个奇异函数。乘法常数可以吸收到外函数 F 中。证明完毕。

□

我们之前见过Fatou定理，它在解析函数的边界行为理论中发挥着基础性作用。为了便于后续讨论，我们将其以如下更简洁的形式重新表述。

定理 2.1.7（Fatou 定理）。设 $f \in H^\infty$。则 f 的径向极限在 T上存在，除了可能有一个测度为零的 E 子集。

众所周知，Fatou 定理中的例外集 E 是一个 $G_{\delta\sigma}$ 集。但如果我们假设函数 f 在集合 $T \setminus E$ 的各点处具有非切向极限，那么 E 必然成为一个 F_σ 集。反向命题是基于 $[25]$，方法在 $[22]$ 中证明的，其结果可以表述如下。

定理 2.1.8. 设 E 是 T 上的一个集合。那么，存在一个函数 $f \in H^\infty$，使其在 E 上没有径向极限，但在 $T \setminus E$ 的每一点都有非切向极限，当且仅当 E 是一个测度为零的 F_σ 集。

注意，定理 2.1.8 的证明是初等的，其充分性部分拓展了 Lohwater 和 Piranian 的一个著名定理 $[36]$，该定理指出，对于任意测度为零的 $F_\sigma \subset T$ 子集，都存在一个有界解析函数，使其恰好在该集合上不存在径向极限。现在我们的目的，是陈述并证明关于Blaschke乘积的定理 2.1.8 的类似结果。结果如下:

定理 2.1.9（刻画定理）。设 E 是 T 上的一个集合。当且仅当 E 是一个测度为零的闭集时，存在一个 Blaschke乘积，使其在 E 上没有径向极限，但在 $T \setminus E$ 的每一点都有非受限极限。

定理 2.1.9 的证明使用了定理 2.1.8 以及 R.D. Berman $[15]$ 和 A. Nicolau $[38]$ 关于Blaschke乘积边界行为的一些结果。

2.2 一些辅助结果

我们按照 Nicolau $[38]$ 的表述，分别阐述 Berman $[15]$ 和 Nicolau $[38]$,的结果。下一个定理由 Berman 提出（$[15]$, 第 250 页）。

定理 2.2.1（R.Berman）。设 E 是单位圆上的一个子集，具有零勒贝格测度，且属于类型 F_σ 和 G_δ。那么存在布拉施克乘积 B_0 和 B_1，使得：(i) B_0 可解析延拓至 $T \setminus \overline{E}$，且 $\lim_{r\to 1} B_0(re^{it}) = 0$ 当且仅当 $e^{it} \in E$；(ii) $\lim_{r\to 1} B_1(re^{it}) = 1$ 当且仅当 $e^{it} \in E$。

现在我们表述 Nicolau 定理（参见第 251 页的 [38], 命题）。).

定理 2.2.2（A. Nicolau）。设 E 是单位圆的一个子集。假设存在一个 Blaschke乘积 B_0，它可以解析延拓至 $T\setminus\overline{E}$，且对于 $e^{it} \in E$，有 $\lim_{r\to 1} B_0(re^{it}) = 0$；并且存在一个定义在复平面 H^∞ 的单位球内的解析函数 f_1， $f_1 \neq 1$，使得对于$e^{it} \in E$，有 $\lim_{r\to 1} f_1($ $re^{it}) = 1$。那么，对于每一个定义在 H^∞ 的单位球内的解析函数 g，都存在一个 Blaschke乘积 I，它可以解析延拓至 $T \setminus \overline{E}$，使得

$$\lim_{r\to 1}[I(re^{it}) - g(re^{it})] = 0 \ for \ e^{it} \in E$$

在此结果中，当然，集合 E 实际上是勒贝格测度为零的，因为如果 $m(E) > 0$，那么条件 $\lim_{r\to 1} B_0(re^{it}) = 0$ 对于 $e^{it} \in E$ 已经会推出 $B_0 \equiv 0$，这不可能，因为 B_0 是一个 Blaschke乘积。

如（[38], 第 251 页）所述，定理 2.2.1 表明，若集合 E 是 T 的子集，且其勒贝格测度为零并属于类型 F_σ 和 G_δ，则满足定理 2.2.2 的假设。

2.3 定理 2.1.9 的刻画证明

证明。（必要性）假设存在一个 Blaschke乘积 $B(z)$，它在 $T \setminus E$ 的每一点都有非切向极限，并且在E各点没有径向极限。首先，由 Fatou 定理可得 $m(E) = 0$。为证明 E 是闭集，设$\{a_n\} \subset D$ 为 $B(z)$的零点序列。我们分两步完成证明:

步骤 1。若 B 在 $z_0 \in T$ 处的非切向极限存在且等于 d，则 $|d| = 1$。事实上，由定理 2.1.3（Riesz 定理），在 T 上 z_0 的每个邻域内都存在一点 w，使得 $B(z)$在该点的径向极限 $B(w)$存在且模为 1。这意味着 $|d| = 1$步骤 2。集合 $T \setminus E$ 是开集。

事实上，如果 $z_0 \in T \setminus E$，那么 $z_0 \notin \overline{\{a_n\}}$，因为否则 B 在 z_0 处的非切向极限将等于 0，这与步骤 1 矛盾。因此，存在一个开区间 $I \subset T$，使得 $z_0 \in I$，且 I 与（闭）集 $\overline{\{a_n\}}$ 不相交。于是，根据定理 2.1.2，Blaschke乘积 $B(z)$ 在 I 上连续，因此它在 I 中各点处具有非切向极限。这意味着 $I \subset T \setminus E$，从而 $T \setminus E$ 是开集。因此， E 是闭集，证明.....

必要性已完备。
（充分性）设 E 是 T 上测度为零的闭集。由于 E 是闭集，因此它是 F_σ 型且 G_δ。于是，定理 2.2.1（Berman 定理）的假设对于 E 均成立。因此，存在布拉施克乘积 B_0 和 B_1，它们具有 Berman 定理中所列的性质 (i) 和 (ii)。

这意味着，定理 2.2.2（Nicolau 定理）的表述中第二句话所指出的假设均已满足。请注意，存在一个解析函数 f_1，它属于 H^∞ 的单位球，且满足 $\lim_{r\to 1} f_1(re^{it}) = 1$ for $e^{it} \in E$，这一假设无论 Berman 定理是否成立，始终都能得到满足；因为根据 Fatou 插值定理，即使在圆盘代数中也存在这样的 f_1，而圆盘代数由定义在 $\overline{D}$ 上且在 D 内解析的所有连续函数构成。

根据定理 2.1.8 的充分性部分，存在一个函数 $g \in H^\infty$，它在 E 的每一点都不存在径向极限，但在 $T \setminus E$ 的每一点都有非切向极限（显然，g 可以在开集 $T \setminus E$ 上连续延拓）。如有必要，除以一个常数后，我们可以假设函数 g 属于 H^∞ 的单位球，因此可以应用 Nicolau 定理。于是，我们可以找到一个 Blaschke乘积 I，它在 $T \setminus E$ 上解析延拓，使得对于 $e^{it} \in E$，有

$$\lim_{r\to 1}[I(re^{it}) - g(re^{it})] = 0.$$

由于对于 $e^{it} \in E$，$\lim_{r\to 1} g(re^{it})$ 不存在，所以对于 $e^{it} \in E$，$\lim_{r\to 1} I(re^{it})$ 不存在。由于 I 在 $T \setminus E$ 上解析延拓，它在 $T \setminus E$ 上具有非切向极限，而 Blaschke乘积 I 具有所需的性质。至此，充分性及该定理的证明完成。

□

现在让我们将定理 2.1.9 必要性证明的步骤 1 表述为一个命题。

命题 2.3.1。如果Blaschke乘积 $B(z)$在点 $\zeta \in T$ 处的无约束极限存在且等于 d，那么 $|d| = 1$。

下面对命题 2.3.1 的证明重复了步骤 1 的证明。

证明。如果 $N(\zeta)$ 是任意一个以 ζ 为中心的开圆盘，定理 2.1.3 保证存在一点 $t \in D \cap N(\zeta)$，使得 $|f(t)|$ 可以任意接近 1。这意味着 $|d| = 1$ □

因此，命题 2.3.1（步骤 1）是 Riesz 定理的一个平凡推论。然而，命题 2.3.1 蕴含了一个结果，其原始证明并不平凡，但同样使用了 Riesz 定理

。这可能使人得出这样的结论：过去一些从事聚簇集理论研究的作者，未能充分认识到 Riesz 定理在方法论上的力量。

设 f是定义在 D中的函数，且 $\zeta \in T$。 f 在 ζ处的聚点集 $C(f,\zeta)$，根据定义，是所有满足以下条件的数 w 所组成的集合：存在 D 中的序列 $\{z_n\}$ ，具有以下性质：$\lim_{n\to\infty} z_n = \zeta$ 且$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = w$ （例如参见 [39], 第52页或 [29]）。H.G. Eggleston [29] 考察了以下例子（见 [29] 中的例（A））。

(A) 设 f 为一个 Blaschke乘积，其零点分布于 D 中，使得 T 中的每一点都是零点的聚点。那么，对于每个点 $\zeta \in T$， f 在 ζ 处的聚集集 $C(f,\zeta)$ 不退化为单点（见 [29], 第 140 页）。

“ ζ 处的聚点集缩减为单个点 d”和“ ζ 处的无约束极限等于 d”这两种表述是相同的。然而，在例（A）中，如果数 d存在，则它必定为 0，而 $|d| = 1$ ，根据命题 2.3.1。这证明了例（A）。

Eggleston [29] 甚至证明了，对于所有 $\zeta \in T$， $C(f,\zeta)$ 的直径大于或等于 1。E.F. Collingwood 进一步推广了 Eggleston 的这一结论（见 [18], 第 378 页及同页末尾的脚注）。Collingwood 还专门发表了另一篇著作（见 [19]），讨论 Eggleston 的同一篇论文 [29]。然而，上述显然的证明一直未被注意到（这或许解释了为何定理 2.1.9 的必要性部分此前从未被陈述和证明）。

2.4 统一问题

在本节中，我们首先陈述一些重要定理。在本节及后续章节的定理中，我们约定：单位圆盘上的每个函数在单位圆 T 上取其径向极限值（若极限存在）。下面这个重要定理由 S.V. Kolesnikov 提出 [35]。

定理 2.4.1. 设 $E \subset T$ 为 $G_{\delta\sigma}$ 型且测度为 0。那么存在一个单位圆盘 D 内的有界解析函数，它恰好在E中的点处不存在径向极限。

需要注意的是，Kolesnikov 定理的逆命题指出：有界解析函数的径向极限必为 $G_{\delta\sigma}$ 的集合是

这是初等的，而且早在 Kolesnikov 定理提出之前就已为人所知。证明可参见（[20], 第 23 页）。

定理 2.4.2（Fatou 插值定理，1906 年）。设 K 是 T 的闭子集，且 $m(K) = 0$。则存在一个属于圆盘代数的函数 f，其零点集恰好为 K。

Fatou 插值定理的一个证明（该证明表明 f 的实部在 D 上为正）可见于（[35], 第 $29 - 30$ 页）。 [27] 中也给出了一个新证明。Fatou 函数的构造还被用于证明 F. 和 M. Riesz 的一个重要结果，即任意解析测度相对于勒贝格测度都是绝对连续的。

下面定理的必要性部分众所周知，且其证明是初等的。充分性部分在 [22] 中得到证明，其证明采用了论文 [25] 的方法，并以 Fatou 插值定理为基础。

定理 2.4.3。设 E 是 T 上的一个集合。则存在一个函数 $f \in H^\infty$，它在 E 上没有径向极限，但在 $T \setminus E$ 的每一点都有非切向极限，当且仅当 E 是一个测度为零的 F_σ 集。

下面的定理解决了 Rubel 于 1973 年提出的一个问题，并在 [24]中给出了肯定的答案。该问题询问：对于任意G_δ 测度为零的集合 $F \subset T$，是否存在一个定义在D 上的不消失有界解析函数，使得 $f = 0$ 恰好为 F，且 f 的径向极限在T上处处存在。 [23] 中给出的以下更强定理也肯定地回答了 Rubel问题。

定理 2.4.4. 设 F 是 T上的一个测度为零的 G_δ。那么存在一个不消失的有界解析函数 g，使得：

1. g 在 $T \setminus F$上处处有非零径向极限。
2. g 在 F的每一点都具有为零的非切向极限。

现在，我们利用上述三个定理来解决 [22] 中问题 1 的一个特例。尽管 [22] 中提出的问题仍未解决，也是一个很好的研究机会，但我们已在本论文中解决了该问题的若干特例。该问题基本上试图将 Kolesnikov 定理和定理 2.4.3 统一为一个更强的定理。我们感兴趣的问题（见 [11], 第 4 页）如下：

统一问题。设 $E_1 \subset E_2$ 是单位圆 $T \equiv \{z \mid |z| = 1\}$ 的子集。求存在 $f \in H^\infty$ 的充要条件，使得 f 的径向极限恰好在 E_1 上不存在，并且它恰好在 $T \setminus E_2$ 上具有非切向极限。

情形 $E_1 = \emptyset$ 也可由下述定理处理。

定理 2.4.5（Brown、Gauthier 和 Hengartner）。设 E 是 T上的一个集合。那么，存在一个函数 $f \in H^\infty$，它在 E 上没有非切向极限，但在 $T \setminus E$ 的每一点都有非切向极限，当且仅当 E 属于 F_σ类型。

上述定理的证明并不困难。其思路是将 E 表示为闭集 $E = \bigcup_n C_n$的可数并，然后对这些集合 C_n 中的每一个，选取相应的 Blaschke乘积 B_n，使其零点恰好聚集于 C_n。接着，由于 Blaschke乘积的模不超过 1，无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{2^n}$ 收敛到具有所需性质的函数。

现在我们将继续讨论并解决统一问题的一些特例。在以下证明中，我们注意到，单位圆盘上的每个函数都延拓为在单位圆 T上取其径向极限（若存在）的值。

定理 2.4.6。设 $E_1 \subset E_2$ 是单位圆 $T \equiv \{z \mid |z| = 1\}$ 的子集，并假设 E_2 的测度为 2π。存在一个 $f \in H^\infty$，使得 f 的径向极限恰好在 E_1 处不存在，且它的非切向极限恰好在 $T \setminus E_2$ 处为零，其充要条件如下：

1. E_1 属于 $G_{\delta\sigma}$ 类，且测度为零。
2. E_2 属于 F_σ 类。

证明。（必要性）众所周知，复平面中使 f 的径向极限不存在的点所成的例外集属于 $G_{\delta\sigma}$ 类；根据 Fatou 定理，其测度为零。此外，若 f 在 $T \setminus E_2$ 上有非切向极限，则 $E_2 = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$，其中 F_n 是由 E_2 中所有这样的点组成的闭集：该点的任意邻域都含有点 t_1、$t_2 \in D$，使得$|f(t_1) - f(t_2)| > \frac{1}{n}$。显然，每个 F_n 都是闭集，因此 E_2 属于 F_σ 类，必要性的证明至此完成。

（充分性）由于 E_1 是 $G_{\delta\sigma}$ 且测度为零，根据 Kolesnikov 定理，存在一个有界解析函数 f_1，其径向极限恰好在 E_1 上不存在。通过添加

适当选取一个常数后，我们可以假设 f_1 在 T 上处处都不存在趋于零的径向极限。

现在，由于 E_2 是 F_σ，可知 $T \setminus E_2$ 属于 G_δ 类。因此，根据定理 2.4.3，存在一个非零有界解析函数 f_2，使得 $f_2 = 0$ 恰好在 $T \setminus E_2$ 上成立，并且 f_2 的径向极限在 T的所有点上都存在。函数 $F \equiv f_1 f_2$ 满足定理的条件，因此证明完毕。

□

现在，在继续解决另一个更复杂的问题之前，让我们回顾一下勒内-路易·贝尔的一些基本结果。

回顾一下，贝尔定理（见 [40], 第 986 页）断言：每个函数 $f\colon X \to Y$，若将完备度量空间 X 中的值映射到巴拿赫空间 Y，且属于贝尔第一类；也就是说，若它是一个连续函数序列的逐点极限，则具有如下性质： f 的连续点在 X中稠密。

由此可知， f 的间断点在 X中是无处稠密的。这个事实稍后也将用于简化 [21]中一个定理的证明。

定理 2.4.7. 设 $E_1 \subset E_2$ 是单位圆 $T \equiv \{z \mid |z| = 1\}$的子集。此外，假设 E_1 是闭集，且 E_1 与 $E_2 \setminus E_1$ 彼此分离。以下条件是存在 Blaschke乘积 $B(z)$的充要条件： $B(z)$的径向极限恰好在 E_1 处不存在，且其非切向极限恰好在 $T \setminus E_2$处存在：

1. E_1 的测度为零。
2. E_2 是闭集且无处稠密。

证明。（必要性。）由 Fatou 定理可知 E_1 的测度为零；而 E_2 是闭集，这是因为显然 E_2 是 $B(z)$零点的聚点。此外，根据假设， E_2 和 E_1 是闭集且彼此分离，因此 $E_2 \setminus E_1$ 也是闭集。现在，为证明 E_2 无处稠密，我们考虑闭集 $T \setminus O_n$，其中

$$O_n \equiv \bigcup_{e^{i\theta} \in E_1} (e^{i(\theta - \frac{1}{n})}, e^{i(\theta + \frac{1}{n})}).$$

注意，对于所有 n，径向函数 $B(e^{i\theta})$ 在闭集$T \setminus O_n$上属于第一类贝尔函数。我们的函数 $B(e^{i\theta})$ 限制在 $T \setminus O_n$ 上的不连续点构成集合$E_2 \setminus O_n$。根据贝尔定理，集合 $E_2 \setminus O_n$ 在 $T \setminus O_n$上是无处稠密的。由于 $E_2 \setminus O_n$ 是闭集，因此它实际上在标准拓扑下也是无处稠密的。

同样也适用于 T。因此，闭集 $E_2 \setminus E_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_2 \setminus O_n$ 也处处稀疏。最后，由于 E_1 是一个测度为零的闭集，显然它处处稀疏。现在注意到 $E_2 = (E_2 \setminus E_1) \cup E_1$，由此可得 E_2 处处稀疏，必要性的证明至此完成。

（充分性。）由于 E_1 是一个闭集，根据定理 2.1.9，我们知道存在一个 Blaschke乘积 $B_1(z, A_1)$，其径向极限恰好在 $A_1{}' = E_1$ 上不存在，并且其非切向极限在 $T \setminus E_1$ 上处处存在。现在，由于 $E_2 \setminus E_1$ 是闭且无处稠密的，根据定理 3.4.1（Colwell 定理，将在下一章介绍），存在一个 Blaschke乘积 $B_2(z, A_2)$，满足 $A_2{}' = E_2 \setminus E_1$，并且使得 $B_2(z, A_2)$ 在 T 上处处具有径向极限，而其非切向极限恰好仅在 $T \setminus (E_2 \setminus E_1)$ 上存在。于是，Blaschke乘积 $B(z, A_1 \cup A_2)$ 满足该定理的条件，证明完毕。

□

现在，我们注意到统一问题的另一个特殊情形。只要假设集合 E_2 的测度为零，这一情形同样可以针对 Blaschke乘积求解。为了证明这一特殊情形，我们使用以下定理，该定理见于 [38]。

定理 2.4.8。设 E 是单位圆的一个子集，其勒贝格测度为零，且属于类型 F_σ 和 G_δ。设 ϕ 是定义在 E 上的函数，满足 $\sup\{|\phi(e^{it})| : e^{it} \in E\} \leq 1$，并且对于复平面中的每个开集 U，$\phi^{-1}(U)$ 都属于类型 F_σ 和 G_δ。那么存在一个 Blaschke乘积 I，可解析地延拓到 $T \setminus \overline{E}$，使得

$$\lim_{r \to 1} I(re^{it}) = \phi(e^{it}) \ for \ e^{it} \in E.$$

注 2.4.1。根据因子分解定理，我们知道每个有界解析函数 f 都可以分解为三个特定有界解析函数的乘积。特别地，我们知道 $f = BSF$，其中 B 是一个 Blaschke乘积，S 是一个奇异内函数，而 F 是一个外函数。其思路是，分别从因子分解定理中的各个特定因子来研究统一问题，希望最终能够彻底解决统一问题。本文只讨论 Blaschke乘积；奇异内函数和外函数的研究留待未来进行，或许最终能彻底解决统一问题。

现在我们介绍并解决关于 Blaschke乘积的统一问题的以下特殊情形。

定理 2.4.9。设 $E_1 \subset E_2$ 是单位圆 $T \equiv \{z \mid |z| = 1\}$ 的子集。此外，假设 E_2 的测度为零。那么存在一个 Blaschke乘积 B，使得 B 的径向极限恰好在 E_1 处不存在，并且它恰好在 $T \setminus E_2$ 处有非切向极限，当且仅当 E_2 是闭集，且 E_1 属于 $G_{\delta\sigma}$ 类并且测度为零。

证明。（必要性。） E_2 是闭集，这是因为任何 Blaschke乘积只有在其零点的聚集点集的补集上才有非受限极限。这意味着， E_2 是我们的 Blaschke乘积的零点聚集所在的闭集。众所周知， E_1 是 $G_{\delta\sigma}$，如前所述，其证明可见于 [20]。

（充分性。）由于 E_1 是一个测度为零的 $G_{\delta\sigma}$，根据 Kolesnikov 定理，我们知道存在一个有界解析函数 f_1，它恰好只在 E_1上没有径向极限。此外，由于 E_2 是一个测度为零的闭集，我们可以应用定理 2.4.8，找到一个 Blaschke乘积B_2，使得对于所有 $e^{it} \in E_2$，B_2 的径向极限都等于$_{1\ 2}$。此外，由于 E_2 是闭集，Nicolau 定理的条件也得到满足。因此，对于每个有界解析函数 g，都存在一个 Blaschke乘积 I，使其在集合 E_2上模拟该函数的边界行为。现在，乘积函数 $g(z) \equiv f_1(z) \cdot B_2(z)$在 E_2上的限制具有所需的边界行为；也就是说， g 恰好只在 E_1 上没有径向极限，并且在 $E_2 \setminus E_1$ 上有径向极限但没有非受限极限。因此，根据 Nicolau 定理，我们可以找到一个 Blaschke乘积 I，它可在 $T \setminus E_2$ 上解析延拓，并且

$$\lim_{r \to 1}[I(re^{it}) - g(re^{it}] = 0$$

那么，Blaschk e 乘积 I 具有所需的边界行为，证明也就完成了 .

□

注2.4.2. 回顾一下，Kolesnikov定理指出，对于单位圆上的任意 E 型集合 $G_{\delta\sigma}$，都存在一个有界解析函数，使其恰好在该集合上不存在径向极限。因此，上述刻画定理可以被视为Kolesnikov定理关于Blaschke乘积的类似结果，但额外要求$\overline{E}$ 的测度为零。

第3章

弗罗斯特曼条件与 Collwel 定理

3.1 弗罗斯特曼条件在边界行为问题中的应用

弗罗斯特曼证明了关于 Blaschke乘积在边界上存在角极限的以下著名条件。

定理 3.1.1（弗罗斯特曼条件）。设 A 为单位圆盘D 内的点列，并令 $B(z, A)$ 表示零点集为 A 的 Blaschke乘积。那么，$\lim_{r\to 1} B(re^{i\theta^0}) = L$ （其中 $|L| = 1$ ）成立的充要条件是

$$\sum_{A} \frac{1-|a|}{|e^{i\theta}-a|} < \infty. \tag{3.1}$$

定义 3.1.1。我们将 B_L 定义为 H^∞ 的子类，它由满足以下条件的布拉施克乘积$B(re^{i\theta})$ 组成：对所有 $\theta \in [0, 2\pi]$，$\lim_{r\to 1} B(re^{i\theta}) = L(\theta)$ 均存在。

现在我们将利用弗罗斯特曼条件 (3.1)，并证明以下结论：

命题 3.1.1. 设 $B(z, A) \in B_L$ 是一个零点集为 $A = \{a_n\}$ 的 Blaschke乘积，则单位圆中 A' 的子集，即 $B(z, A)$具有模为 1 的径向极限的点集，同时是 G_δ 和 F_σ。

证明。事实上，如果我们定义以下函数序列 $\{f_n\}$

$$\begin{aligned} f_n : [0, 2\pi] &\to \mathbb{R}_{>0} \\ \theta &\longmapsto \sum_{k=1}^{n} \frac{1-|a_k|}{|e^{i\theta}-a_k|}. \end{aligned}$$

注意，序列 $\{f_n\}$ 是定义在 $[0, 2\pi]$ 上的连续函数序列，并且该序列恰好在 θ 中不满足上文弗罗斯特曼条件 (3.1) 的值处无界。这正是 Blaschke乘积 $B(z, A)$ 失效的点集。

具有模为 1 的径向极限。现在，根据一个著名定理，序列 $\{f_n\}$ 无界的点集属于 G_δ 型。因此，径向极限存在且模为 1 的点集属于 F_σ 型。现在令 $r_n = 1 - \frac{1}{n}$，并考虑以下连续函数组成的集合。

$$B_n^*(r_n e^{i\theta}) = \frac{1}{1 - |B_{r_n}(e^{i\theta})|}.$$

那么，显然，对于 $\theta \in [0, 2\pi]$，使函数序列 B_n^* 无界的点集 $\{e^{i\theta}\}$ 恰好是满足 li m sup$_{r\to 1} B(re^{i\theta}) = 1$ 的点集。但由于我们的 Blaschke乘积 $B(z)$ 属于类 B_L，因此这恰好是满足 lim$_{r\to 1} B(re^{i\theta}) = 1$ 的点集。因此，根据众所周知的定理，该集合属于 G_δ 型，证明完毕。

□

3.2 Collwel 定理

以下定理出自 Colwell 的论文 [21]: 《关于 Blaschke乘积径向极限的边界行为》。关于必要性的原始证明冗长且复杂。在本节中，我们将介绍一种基于 Baire 定理，甚至是一个初等定理的直接证明方法。

令 A' 为 T 上 A 的极限点集。以下定理是 P. Colwell 论文 [21] 的主要结果（参见 [21] 中的定理 2 和定理 3）。

定理 3.2.1。设 $E \subset T$。存在一个 Blaschke乘积 $B(z;\ A)$，使得 $B(e^{i\theta})$ 在 T 和 $A' = E$ 的每一点都有定义且模为 1，其中 A 是 Blaschke乘积 $B(z; A)$ 的零点集，当且仅当 E 是闭且处处稀疏的。

定理 3.2.2。设 $B(z)$ 是一个 Blaschke乘积，且 $B(e^{i\theta})$ 在 T 的每一点都有定义且模为 1。那么，作为一个函数， $B(e^{i\theta})$ 在 $\theta = \theta_0$ 处不连续，当且仅当 $e^{i\theta_0}$ 属于 A'。

我们现在的目的是简化 [21] 中定理 3.2.1 和定理 3.2.2 的证明。事实上，我们将证明，这两个定理的必要性部分可直接由两个经典定理推出：关于 Poisson 积分边界连续性的初等定理，以及关于第一类函数的 Baire 定理。事实上，我们只需要 Baire 定理必要性部分的一个特例，或者仅仅一个众所周知的初等论证。

尽管已知作者（包括 Colwell、Noshiro 和 Cargo）曾讨论过 [21]，并且 [21] 也曾在.....中被引用，但这样的证明长期以来一直未被注意到

关于布拉施克乘积的其他许多研究。然而，需要注意的是，除 Baire 定理和 Fatou 定理外，我们的简单方法还使用了定理 2.1.3（Riesz 定理）。正如 Cargo 指出的那样， [16], 如果省略“且模为 1”这一短语，定理 3.2.1 和定理 3.2.2 仍然成立。相应的表述如下：

定理 3.2.3. 设 $E \subset T$。存在一个 Blaschke乘积 $B(z;\ A)$，使得 $B(e^{i\theta})$ 在 T 和 $A' = E$ 的每一点都有定义，其中 A 是我们的 Blaschke 乘积 $B(z; A)$ 的零点集，当且仅当 E 是闭集且无处稠密。

定理 3.2.4. 设 $B(z)$ 是一个 Blaschke乘积，且 $B(e^{i\theta})$ 在 T 的每一点都有定义。那么，作为函数， $B(e^{i\theta})$ 在 $\theta = \theta_0$ 处不连续，当且仅当 $e^{i\theta_0}$ 属于 A'。

我们用于证明的新方法同样适用于这些结果的必要性部分。请注意， [21]中给出的定理 3.2.1 必要性部分的一个证明，在定理 3.2.3 的情形下并不成立。我们将在下文详细讨论这一点。我们也会对 [21] 中定理 3.2.1 必要性部分的证明作一些澄清。

3.3 辅助结果

以下关于 Poisson 积分在边界点处连续性的简单定理归功于 Fatou（见 [31] 第 381 页，定理 1，或 [41], 第 98 页，即定理 6.13 的一个特例）。

定理 3.3.1. 设 f是 $[-\pi, \pi]$上的周期可积函数，并设 $U(z)(z \in D)$ 是 f的 Poisson 积分。如果 f在点 $\theta = \theta_0$处连续，那么当 $z = re^{i\theta}$ 在开单位圆盘 D中任意趋近点 $e^{i\theta_0}$ 时， $U(z)$ 趋近于 $f(\theta_0)$。

证明。设 $A = f(e^{i\theta_0})$，那么我们需要证明：对于任意 $\epsilon > 0$，存在 δ_ϵ 和 r_ϵ，使得对于所有 $r > r_\epsilon$

$$|re^{i\theta} - re^{i\theta_0}| < \delta_\epsilon \Rightarrow |U(re^{i\theta}) - A| < \epsilon.$$

为此，我们固定 $\epsilon > 0$，然后对于任意 $\delta > 0$

$$\begin{aligned}
|U(z) - A| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} (f(e^{i\theta}) - A)p(r, \theta - t)dt \right| \\
&= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\delta}^{\delta} (f(e^{i\theta}) - A)p(r, \theta - t)dt + \int_{|t|>\delta} (f(e^{i\theta}) - A)p(r, \theta - t)dt \right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \left| (f(e^{i\theta}) - A)p(r, \theta - t) \right| dt + \int_{|t|>\delta} \left| (f(e^{i\theta}) - A)p(r, \theta - t) \right| dt.
\end{aligned}$$

由于 f 在 $e^{i\theta_0}$处连续，因此存在 δ_ϵ，使得

$$|e^{i\theta} - e^{i\theta_0}| < \delta_\epsilon \Rightarrow |f(e^{i\theta}) - A| < \frac{\epsilon}{2}$$

此外，由于泊松核是一个近似恒等元，存在 $0 < r_\epsilon < 1$ 使得

$$r > r_\epsilon \Rightarrow \int_{|t|>\delta_\epsilon} | (f(e^{i\theta}) - A)p(r, \theta - t) | dt < \frac{\epsilon}{2}$$

因此，对于 $\delta < \delta_\epsilon$ 和 $r > r_\epsilon$

$$|U(z) - A| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta_\epsilon}^{\delta\epsilon} | (f(e^{i\theta}) - A)p(r, \theta - t) | dt + \int_{|t|>\delta_\epsilon} | (f(e^{i\theta}) - A)p(r, \theta - t) | dt < \epsilon.$$

证明完毕。 □

在定理 3.3.1 中，函数 f 可以是实值函数，也可以是复值函数。显然，通过将该定理分别应用于 f 的实部和虚部，即可由实值函数的情形推出复值函数的情形。定理 3.3.1 的这一简短而初等的证明仅使用了第 1 章中讨论的泊松核的基本性质。

下一个定理是 R. Baire 关于第一类函数的拓扑定理中必要性部分的推论（参见 [14], 第 462 页，Baire 定理，或 [32], 第 287 页，定理 V），我们将其表述为适用于定义在 T 上的函数。

定理 3.3.2. 设 f、f_n 定义在 T 上，且 f_n 在 T 上连续。若 $\{f_n\}$ 在 T 的每一点都收敛于 f，则 f 在 T 的一个稠密子集上连续。

在下一节中，我们将基于一个众所周知的初等定理给出定理 3.3.2 的证明。

3.4 证明

定理 3.2.1 必要性的证明。假设 $B(z)$ 在 T 上处处具有模为一的径向极限，并且 $E = A'$。则 E 是闭集。因此，根据定理 3.3.1 和定理 3.3.2，在 T 的稠密子集 M 上，函数 $B(z)$ 具有连续边界值。Riesz 定理表明，每个连续边界值的模都为一。由于 A 是 $B(z)$ 的零点集，M 中没有点能属于 $A' = E$，而闭集 E 在 T 上必为处处稀疏集。

□

定理3.2.3的必要性证明。假设 $B(z)$在 T上处处存在径向极限，并且 $E = A'$。证明的其余部分与上面的证明相同。 □

定理 3.2.2 必要性的证明。如果 $e^{i\theta_0}$ 不在 A' 中，那么众所周知， $B(z)$ 在 $e^{i\theta_0}$ 的某个邻域内甚至是解析的。因此，如果 $e^{i\theta_0}$ 在 $\theta = \theta_0$ 处不连续，那么$e^{i\theta_0} \in A'$。

现在令 $e^{i\theta_0}$ 属于 A'。我们将证明 $B(e^{i\theta})$ 在 $\theta = \theta_0$ 处不连续。反设 $B(e^{i\theta})$ 在 $\theta = \theta_0$ 处连续。那么，根据定理 3.3.1，$\lim_{z \to e^{i\theta_0}} B(z) = B(e^{i\theta_0})$（其中 $z \to e^{i\theta_0}$ 任意取于 D）。因此，根据 Riesz 定理，我们必须有$|B(e^{i\theta_0}| = 1$。但是由于 $e^{i\theta_0} \in A'$，我们还必须有 $B(e^{i\theta_0}) = 0$，即矛盾。证明完毕。

□

证明 of 定理 3.2.4。此证明与上文定理 3.2.2 的证明完全相同。 . □

定理 3.3.2 的证明。（我们遵循经典方法，但采用了恰好适用于本例的简化处理。）我们将证明，对于任意闭弧 $[a, b] \subset T$ ，函数 f 在 (a, b) 中有一个连续点。给定 $\epsilon > 0$ 。集合 $F_{n,\ m} = \{t \in [a, b] : |f_n(t) - f_{n+m}(t)| \leq \epsilon\}$ 是闭的，且 $G_n = \bigcap_{m=1}^{\infty} F_{n,\ m}$ 是闭的。由于 f_n 在 $[a, b]$ 上收敛到 f，我们有 $[a, b] = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$。

由于 $[a, b]$ 在自身上并非第一纲集（根据贝尔定理），因此存在 n_0 和一个包含 $[a, b]$ 中点的开区间 I（$I \subset T$），使得 $[a, b] \cap I$ 包含一个不同于 a 和 b 的点 t_0。令 $J \subset T$ 为一条闭弧，使得 t_0 位于其内部，并且该闭弧足够小，以满足：

i. $J \subset I$。

ii. $J \subset (a, b)$。

iii. 连续函数 f_{n_0} 的振荡小于 ϵ。

此外，在 J上，$|f_{n_0}(t) - f(t)| \leq \epsilon$，由三角不等式可知， f在J上的振荡小于 3ϵ。这意味着存在闭弧 $J_n = [c_n, d_n] \subset (a, b)$，使得

(a) $J_{n+1} = (c_{n+1}, d_{n+1}) \subset (c_n, d_n)$。

(b) J_n 的长度小于 $1/n$。

(c) J_{n+1} 的振荡小于 $1/n$。

Then f 在点 $\tau \in \bigcap_{n=1}^{\infty} J_n$ 处连续，并且 $\tau \in (a,b)$，证明完成。 □

下面的定理简化了 A.J Lohwater 和 G.Piranian 在 [36] 中找到的一个定理的证明。该证明沿用了证明定理 2.4.5 时采用的方法，同时利用了 [21] 中所证明的定理 3.3.1 的充分性部分。

定理 3.4.1（Lohwater 和 Piranian）。设 K 是单位圆 T 中的一个第一类 F_σ 集合。那么存在一个有界解析函数 $\Phi(z) \in H^\infty$，使得 $\Phi(z)$ 的径向极限在 T 上处处存在，并且仅在 $T \setminus K$ 上具有非切向极限。

证明。由于 K 是 F_σ 且为第一类集合，因此可得 $K = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$，其中 K_i 是 C 的闭无处稠密子集。于是，对于每个 i，根据上文提到的 Colwell 论文中的定理，存在一个 Blaschke乘积 $B(z, A_i)$，其径向极限在 T 上处处存在且模为 1，并且仅在 $T \setminus K_i$ 上具有模为 1 的非切向极限。

现在，由于对所有的 $z \in D \mid B(z, A_i) \mid < 1$，可得 $\sum_{i=1}^{\infty} |B_{(z, A_i}| < \frac{\pi^2}{6})$，因此无穷级数 $\sum_{i=1}^{\infty} (\frac{B(z,A_i)}{i^2})$ 在 D 上一致收敛于解析函数 $\Phi(z)$。又由于每个 $B(z, A_i)$ 在 T 上处处存在径向极限，且恰好在 $T \setminus K_i$ 上存在模为 1 的非切向极限，因此 $\Phi(z)$ 在 T 上处处存在径向极限，且仅在 $T \setminus K$ 的 G_δ 集上存在非切向极限。证明完毕。

□

3.5 进一步讨论

本节的主要目的是说明，用于证明定理 3.2.1 必要性的证明方法（ [21] 中的定理 2）不适用于证明定理 3.2.3 的必要性部分。

为证明 [21] 中定理 3.2.1 的必要性，作者在 D 内构造了一条以 T 上一点为终点的多边形路径 $P(z)$。沿着 $P(z)$ 取 $B(z)$ 的极限时，作者使用了“若极限存在”这一表述（指沿该路径取极限）。然而，根据 Lindel¨of 定理，该极限必然存在，作者 [21] 对此给出了参考文献。

关于 [21] 上定理 2 必要性证明的最后部分，可以稍作如下修改。由于 $B(z)$ 的径向极限存在（在 T 的所有点处），Lindel¨of 定理表明，角向（或非切向）极限也存在。由于多边形路径 $P(z)$ 非切向地趋近于 T 上的一个点， $B(z)$ 沿 $P(z)$ 的极限存在。根据假设，此极限的模必须为一，因此它不为零。但这不可能，因为 $B(z)$ 的零点位于 $P(z)$ 上。这个矛盾完成了证明。

由于定理 3.2.3 允许存在径向极限（包括零），因此无法对定理 3.2.3 得出类似的矛盾。

第4章

Arakeljan定理

4.1 引言

本章将推广复逼近领域中的一个重要定理，即 Arakeljan定理。众所周知，根据魏尔斯特拉斯逼近定理，在实闭区间上，任意连续函数都可以由多项式一致逼近。在复数情形下，情况有所不同。由于多项式是解析的，由莫雷拉定理可知，如果 f 能由多项式一致逼近，那么 f 最好是一个解析函数。然而， f 是解析函数并不足以保证其能由多项式一致逼近。若令 $f(z) = 1/z$ 定义在环域 $F = \{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < z < 2\}.$ ，确实会出现这种情况。尽管 f 在 F中是解析的，但在此情形下，f 不能由多项式逼近，因为根据柯西定理，如果 f 能由多项式逼近，那么沿单位圆的围道积分必须等于零。然而，直接计算表明它实际上等于 $\frac{1}{2\pi}$ 。当然，这是因为 f 不能解析延拓到单位圆内部，而这又是由于 F的补集具有一个有界连通分支（一个洞）。

龙格定理的一个特殊情形表明，若函数 f 在包含紧集 F 的域 G 上解析，并且 F 具有连通补集，则该函数可以用多项式一致逼近。龙格定理是一个经典定理，实质上是复逼近的起点。该定理在最一般的形式下并不要求 F 具有连通补集，因此一般而言，逼近函数不是多项式，而是有理函数。该定理还断言，可以自由选择这些有理函数的极点，使其位于它们所在的 $G \setminus F$ 上相应的连通分支中的任意位置。作为一个推论，当 $G \setminus F$ 只有一个连通分支时，极点可以选在“∞”，因此 f 可以用多项式而非有理函数逼近。另一个著名定理是梅尔格良定理，它在 F 具有连通补集时改进了龙格定理。该定理表明，任何满足以下条件的函数

若函数在紧集 $F \subset \mathbb{C}$ 上连续，并在 F^o 上解析，则只要集合 F 具有连通补集，该函数就可以在 F 上用多项式一致逼近。

另一方面，Arakeljan定理处理的是定义在更一般集合中的解析函数 F，这些集合既非紧集，其补集也不连通。因此，我们不应期待使用多项式进行逼近。

为此，设 $G \subset \mathbb{C}$ 为任意域， $F \subset G$ 为 G的相对闭子集。Arakeljan定理给出了相应条件，用以确定函数 $f \in A(F)$是否能够在 F 上由函数 $g \in Hol(G)$逼近。

$$Hol(G) = \{g : g \text{ analytic in } G\}$$
$$A(F) = \{f : f \text{ analytic on } F^o, \text{ continuous on F}\}$$

[26] 中的主要结果在 $G = \mathbb{C}$时推广了Arakeljan定理。在 [26] 中，作者考察了两个闭集 F 和 C，并找到了必要且充分的条件，使得定义在 $F \subset \mathbb{C}$ 上的每个函数都可以由在 C 上有界的整函数逼近。在本文中，我们将通过考虑更一般的G，进一步推广这一结果。我们将看到，如果我们的集合 C 和 F 满足 G中的某个条件，或者 G 是单连通的，那么Arakeljan定理就可以得到推广。

本文中的结果属于联合逼近这一研究范畴。我们列举了一些相关文献，其中研究了类似的问题。具体而言，文献（[5]-[25]）致力于研究多项式有界逼近的各种问题，而文献（[9]-[11]）则致力于研究巴拿赫空间中解析函数的联合逼近问题。

Arakelan 集的描述

在阿拉克良定理的证明中（[30], 第142–144页），用于定义 F 为阿拉克良集的定义与本文将采用的定义有所不同。([30], 第142页)中使用的定义更具拓扑性质，但事实证明，这两种定义是等价的。本文将采用的定义也被用于 [26]，以证明在 $G = \mathbb{C}$情形下阿拉克良定理的一个推广。

本文中我们将采用的阿拉克良集定义基于G–洞的概念。

定义 1. 设 $G \subset \mathbb{C}$ 是任意一个域， $F \subset G$ 是 G 的相对闭子集。若 g 是 $G \setminus F$ 的一个非空连通分支，且称为 F 的 G– 洞，当它可以被

包含在一个紧子集 $L \subset G.$ 中

注 1. 需要注意的是， $G-$ 的 F 洞本质上是补集的一个有界连通分支（一个洞），其边界与 G的边界不相交。

现在我们已经在阿拉克良定理关于任意域的语境下定义了什么是洞，接下来可以定义阿拉克良集。

定义 2. 设 G 为任意域， F 为相对闭子集。若满足以下条件，则称 F 为阿拉克良集:

1. 集合 F 没有 $G-$洞。

2. 对于任意连通紧集 $K \subset G$ ，若 ∂K 是互不相交的若尔当曲线的并集[1], ，则集合 $H \equiv \{\bigcup\{h\} : \ h$ 是 $F \cup K\}$ 的一个 G洞，可以包含在 G的某个紧子集中。

注 2. 显然，由于 $G-$的洞的边界与 G的边界不相交，因此，如果 H 只有有限个 $G-$洞，且 F 没有 $G-$洞，那么F 就是阿拉克良集。此外，如果 F 没有 $G-$洞但不是阿拉克良集，那么要么 H 无界，要么 $\partial H \cap \partial G \neq \emptyset$。

现在，为了将我们的定义与（[30], 第 142 页）中提出的更具拓扑学意味的定义进行比较，我们需要借助一些拓扑学工具。为此，我们回顾任意域 $G \subset \mathbb{C}$ 的亚历山德罗夫紧化。集合 G^* 是通过引入点 ∞ 定义的，使得 $G^* = G \cup \{\infty\}$。 G^* 的拓扑定义为由 G 的开集以及所有紧子集$K \subset G$的补集组成。在这种拓扑下，可以验证 G^* 是紧的。

我们已经准备好了不行 w 用于给出 ([30], 第 142 页) 中的阿拉克良集定义 .

[1]因此，在局部范围内， ∂K 上任意一点周围的邻域看起来都像一个开区间。 1.

定义 3. 使集合 F 成为阿拉克良集的条件如下:

1. $G^* \setminus F$ 是连通的。
2. $G^* \setminus F$ 在 ∞处局部连通。

以下命题见（[30], 第 133 页），为我们提供了一种直观的方法来判断 $G^* \setminus F$ 是否连通。

命题 4.1.1. 空间 $G^* \setminus F$连通，当且仅当开集 $G \setminus F$的每个连通分支在 ∂G 上都有聚点，或者是无界的。

证明. 证明见（[30], 第 133–134 页）。 □

尽管上文给出的定义 3 的条件似乎与定义 2 中的条件不同，但实际上它们是相同的。

命题 4.1 .2. 描述阿拉克良集的定义 2 和定义 3 等价 .

证明。事实上，设 G 是任意一个域， F 是 G的一个相对闭子集。根据命题 1，集合 $G^* \setminus F$ 连通，当且仅当开集$G \setminus F$ 的每个连通分支都在 ∂G 上有聚点，或是无界的。因此， $G \setminus F$ 连通，当且仅当每个洞（ $G \setminus F$ 的连通分支）都不是 $G-$ 的洞。因此，两个定义中的条件 1 等价。现在我们将证明两个定义中的条件 2 也等价。

事实上，假设对于任意连通紧集 K ，其中 ∂K 是互不相交的若尔当曲线的并集，($F \cup K$) 的 $G-$ 个洞都包含在 G 的某个紧子集中。我们将证明这意味着 $G^* \setminus F$ 在 ∞ 处局部连通。现在回想一下，根据定义， $G^* \setminus F$ 在 ∞ 处局部连通，要求 $G^* \setminus F$ 中每个包含 ∞ 的开集都包含一个包含 ∞ 的连通子邻域。然而， $G^* \setminus F$ 中的每个开集都是某个紧集 $K \subset G \setminus F$ 的补集。

反设 $G^* \setminus F$ 不是局部连通的。那么必然存在一个紧集 $K \subset G \setminus F$，使得对于所有满足 $K \subset C$ 的紧子集 $C \subset G$，集合 $G^* \setminus (C \cup F)$ 都不是连通的。当然，只有当 $C \cup F$ 的 $G-$ 个洞无法包含在 G 的某个紧子集中时，才可能发生这种情况。现在，由于 G 是开且道路连通的，我们可以用一个同胚于圆盘的紧集，或一个同胚于环带楔和的紧集，将 K 的每个连通分支分别围起来。然后，由于 G 是道路连通的，

连通后，我们可以用一条管状通道[2] 将被围住的连通分支连接起来，形成一个集合 $L \supset K$，使得∂L 是由互不相交的乔丹曲线构成的并集，并且 G–个洞 $F \cup L$ 无法包含在复平面 G 的某个紧子集中，即产生矛盾。

另一个方向显然，因为对于任何不满足定义 2 中条件 2 的紧集 $K \subset G$ ，邻域 $G^* \setminus (F \cup K) \subset G^* \setminus F$ 在 ∞ 处不是局部连通的。证明完毕。

□

现在我们可以正式陈述阿拉克扬定理。

定理 4.1.1（阿拉克扬定理）。设 F 和 G 如上所述，则任意 $f \in A(F)$ 能被函数 $g \in Hol(G)$ 一致逼近，当且仅当 F 是阿拉克良集。

证明。阿拉克扬定理最初由一位名叫阿拉克良的亚美尼亚数学家在 [4] 中陈述并证明。另一个证明见（[30], 第 142–144 页）。 □

现在，我们的目标是摆脱限制 $G = \mathbb{C}$ ，并证明以下结论：

定理 4.1.2（阿拉克扬定理的推广）。设 $G \subset \mathbb{C}$ 为任意域，并假设 F 是 G 的相对闭子集。此外，设 $C \subset G$ 是 G[3] 中的闭子集，且 C 与 F 不存在公共洞。为了使每个函数 $f \in A(F)$ 都能在 F 上被函数 $g \in Hol(G)$ 一致逼近，且这些函数在 C 上均有界，以下条件是必要且充分的：

1. F 是一个阿拉克良集。

2. 存在一个闭阿拉克良集 $C_1 \neq G$，使得 $C \subset C_1$ 和 $F \cap C_1$ 可以包含在 G中的某个紧集中。

主要结果

在 [26] 具体的 情形中，$G = \mathbb{C}$ 阿拉克良定理已推广为如下 ：

定理 4.1.3（ $G = \mathbb{C}$时阿拉克扬定理的推广）。设 F 和 C 是复平面中的闭集，且满足 $C \neq \mathbb{C}$。要使每个函数 $f \in A(F)$ 都能在 F 上一致地由整函数逼近，且这些整函数在 C 上有界，充要条件是：

[2]如果 γ 是一条连接我们紧集的两个被包围连通分支（例如 A 和 B）的路径。如果我们从 ∂A 中去掉一个小区间，并从 ∂B中去掉一个小区间，那么由于 G 是开集，我们可以通过一条矩形路径“管道”将 ∂A 与 ∂B 连接起来，该管道沿着 γ的路径延伸。[3]这里的意思是， C 是 $\mathbb{C}$ 中的一个闭集，同时也是 G的子集。特别地，它是一个相对闭子集，其边界不与 G的边界相交。

1. F 是阿拉克良集。

2. 存在一个阿拉克良集 C_1, $C_1 \neq \mathbb{C}$，使得 $C \subset C_1$，且 $F \cap C_1$ 是 $\mathbb{C}$中的有界集。

上述关于 $G = \mathbb{C}$ 的阿拉克良定理推广版本的证明，基于以下两个引理。

引理 4.1.1. 设 f 是一个整函数，且 C 是 G, $C \neq G$中的一个闭子集。要使 f 在 C 上有界，充要条件是存在一个闭的阿拉克良集$C_1 \subset G$，使得 $C \subset C_1$，且 f 在 C_1上有界。

引理 4.1.2. 两个不相交的阿拉克良集 E 和 F 的并集仍是一个阿拉克良集 .

为了证明阿拉克扬定理的推广，我们必须将引理1和引理2推广到一般的域 G。我们没有采用更直观的阿拉克良集和 G–孔的定义（见注释1和注释2），是为了调整 [26] 中给出的证明，使其适用于任意域 G。

引理 4.1.3. 设 $G \subset \mathbb{C}$ 是任意域，且设 $f \in Hol(G)$。假设 C 是 G 中的闭子集。为了使 f 在 C 上有界，必要且充分条件是存在一个闭阿拉克良集 $C_1 \subset G$，使得 $C \subset C_1$，并且 f 在 C_1 上有界。

证明。充分性的证明显而易见，因此我们只证明必要性。为此，假设存在一个 $M > 0$，使得对于所有 $z \in C$，都有 $|f(z)| < M$，我们的目标是证明存在一个包含 C 的阿拉克良集 C_1，使得 f 在 C_1 上有界。现在，由于 G 是开集，且 C 是 G 中的闭子集，根据 f 在 C 上的连续性可知，对于每个 $z \in C$，都存在一个以 z 为圆心、半径小于 δ_z 的开圆盘 $U(z)$，使得对于所有 $t \in U(z)$，都有 $|f(t)| < M + 1$。此外，我们选取 $\delta_z < dist(C, \partial G)$，使得：

$$\overline{\bigcup_{z \in C} U(z)} \cap \partial G = \emptyset. \qquad (*)$$

闭集 C 的开覆盖 $\{U(z)\}$，$z \in C$ 有一个局部有限子覆盖，记为 $\{U_n\}$，$n = 1$，2，3，.....因此我们有

1. $C \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$

2. 对于 G 的任意紧子集 K，只有有限个圆盘 $\{U_n\}$ 与 K 相交。记 $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{U_n}$。根据 2，$E$ 是闭集。

3. $|f(z)| < M+1, \ \ z \in E$

令 C_1 为 G 与 E 及其 $G-$ 洞（如果存在）的并集的交集。 C_1 是一个局部有限的闭集族的并集，因此它是闭集，并且根据（$*$），它是 G 的子集。此外，根据构造， C_1 没有任何 $G-$ 洞。由（3）和最大值原理可得。

$$|f(z)| < M+1, \ \ z \in C_1$$

根据 (1)，我们还有 $C \subset C_1$。因此，只要证明 C_1 是一个阿拉克良集，引理便得证。回顾一下，要证明 C_1 是阿拉克良集，我们必须证明：

a) 集合 C_1 没有 $G-$ 孔

b) 对任意连通紧集 $K \subset G$，集合 $H \equiv \{h: \ h$ 是 $C_1 \cup K\}$ 的一个 $G-$ 孔，且包含在某个紧集 $L \subset G$ 中。

集合 C_1 的构造保证条件 (a) 得以满足，因此根据注2，只需证明：对于任意满足以下条件的连通紧集 $K \subset G$，即 ∂K 是互不相交的若尔当曲线的并集， $C_1 \cup K$ 只有有限多个 $G-$ 孔。

为此，设 K 是 G的这样一个紧子集。根据序列 $\{\overline{U_n}\}$ 中的 (2)，只有有限多个圆盘 $\overline{U_{n_1}}$、$\overline{U_{n_2}}$、 $....\overline{U_{n_k}}$，且每个圆盘都与 K 相交。集合 $(\partial K) \setminus \bigcup_{m=1}^{m=k} \overline{U_{n_m}}$ 是有限多个互不相交的开区间 I_1、I_2、.....、I_p 在 ∂K 上的并集。对于 $K \cup C_1$ 的任意一个 $G-$ 孔 h，至少存在一个区间 I_k $(1 \leq k \leq p)$，使得$I_k \subset \partial h$。（否则， h 将是 C_1 的一个 $G-$ 孔，这是不可能的，因为 C_1 没有$G-$孔。）

如果 h_1、h_2 是 $K \cup C_1$ 的两个不同 $G-$ 洞，且 $I_{k_1} \subset \partial h_1$ $(1 \leq k_1 \leq p)$ $I_{k_2} \subset \partial h_2$ $(1 \leq k_2 \leq p)$，那么 $k_1 \neq k_2$，否则我们就会得到 $h_1 \cap h_2 \neq \emptyset$，这是不可能的，因为 h_1 和 h_2 是不同的 $G-$ 洞。

因此， $K \cup C_1$ 的 $G-$孔的数量不会超过I_k区间的数量。因此， $C_1 \cup K$ 的 $G-$孔的数量是有限的，故由注2可知， C_1是一个阿拉克良集，证明完毕。

□

为了陈述情形 $G = \mathbb{C}$ 下引理2的相应类似结果，我们首先需要介绍以下定义。

定义4. 设 $G \subset \mathbb{C}$ 是一个域， F 是 G 的相对闭子集。那么，我们称 F 的严格孔为 $G \setminus F$（洞）的任何一个连通分支，且它不能包含在

G 的紧子集中（即不是 $G-$ 洞的洞）。

定义5. 设 E 和 F 是 G中的互不相交的相对闭子集。若 E和 F 的严格孔彼此交集非空时，其交集不是 $G-$孔，则称 E和 F 是 $G-$孔独立的。

引理4.1.4. 设 G 是 $\mathbb{C}$ 中的任意开域，并假设 E 和 F 是 G 中两个互不相交且 $G-$孔独立的阿拉克良集。那么集合 $E \cup F$ 是 G中的阿拉克良集。

证明. $E \cup F$ 的孔集如下：

$$\begin{aligned} G \setminus (E \cup F) &= (G \setminus E) \cup (G \setminus F) \\ &= \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j \\ &= \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i. \end{aligned}$$

其中， E_i 是 E的孔集， F_j 是 F的孔集，且 $G_i = \bigcup_{j=1}^{\infty}(E_i \cap F_j)$。由于$E$ 和 F 都是阿拉克良集，因此它们都没有 $G-$孔；又由于它们是$G-$孔独立的，因此可以得出，正如所要求的， $E \cup F$确实没有 $G-$孔。因此，接下来只需验证定义 2 中描述阿拉克良集的后一项条件。为此，反设存在一个连通紧子集 $K \subset G$ ，其中 ∂K 是由互不相交的若尔当曲线构成的并集，并且 $E \cup F \cup K$的所有 $G-$ 孔所组成的集合 H要么无界，要么 $\partial H \cap \partial G \neq \emptyset$。那么，根据注2，集合 $E \cup F \cup K$具有无限多个$G-$孔。因此，集合 H 必定具有无限多个连通分支，即 $H = \bigcup_{i=1}^{\infty}\{h_i\}$，其中每个 h_i都表示 $E \cup F \cup K$的一个 $G-$孔。现在，对于固定的 i，设 a_k^i、 $k = 1$、2、.....为$\overline{h_i} \cup K$的所有 $G-$孔。连通紧集 $\overline{h_i} \cup \bigcup_k \overline{a_k^i}$ 没有 $G-$孔。记d_i 为这个包含 h_i的连通紧集的内部。现在， ∂d_i 由 ∂K[4] 上的一段开弧和一个连通紧集组成，我们将后者记为 K_i。即，$K_i = (\partial d_i) \setminus \partial K$.显然， $K_i \subset E \cup F$。因此， K_i完全位于 E上或位于 F中。设 i_n、 $n = 1$、2、.....为满足 $K_{i_n} \subset E$的所有自然数，而设 i_l、 $l = 1$、2、.....为其余满足$K_{i_l} \subset F$的自然数。现在，根据我们的假设，集合 $H = \bigcup_{i=1}^{\infty}\{h_i\}$ 要么无界，要么 $\partial H \cap \partial G \neq \emptyset$ ，或者两者兼有。 H 无界的情形~~已在 [26]中~~处理。对于 $\partial H \cap \partial G \neq \emptyset$ 的情形，我们只需注意到，由于 H 在.....上有一个聚点。

[4]由于 ∂K 是互不相交的若尔当曲线的并集，且 K 是连通的

∂G，由此可得，集合 $\{h_{i_n}\}$ 和 $\{h_{i_l}\}$ 中至少有一个在 ∂G 上有聚点。不失一般性，假设 $\{h_{i_n}\}$ 在 ∂G 上有聚点。现在考虑 $\{h_{i_n}\} \cup K$ 的洞。由于 $K_{i_n} \subset E$ 和 h_{i_n} 是 $E \cup F \cup K$ 的一个 $G-$ 洞，我们可以看到，存在 $E \cup K$ 的一个 $G-$ 洞 V_{i_n}，使得 $h_{i_n} \subset V_{i_n} \subset d_{i_n}$。因此，集合 $\bigcup_{n=1}^{\infty}\{V_{i_n}\}$ 在 ∂G 上有聚点，这意味着集合 E 不是阿拉克良集。这与假设矛盾，因此引理得证。

□

注 3. 注意，上面的引理中必须要求 E 和 F 彼此$G-$洞独立。事实上，若令 G 为穿孔单位圆盘， E 和 F 为半径分别为1_2 和1_4 的圆周，则很容易验证， E 和 F 是互不相交的 Arakeljan 集，其并集 $E \cup F$ 以环域 $A = \{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{4} < |z| < \frac{1}{2}\}$ 为一个 $G-$洞。当然，这是因为它们并非 $G-$洞独立。

现在我们已经掌握了这两个引理，可以证明阿拉克扬定理的推广了。

定理 4.1.4（阿拉克扬定理的推广）。设 $G \subset \mathbb{C}$ 为任意一个域，并设 F 是 G的相对闭子集。此外，假设 $C \subset G$ 是 G 中的一个闭子集，且 C 和 F 彼此 $G-$洞独立。要使每个函数 $f \in A(F)$ 都能在 F 上一致地由函数 $g \in Hol(G)$ 逼近，且这些函数都在C上有界，必要且充分的条件是：

1. F 是阿拉克良集。

2. 存在一个闭的阿拉克良集 $C_1 \neq G$，使得 $C \subset C_1$ 和 $F \cap C_1$ 可以包含在 G中的某个紧集中。

阿拉克扬定理推广的证明。（必要性。）假设任意 $f \in A(F)$ 都可以由函数 $g \in Hol(G)$ 一致逼近，且这些函数在 C 上均有界。由阿拉克良定理可知， F 是阿拉克良集。显然，函数 $\phi(z) = z$ 属于类 $Hol(G)$，因此存在函数 $f \in Hol(G)$，使得：

$$|z - f(z)| < 1, \quad z \in F \tag{4.1}$$

并且 f 在复平面上也有界。根据引理 1，存在一个闭阿拉克良集 $C_1 \subset \mathbb{C}$，使得 $C \subset C_1$，并且 $f(z)$ 在 C_1 上有界。由 (1) 可知， $F \cap C_1$ 有界。由于 C_1是 G内的一个闭子集，因此它与边界 ∂G保持一定距离。因此，

由于 $F \cap C_1$ 有界，因此它可以包含在一个紧集 $L \subset G$中。必要性的证明完毕。

（充分性。）设有阿拉克良集 F 和 C_1、 $C \subset C_1$，使得 $F \cap C_1$ 是一个有界集。令 L 为 G 中的一个紧集，使得 ∂K 是互不相交的乔丹曲线的并集，并且足够大，从而：

$$F \cap C_1 \subset L^5 \tag{4.2}$$

$$(\partial L) \setminus C_1 \neq \emptyset \tag{4.3}$$

注意到，由于 $C_1 \neq G$ 是一个没有 $G-$ 个洞的闭集，(3) 是可能的。
集合 $C_1 \setminus L$ 也没有 $G-$ 个洞，因为否则将存在一个 $G-$ 洞 g，其属于 $C_1 \setminus L$。这将导致矛盾，因为我们必须有 $\partial g \subset C_1$。然而，由于 C_1 没有 $G-$ 个洞，因此可推出 $g = L$，这与 (3) 矛盾。

此外，由于根据定理的假设， C 和 F 是 $G-$ 洞独立的，不妨设集合 $F \cup (C_1 \setminus L)$ 没有 $G-$ 个洞。集合 $C_1 \setminus L$ 也是一个阿拉克良集。否则，将存在一个紧集 $K \subset G$，使得集合 $H \equiv \{h :$ h 是 $K \cup (C_1 \setminus L)$ 的一个 $G-$ 洞，$\}$ 要么无界，要么 $\partial H \cap \partial G \neq \emptyset$。但这是矛盾的，因为这样一来，集合 $C_1 \setminus L$ 的 $G-$ 个洞与紧集 $K \cup L$ 的并集也必然要么无界，要么在 ∂G 中的某一点处聚集。事实上，该断言成立，因为 $(K \cup L) \cup (C_1 \setminus L) = C_1 \cup K$。这与 C_1 是一个阿拉克良集相矛盾，因此由矛盾可知， $C_1 \setminus L$ 是一个阿拉克良集。

现在，由 (2) 可知阿拉克良集 F和 $C_1 \setminus L$ 互不相交，因此根据引理 4， $F \cup (C_1 \setminus L)$ 是阿拉克良集。

设 $\phi(z) \in A(F)$ 是任意函数。在 F 上定义函数 $h(z)$ 为 $h(z) = \phi(z)$，并在 $C_1 \setminus L$上令 $h(z) = 0$。显然，由 (2) 可知 $h(z) \in A(F \cup (C_1 \setminus L))$。因此，根据阿拉克良定理， $h(z)$ 可由 $A(G)$ 中的函数一致逼近。因此，对于任意 $\epsilon > 0$，存在函数 $f \in A(G)$，使得对于任意 $z \in F \cup (C_1 \setminus L)$， $|h(z) - f(z)| < \epsilon$。于是可得， $|\phi(z) - f(z)| < \epsilon$在 F上成立，且 $|f(z)| < \epsilon$在 $C_1 \setminus L$上成立。函数 $f(z)$ 在 $C_1 \setminus L$上有界；此外， $f(z)$ 在紧集 $C_1 \cap L$ 上有界。因此， $f(z)$ 在 F 上一致逼近 $\phi(z)$，且在 C上有界。证明完毕。

□

以下引理在 [[3], p2.65] 中得到证明，并在 G 为单连通的情形下替代引理 4。

[5]这样的 L 存在，因为 C_1 是 G中的闭子集。这就是定理陈述中没有要求 C_1 仅仅是 G 的相对闭子集的原因。

引理 4.1.5. 设 $G \subset \mathbb{C}$ 是一个单连通开集，$\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 G 中的一个两两不交的局部有限族 Arakeljan 集，则并集 $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ 也是 G 中的一个阿拉克良集。

推论 4.1.1（ G为单连通域时阿拉克扬定理的推广）。设$G \subset \mathbb{C}$ 是任意单连通域，并假设 F 是 G的相对闭子集。此外，假设 $C \subset G$ 是 G中的闭子集。要使每个函数$f \in A(F)$都能在 F 上一致地由函数 $g \in Hol(G)$逼近，且这些函数均在 C上有界，必要且充分的条件是:

1. F 是阿拉克良集。

2. 存在一个闭阿拉克良集 $C_1 \neq G$，使得 $C \subset C_1$ 和 $F \cap C_1$ 可以包含在某个紧子集 $L \subset G$中。

证明。证明与上面的证明完全相同，当然这里我们使用引理 5 而不是引理 4。

□

最后，我们提出一个自然产生的开放问题：如果要求逼近函数在 C上一致有界，阿拉克扬定理的推广是否仍然成立？即使在 $G = \mathbb{C}$的情形下，这个问题也尚未得到解答。

参考文献

[1] A.A Danielyan 和 L.A Rubel, 《在给定集合上均有界的整函数的一致逼近》, Const. Approx. (1998) 14: 469-473。[2] Dieter Gaier, 《复逼近讲义》, Brickhauser Boston, Inc., 1987。[3] Fournodavlos, G.《关于 Arakeljan 集的刻画》。J. Contemp. Mathemat. Anal. 47, 261–269 (2012)).[4] N. U Arakeljan：《解析函数的一致逼近与切向逼近》。Izv. Akad. Nauk Armjan. SSR Ser. Mat. 3 1968 no. 4-5, 273–286。[5] L.A. Rubel：《复域中的联合逼近》。载于《复分析研讨会，坎特伯雷 1973》（J. Clunie, W.K Hayman 编）。剑桥：Cambridge University Press，第 115-118 页 (1974)

[6] L.A. Rubel, A.L. Shields：《多项式的有界逼近》。Acta Math.，112：145–162。（1964）

[7] 关于联合逼近中源自 Rubel问题的一些问题。Dokl. Akad. Nauk Russ.，341（1995）

[8] ：关于在复平面的紧集上用一致有界多项式序列表示函数。Isz. Akad. Nauk Armyan. SSR Ser. Math.，21：345–357。（1986）[9] L.A. Rubel、Lee A.；Stray、Arne。单位圆盘中的联合逼近。J. Approx. Theory 37，第1期，44–50。（1983）

[10] Beise, Hans-Peter, Muller, Jurgen. Hardy 空间和 Bergman 空间中泰勒级数的一般边界行为。Math. Z. 284, no. 3-4, 1185–1197.(2016)

[11] Muller, Jurgen. 泰勒级数的伪极限函数。Anal. Math. Phys.9, no. 2, 875–885.(2019)[12] A.A Danielyan and Spyros Pasias, 关于布拉施克乘积, (Submitted) 2022.[13] A.A. Danielyan and Spyros Pasias, 关于布拉施克乘积的边界性质, (Submitted) 2021.[14] N.K Bary, 《三角级数论述》, V.2, Pergamon Press, 1964[15] R.D. Berman, 内函数固定径向极限值的集合, Illinois J. Math.(2) 29 (1985) 191-219.[16] G. T. Cargo, 关于平面点集的一个定理及其在函数论中的应用, J. London Math. Soc., 37 (1962), 169-175.[17] G. T. Cargo, MR193243 (1966).[18] E.F. Collingwood, 关于解析函数最大不确定集, Math. Zeitschr. 67, (1957) 377-396.[19] E.F. Collingwood, 关于 Eggleston 聚类集定理, J. Lond. Math. Soc., s1-30, (1955), 425-428.[20] E.F Collinwood and A.J Lohwater 《聚簇集理论》, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physiscs 56, 剑桥大学出版社 (2009).[21] Peter Colwell, 单位圆盘中布拉施克乘积的边界行为, Proc. of AMS, 17 (1966), 582-587.[22] A.A. Danielyan, 关于 Fatou 定理, Anal. Math. Phys. 10, (2020), Article number: 28.[23] A.A. Danielyan, 有界解析函数插值及相关问题, 逼近论新趋势, Fields研究所通讯 81, (2018), 215-224[24] A.A. Danielyan, 有界解析函数的 Rubel问题, Annales Academiae Scientiarum Fennicae Mathematica V. 41, (2016) 813-816.

[25] A.A. Danielyan, 《Lohwater 与 Piranian 的一个定理》, 《美国数学学会会刊》144（2016）, 3919-3920。[26] A.A Danielyan 和 L.A Rubel, 《在给定集合上均有界的整函数的一致逼近》, Const. Approx.（1998）14：469-473。[27] A.A. Danielyan, 《Fatou 插值定理的一个证明》, 《傅里叶分析与应用杂志》28，文章编号：45（2022）。[28] Peter L. Duren, 《Hp 空间理论》, Academic Press, INC. (London) LTD.（1970）。[29] H.G. Eggleston, 《有界解析函数的一个性质》, Comm. Math. Helvetici，30（1956）, 139-143。[30] Dieter Gaier, 《复逼近理论讲义》, Brickhauser Boston, Inc.，1987。[31] G. M. Goluzin, 《复变函数几何理论》, 《数学专著译丛》第26卷，AMS，1969。[32] F. Hausdorff, 《集合论》, Chelsea Publishing Company，1962。[33] K.Hoffman, 《解析函数巴拿赫空间》, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey，1962。[34] Paul Koosis, 《Hp 空间导论》, 剑桥大学出版社（1998）。[35]S.V Kolesnikov, 《有界解析函数径向极限不存在的集合》, Mat. Sb.，185（1994）, 91-100；俄文译文载于 Russian Acad. Sci. Sb. Math.m 81（1995）, 477-485。[36] A.J Lohwater 和 G.Piranian, 《圆盘内解析函数的边界行为》, Ann. Acad. Sci. Fenn.，A辑，Mathematica，239（1957）。[37] I.P. Natanson, 《实变量函数论》, Frederick Ungar Publishing Co., Inc.。[38] A. Nicolau, 《具有预设径向极限的 Blaschke乘积》, Bull. London Math. Soc. 23。

[39] K. Noshiro，《聚类集》，Springer-Verlag，柏林，1960年。[40] C. Stegall，《取值于巴拿赫空间的第一 Baire 类函数》，《美国数学学会会刊》111（4），981，（1991年）。[41] A. Zygmund，《三角级数》，第1卷，剑桥，1959年。