arXiv:2304.10925v1 [math.RA] 21 Apr 2023

零丝状莱布尼茨代数上的多项式恒等式与多项式的像

蒂亚戈·卡斯　蒂略·德·梅洛和曼努埃拉·达·席尔瓦　·索萨

Abstract. 本文研究零丝状莱布尼茨代数上的恒等式与多项式的像。若 L_n 是一个 n维零丝状莱布尼茨代数，我们给出 Id(L_n) 的一个有限极小基，其中 Id(L_n) 表示 L_n的多项式恒等式，并明确计算了 L_n上多齐次多项式的像。我们给出多齐次多项式 f 的像是 L_n的子空间的充要条件。对于多线性多项式这一特殊情形，我们证明其像总是一个向量空间，从而表明 L'vov-Kaplansky 猜想的类似命题对L_n成立。我们还针对无限维情形下零丝状莱布尼茨代数的一个类似结构证明了相似结果。

1. 引言

设 K 是一个域， $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ 是一个可数无限集。用 $K\{X\}$ 表示由 X 自由生成的自由（非结合） K-代数。我们称 $K\{X\}$ 的元素为多项式。若 A 是一个代数，而 $f = f(x_1, \dots, x_m)$ 是一个多项式，则它定义了一个映射（也记为 f）

$$\begin{array}{rccc} f: & A^m & \longrightarrow & A \\ & (a_1, \dots, a_m) & \longmapsto & f(a_1, \dots, a_m) \end{array}$$

通过将 f 的变量取值为 A 中的元素来求值。我们可以探讨给定多项式的像是什么，或者哪些 A 的子集是 $K\{X\}$ 中某个多项式的像。

近年来，许多作者在不同背景下研究了多项式的像，这项研究大多受到著名公开问题——L'vov-Kaplansky 猜想的推动。该猜想断言，多线性多项式在 $n \times n$ 矩阵代数上的像是一个向量空间。在这种情况下，它必为以下子空间之一：整个矩阵代数、迹为零的矩阵集、标量矩阵集，或集合 $\{0\}$。

像为 $\{0\}$ 的多项式称为 A 的多项式恒等式，而像为标量矩阵集合的多项式称为中心多项式。代数中的多项式恒等式理论已发展得相当成熟，是研究多项式像的重要工具。关于结合代数和非结合代数中的多项式恒等式，可参阅 [7, 22,5] 。

L'vov-Kaplansky 猜想仅在 $n = 2$ [13] 或 $m = 2$的情况下得到了解决（这是 Shoda [20] 以及 Albert 和 Muckenhoupt 的一项旧结果的推论）

2020 *Mathematics Subject Classification.* 17A30，17A32。*Key words and phrases.* 代数上的多项式像、莱布尼茨代数、零丝状莱布尼茨代数、多项式恒等式、L'vov-Kaplansky 猜想。

[1], 该结果断言，任何迹为零矩阵都是一个交换子。关于这一结果的更简单证明可见于 [11]）。

可以问上述猜想是否对任意代数都成立，但不难找到其失效的例子。例如，无限维向量空间上的格拉斯曼代数中，多线性多项式 $f(x,y) = [x,y] := xy - yx$ (交换子) 的像不是一个子空间。因此，限定这种推广猜想的适用范围是很有意义的。近期论文表明，该猜想对几个单代数的例子成立：实四元数代数 [16], 实八元数代数 [12], 非退化双线性形式的约当代数 [17]。此外，在 [21] 中，作者证明了如果 A 是一个带有满射内导子的含幺结合代数，那么 f 在 A 上的像是 A。特别地，在无限维向量空间上定义的（单）端同态代数以及 K上的（单） n次Weyl代数中，多线性多项式的像是一个向量子空间。对于李代数，当多项式的次数不超过 4 [2] 时，李代数 $\mathfrak{su}(n)$和 $\mathfrak{so}(n)$已有解。关于这一研究方向的全面综述，请参阅 [14] 。

尽管 L'vov-Kaplansky 猜想对一般的代数并不成立，但对于非单代数，已有一些正面结果。一个重要的例子是，在充分大的域上定义的上三角矩阵代数类 [9, 15]。对于 $n \times n$ 严格上三角矩阵代数（以及其幂） [8]，同样的结论也成立。值得一提的是，后一个代数是幂零的。在 [18] 中，作者描述了在维数为 $L' \leq 4$ 的有限维幂零李代数 L 上取值的次数为 2 的多线性李多项式的像。

本文研究了描述在一类特殊的幂零莱布尼茨代数上取值的多齐次多项式的像这一问题。

莱布尼茨代数是李代数的一种"非交换"类比。在过去三十年中，这类代数得到了广泛研究。研究者主要致力于将李代数的结果推广到莱布尼茨代数，并且已经证明，许多关于李代数的重要结果在莱布尼茨代数中都有相应的类比；例如，恩格尔定理的类比版本（见 [3]）以及列维定理的一个较弱版本（见 [6]）对莱布尼茨代数成立。

本文中我们感兴趣的莱布尼茨代数称为零丝状莱布尼茨代数。若对于任意 $1 \leq i \leq n+1$，$\dim L^i = (n+1) - i$，则称 n 维莱布尼茨代数 L 为零丝状代数。特别地，这类代数具有最大的幂零指数。

本文彻底解决了描述任意多齐次多项式在一个 n 维零丝状莱布尼茨代数上的取值像这一问题。我们给出了多齐次多项式 f 的像为 L_n 的子空间的充要条件。特别地，我们证明，多线性多项式的像总是一个向量子空间。

此外，我们给出了 n 维零丝状莱布尼茨代数的多项式恒等式的有限基，以及其相对自由代数的线性基。

在最后一节中，我们考虑零丝状莱布尼茨代数的无限维类比，给出其恒等式的一个有限基，并描述多线性多项式和多齐次多项式在其上的像。

2. Preliminaries

本文中， K 将是一个域。所有代数均定义在 K上。莱布尼茨代数L 是满足以下关系的代数:

$$x(yz) = (xy)z - (xz)y \tag{1}$$

对所有的 x、 y 和 $z \in L$ 都成立。换言之，任意元素 z 的右乘都是一个导子。上述恒等式称为莱布尼茨恒等式。如果进一步对任意 $x \in L$ 都有 $x^2 = 0$ ，那么该莱布尼茨代数就是李代数。反过来，任何李代数都是莱布尼茨代数。从这个意义上说，莱布尼茨代数可视为李代数的非交换推广。对于给定的莱布尼茨代数 L, 由下列方式归纳定义的理想链

$$L^1 = L,\ L^{k+1} = L^k L,\ k \geq 1,$$

称为 L 的下中心列。若存在某个整数 $m > 0$，使得 $L^m = 0$，则莱布尼茨代数 L 是幂零的。最小的数 m 称为 L 的幂零指数。

定义 1（[4]）。若一个 n 维莱布尼茨代数 L 满足

$$\dim L^i = n + 1 - i \ \textit{where}\ 1 \leq i \leq n + 1.$$

容易看出，每个零丝状莱布尼茨代数都具有最大的幂零指数。

下面给出一个关于零丝状莱布尼茨代数的重要结果。该结果在 [4] 中得到证明，指出在同构意义下，每个维数都只有一个这样的代数。

定理 2。任意一个 n 维零丝状莱布尼茨代数都同构于代数 $L_n = \mathrm{span}\{e_1, \ldots, e_n\}$，其乘法表如下:

$$e_i e_1 = e_{i+1},\ 1 \leq i \leq n - 1,$$

所有其他乘积均定义为零。

特别地，在研究零丝状莱布尼茨代数上的多项式的像时，只需研究上述乘法表所对应的代数上的多项式的像。事实上，若 $\varphi : A \longrightarrow B$ 是代数的一个同构，且$f(x_1, \ldots, x_m) \in K\{X\}$，那么对于任意 $a_1, \ldots, a_m \in A$，有

$$\varphi(f(a_1, \ldots, a_m)) = f(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_m)),$$

因此， $S \subseteq A$ 是 A 上的一个多项式 f 的像，当且仅当 $\varphi(S)$是 B上的 f 的像。

3. Identities of null-filiform Leibniz algebras

令 $X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ 为一个可数无限变量集， $\mathcal{D}(X)$ 为以集合 X 为基、可数秩的自由莱布尼茨代数，即由 X 生成且满足以下泛性质的代数：给定一个莱布尼茨代数 L, 对于任意映射 $X \to L$ ，存在唯一的代数同态 $\mathcal{D}(X) \to L$ 延拓该映射。 $\mathcal{D}(X)$ 的元素称为多项式；若多项式 $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \mathcal{D}(X)$ 是莱布尼茨代数 L 的多项式恒等式，我们称之为该代数的多项式恒等式，当且仅当对所有 $a_1, a_2, \ldots, a_n \in L$，均有 $f(a_1, a_2, \ldots, a_k) = 0$ ；也就是说，若 f 属于从 $\mathcal{D}(X)$ 到 L 的任意同态的核中。 $\mathcal{D}(X)$ 中所有关于 L 的多项式恒等式构成的子集记为 $\mathrm{Id}(L)$。集合 $\mathrm{Id}(L)$ 是 $\mathcal{D}(X)$ 的一个 T-理想,

也就是说，它是 $\mathcal{D}(X)$ 中在所有自同态下保持不变的理想。我们用 $\langle S\rangle^T$ 表示由 $S \subseteq \mathcal{D}(X)$ 生成的 T-理想，即包含 S 的 $\mathcal{D}(X)$ 的所有 T-理想的交集。若恒等式集合 $S \subseteq \mathrm{Id}(L)$ 满足 $\mathrm{Id}(L) = \langle S\rangle^T$，则称其为 $\mathrm{Id}(L)$ 的基。若某个基不真包含 $Id(L)$ 的任何基，则称 $Id(L)$ 的该基为极小基。为简化记号，我们定义

$$ab^{(n)} := (\cdots((a\underbrace{b)b)\cdots)b}_{n-times}$$

对于莱布尼茨代数 L中的任意 a, b 。

注 3. 根据莱布尼茨恒等式 (1)， $\mathcal{D}(X)$ 中的任意多项式都可以写成左范数单项式的线性组合，即形如以下形式的单项式

$$(\cdots((x_{i_1}x_{i_2})x_{i_3})\cdots x_{i_{m-1}})x_{i_m}.$$

因此，我们将省略左范数单项式中的括号。例如，上述单项式将简记为 $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_m}$。

我们先介绍一些 n维零丝状莱布尼茨代数的基本恒等式，这些恒等式将在本文后续部分发挥作用。

引理 4. 设 L_n 是一个 n维零丝状莱布尼茨代数。多项式

$$x_1(x_2x_3) \tag{2}$$

$$x_1x_2x_3\cdots x_n - x_2x_1x_3\cdots x_n \tag{3}$$

是 L_n 的多项式恒等式。

证明。验证上述多项式是 L_n 的恒等式是显然的，因为根据定理 2，我们可以假设 $L_n =$ 由$\{e_1,\ldots,e_n\}$ 张成，且 $e_ie_1 =e_{i+1}$、 $1 \le i \le n-1$ 成立，所有其他乘积均为零。□

下一个命题给出了上述恒等式的一些推论。

命题 5。设 I 是由 (2) 和 (3) 生成的 $\mathcal{D}(X)$ 的 T-理想。那么

(i) $x_1x_2\cdots x_{n+1} \in I$；(ii) $x_1x_2x_3 - x_1x_3x_2 \in I$；(iii) $x_0x_{\sigma(1)}\cdots x_{\sigma(k)} - x_0x_1\cdots x_k \in I$，对任意 $k \ge 1$ 和任意 $\sigma \in S_k$ 均成立；(iv) $x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}\cdots x_{\sigma(n)} - x_1x_2\cdots x_n \in I$，对任意 $\sigma \in S_n$ 均成立。

特别地，如果 L_n 是一个 n维零丝状莱布尼茨代数，则上述 (i)、(ii)、(iii) 和 (iv) 中的多项式都是 L_n的恒等式。

证明。(i) 在 (3) 中用 xy 替换 x_1，得到 $xyx_2x_3\cdots x_n - x_2(xy)x_3\cdots x_n \in I$。由于 $x_2(xy)x_3\cdots x_n$ 是 (2) 的推论，因此 $xyx_2x_3\cdots x_n \in I$.(ii) 这是莱布尼茨恒等式的直接推论，因为 $(x_1x_2)x_3 - (x_1x_3)x_2 = x_1(x_2x_3) \in I$.(iii) 利用 (ii)，对 k 作归纳即可得到这个恒等式。(iv) 这是 (ii) 和恒等式 (3) 的直接推论。

□

引理 6. 令 S 为 $\mathcal{D}(X)$ 中所有满足 (i) x_k 且 $k \ge 1$ 的单项式的子集；

(ii) $x_j x_{i_1}^{(d_1)} x_{i_2}^{(d_2)} \dots x_{i_r}^{(d_r)}$ *where* $0 < d_1 + \dots + d_r \le n-2$, $1 \le i_1 < \dots < i_r$ *and* $j, r \ge 1$;

(iii) $x_{j_1} x_{j_1}^{(d_1)} x_{j_2}^{(d_2)} \dots x_{j_s}^{(d_s)}$ *where* $0 < d_1 + \dots + d_s = n-1$ *and* $1 \le j_1 < \dots < j_s$ *and* $s \ge 1$.

则商向量空间 $\mathcal{D}_{(X)\,I}$ 由所有满足 $g \in S$ 的元素 $g + I$ 张成。

证明. 令 $m(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_r})$ 为 $\mathcal{D}(X) - I$ 的一个单项式。关于 deg(m) 进行归纳法证明。若 deg(m) $= 1$，则存在 $j \in \{1, \dots, r\}$ 使得 $m(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_r}) = x_{i_j}$。若 deg($m$) > 1，则存在 $m_1, m_2 \in \mathcal{D}(X)$ 使得 $m = (m_1)(m_2)$ 且 deg(m) $>$ deg(m_1), deg(m) $>$ deg(m_2)。由于多项式 (2) 属于 I，且 $m \notin I$，我们可以假设 deg(m_2) $= 1$。于是存在 x_{i_s} 使得 $m \equiv (m_1)x_{i_s}$ (模 I)。因此，根据归纳法假设，$(m_1)x_{i_s} \equiv (x_{i_t} x^{(d_1)}_{i_1} x^{(d_2)}_{i_2} \dots x^{(d_r)}_{i_r})x_{i_s}$ (模 I)。

因此，利用命题 5 的 (iii)，$m \equiv x_{i_t} x^{(d_1)}_{i_1} x^{(d_2)}_{i_2} \dots x^{(d_s+1)}_{i_s} \dots x^{(d_r)}_{i_r}$ (模 I)，其中 $d_1 + d_2 + \dots (d_s+1) + \dots + d_r \le n-1$。如果 $d_1 + d_2 + \dots (d_s+1) + \dots + d_r \le n-2$，则我们得到一个类型 (ii) 的单项式。如果 $d_1 + d_2 + \dots (d_s+1) + \dots + d_r = n-1$，则可利用命题 5 的 (iv) 得到一个模 I 的类型 (iii) 单项式。□

上述结果使我们能够在域 K 为无限域时，确定任意维数的零丝状莱布尼茨代数的恒等式的有限基。

定理 7. 设 K 为无限域，L_n 为一个 n维的零丝状莱布尼茨代数。则 (2) 和 (3) 构成 Id(L_n) 的一个极小基。

证明。设 $f(x_1, \dots, x_m) \in Id(L_n)$。我们将证明 $f \in I$。由于 K是无限的，我们不妨设 $f = f(x_1, \dots, x_m)$ 是多重次数为 $(d_1, \dots, d_m)$ 的多齐次多项式，其中 $0 \le d_i \le n$，对每个 i（$d_i = 0$ 表示变量 x_i 缺失）。由引理 6，f 是 (i)–(iii) 型单项式的线性组合。若 deg $f = 1$，则对某些 $j \le n$ 和 $\alpha \in K$，有 $f = \alpha x_j$，并且 f 是恒等式当且仅当 $f = 0$。若 deg $f = n$，则对某个 $\alpha \in K$，有 $f(x_1, \dots, x_m) = \alpha x^{(d_1)}_1 \dots x^{(d_m)}_m \bmod I$。由于 $f \in Id(L_n)$，$0 = f(e_1, \dots, e_1) = \alpha e_n$，因此我们得到 $\alpha = 0$ 和 $f = 0 \bmod I$，即 $f \in I$。

最后，若 $1 < s = \deg f < n$，则模 I，f 可写为

$$f(x_1, \dots, x_m) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j x_j x_1^{(d_1)} x_2^{(d_2)} \dots x_j^{(d_j-1)} \dots x_m^{(d_m)},$$

其中，当 $d_j = 0$ 时，$\alpha_j = 0$。

对于每个 $j \in \{1, \dots, m\}$，代入 $x_j = e_1 + e_2$ 和 $x_i = e_1$（其中 $i \ne j$ 任意），可得 $\alpha_j e_{s+1} + \beta e_s = 0$，其中某个 $\beta \in K$ 满足条件，因此 $\alpha_j = 0$。这证明了 $f \in I$（注意 $s + 1 \le n$）。恒等式 $x_1x_2x_3 \dots x_n - x_2x_1x_3 \dots x_n$ 不是由 x_1（x_2x_3）推出的，因为对于每个 $k \ge n+1$，它都不是 k 维零丝状莱布尼茨代数的恒等式。□

上述定理意味着，引理 6 中类型 (i)–(iii) 的单项式模 $Id(L_n)$ 线性无关。特别地，它使我们能够计算有限秩的 L_n，$\mathcal{D}(x_1, \dots, x_m)$ $Id(L_n)$ 的相对自由代数的维数，其中 $m \ge 1$。

推论 8. 设 S 为引理 6 中类型 (i)–(iii) 的单项式集合。那么 $\{g + Id(L_n) \mid g \in S\}$ 是 L_n、 $\mathcal{D}(X)$ $Id(L_n)$ 的相对自由代数的一组基。特别地，如果 $m \geq 1$，

$$\dim \frac{\mathcal{D}(x_1, \ldots, x_m)}{Id(L_n)} = 1 + \binom{n+m-1}{m-1} + \sum_{s=1}^{n-1} \sum_{l=1}^{min\{m,s\}} l \binom{m}{l} \binom{s-1}{l-1}.$$

证明. 上述集合是相对自由代数的一组基，这一事实由上述注释和引理 6 可得。

利用引理 6，我们计算对于每个 $s \in \{0, \ldots, n\}$， $/Id(L_n)$ 中 s 次数的多项式在$\mathcal{D}(x_1, \ldots, x_m)$中的维数。次数为 0 的元素是单位元 1。给定 $1 \leq s < n$，对于每个 $1 \leq l \leq min\{m, s\}$，从 $x_1, \ldots, x_m$ 中选择 l 个变量有 $\binom{m}{l}$ 种方法。方程 $d_{i_1} + \cdots + d_{i_l} = s$ 的正整数解数量，其中 deg $x_{i_j} = d_{i_j} > 0$ 为 $\binom{s-1}{s-l}$。对于每一种选择，都有 l 个引理 6 中(ii)类型的线性无关单项式。最后，对于 $s = n$，对于每个 $(d_1, \ldots, d_m)$ 的选择，次数为 n 的单项式模 I 只有一种可能的顺序（引理 6 中(iii)类型的单项式），因此维数为$\binom{n+m-1}{m-1}$。□

4. Images of multilinear polynomials

本节完整描述了任意多线性多项式在一个 n 维零丝状莱布尼茨代数 L_n 上取值时的像。本节的结果可作为下一节结果的推论得到；下一节中我们将讨论多齐次多项式。尽管如此，我们还是决定单独保留本节，以突出这一重要情形。此外，尽管我们可以将本节的结果表述为关于模 $Id(L_n)$ 的多项式（即引理 6 中 (i)–(iii) 类多项式的线性组合），但我们选择将这些多项式写成变量 $x_1, x_2, \ldots, x_m$ 上的自由莱布尼茨代数中的元素，也就是说，将其写成由 $\{1, \ldots, m\}$ 的排列索引的左范数单项式的线性组合。

本节考虑自由莱布尼茨代数中的多线性多项式 $f = f(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{\sigma \in S_m} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(m)} \in \mathcal{D}(X)$。若定义 $\gamma := \sum_{\sigma \in S_m} \alpha_\sigma$，并对每个 $j \in \{1, \ldots, m\}$, $\gamma_j := \sum_{\sigma(1)=j} \alpha_\sigma$，则利用命题 5 的恒等式可得

$$f(x_1, \ldots, x_m) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{m} \gamma_j x_j x_1 \cdots \widehat{x_j} \cdots x_m \mod Id(L_n) & \text{if } m < n \\ \gamma x_1 \cdots x_m \mod Id(L_n) & \text{if } m = n \end{cases} \tag{4}$$

其中，符号 $\widehat{x_j}$ 表示变量 x_j 缺失。

引理 9. 设 $f(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{\sigma \in S_m} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(m)} \in \mathcal{D}(X)$ 是一个多线性多项式。若对某些 j, $\gamma_j \neq 0$，则 $Im(f) \supseteq (L_n)^{m+1}$。

证明. 若 $m \geq n$，结论显然成立，因为 $(L_n)^{m+1} = 0$。因此，我们假设 $1 \leq m \leq n-1$。令 $u = \sum_{i=m+1}^{n} a_i e_i \in (L_n)^{m+1}$。我们将证明存在 $j \in \{1, \ldots, m\}$ 和 $v \in L$，使得

$$f(e_1, \ldots, e_1, v, e_1, \ldots, e_1) = u,$$

其中，上述 v 位于第 j 个位置。

首先，我们注意到，对于任意 $2 \le i \le n-m+1$，若将上面的 v 替换为 e_i，则可得到

$$f(e_1,\dots,e_1,e_i,e_1,\dots,e_1) = \left(\sum_{\sigma(1)=j} \alpha_\sigma\right) e_{i+m-1}.$$

由于 $\gamma_j = \sum_{\sigma(1)=j} \alpha_\sigma \neq 0$，通过定义

$$v = \frac{1}{\gamma_j} \sum_{i=1}^{n-m+1} a_{i+m-1} e_i,$$

f 的多线性意味着

$$f(e_1,\dots,e_1,v,e_1,\dots,e_1) = \frac{1}{\gamma_j}\sum_{i=1}^{n} a_{i+m-1} f(e_1,\dots,e_1,e_i,e_1,\dots,e_1) = \sum_{i=m}^{n} a_i e_i = u.$$

这证明了 $Im(f) \supseteq (L_n)^{m+1}$。 □

引理 10. 设 $f(x_1,\dots,x_m) = \sum_{\sigma\in S_m} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)}\cdots x_{\sigma(m)} \in \mathcal{D}(X)$ 是一个多线性多项式。若 $\gamma := \sum_{\sigma\in S_m} \alpha_\sigma \neq 0$，则 $Im(f) = (L_n)^m$。

证明. 显然，若 $m > n, Im(f) = \{0\} = (L_n)^m$。因此，我们假设 $m \le n$。

显然有 $Im(f) \subseteq (L_n)^m$。下面证明反向包含。

注意，由于 $0 \neq \gamma = \sum_{j=1}^{m} \gamma_j$，存在某个 j 使得 $\gamma_j \neq 0$。若 j 如上所述，令 $w = \sum_{i=m}^{n} a_i e_i \in (L_n)^m$，并在 $m < n$时令 $u = \sum_{i=m+1}^{n} a_i e_i$，或在 $m = n$时令 $u = 0$。于是 $w = a_m e_m + u$。

由引理 9 的证明可知，存在 $v \in L_n$ 使得

$$f(e_1,\dots,e_1,v,e_1,\dots,e_1) = u,$$

其中，上述 v 出现在第 j 个位置。现在，由于 f 的多线性，有

$$f(e_1,\dots,e_1,\frac{a_m}{\gamma}e_1 + v,e_1,\dots,e_1) = w,$$

证明完毕。 □

引理 11. 设 $f(x_1,\dots,x_m) = \sum_{\sigma\in S_m} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)}\cdots x_{\sigma(m)} \in \mathcal{D}(X)$ 是一个多线性多项式。假设 $\gamma = \sum_{\sigma\in S_m} \alpha_\sigma = 0$，则

(1) *If f*或者某个 j $\gamma_j \neq 0$，则 $Im(f) = (L_n)^{m+1}$; (2) 若对于所有 j 都有 $\gamma_j = 0$，则 $Im(f) = \{0\}$，也就是说，f 是一个多项式恒等式

证明. (1) 根据引理 9，我们有 $Im(f) \supseteq (L_n)^{m+1}$。现在证明反向包含。设 $v_1,\dots,v_m \in L_n$。对于每个 $k \in \{1,\dots,m\}$，写作$v_k = \sum_{l=1}^{n} a_{kl} e_l$，其中 $a_{kl} \in K$。展开括号后，我们得到$f(v_1,\dots,v_m)$ 是 f 在基本元素上的取值的线性组合。注意到 $f(e_1,\dots,e_1) = \left(\sum_{\sigma\in S_m} \alpha_\sigma\right) e_m = \gamma e_m = 0$，而基本元素上的任何其他此类取值都至少包含一个不同于 e_1的基本元素，这意味着每个此类取值都是某个 $i > m$ 的 e_i 倍。因此，$Im(f) \subseteq (L_n)^{m+1}$。

(2) 将 f 按照 (4) 中的形式模 $Id(L_n)$ 写出后，结论便显而易见。

□

根据上述引理，我们得到，适用于任意维数零丝状莱布尼茨代数的 L'vov-Kaplansky 猜想类比命题成立。

定理 12. 设 $f(x_1,\dots,x_m)$ 是莱布尼茨代数簇的自由代数中的一个多线性多项式。那么， f 在 L_n 上的像为 $\{0\}$、$(L_n)^m$ 或 $(L_n)^{m+1}$。特别地， f 的像是 L_n 的一个向量子空间。

5. Images of multihomogeneous polynomials

本节将考察多齐次多项式$f(x_1,\dots,x_m)$在 n维零丝状莱布尼茨代数 L_n上的像。事实证明，一般而言，这类多项式的像并不是 L_n的向量子空间。

设$(d_1,\dots,d_m)$为 f的多重次数，并令 $d = d_1 + \cdots + d_m$（这里假设每个变量至少出现一次，即对每个 i都有 $d_i \geq 1$ ）。根据引理 6，存在 $\alpha_1,\dots,\alpha_m \in K$，使得模 $Id(L_n)$， f可写为

$$f(x_1,\dots,x_m) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j x_j x_1^{(d_1)} \cdots x_{j-1}^{(d_{j-1})} x_j^{(d_j-1)} x_{j+1}^{(d_{j+1})} \cdots x_m^{(d_m)}. \tag{5}$$

特别地，若 $d \geq n+1$，我们可取 $\alpha_1,\dots,\alpha_m = 0$，因为 $f(x_1,\dots,x_m) \in Id(L_n)$；若 $d = n$，则可取 $\alpha_2,\dots,\alpha_m = 0$。

我们将考虑用 L_n 中的元素对这类多项式求值。在此之前，我们需要一些技术结果。

引理 13. 设 $z = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$ 和 $w = \sum_{i=1}^{n} b_i e_i \in L_n$。那么对于任意 $1 \leq s \leq n-1$

$$zw^{(s)} = b_1^s \sum_{i=1}^{n-s} a_i e_{i+s}.$$

证明. 证明可由直接计算得出:

$$zw^{(s)} = z(b_1e_1)^{(s)} = b_1^s \left(\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\right) e_1^{(s)} = b_1^s \sum_{i=1}^{n-s} a_i (e_i e_1^{(s)}) = b_1^s \sum_{i=1}^{n-s} a_i e_{i+s}.$$

□

现在设 $j \in \{1,\dots,m\}$，并记 $a_{1,\,i}$ 为 b_i。在求值$x_k \mapsto \sum_{i=1}^{n} a_{i,\,k} e_i$下，将上述引理应用 m 次，得到

$$\begin{aligned} & x_j x_1^{(d_1)} \cdots x_{j-1}^{(d_{j-1})} x_j^{(d_j-1)} x_{j+1}^{(d_{j+1})} \cdots x_m^{(d_m)} \\ =& b_1^{d_1} \cdots b_{j-1}^{d_{j-1}} b_j^{d_j-1} b_{j+1}^{d_{j+1}} \cdots b_m^{d_m} \sum_{i=1}^{n-d+1} a_{i,j} e_{i+d-1}. \end{aligned}$$

因此，在这样的求值下， f 变为

$$\begin{aligned} & \prod_{l=1}^{m} b_l^{d_l-1} \sum_{j=1}^{m} \alpha_j b_1 \cdots \hat{b_j} \cdots b_m \sum_{i=1}^{n-d+1} a_{i,j} e_{i+d-1} \\ =& \prod_{l=1}^{m} b_l^{d_l} \left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j\right) e_d + \prod_{l=1}^{m} b_l^{d_l-1} \sum_{j=1}^{m} \alpha_j b_1 \cdots \hat{b_j} \cdots b_m \sum_{i=2}^{n-d+1} a_{i,j} e_{i+d-1} \end{aligned} \tag{6}$$

现在我们需要考虑两种情况，具体取决于 $\left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j\right)$ 是否为零。

我们首先考虑（5）中 f 的系数之和为零的情形。

引理 14. 设 $f(x_1,\dots,x_m)$ 是多重次数为 $(d_1,\dots,d_m)$ 的多齐次多项式，且 f 不是 L_n 的多项式恒等式。设 $d=d_1+\cdots+d_m$，并将 f 写成 (5) 中的形式。若 $\sum_{j=1}^{m}\alpha_j=0$，则 f 的像为 $(L_n)^{d+1}$。特别地， f 的像是 L_n 的向量子空间。

证明。由于 f 不是 L_n 和 $\sum_{j=1}^{m}\alpha_j=0$ 的多项式恒等式，因此 $1\le d\le n-1$，并且存在 j 使得 $\alpha_j\neq 0$。不失一般性，我们可以假设 $\alpha_1\neq 0$。由公式 (6)容易看出，由于 $\sum_{j=1}^{m}\alpha_j=0$，因此 f 的像包含于 $(L_n)^{d+1}$。现在我们将证明反向包含关系。

令 $u=\sum_{j=d+1}^{n}\beta_j e_j\in(L_n)^{d+1}$。现在考虑代换 $x_i\mapsto e_1$，若 $i>1$且 $x_1\mapsto\sum_{j=1}^{n}a_i e_i$。那么在公式 (6) 中， f 变为

$$a_1^{d_1-1}\alpha_1\sum_{i=2}^{n-d+1}a_i e_{i+d-1}$$

现在令 $a_1:=1$ 且 $a_i:=\frac{\beta_{i+d-1}}{\alpha_1}$，对于 $i\ge 2$，我们得到给定元素 $u\in(L_n)^{d+1}$。因此， $Im(f)=(L_n)^{d+1}$。□

现在考虑 f 的系数之和非零的情形。如果 K 是一个域，我们将 K 记为 K 的非零元素集合。

引理 15。设 $f(x_1,\dots,x_m)$ 是一个多齐次多项式，其多重次数为 $(d_1,..,d_m)$，且 f 不是 L_n 在代数闭域 K 上的多项式恒等式。令 $d=d_1+\cdots+d_m$，并将 f 写成 (5) 中的形式。若 $\gamma:=\sum_{j=1}^{m}\alpha_j\neq 0$，则

$$Imf\supseteq\{0\}\cup(\dot{K}\cdot e_d+(L_n)^{d+1}).$$

证明。当然，0 属于像。由于 $\sum_{j=1}^{m}\alpha_j\neq 0$，存在某个 j 使得 $\alpha_j\neq 0$。不失一般性，我们假设 $\alpha_1\neq 0$。

显然，我们假设 $1\le d\le n$。令 $u=\sum_{j=d}^{n}\beta_j e_j\in(L_n)^d$，其中 $\beta_d\neq 0$，并在 $i>1$ 且 $x_1\mapsto\sum_{j=1}^{n}a_i e_i$ 时再次考虑代换 $x_i\mapsto e_1$。于是，在公式 (6) 中， f 变为

$$a_1^{d_1}\left(\sum_{j=1}^{m}\alpha_j\right)e_d+a_1^{d_1-1}\alpha_1\sum_{i=2}^{n-d+1}a_i e_{i+d-1}.$$

令 a_1 为 $\frac{\beta_d}{\gamma}$ 的 d 次根（这里我们用到了 K 在代数上闭合这一事实），并令 $a_i=\frac{\beta_{i+d-1}}{\alpha_1 a_1^{d_1-1}}$，即可得到 $(L_n)^d$ 中的给定元素 u。□

现在，我们可以完整描述任意多齐次多项式在一个 n 维零丝状莱布尼茨代数上的像。

定理16。设 K 是一个代数闭域， L_n 是 K上一个 n维的零丝状莱布尼茨代数。设 $f(x_1,\dots,x_m)\in\mathcal{D}(X)$是一个多重次数为$(d_1,\dots,d_m)$的任意多齐次多项式，并设 $d=d_1+\cdots+d_m$。将f 模 $Id(L_n)$写作

$$f(x_1,\dots,x_m)=\sum_{j=1}^{m}\alpha_j x_j x_1^{(d_1)}\cdots x_{j-1}^{(d_{j-1})}x_j^{(d_j-1)}x_{j+1}^{(d_{j+1})}\cdots x_m^{(d_m)}.$$

(1) 如果 f 是 L_n 的多项式恒等式，则 f 的像是 $\{0\}$。(2) 如果 f 不是 L_n 和 $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i=0$ 的多项式恒等式，则f 在 L_n 上的像是$(L_n)^{d+1}$。(3) 如果 f 不是 L_n 和 $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\neq 0$ 的多项式恒等式，则 (a) 如果存在 j，使得 $d_j=1$ 和 $\alpha_j\neq 0$，那么 f 在L_n 上的像是$(L_n)^d$；(b) 如果 $\alpha_j=0$，对于所有满足 $d_j=1$ 的 j，则 f 在 L_n 上的像是$\{0\}\cup(\dot{K}\cdot e_d+(L_n)^{d+1})$。

证明。若 $\sum_{j=1}^{m}\alpha_j=0$，我们在引理 14 中证明了 f 在 L_n 中的像为 $(L_n)^{d+1}$。

因此，假设 $\sum_{j=1}^{m}\alpha_j\neq 0$。由引理 15，$f$ 的像包含 $\{0\}\cup(\dot{K}\cdot e_d+(L_n)^{d+1})$。假设存在 j，使得 $d_j=1$ 且 $\alpha_j\neq 0$。同样，我们可以假设 $j=1$。按照引理 15 的证明中相同的变量代换，并考虑到 $d_1=1$，我们得到

$$a_1\left(\sum_{j=1}^{m}\alpha_j\right)e_d+\alpha_1\sum_{i=2}^{n-d+1}a_ie_{i+d-1}.$$

现在，若 $u=\sum_{j=d}^{n}\beta_je_j\in(L_n)^d$，则对于 $i\geq 2$，令 $a_1:=\frac{\beta_d}{\sum_{j=1}^{m}\alpha_j}$ 和 $a_i=\frac{\beta_i+d-1}{\alpha_1}$，并得到 u，它是 f 在这些元素上的一次取值。这证明了 (2)(a)。

最后，还需证明：在情形 2(*b*) 中，如果非零元素 $u=\sum_{j=d}^{n}\beta_je_j\in(L_n)^d$ 属于 f 的像，那么 $\beta_d\neq 0$。需要考虑的 f 最一般的取值就是公式 (6) 中给出的取值，由此得到

$$\prod_{l=1}^{m}b_l^{d_l}\left(\sum_{j=1}^{m}\alpha_j\right)e_d+\prod_{l=1}^{m}b_l^{d_l-1}\sum_{j=1}^{m}\alpha_jb_1\cdots\hat{b_j}\cdots b_m\sum_{i=2}^{n-d+1}a_{i,j}e_{i+d-1}.$$

现在可以看出，只有当$b_j=0$ 对某个 j成立时，e_d 的系数才可能为零。但在这种情况下，由于 $d_j\geq 2$，若 $\alpha_j\neq 0$，我们便得到：对于所有 j，$\prod_{l=1}^{m}b_l^{d_l-1}\alpha_j=0$ 成立，并且所得代换为零；也就是说，f 的像中的任意非零元素 u 都满足 $\beta_d\neq 0$。□

注 17. 根据上一定理，将多齐次多项式 f按 (5) 的形式模 $Id(L_n)$ 写出后，其像是 L_n 的向量子空间，当且仅当 $\sum_{j=1}^{m}\alpha_j=$为 0，或者 $\sum_{j=1}^{m}\alpha_j\neq 0$ 且存在某个 j 使得 $d_j=1$ 和 $\alpha_j\neq 0$。

6. An analog of null-filiform Leibniz algebras in the infinite-dimensional case

在本节最后，我们考虑无限维情形下零丝状莱布尼茨代数的一种类似物。为此，我们将 L_∞ 视为由集合 $\{e_1,e_2,\dots\}$ 张成的代数，其乘法表由 $e_ie_1=e_{i+1}$ 给出，其中对所有 $i\geq 1$ 均成立（其他乘积均为零）。

Omirov 曾在 [19] 中研究过这种代数，它是一种潜幂零代数，即满足 $\bigcap_{i=1}^{\infty}(L_\infty)^i=\{0\}$。

定理18. 设 K 为一个无限域，且 L_∞ 如上所定义。则

$$x_1(x_2x_3)$$

是 Id(L_∞) 的一组基。

证明。设 I 是由 $x_1(x_2x_3)$ 生成的 T-理想。通过类似于引理 6 的计算，商向量空间 $\mathcal{D}_{(X)}/I$ 由所有形如 $x_j x^{(d_1)}_{i_1} x^{(d_2)}_{i_2} \cdots x^{(d_r)}_{i_r} + I$ 的元素组成的集合张成，其中 $0 \le d_1 + \cdots + d_r$、$1 \le i_1 < \cdots < i_r$ 以及 j、$r \ge 1$，证明类似于定理 7 的证明。□

研究代数中的多项式恒等式时，所谓的余维数序列起着重要作用（例如，参见 [10]，中关于结合代数的情形）。更具体地说，若 A 是满足某个多项式恒等式的代数，我们将其余维数序列 $(c_m(A))_{m\ge1}$ 定义如下：

$$c_m(A) = \dim P_m(A), \quad \text{where} \quad P_m(A) = \frac{P_m}{P_m \cap Id(A)},$$

且 P_m 是 $\mathcal{D}(X)$ 中由变量 x_1、x_2、.....、x_m 上的多线性多项式构成的向量子空间。

如果代数是幂零的，那么余维数序列有一个常数上界。特别是，研究有限维零丝状莱布尼茨代数的余维数序列并无意义。不过，代数 L_∞ 则更值得研究，下面我们将计算它的余维数序列。

推论 19. 若 K 是一个无限域，则

$$c_m(L_\infty) = m$$

对于每个 $m \ge 1$。

证明。如果 K 是一个无限域，根据定理18，向量空间 $P_m(L_\infty)$ 的一组基是所有满足以下条件的元素 $f + (P_m \cap Id(L_\infty))$ 的集合：若 $f = x_1$，则 $m = 1$，且 $f = x_j x_1 \cdots \widehat{x_j} \cdots x_m$ 满足 $1 \le j \le m$，若 $m \ge 2$。因此，对于 $m \ge 1$，有 $c_m(L_\infty) = m$。□

特别地，余维数序列呈线性增长。

最后，我们指出，在考虑代数 L_∞时，定理12和定理16的证明中的论证仍然有效。于是我们得到以下结果。

定理 20. 设 $f(x_1, \ldots, x_m)$ 是莱布尼茨代数簇的自由代数中的一个多线性多项式。那么，f 在 L_∞ 上的像是 $\{0\}$、$(L_\infty)^m$ 或 $(L_\infty)^{m+1}$。特别地，f 的像是 L_∞ 的一个向量子空间。

定理 21. 设 K 为代数闭域，且 L_∞ 为上述定义的 K 上的莱布尼茨代数。设 $f(x_1, \ldots, x_m) \in \mathcal{D}(X)$ 为一个多重次数为 $(d_1, \ldots, d_m)$ 的任意多齐次多项式，并设 $d = d_1 + \cdots + d_m$。将 f 模 $Id(L_\infty)$ 写为

$$f(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j x_j x_1^{(d_1)} \cdots x_{j-1}^{(d_{j-1})} x_j^{(d_j-1)} x_{j+1}^{(d_{j+1})} \cdots x_m^{(d_m)}.$$

(1) 如果 f 是 L_∞ 的多项式恒等式，那么 f 的像是 $\{0\}$。(2) 如果 f 不是 L_∞ 和 $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 0$ 的多项式恒等式，那么 f 在 L_∞ 上的像是 $(L_\infty)^{d+1}$。(3) 如果 f 不是 L_∞ 和 $\sum_{i=1}^m \alpha_i \ne 0$ 的多项式恒等式，那么 (a) 如果存在 j 使得 $d_j = 1$ 和 $\alpha_j \ne 0$，那么 f 在L_∞ 上的像是 $(L_\infty)^d$;

（b）如果 $\alpha_j = 0$，对于所有满足 $d_j = 1$ 的 j，则 f 在 L_∞ 上的像为 $\{0\} \cup (\dot{K} \cdot e_d + (L_\infty)^{d+1})$。

7. Acknowledgements

作者谨此感谢 P.S. Fagundes 提供的宝贵意见，并感谢 F.Y. Yasumura 建议改进推论 8 中的公式，同时提醒我们，$L_n\ x_1 \cdots x_{n+1} = 0$ 的恒等式是多项式 (2) 和 (3) 的结果。

8. Funding

本研究得到圣保罗研究基金会（FAPESP）项目 2018/23690-6 的资助。

References

[1] A. A. Albert 和 B. Muckenhoupt。关于迹为零的矩阵。 *Michigan Math. J.*, 4 3, 1957 1: – .
[2] B. E. Anzis、Z. M. Emrich 和 K. G. Valiveti。李代数上取值的李多项式的像。
Linear Algebra Appl., 469:51–75, 2015.[3] S. A. Ayupov 和 B. A. Omirov。关于莱布尼茨代数。见 *Algebra and operator theory (Tashkent, 1997)* 1 12 1998 ，第 – 页。Kluwer Acad. Publ.，多德雷赫特，。[4] S. A. Ayupov 和 B. A. Omirov。关于幂零莱布尼茨代数的若干类。
Sibirsk. Mat. , ( ): – *Zh.* 42 1 18 2001 29, i, .[5] Y. A. Bahturin。 *Identical relations in Lie algebras*。VNU Science Press，b.v.，乌得勒支，1987。由 Bahturin 从俄语翻译。[6] D. W. Barnes。关于莱布尼茨代数的列维定理。
Bull. Aust. Math. Soc., 86 185, 2012 2 184( ): – .[7] V. Drensky。 *Free algebras and PI-algebras*。Springer-Verlag Singapore，新加坡，2000。代数研究生课程。[8] P. S. Fagundes。严格上三角矩阵上多线性多项式的像。*Linear Algebra Appl.*, 563:287–301, 2019.[9] I. G. Gargate 和 T. C. de Mello。无限域上的 $n \times n$上三角矩阵上的多线性多项式的像。 *Israel J. Math.*, 252(1):337–354, 2022。[10] A. Giambruno 和 M. Zaicev。 *Polynomial identities and asymptotic methods*, *Mathematical Surveys and Monographs*第 122 卷。美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，2005。[11] W. Kahan。只有交换子的迹为零。*unpublished note*, https://people.eecs.berkeley.edu/wkahan/MathH110/trace0.pdf, 1999。[12] A. Kanel-Belov、S. Malev、C. Pines 和 L. Rowen。八元数代数上多线性多项式和半齐次多项式的像。 *arXiv:2204.07139*, 2022。[13] A. Kanel-Belov、S. Malev 和 L. Rowen。矩阵上取值的 2×2 非交换多项式的像。 *Proc. Amer. Math. Soc.*, 140(2):465–478, 2012。[14] A. Kanel-Belov、S. Malev、L. Rowen 和 R. Yavich。代数上非交换多项式的求值：方法与问题，以及 L'vov-Kaplansky 猜想。 *SIGMASymmetry Integrability Geom. Methods Appl.*, 16:第 071 号论文，61，2020。[15] Y. Luo 和 Y. Wang。关于 Fagundes-Mello 猜想。 *J. Algebra*, 592:118–152, 2022。[16] S. Malev。四元数代数上取值的非交换多项式的像。*J. Algebra Appl.*, 20(5):第 2150074 号论文，8，2021。[17] S. Malev、R. Yavich 和 R. Shayer。低秩约当代数上多线性多项式的求值。 *Comm. Algebra*, 50(7):2840–2845, 2022。[18] N. Nehra 和 S. Rani。幂零李代数上取值的二次李多项式的像。*Comm. Algebra*, 第 46–62 页，2023。[19] B. A. Omirov。薄莱布尼茨代数。 *Mat. Zametki*, 80(2):251–261, 2006。[20] K. Shoda。关于矩阵的若干定理。 *Jpn. J. Math.*, 13(3):361–365, 1937。

[21] D. Vitas。多线性多项式在具有满射内导子的代数上是满射的。*J. Algebra*, 565:255–281, 2021。[22] K. A. Zhevlakov、A. M. Slinko、I. P. Shestakov 和 A. I. Shirshov。 *Rings that are nearly associative* 104 *Pure and Applied Mathematics* [, 第 卷。Academic Press, Inc. Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], 纽约-伦敦， 1982。由 Harry F. Smith 从俄语翻译。

Universidade Federal de São Paulo, Instituto de Ciência e Tecnologia
Email address: tcmello@unifesp.br

Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática e Estatística
Email address: manuela.souza@ufba.br