arXiv:2304.10956v1 [math.CT] 21 Apr 2023

超偏序集、分配格与相干局部

LINGYUAN YE

摘要。本文利用 超偏序集，对分配格与相干 locale 之间的对偶性结果给出另一种描述。具体而言，我们证明，从分配格范畴的对偶范畴到配备超函子的超偏序集范畴，以及从相干局部范畴到配备左超函子的超偏序集范畴，都存在全忠实嵌入。我们还定义了零维 超偏序集的概念，用以刻画这些嵌入的本质像。

1. 引言

Makkai 于 1987 年关于一阶逻辑对偶性的研究 [14] 是范畴逻辑的一项重要成果。该研究证明了以下所谓的概念完备性：

定理 1.1（一阶逻辑的概念完备性）。（小）前拓扑范畴的 *2*-范畴 **Pretopos** 全忠实嵌入到超范畴 与超函子的 *2*-范畴 **Ult** 中，

$$\mathbf{Pretopos}^{\mathrm{op}} \hookrightarrow \mathbf{Ult}.$$

每个一阶逻辑都有一个关联的句法范畴 （例如参见 [4]），通过这一构造，我们可以将 **Pretopos**视为一阶理论的范畴，除了消除虚对象之外（参见 [10]）。从 $\mathbf{Pretopos}^{\mathrm{op}}$ 到 **Ult** 的嵌入则通过将每个理论/预拓扑T取为其模型 范畴 $\mathrm{Mod}(T)$给出。

顾名思义，超范畴是配备了超积结构的范畴，而使 $\mathrm{Mod}(T)$ 成为超范畴的，正是模型论中的以下基本定理：

定理 1.2（Łos 超积定理）。若 $\{M_s\}_{s\in S}$ 是一族以集合 S 为指标的 T-模型，且 μ 是 S 上的超滤子，则 $\{M_s\}_{s\in S}$ 关于 μ 的超积仍然是一个 T-模型。

日期：2023年4月24日。关键词和短语。 超积、超偏序集、分配格、相干局部格、对偶。

从范畴论的角度来看，族 $\{M_s\}_{s\in S}$ 关于 μ 的超积由滤过余极限 $\varinjlim_{A\in\mu}\prod_{s\in A}M_s$ 给出。定理 4.4 的证明可见于任何标准的模型论教科书，例如 [11]。

最近，Lurie [13] 提出了超范畴概念的另一种公理化方式，不同于Makkai 的公理化方式，并将这一结果扩展到了相干拓扑斯。

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Pretopos}^{\mathrm{op}} & \hookrightarrow & \mathbf{Ult} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{CTopos} & \hookrightarrow & \mathbf{UltL} \end{array}$$

CTopos 是相干拓扑斯与几何态射构成的 2-范畴。**UltL** 与 **Ult**具有相同的对象，即超范畴，但其态射由 Lurie 称为左超函子的函子构成。左超函子的概念仅出现在 Lurie 的工作中；在 Lurie 的公理化体系下，它对应于超函子的一种松版本。通过将每个相干拓扑斯$\mathcal{E}$ 映射到其点范畴 pt($\mathcal{E}$)，存在一个从 2-范畴 **CTopos** 到 **UltL**的全忠实嵌入。

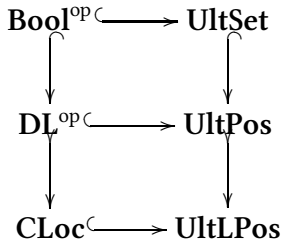
超函子还存在对偶的余松版本，Lurie 将其称为右超函子。2-范畴 **UltR** 在 Lurie 对超范畴的处理过程中也发挥着重要作用。

上述图表中的垂直箭头是忠实的，但并非满的。并非每个相干拓扑斯之间的几何态射都由其紧致对象子范畴之间的相干函子诱导，也并非每个超函子都是左超函子。因此，从拓扑斯理论的角度来看，左超函子在某种意义上比超函子更为基础，而这正是 Lurie 对超范畴进行公理化重构的主要优势之一。

在本文中，我们对上述结果进行去范畴化。我们将遵循 Lurie 关于超范畴以及（左/右）超函子的概念，但特别关注超偏序集，即其底层范畴为偏序集的超范畴。本文的主要目标是描述分配格、相干 locale 与超偏序集之间类似的对偶：分配格的 2-范畴的对范畴 **DL** 全忠实嵌入到超偏序集及超函子的 2-范畴 **UltPos**中，而相干局部的 2-范畴 **CLoc** 全忠实嵌入到超偏序集及左超函子的 2-范畴 **UltLPos** 中。

Stone 对偶性的经典定理也符合这一图景。布尔代数的范畴 **Bool** 是 **DL** 的一个全子范畴，而它在嵌入下的像属于 超集，这些超集是 离散的 超偏序集。

在 [13], 中，证明了 **UltSet** 与紧致 Hausdorff 空间的范畴 **Comp** 同构，其中 **Stone**（Stone 空间的范畴）是一个全子范畴。因此，我们得到如下图表，



我们还将通过超偏序集的内在拓扑性质来刻画这些嵌入的本质像。这些特殊的超偏序集称为零维超偏序集；在离散情形下，零维超集恰好是拓扑意义上的零维紧豪斯多夫空间，也就是 Stone 空间。由此，我们利用零维超偏序集为分配格得到了一种新的对偶描述，并将 Stone 对偶性的经典定理推导为一个特例。

我们的长远目标是更深入地研究超偏序集，并最终研究超范畴理论，以将其应用于模型论。 [13] 中超范畴的完整公理化相当复杂，但在超偏序集的情形下会大幅简化。我们希望以这个较为简单的情形为第一步，从而进一步理解超范畴的完整理论。

本文的结构如下。第2节将给出超偏序集和（左/右）超函子的基本定义，并讨论超偏序集的一些典型例子。第3节中，我们研究由超偏序集自然诱导出的各种拓扑结构，这些结构对于后文的对偶结果至关重要。第4节中，我们构造从 $\mathbf{DL}^{\mathrm{op}}$ 到**UltPos**以及从 **CLoc** 到 **UltLPos** 的嵌入函子，并在第5节中说明，分配格和相干 locale 都可以从各自对应的超偏序集中重构。第6节随后证明这些嵌入是全忠实的。第7节中，我们给出这些函子本质像的内在刻画，从而完成对偶定理的描述。最后，第 8 节中我们进行总结，并探讨各种未来方向。

2. 超偏序集基本理论

在本节中，我们定义超偏序集的概念，以及它们之间的（左/右）超迹函子，并看到它们自然构成三个 2-范畴。

UltPos、 **UltLPos** 和 **UltRPos**。正如我们提到的，我们对超偏序集的处理基本上将遵循 [13]。不过，为了提高可读性，我们对超结构采用了略有不同的记号。

我们首先回顾超滤子的基础知识。集合S 上的超滤子 μ 是 $\wp(S)$的一个向上闭子集，其中包含 S，对有限交封闭，并且对于 S的任意一对互为补集的子集，恰有一个属于 μ。

回顾一下，我们有一个函子 $\beta : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$，它将每个 S映射到其在 S上的超滤子集合 βS。对于任意函数 $i : S \to T$，我们将从 βS 到 βT 的映射记为

$$i_* : \beta S \to \beta T,$$

其中对于任意 $\mu \in \beta S$，我们有

$$i_*\mu = \{ V \subseteq T \mid i^{-1}(V) \in \mu \}.$$

我们将 $i_*\mu$ 记作 μ 沿 i的 推前。注意，如果 $i : S \hookrightarrow T$是单射，那么 $i_* : \beta S \hookrightarrow \beta T$ 也是单射，并且我们可以将 βS 视为 βT 的子空间，它由满足 $i(S) \in \nu$的那些 $\nu \in \beta T$ 构成。

实际上， β上存在唯一的单子 结构，其中 $\delta : \mathrm{id} \Rightarrow \beta$ 和$\gamma : \beta\circ\beta \Rightarrow \beta$。[1] 具体而言，给定任意集合 S,

- For any $s \in S$, $\delta_s = \{ A \subseteq S \mid s \in A \}$.
- For any ultrafilter θ on βS, $\gamma(\theta) = \{ A \subseteq S \mid \{ \mu \in \beta S \mid A \in \mu \} \in \theta \}$.

δ 的像称为主超滤子。

由于每个 βS 都是自由的 β-代数，对于任意 $\mu : T \to \beta S$，都存在一个从 $\beta T \to \beta S$诱导出的态射，我们将此映射写作：

$$\langle \mu, - \rangle : \beta T \to \beta S.$$

具体而言，对于任意 $\nu \in \beta T$， βS上的超滤子 $\langle \mu, \nu \rangle$由下式给出：

$$A \in \langle \mu, \nu \rangle \iff \mu^{-1}(\beta A) = \{ t \mid A \in \mu_t \} \in \nu.$$

我们将其稍作扩展，使之成为以下类型的映射：

$$\langle \mu, - \rangle : \beta T^R \to \beta S^R.$$

其中，对于任意函数 $\nu : R \to \beta T$，有：

$$\langle \mu, \nu \rangle = r \mapsto \langle \mu, \nu_r \rangle.$$

配对 $\langle -, - \rangle$ 本质上是单子的 Kleisli 结构。在此记号下，Kleisli 恒等式意味着，对于任意 $\mu : T \to \beta S$,

$$\langle \mu, \delta \rangle = \mu,$$

[1]单子结构的唯一性源于这样一个事实：在从 **Set** 到 **Set** 且保持有限余积的函子中，β 是终对象。这一点最早在 [3]中得到证明。

并且对于任意的 $\mu : T \longrightarrow \beta S$、 $\nu : R \longrightarrow \beta T$ 和 $\lambda : W \longrightarrow \beta R$,

$$\langle \mu, \langle \nu, \lambda \rangle \rangle = \langle \langle \mu, \nu \rangle, \lambda \rangle.$$

在此记号下，函子 β 对态射的作用也可以表示如下,

$$i_* \nu = \langle \delta i, \nu \rangle.$$

注 2.1。 从拓扑学视角来看，每个 βS 都是一个紧致豪斯多夫空间，而且实际上是离散空间 S的 Stone-Cech 紧化。众所周知，对于任意紧致豪斯多夫空间 X，其上的任意超滤子 μ 都在 X 中有一个唯一的收敛点，即点 $x \in X$，其中 $\tau_x \subseteq \mu$，而 τ_x 是 x 的所有开邻域构成的集合。这个映射 $\beta X \longrightarrow X$ 实际上使得 X 成为单子 β的一个代数，事实上，Ernest Manes [15] 的著作中已经证明，存在一个范畴同构,

$$\mathbf{Set}^{\beta} \cong \mathbf{Comp}.$$

关于超滤子与拓扑之间联系的更详细论述，请参阅 [9, 第 3] 章。此后，配对 $\langle \mu, \nu \rangle$ 可视为超滤子 $\mu_* \nu$ 在 βS 中的唯一收敛点。值得一提的是， [13] 使用记号 $\int \mu d\nu$ 表示这一收敛点。为便于阅读，本文采用配对记号而非积分记号。

现在我们来定义超偏序集。超偏序集 P 是一个偏序集 P，配备了与上文所述在 βS 上可用的类似运算，而所有 βS视为离散偏序集后，确实都是超偏序集的实例:

定义 2.2（超偏序集）。 超偏序集 是一个偏序集 P，并配备以下数据: 对于任意集合 S 和 T，存在一个单调配对函数，在 P上提供超积结构,

$$\langle -, - \rangle : P^S \times \beta S^T \longrightarrow P^T,$$

其中 P^S 和 P^T 具有逐点序，而 βS^T 是离散的。我们要求此配对在第二个分量上是逐点的，即对于任意$f : S \longrightarrow P$、 $\mu : T \longrightarrow \beta S$以及任意 $i : W \longrightarrow T$,

$$\langle f, \mu \rangle \circ i = \langle f, \mu \circ i \rangle.$$

此外，配对函数还应满足以下性质：对于任意 $f : S \longrightarrow P$ 以及任意 $\mu : T \longrightarrow \beta S$、 $\nu : R \longrightarrow \beta T$,

(1) 整体性：主超滤子是单位,

$$\langle f, \delta \rangle = f.$$

(2) 松弛结合律：配对满足结合律，但允许存在不等式，

$$\langle f, \langle \mu, \nu \rangle \rangle \leq \langle \langle f, \mu \rangle, \nu \rangle.$$

(3) 局部性：如果 $i : W \hookrightarrow S$ 是单射，那么

$$\langle f, i_* \nu \rangle = \langle f, \langle \delta i, \nu \rangle \rangle = \langle \langle f, \delta i \rangle, \nu \rangle = \langle f i, \nu \rangle.$$

我们对超偏序集的定义作一些直观解释。首先，配对在第二个输入上逐点进行，这只是反映了我们的记号选择，与超偏序集的结构没有本质关系。或者，我们也可以将配对函数定义为一种类型的映射

$$\langle -, - \rangle : P^S \times \beta S \longrightarrow P,$$

而这确实是 [13] 中采用的选择。任何这样的配对函数都可以通过逐点赋值，将其扩展为类型为 $P^S \times \beta S^T \longrightarrow P^T$ 的配对函数，方法是令

$$\langle f, \mu \rangle = t \longmapsto \langle f, \mu_t \rangle,$$

对于任意 $f : S \longrightarrow P$ 和任意 $\mu : T \longrightarrow \beta S$。我们发现，这种记号更加简洁明了，尤其是在表达和运用松弛结合律时。

其余三个性质是超偏序集的核心：

- 单位条件最好从收敛的角度来理解（参见注 2.1）。令 δ_s 为 $s \in S$ 上的主超滤子。族 $\{f_s\}_{s \in S}$ 直观上在超滤子 δ_s 下收敛到点 f_s，因为它包含单元素子集 $\{s\}$。
- 一旦我们看到更多超范畴的例子，松弛结合律条件就会变得更加合理。目前请注意，如果偏序集是 离散的，那么松弛结合律实际上等价于严格结合律；事实上，对于 βS，或更一般地，对于任意紧豪斯多夫空间，其配对都是严格结合的。
- 局部性条件也至关重要。它断言配对运算 $\langle f, \mu \rangle$ 是局部的。我们已经提到，当 $i : W \hookrightarrow S$ 是单射时，可以在包含映射 $i_* : \beta W \hookrightarrow \beta S$ 下将 βW 视为 βS 的子空间。给定任意 $\mu \in \beta S$，μ 属于 i_* 的像，即 $\mu = i_* \nu$ 对于某个 ν，当且仅当 $W \in \mu$。在这种情况下，收敛点 $\langle f, \mu \rangle$ 应当等于收敛点 $\langle f i, \nu \rangle$：当我们将 S 上的族限制为 W 上的子族，并将 μ 上的超滤子限制到 ν 时。

注意，对于任意超偏序集 P，给定 $f : S \longrightarrow P$ 和任意函数 $g : W \longrightarrow S$，如果 $\lambda \in \beta W$，那么根据松弛结合律，

$$\langle f, g_* \mu \rangle = \langle f, \langle \delta g, \mu \rangle \rangle \leq \langle \langle f, \delta g \rangle, \mu \rangle = \langle f g, \mu \rangle.$$

由此可知，$- \circ g$ 与 g 前复合的算子，以及 $g_*(-)$ 推前超滤子的算子，表现得像一对伴随算子，用于 马会。

配对函数 $\langle -, - \rangle$。然而，对于任意的 g，情况并非完全如此，因为我们有一个不等式；只有当 g 是单射时，它才会成为真正的等式。

对于超偏序集，自然有三种不同的态射概念：

定义 2.3（超函子）。给定两个超偏序集 P、Q，从 P 到 Q 的一个左超函子是一个单调函数 $\varphi : P \to Q$，满足对于任意集合 S、任意族 $f : S \to P$ 以及任意 $\mu : T \to \beta S$，

$$\varphi\langle f, \mu \rangle \leq \langle \varphi f, \mu \rangle.$$

这里的序是在 P^T 上逐点定义的。对偶地，一个右超函子是一个函子 $\varphi : P \to Q$，满足

$$\langle \varphi f, \mu \rangle \leq \varphi\langle f, \mu \rangle,$$

φ 是一个超函子，当且仅当它既是左超函子又是右超函子，即当且仅当上述不等式实际上都是等式。

我们用 **UltLPos**（分别用 **UltRPos**）表示超偏序集与左（分别为右）超函子的范畴。它们有一个共同的宽子范畴 **UltPos**，其对象为超偏序集，态射为超函子。对于任意两个偏序集，它们之间的单调映射集合具有自然的逐点序，因此 **UltLPos**、**UltRPos** 和 **UltPos** 都是 **Pos**-富集的，其中 **Pos** 是偏序集范畴。因此，它们可以自然地视为 2-范畴。

注记 2.4。我们对超偏序集和（左/右）超函子的定义，确实是将 [13]，中定义的超范畴和（左/右）超函子的一般概念限制到偏序集上得到的特例。然而，定义 2.2 和 2.3 远比一般情形简单。这主要是因为，当范畴不是偏序集时，超范畴中超积的结构还需要满足其他非平凡的相干性 条件。然而，由于偏序集是骨架的 且薄的，也就是说，同构对象实际上相等，且任意两个对象之间至多有一个态射，因此所有相干性条件都是平凡的。

现在我们将讨论一些典型的超偏序集例子。如前所述，离散超偏序集恰好就是紧致豪斯多夫空间：

例 2.5（超集）。如果 P 是一个离散的 超偏序集，即 P 上的序是等号关系，那么我们称 P 为一个超集。对于超集，按照定义，每个不等式都与严格相等重合。特别是，在这种情况下，左／右超函子的概念与超函子的概念重合，我们将超集的范畴记为 **UltSet**。事实上，Lurie 已证明存在范畴的同构，

$$\mathbf{UltSet} \cong \mathbf{Comp}.$$

将紧豪斯多夫空间 X 构造成超集的方式，实质上已由注 2.1 给出。另一方面，对于任意超偏序集，尤其是超集，都有闭子集的概念，正如我们将在第 3 节看到的那样。从 X 的超结构来看，其闭子集恰好是 X 拓扑中的闭子集。更多详情见 [13]。

特别地，每个 βS 都将是一个超集。回顾偏序集定义 2.2 中的松弛结合律条件。对于任何 $f : S \to P$， P 上的配对诱导出一个函数

$$\varphi_f := \langle f, - \rangle : \beta S \to P,$$

且松弛结合律恰好断言，该函数 φ_f 是任意 f的左超函子：对于任意 $\mu : T \to \beta S$和任意 $\nu \in \beta T$， φ_f是一个左超函子恰好意味着

$$\langle f, \langle \mu, \nu \rangle \rangle = \varphi_f \langle \mu, \nu \rangle \leq \langle \varphi_f \mu, \nu \rangle = \langle \langle f, \mu \rangle, \nu \rangle.$$

这初步表明，左超函子的概念可能比超函子的概念更为基础。

更一般地，我们可以在任意紧豪斯多夫空间上赋予一个<esc ape></*escape*>闭的<*escape*></escape>偏序，从而使其成为一个超偏序集：

引理 2.6。 设 X 是一个视为超集的紧豪斯多夫空间。如果 $\leq$ 是 X 上的偏序，并且在空间 $X \times X$ 中是闭的，那么 $(X, \leq)$ 将是一个超偏序集。

证明。 X上的超结构显然也满足定义 2.2 中关于偏序集 $(X, \leq)$ 的条件 (1)、(2) 和 (3)，这基本上是因为 $\leq$ 具有自反性。因此，我们只需验证配对函数也是单调的。设f、 $g : S \to X$是两个函数，且在 X^S上按逐点序有 $f \leq g$，其中 X配备了 $\leq$。对于任意 $\mu \in \beta S$，设 $\langle f$、$\mu \rangle$ 为 x，而 $\langle g$、 $\mu \rangle$ 为y。根据注 2.1， x 是满足下式的唯一点

$$\forall U \in \tau_x, f^{-1}(U) \in \mu,$$

g也同理。由于 $\leq$ 是闭的，若 $x \not\leq y$，则存在开邻域 $U_x \in \tau_x$ 和 $U_y \in \tau_y$，使得

$$(U_x \times U_y) \cap \leq = \emptyset.$$

由此可得 $f^{-1}(U_x) \in \mu$和 $g^{-1}(U_y) \in \mu$，因此

$$f^{-1}(U_x) \cap g^{-1}(U_y) \in \mu.$$

特别地， $f^{-1}(U_x) \cap g^{-1}(U_y) \neq \emptyset$，因此我们可以在这个交集中找到 $s \in S$。然后根据我们的构造，

$$f(s) \in U_x \,\&\, g(s) \in U_y \Longrightarrow f(s) \neq g(s),$$

这与我们的假设 $f \leq g$ 相矛盾。因此，我们必定有

$$\langle f, \mu\rangle \leq \langle g, \mu\rangle,$$

由此便完成了证明： $(X, \leq)$ 配备此超结构后是一个超偏序集。□

在 Nachbin 的著作 [16] 中，已经研究了配备闭偏序的紧豪斯多夫空间这一概念。用现代术语来说，它通常称为紧有序空间或紧 *pospace*。紧有序空间构成一个自然的（2-）范畴 **CompOrd**，其态射是连续单调映射，态射之间采用逐点序。由引理 2.6 和同构 **Comp** ≅ **UltSet**可知，存在如下（2-）范畴的全忠实嵌入，

$$\mathbf{CompOrd} \hookrightarrow \mathbf{UltPos}.$$

我们将在第 7 节回到这些例子。

另一族例子来自完备格。回顾第 1 节，关于 $\mu \in \beta S$，一族模型 $\{M_s\}_{s\in S}$ 的超积可以视为滤余极限 $\varinjlim_{A\in\mu} \prod_{s\in A} M_s$。我们可以仿照这一构造，为任意完备格配备超结构：

例 2.7（典范超结构）。 每个完备格 P 都可以构造成一个超偏序集。给定任意 $f : S \to P$ 和任意 $A \subseteq S$，我们用 f^A表示 $\bigwedge_{s\in A} fs$ 在 P中的交。对于任意 $\mu \in \beta S$，我们定义

$$\langle f, \mu\rangle := \bigvee_{A\in\mu} f^A.$$

注意，如果将 μ 中的序视为由子集的包含映射给出，则余极限实际上由直接偏序集 μ^{op}进行指标化。这是因为如果$A \subseteq B$，那么根据定义有 $f^B = \bigwedge_{s\in B} fs \leq \bigwedge_{s\in A} fs = f^A$。由上述定义可明显看出，配对 $\langle -、\mu\rangle$ 将是单调的。我们详细验证它还满足其余三个条件：

- 单位显然得到满足，因为对于任意 $s \in S$， $\{s\}$ 将是 δ_s中的底元素，因而是 δ_s^{op}中的顶元素。这意味着并仅等于 $f^{\{s\}} = fs$。
- 对于松弛结合律，给定 $\mu : T \to \beta S$和 $\nu \in \beta T$，对于任意 $A \subseteq S$，根据定义有

$$A \in \langle \mu, \nu\rangle \iff \mu^{-1}(\beta A) = \{\, t \mid A \in \mu_t \,\} \in \nu.$$

这样，对于任意 $A \in \langle \mu、\ \nu\rangle$ 以及任意 $t \in \mu^{-1}(\beta A)$、 $A \in \mu_t$，因此根据 $\langle f、\ \mu_t\rangle$ 的定义，我们有

$$f^A \leq \langle f, \mu_t\rangle.$$

由此可得

$$f^A \leq \bigwedge_{t\in\mu^{-1}(\beta A)} \langle f, \mu_t\rangle = \langle f, \mu\rangle^{\mu^{-1}(\beta A)}.$$

这意味着，对于任意的 $A \in \langle \mu、\ \nu\rangle$，我们都可以找到某个子集 $\mu^{-1}(\beta A) \in \nu$，使得 f^A 小于 $\langle f、\ \mu\rangle^{\mu^{-1}(\beta A)}$。因此，根据定义，我们得到

$$\langle f, \langle \mu, \nu\rangle\rangle \leq \langle\langle f, \mu\rangle, \nu\rangle.$$

• 局部性也很容易，因为如果 $i : T \hookrightarrow S$ 是一个包含映射，那么 ν^{op} 将在 $i_* \nu^{\mathrm{op}}$ 中成为终对象，因此它们具有相同的并。

上述内容将被称为完备格上的典范或范畴论超结构。请注意，在我们证明松弛结合律的过程中，先验地，不一定有理由认为不等式 $\langle f, \langle \mu, \nu\rangle\rangle \leq \langle\langle f, \mu\rangle, \nu\rangle$ 实际上是等式。因此，如果我们希望将这些例子纳入其中，就确实需要在超偏序集的定义中保留这种一般性。

本文中一个最重要的超偏序集实例是超偏序集 $\mathbf{2} = \{0 < 1\}$。一方面，它是一个完备格，因此可以赋予典范超结构。对于任意族 $f : S \longrightarrow \mathbf{2}$ 和任意 $\mu \in \beta S$，我们注意到

$$\langle f, \mu\rangle = \bigvee_{A\in\mu} f^A = 1 \iff \exists A \in \mu,\ A \subseteq f^{-1}(1) \iff f^{-1}(1) \in \mu.$$

由于 $f^{-1}(1)$ 和 $f^{-1}(0)$ 不相交，且它们覆盖了 S，因此它们当中恰有一个属于 μ；上述刻画表明，对于 $i \in \{0, 1\}$，$\langle f,\ \mu\rangle = i$ 当且仅当 $f^{-1}(i) \in \mu$。

我们还可以注意到，$\mathbf{2}$ 作为集合也是一个带有离散拓扑的紧致豪斯多夫空间，而它的典范超结构实际上与这种拓扑所赋予的超结构一致。这意味着 $\mathbf{2}$ 也是 **CompOrd** 中的一个实例；事实上，$\leq$ 在 $\mathbf{2}$ 中是闭的，因为它是离散的。本文后续部分将广泛依赖 $\mathbf{2}$ 上的超结构。

典范超结构还将适当的（2-）范畴全忠实嵌入到（2-）范畴 **UltL** 中：

引理 2.8。给定两个完备格之间的单调映射 $\varphi : P \longrightarrow Q$，将 P，Q 视为配备典范超结构的超偏序集，则 φ 是左超函子，当且仅当它保任意有向上确界。

证明。令 $f : S \longrightarrow P$ 为任意函数，并令 μ 为 βS 中的一个元素。若 φ 保有向上确界，

$$\varphi\langle f, \mu\rangle = \varphi\left(\bigvee_{A\in\mu} f^A\right) = \bigvee_{A\in\mu} \varphi(f^A) \leq \bigvee_{A\in\mu} (\varphi f)^A = \langle \varphi f, \mu\rangle.$$

由此可知， φ 是一个左超函子。另一方面，考虑 P中的一族对象 $\{p_i\}_{i\in I}$，其指标集为某个有向偏序集 I。令 $\uparrow i$表示 I的以下子集，

$$\uparrow i = \{j \in I \mid i \leq j\}$$

注意，子集族 $\{\uparrow i\}_{i\in I}$具有有限交性质，因为 I 是有向的。因此，我们可以找到 I 上的某个超滤子 μ，使其扩张这个族。[2] 然后根据定义，

$$\langle p, \mu\rangle = \bigvee_{A\in\mu} p^A.$$

注意，由于对每个 $i \in I$都有 $\uparrow i \in \mu$，显然我们有

$$p_i = p^{\uparrow i} \leq \bigvee_{A\in\mu} p^A = \langle p, \mu\rangle,$$

这意味着 $\bigvee_{i\in I} p_i \leq \langle p、\ \mu\rangle$。另一方面，对于任意 $A \in \mu$,

$$p^A = \bigwedge_{i\in A} p_i \leq \bigvee_{i\in I} p_i.$$

因此可得

$$\langle p, \mu\rangle = \bigvee_{A\in\mu} p^A \leq \bigvee_{i\in I} p_i.$$

这证明 $\langle p、\ \mu\rangle$ 和 $\bigvee_{i\in I} p_i$ 三者相同。同样，我们还有

$$\langle \varphi p, \mu\rangle = \bigvee_{i\in I} \varphi p_I,$$

对于任意单调函数 φ。现在，如果 φ 是一个左超函子，我们必须有

$$\varphi\left(\bigvee_{i\in I} p_i\right) = \varphi\langle p, \mu\rangle \leq \langle \varphi p, \mu\rangle = \bigvee_{i\in I} \varphi p_i,$$

这实际上意味着 φ 保留了这个有向上确界 $\bigvee_{i\in I} p_i$。因此，具有典范超结构的完备格之间的左超函子与它们之间的 Scott 连续映射一致。 □

令 **CPos** 为由 Scott连续函数构成的完备格的（2-）范畴，即保持有向上确界的映射。引理 2.8 因而意味着存在一个全忠实 嵌入

$$\mathbf{CPos} \hookrightarrow \mathbf{UltLPos}.$$

CPos是 DCPO（带有 Scott 连续函数的有向完备偏序）的一个全子范畴。特别地， **CPos** 将 连续格范畴作为一个全子范畴包含其中；该范畴是笛卡尔闭的，Dana Scott [17] 利用它构造了无类型

[2]这是超滤子众所周知的一个性质。证明参见附录 A，引理 A.2。

λ-演算的模型。关于 DCPO 在域理论中的更多应用，请参见 [1] 。超偏序集理论与域理论之间可能还存在更多联系，我们将在第 8 节回到这一问题。

给定偏序集 P、Q，令 $[P,Q]$ 表示从 P 到 Q 的所有单调映射构成的偏序集，并赋予逐点序。注意，如果 P、Q 属于 **CPos**，那么 **CPos**(P,Q) 实际上是一个完备格，其并在 $[P,Q]$ 中逐点计算。这是因为，保持定向并的单调映射族的逐点并仍然保持定向并。于是，引理 2.8 表明，如果我们将 P、Q 视为超偏序集，那么偏序集 **UltLPos**(P,Q) 将再次完备，并且左超函子的并也在其中逐点计算。在更一般的语境下，这通常成立：

引理 2.9。 对于任意超偏序集 P，Q，若 Q 是一个完备格，则偏序集 **UltLPos**(P,Q)（分别为 **UltRPos**(P,Q)）是完备的，并且其并（分别为交）取自 $[P,Q]$。

证明。 设给定一族从 P 到Q的左超函子$\{\varphi\}_{i\in I}$，并将其逐点并记作 φ。给定任意一族 $f : S \to P$和任意 $\mu \in \beta S$，有

$$\varphi\langle f,\mu\rangle = \bigvee_{i\in I} \varphi_i\langle f,\mu\rangle \leq \bigvee_{i\in I}\langle \varphi_i f,\mu\rangle \leq \langle \bigvee_{i\in I} \varphi_i f,\mu\rangle = \langle \varphi f,\mu\rangle.$$

第一个不等式利用了每个 φ_i 都是左超函子这一事实，第二个不等式则源于 $\langle -,\mu\rangle$的单调性。因此， φ 是左超函子，并且它是 **UltLPos**(P,Q)中 $\{\varphi_i\}_{i\in I}$的并。右超偏序集的证明完全对称。□

最后，我们说明如何从已有的超偏序集构造新的超偏序集：

例 2.10。 我们描述超偏序集的积、有限余积和指数对象：

- 对于任意一族 $\{P_i\}_{i\in I}$，积超偏序集 $\prod_{i\in I} P_i$ 就是它们在 **Pos**中的积，并赋予逐点超积结构：对于任意 $(f_i)_{i\in I} : S \to \prod_{i\in I} P_i$ 和 $\mu \in \beta S$，有

$$\langle (f_i)_{i\in I},\mu\rangle := (\langle f_i,\mu\rangle)_{i\in I}.$$

  很容易验证，$\prod_{i\in I} P_i$ 在上述超结构下成为一个超偏序集。特别地，终端超偏序集是带有平凡序和平凡超结构的单元素集 $\mathbf{1}$。

此外，逐点超结构意味着投影映射都是超函子，

$$\pi_i : \prod_{i\in I} P_i \to P_i.$$

[3]这里我们不要求 Q 配备典范超结构。

于是很容易验证，$\prod_{i\in I} P_i$ 确实是 $\{P_i\}_{i\in I}$在 **UltLPos**、 **UltRPos**和 **UltPos**中的范畴积。

• 初始 超偏序集是空偏序集 $\varnothing$。由于不存在从非空集合到 $\varnothing$的映射，而且 $\varnothing$ 自身上也没有超滤子，因此 $\varnothing$上存在唯一的超结构。

给定两个超偏序集 P, Q，它们的余积 $P \sqcup Q$就是 P与 Q在 **Pos** 中的不交并。对于任意映射 $f : S \to P \sqcup Q$ 和任意 $\mu \in \beta S$，子集 $f^{-1}(P)$与 $f^{-1}(Q)$ 中恰有一个属于 μ，设其为 $f^{-1}(P) \in \mu$，那么我们只需将超积$\langle f, \mu\rangle$指定为 $\langle f|_{f^{-1}(P)}, \mu|_{f^{-1}(P)}\rangle$在 P中的超积。在这种情况下，两个包含映射 $P, Q \hookrightarrow P \sqcup Q$显然也是超函子，并且也很容易验证，$P \sqcup Q$确实是 P, Q在**UltLPos, UltRPos**和 **UltPos**中的余积。

• 给定任意超偏序集 P和任意偏序集 Q，我们可以在 $[Q, P]$ 上赋予逐点超结构：对于任意 $f : S \to [Q, P]$ 和任意 $\mu \in \beta S$，定义

$$\langle f, \mu\rangle := q \mapsto \langle f(q), \mu\rangle.$$

验证 $[Q, P]$ 是一个超偏序集同样很直接。

本节中，我们定义了 2-范畴 **UltLPos**、 **UltRPos**和**UltPos**，并讨论了一些典型的超偏序集示例。下一节将讨论超偏序集与某些拓扑结构之间的密切关系；在之后研究分配格和相干局部的对偶时，这一关系将十分有用。

3. 超偏序集中的拓扑结构

根据同构 **UltSet** ≅ **Comp**，我们已经可以预见超结构与拓扑结构之间存在密切关系。事实上，对于任意超偏序集 P， P 上的超积结构将在 P上诱导出一个紧拓扑，其闭集定义如下：

定义 3.1（超偏序集的闭集）。 给定超偏序集 P，子集 $K \subseteq P$ 在 P 中是闭的，当且仅当对于任意 $f : S \to P$ 以及任意 $\mu \in \beta S$，

$$f^{-1}(K) \in \mu \Longrightarrow \langle f, \mu\rangle \in K.$$

根据超积的局部性，如果 $f^{-1}(K) \in \mu$，那么我们可以简单地将超滤子 μ限制为 $f^{-1}(K)$ 上的某个超滤子 ν，并且必有

$$\langle f, \mu\rangle = \langle f|_{f^{-1}(K)}, \nu\rangle.$$

这意味着， K是闭的，当且仅当对于任意$f : S \to K \subseteq P$以及任意属于 P 的$\mu \in \beta S$、 $\langle f$、 $\mu\rangle$，其实际上属于 K。

显然，如果 K 在 P 中是闭的，那么将其视为 P 的子偏序集时， K 会继承超偏序集结构。这同样适用于超函子：

引理 3.2. 设 $\varphi : P \to Q$ 为一个（左/右）超函子。给定闭子偏序集 $K \subseteq P$ 和 $L \subseteq Q$，如果 φ 限制为一个从 K 到 L 的态射，那么它也将是一个从 K 到 L 的（左/右）超函子。

证明。 这是显而易见的，因为 K、 L 上的超结构分别是从 P、 Q 上限制得到的。□

任意超偏序集中闭子集构成的族实际上构成一个拓扑：

引理 3.3. 任意超偏序集 P 的闭子集在任意交和有限并下封闭。

证明。 对交集闭合是显然的。给定 P 的任意闭子集族 $\{K_i\}_{i\in I}$ ，若 $f : S \to \bigcap_{i\in I} K_i \subseteq P$，那么由于每个 K_i 都是闭的，对于任意 $\mu \in \beta S$，我们都有

$$\langle f, \mu\rangle \in K_i, \ \forall i \in I.$$

由此可得 $\langle f, \mu\rangle \in \bigcap_{i\in I} K_i$，因此交集也是闭的。

根据定义， P 本身是闭的。现在假设 K 和 L 都是 P中的闭子集。考虑任意一个族 $f : S \to K \cup L \subseteq P$和任意一个超滤子$\mu \in \beta S$。分解 $K \cup L$诱导出 S的一个分解 $f^{-1}(K) \cup f^{-1}(L)$，并且其中至少有一个属于 μ，不妨设为 $f^{-1}(K) \in \mu$。那么根据超积的局部性，我们必有

$$\langle f, \mu\rangle = \langle f|_{f^{-1}(K)}, \mu|_{f^{-1}(K)}\rangle.$$

因此，由于 K是闭的这一事实，我们有 $\langle f, \mu\rangle \in K \subseteq K \cup L$。这意味着 $K \cup L$ 是闭的。□

给定一个超偏序集，我们用 $\mathrm{Cl}(P)$ 表示 P在包含映射下的闭集格。此外，我们还证明，对于任意超偏序集 P，拓扑 $\mathrm{Cl}(P)$ 是紧致的 。用闭集的语言来说，拓扑是紧致的，当且仅当对于任意闭子集族，如果它的每个有限子族的交集都非空，那么整个族的交集也非空。等价地说，如果一个族的交集为空，那么它有一个交集为空的有限子族。

引理 3.4。 对于任意超偏序集 P、 $\mathrm{Cl}(P)$，在 P 上的拓扑中，作为闭集考虑时是紧致的。

证明。 假设我们有一个超偏序集P的闭子集族 $\{K_i\}$ 。假设 $\{K_i\}$ 的任意有限子族的交集均非空。众所周知，任何这样的族都可以扩张为 P上的一个超滤子 μ 。

其中包含 $\{K_i\}$.[4] 。考虑超积 $\langle \mathrm{id}, \mu \rangle$。对于任意 K_i，由于$K_i \in \mu$且 K_i 在 P 中是闭的，根据定义，我们知道 $\langle \mathrm{id}, \mu \rangle \in K_i$。这表明 $\langle \mathrm{id}, \mu \rangle \in \bigcap_i K_i$，因此整个族的交集也非空。□

注 3.5. 对于超集 X，其闭集 $\mathrm{Cl}(X)$ 确实会成为 X 上的紧豪斯多夫拓扑，而由此拓扑诱导的超结构将与 X 上的原始超结构一致。更多详情请参见 [13] 。

接下来一个自然的问题是：超偏序集之间的各种态射在这一拓扑下是否连续。正如我们将看到的，一般而言，左超函子和右超函子在这一拓扑下都不连续，但超函子是连续的，而且它们还保持闭集：

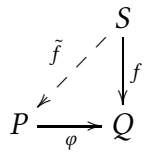
引理 3.6。 任何超函子 $\varphi : P \to Q$都是闭连续映射，其中P, Q分别赋予闭集拓扑 $\mathrm{Cl}(P), \mathrm{Cl}(Q)$。

证明。 对于 Q 中的任意闭集 L，我们证明 $\varphi^{-1}(L)$ 也是闭的。假设我们给定 $f : S \to \varphi^{-1}(L) \subseteq P$和 $\mu \in \beta S$，根据定义 $\varphi f : S \to L \subseteq Q$，因此，由于 L 是闭的且 φ 是一个超函子，

$$\varphi\langle f, \mu \rangle = \langle \varphi f, \mu \rangle \in L,$$

由此可得 $\langle f, \mu \rangle \in \varphi^{-1}(L)$，因此 $\varphi^{-1}(L)$ 是闭的。

我们还证明了 φ 是闭的。令 $K \subseteq P$ 为一个闭子空间。对于任意映射 $f : S \to \varphi(K) \subseteq Q$ 和任意 $\mu \in \beta S$，根据选择公理，我们可以如下提升 f，



˜使得 $f : S \to K \subseteq P$。然后，由于 K 是闭的，且 φ 是一个超函子，因此可得

$$\langle f, \mu \rangle = \langle \varphi \tilde{f}, \mu \rangle = \varphi\langle \tilde{f}, \mu \rangle \in \varphi(K).$$

因此， $\varphi(K)$ 也是闭的。 □

令 **CTop** 为紧拓扑空间范畴，并令 $\mathbf{CTop}_c$为其宽子范畴，其中态射限于闭连续映射。引理 3.6 表明，构造 $\mathrm{Cl}(-)$ 可扩展为如下函子，

$$\mathrm{Cl}(-) : \mathbf{UltPos} \to \mathbf{CTop}_c.$$

[4]证明见附录 A，引理 A.2。

从引理 3.6 的证明中，我们还发现，若 φ 仅是左超函子或右超函子，则它对于拓扑 $\mathrm{Cl}(P)$和 $\mathrm{Cl}(Q)$未必连续，因为 $\varphi\langle f、\ \mu\rangle$ 与 $\langle\varphi f、\mu\rangle$ 之间的等式可能不再成立，因此 $\varphi^{-1}(L)$ 可能不是闭的。这并不理想，因为根据我们的理念，左超函子比超函子更重要。

然而，解决办法很容易找到。如果 φ 仅仅是左或右超函子，我们可以限制为那些同时也是向下或向上闭的闭子集。对于任意超偏序集 P，我们用 $\mathrm{Cl}_{\downarrow}(P)$（分别用 $\mathrm{Cl}_{\uparrow}(P)$）表示 P 的闭且向下闭（分别向上闭）子集的集合。

$\mathrm{Cl}_{\downarrow}(P)$和 $\mathrm{Cl}_{\uparrow}(P)$中的元素有哪些基本示例？人们可能会预期，对于任意 $p\in P$，都有 $\downarrow p\in\mathrm{Cl}_{\downarrow}(P)$，但一般情况下并非如此。考虑在某个 $p\in P$处的常值函数 $p:S\to P$。对于任意 $\mu\in\beta S$，如果我们用 p^{μ} 表示 $\langle p、\ \mu\rangle$，那么我们有

$$p=\langle \mathrm{id},\delta_p\rangle=\langle \mathrm{id},p_*\mu\rangle\leq p^{\mu}.$$

如果不等式是严格的，我们将有 $p^{\mu}\notin\downarrow p$，这意味着 $\downarrow p$ 可能不是闭的。

然而，对于迄今为止考察的例子，包括超集、紧有序空间以及带有典范超结构的完备格，形如 $\downarrow p$ 的子集实际上都是闭的。对于超集 X，任取 $p\in X$，$\downarrow p$ 都只是 $\{p\}$；而紧豪斯多夫空间中的任意单元素集都是闭的。对于任意紧有序空间 $(X,\leq)$，由于 $\leq$ 是闭的，因此对于任意 $p\in X$，$\downarrow p$ 也将是闭的。对于带有典范超结构的完备格，我们有：

引理 3.7. 若 P 是带有典范超结构的完备格，则对于任意 $p\in P$，$\downarrow p\in\mathrm{Cl}_{\downarrow}(P)$。

证明。 我们直接验证。对于任意 $f:S\to\downarrow p\subseteq P$ 和任意 $\mu\in\beta S$，

$$\langle f,\mu\rangle=\bigvee_{A\in\mu}f^{A}.$$

由于 $f(S)\subseteq\downarrow p$，对于任意 $A\in\mu$，$f^{A}\leq p$。由此可得 $\langle f,\ \mu\rangle\leq p$，因此 $\downarrow p$ 是闭的。□

另一方面，对于任意超偏序集，$\uparrow p$ 始终是闭的：

引理 3.8。 设 P为超偏序集。那么对于任意 $p\in P$、$\uparrow p\in\mathrm{Cl}_{\uparrow}(P)$。

证明。 $\uparrow p$ 是向上闭的，因此我们只需证明它是闭的。给定任意集合 S 和任意 $\mu\in\beta S$，考虑超幂 p^{μ}。我们已经证明了 $p\leq p^{\mu}$。现在，对于任意族 $f:S\to\uparrow p\subseteq P$，常值函数

$p : S \to P$将所有元素映射到 p，在偏序集 $[S, P]$中小于 f，因此根据 $\langle$–的函子性， $\mu\rangle$ 我们有

$$p \leq p^{\mu} = \langle p, \mu\rangle \leq \langle f, \mu\rangle.$$

因此， $\langle f$、 $\mu\rangle \in \uparrow p$，这表明 $\uparrow p$是闭的。 □

容易看出， $\mathrm{Cl}_{\downarrow}(P)$ 和 $\mathrm{Cl}_{\uparrow}(P)$ 在任意交和有限并下仍然闭:

引理 3.9. $\mathrm{Cl}_{\downarrow}(P)$和 $\mathrm{Cl}_{\uparrow}(P)$在任意交和有限并下均闭。

证明。 这直接来自引理 3.3，以及向下闭子集和向上闭子集在任意交和并下均闭这一事实。□

因此， $\mathrm{Cl}_{\downarrow}(P)$ 和 $\mathrm{Cl}_{\uparrow}(P)$ 也可以视为 P上的闭集拓扑，它们都比 $\mathrm{Cl}(P)$更粗。当然，现在的好处是，对于分别由 $\mathrm{Cl}_{\downarrow}(-)$ 和 $\mathrm{Cl}_{\uparrow}(-)$诱导的拓扑，左超函子和右超函子都是连续的:

引理 3.10. 当 P, Q分别配备拓扑 $\mathrm{Cl}_{\downarrow}(P), \mathrm{Cl}_{\downarrow}(Q)$ （对于左超函子）或 $\mathrm{Cl}_{\uparrow}(P)$, $\mathrm{Cl}_{\uparrow}(Q)$（对于右超函子）时，左（分别为右）超函子 $\varphi : P \to Q$ 是连续的。

证明. 设 φ 是一个左超函子，且 $L \in \mathrm{Cl}_{\downarrow}(Q)$。首先，注意到$\varphi^{-1}(L)$ 确实是向下封闭的。我们进一步证明它是闭的。任取 $f : S \to \varphi^{-1}(L)$ 和 $\mu \in \beta S$。根据假设， $\varphi f : S \to L$，因此$\langle \varphi f, \mu\rangle \in L$。由于 φ是一个左超函子，

$$\varphi\langle f, \mu\rangle \leq \langle \varphi f, \mu\rangle.$$

但根据定义， L是向下闭的，因此 $\varphi\langle f$、 $\mu\rangle \in L$，或者等价地，$\langle f$、$\mu\rangle \in \varphi^{-1}(L)$，所以 $\varphi^{-1}(L)$ 也是闭的。右超函子的情形完全对称。□

然而，将左超函子（分别地，右超函子）视为连续函数时，它可能不再是闭的。甚至在保持向下闭（分别地，向上闭）子集这一层面上就已经失败了，因为如果 K 在 P中是向下闭的（分别地，向上闭的），那么 $\varphi(K)$可能不再是向下闭的（分别地，向上闭的）。于是我们得到如下两个函子，

$$\mathrm{Cl}_{\downarrow}(-) : \mathbf{UltLPos} \to \mathbf{CTop}, \quad \mathrm{Cl}_{\uparrow}(-) : \mathbf{UltRPos} \to \mathbf{CTop}.$$

此外，将$\mathrm{Cl}_{\downarrow}(P)$ 和 $\mathrm{Cl}_{\uparrow}(P)$ 视为格时，构造 $P \mapsto \mathrm{Cl}_{\downarrow}(P)$和 $P \mapsto \mathrm{Cl}_{\uparrow}(P)$在某种意义上都是可表示的:

定理 3.11. 从 P 到 $\mathbf{2}$ 的左（分别为右）超函子与 P的闭且向下闭（分别为向上闭）子集反变（分别为协变）对应，即存在偏序集之间的自然同构

$$\mathbf{UltLPos}(P,\mathbf{2})^{\mathrm{op}} \cong \mathrm{Cl}_{\downarrow}(P), \quad \mathbf{UltRPos}(P,\mathbf{2}) \cong \mathrm{Cl}_{\uparrow}(P).$$

证明。 给定左超函子 $\varphi : P \to \mathbf{2}$，由于 $\{0\}$ 在 $\mathbf{2}$ 中是闭的且向下闭的，由引理 3.10 $\varphi^{-1}(0) \in \mathrm{Cl}_{\downarrow}(P)$。给定任意闭且向下闭的子集 $Q \subseteq P$，我们证明由 $\varphi(p) = 0$ 当且仅当 $p \in Q$ 给出的诱导映射 $\varphi : P \to \mathbf{2}$ 是左超函子。首先，由于 Q 向下闭，这确实是单调的。为此，考虑 $f : S \to P$ 和 $\mu \in \beta S$。我们分两种情况讨论：

- 如果 $f^{-1}(Q) \in \mu$，由于 Q 是闭的，$\langle f,\ \mu\rangle \in Q$。这意味着 $\varphi\langle f,\ \mu\rangle = 0$，因此我们必有 $\varphi\langle f,\ \mu\rangle \leq \langle \varphi f,\ \mu\rangle$。
- 如果 $f^{-1}(Q) \notin \mu$，那么 $f^{-1}(P\backslash Q) \in \mu$。这表明复合映射 φf 在子集 $f^{-1}(P\backslash Q) \in \mu$ 上取值为 $\mathbf{1}$。因此，由于 $\mathbf{2}$ 上的超结构，我们有 $\langle \varphi f,\ \mu\rangle = 1$，结论再次成立。

显然，这两个构造互为逆。如果 φ、 $\psi : P \to \mathbf{2}$ 是两个满足 $\varphi \leq \psi$ 的左超函子，则这意味着 $\psi^{-1}(0) \subseteq \varphi^{-1}(0)$，因此该同构是逆变的。

右超函子的情形完全对称：将右超函子 $\varphi : P \to \mathbf{2}$ 映射到子集 $\varphi^{-1}(1) \in \mathrm{Cl}_{\uparrow}(P)$，反之亦然。由于 $\varphi \leq \psi$ 蕴含 $\varphi^{-1}(1) \subseteq \psi^{-1}(1)$，该同构变为协变的。 □

由于超函子按定义恰好既是左超函子又是右超函子，由上述定理可知，从 P 到 $\mathbf{2}$ 的超函子刻画了 P 中满足 $K \in \mathrm{Cl}_{\downarrow}(P)$ 和 $\overline{K} \in \mathrm{Cl}_{\uparrow}(P)$ 的子集互补对 $(K, \overline{K})$；并且 $(K, \overline{K}) \leq (L, \overline{L})$ 当且仅当 $K \supseteq L$。我们用 $\mathrm{Cl}^{\uparrow}_{\downarrow}(P)$ 表示这个偏序集，因此得到以下推论：

推论 3.12. 对于任意超偏序集 P，我们有

$$\mathbf{UltPos}(P,\mathbf{2}) \cong \mathrm{Cl}^{\uparrow}_{\downarrow}(P).$$

证明。 由定理 3.11 可直接得出。 □

注 3.13. 这一构造 $\mathbf{UltPos}(-,\mathbf{2})$ 实际上还提供了另一个从超偏序集到拓扑空间的函子：

$$\mathrm{Cl}^{\uparrow}_{\downarrow}(-) : \mathbf{UltPos} \to \mathbf{CTop},$$

它将每个超偏序集 P 映射到所谓的补丁拓扑，该拓扑由子基 $\{ K, \overline{K} \mid (K, \overline{K}) \in \mathrm{Cl}^{\uparrow}_{\downarrow}(P) \}$生成。根据定义，对于任意这样的对 $(K, \overline{K}) \in \mathrm{Cl}^{\uparrow}_{\downarrow}(P)$， K和$\overline{K}$都属于 $\mathrm{Cl}(P)$，因此是紧致的；由此得到的空间 P 在补丁拓扑下也将是紧致的。

至此，我们已完成所有预备工作，可以开始讨论从 $\mathbf{DL}^{\mathrm{op}}$ 和 **CLoc** 分别到 **UltPos** 和 **UltLPos**的嵌入。下一节首先通过考察模型/点的偏序集，说明如何从给定的分配格或相干局部构造一个超偏序集。

4. 从分配格和相干局部得到的超偏序集

本节的目标是构造两个嵌入函子，

$$\mathrm{Mod} : \mathbf{DL}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{UltPos}, \quad \mathrm{pt} : \mathbf{CLoc} \longrightarrow \mathbf{UltLPos},$$

其中， Mod 将一个分配格映射到其模型偏序集，而 pt 将一个相干局部映射到其点偏序集。

我们从一个一般的偏序集开始。对于任意偏序集 P，根据例 2.10，从 P到 $\mathbf{2}$ 的单调映射的偏序集 $[P, \mathbf{2}]$ 将是一个超偏序集。关于 $\mathbf{2}$ 上超结构的描述也扩展到这些预层偏序集：对于任意 $f : S \to [P, \mathbf{2}]$ 和任意 $\mu \in \beta S$，对于 $i \in \{0, 1\}$，我们有

$$\langle f, \mu \rangle(p) = i \iff \{\, s \in S \mid f(s)(p) = i \,\} \in \mu,$$

注意到，通过将 $x \in [P, \mathbf{2}]$ 与 0 的原像 $x^{-1}(0)$ 相对应，偏序集 $[P, \mathbf{2}]$ 与 P 的向下闭子集偏序集 反变同构。今后，我们将 $[P, \mathbf{2}]$ 视为在 $\supseteq$ 下 P 的向下闭子集偏序集。从这个角度看，对于任意 $p \in P$，我们定义子集 $C_p \subseteq [P, \mathbf{2}]$ 如下：

$$C_p := \{\, I \in [P, \mathbf{2}] \mid p \in I \,\},$$

它是所有包含 p 的向下闭子集构成的集合。现在可以如下描述 $[P, \mathbf{2}]$ 上的超结构：

$$p \in \langle f, \mu \rangle \iff \{\, s \in S \mid p \in f(s) \,\} \in \mu \iff f^{-1}(C_p) \in \mu$$

同理，令 D_p 为 C_p 的补集，

$$D_p := \{\, I \mid p \notin I \,\},$$

等价地，我们有

$$\langle f, \mu \rangle = \{\, p \mid f^{-1}(D_p) \notin \mu \,\}.$$

形如 C_p、 D_p 的 $[P, \mathbf{2}]$ 的子集称为原始的。它们尤其重要，因为有序对 (C_p, D_p) 属于 $\mathrm{Cl}^{\updownarrow}_{\downarrow}([P, \mathbf{2}])$:

引理 4.1. 对于任意 $p \in P$、 $C_p \in \mathrm{Cl}_{\downarrow}([P, \mathbf{2}])$ 和 $D_p \in \mathrm{Cl}_{\uparrow}([P, \mathbf{2}])$。

证明。 首先，根据定义， C_p是向下闭的，而 D_p是向上闭的（回忆一下，$[P, \mathbf{2}]$ 中的序是向下闭集包含关系的逆关系。

P 中的闭子集）。假设我们有 $f : S \to C_p \subseteq [P, 2]$ 和 $\mu \in \beta S$，根据上述刻画，

$$\langle f, \mu \rangle = \{\, q \mid f^{-1}(C_q) \in \mu \,\}.$$

特别地，$f^{-1}(C_p) = S$，因此 $p \in \langle f, \mu \rangle$。由此可知，$\langle f, \mu \rangle \in C_p$，所以$C_p$也是闭的。$D_P$ 的情形类似。□

给定任意单调映射 $\sigma : P \to Q$，还存在一个由 σ复合诱导的从 $[Q, 2]$到 $[P, 2]$的态射，

$$\sigma^* : [Q, 2] \to [P, 2].$$

将 $[Q, 2]$ 中的元素 I视为 Q的向下闭子集，我们有

$$\sigma^*(I) = \{\, p \mid \sigma p \in I \,\} = \sigma^{-1}(I).$$

σ^* 的逆像实际上保持原始子集：

引理 4.2. 对于任意单调映射 $\sigma : P \to Q$，逆像 $(\sigma^*)^{-1}$保持原始子集。具体而言，对于任意 $p \in P$,

$$(\sigma^*)^{-1}(C_p) = C_{\sigma p}, \quad (\sigma^*)^{-1}(D_p) = D_{\sigma p}.$$

证明。 根据定义，对于任意 $p \in P$和 $I \in [Q, 2]$,

$$I \in C_{\sigma p} \iff \sigma p \in I \iff p \in \sigma^*(I) \iff \sigma^*(I) \in C_p.$$

这意味着

$$(\sigma^*)^{-1}(C_p) = C_{\sigma p}.$$

于是我们得到

$$(\sigma^*)^{-1}(D_p) = (\sigma^*)^{-1}(\overline{C_p}) = \overline{(\sigma^*)^{-1}(C_p)} = \overline{C_{\sigma p}} = D_{\sigma p}. \qquad \square$$

引理 4.2 实际上表明，任意偏序集之间的单调函数都会在其对应的预层偏序集之间诱导出超函子：

定理 4.3。 构造 $P \mapsto [P, 2]$ 建立了一个函子

$$[-, 2] : \mathbf{Pos}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{UltPos}.$$

证明。 我们证明，对于任意单调映射 $\sigma : P \to Q$，其诱导的态射 $\sigma^* : [Q, 2] \to [P, 2]$是一个超函子。根据定义，给定任意族 $f : S \to [Q, 2]$以及任意 $\mu \in S$，籍此

$$\langle f, \mu \rangle = \{\, q \mid f^{-1}(C_q) \in \mu \,\}.$$

因此，我们有

$$\sigma^* \langle f, \mu \rangle = \sigma^{-1}(\langle f, \mu \rangle) = \{\, p \mid f^{-1}(C_{\sigma p}) \in \mu \,\}.$$

另一方面，由引理 4.2,

$$\begin{aligned} \langle \sigma^* f, \mu \rangle &= \{\, p \mid (\sigma^* f)^{-1}(C_p) \in \mu \,\} \\ &= \{\, p \mid f^{-1}(\sigma^*)^{-1}(C_p) \in \mu \,\} \end{aligned}$$

$$= \{\, p \mid f^{-1}(C_{\sigma p}) \in \mu \,\}.$$

因此， $\sigma^*\langle f、\ \mu\rangle$与 $\langle \sigma^* f、\ \mu\rangle$相一致，这意味着 σ^*确实是一个超函子。□

现在我们考虑分配格的情形。给定一个分配格 D，我们可以将其视为一个命题理论。在这种情况下， D的模型 x将只是一个分配格态射 $x : D \longrightarrow \mathbf{2}$，即对 D 中命题的真值进行的一种相容赋值。我们用 $\mathrm{Mod}(D)$ 表示 D 的模型偏序集，其中采用逐点序。注意，$\mathrm{Mod}(D)$ 根据定义是 $[D, \mathbf{2}]$ 的一个子偏序集，并且根据我们将 $[D, \mathbf{2}]$ 视为 D 的向下闭子集这一对应关系， $\mathrm{Mod}(D)$ 在 $\supseteq$ 下同构于 D 的素理想集合；参见附录 A 中的引理 A.3。

为证明 $\mathrm{Mod}(D)$ 是一个超偏序集，我们证明它在 $[D, \mathbf{2}]$ 中是 闭的：

定理 4.4 （命题逻辑的 Łoś 超积定理）。 $\mathrm{Mod}(D)$是 $[D, \mathbf{2}]$的闭的子偏序集。

证明。 给定由集合 S 索引的模型族 $\{x_s\}_{s\in S}$，由于 $[D, \mathbf{2}]$ 上的超结构是逐点的，它们在 $[D, \mathbf{2}]$ 中的超积是以下复合映射，

$$D \xrightarrow{\{x_s\}_{s\in S}} \mathbf{2}^S \xrightarrow{\langle -,\mu\rangle} \mathbf{2}$$

$\mathbf{2}^S$ 具有由 $\mathbf{2}$上的格结构诱导的逐点格结构，因此族$\{x_s\}_{s\in S} : D \longrightarrow \mathbf{2}^S$ 将是一个分配格态射，因为每个x_s 都是。对于映射 $\langle -、\ \mu\rangle$，根据第 2 节中 $\mathbf{2}$ 上的超结构的描述，对于任意 $x、\ y \in \mathbf{2}^S$，

$$\begin{aligned}
\langle x \vee y, \mu\rangle = 0 &\iff (x \vee y)^{-1}(1) \notin \mu \\
&\iff x^{-1}(1) \cup y^{-1}(1) \notin \mu \\
&\iff x^{-1}(1) \notin \mu \,\&\, y^{-1}(1) \notin \mu \\
&\iff \langle x, \mu\rangle = 0 \,\&\langle y, \mu\rangle = 0
\end{aligned}$$

这意味着

$$\langle x \vee y, \mu\rangle = \langle x, \mu\rangle \vee \langle y, \mu\rangle.$$

类似地，我们可以证明对于合取，有：

$$\langle x \wedge y, \mu\rangle = 1 \iff \langle x, \mu\rangle = 1 \,\&\langle y, \mu\rangle = 1,$$

因此， $\langle -、\ \mu\rangle$ 也保持合取。还容易看出， $\langle -、\ \mu\rangle$保持最大元和最小元，因此它是一个分配格同态。因此，复合映射也将是 D的模型，这表明$\mathrm{Mod}(d)$ 在 $[D, \mathbf{2}]$中对超积是闭的。□

此外，定理 4.3 中所识别的预层偏序集之间的超函子也保持模型：

定理 4.5. 该构造 $D \mapsto \mathrm{Mod}(D)$ 扩展为一个函子

$$\mathrm{Mod} : \mathbf{DL}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{UltPos}.$$

证明。 由定理 4.3 可知，构造 $[-, \mathbf{2}]$ 由一个从 $\mathbf{Pos}^{\mathrm{op}}$ 到 $\mathbf{UltPos}$ 的函子组成。根据定理 4.4，对于任意 $D \in \mathbf{DL}$，$\mathrm{Mod}(D) \subseteq [D, \mathbf{2}]$ 是闭的，因此根据引理 3.2，我们只需证明：对于任意分配格同态 $\sigma : C \to D$，诱导的态射 σ^* 将模型映射为模型。但这显然由定义可得，因为 σ^* 由前复合给出。□

最后，我们将这一图景扩展到相干局部。众所周知，每个相干局部都同构于如下形式的一个局部： $\mathrm{Idl}(D)$ ，其中 D 是分配格 $\mathrm{Idl}(D)$ 上理想的框架。

此外， $\mathrm{Idl}(D)$ 的点偏序集将同构于 $\mathrm{Mod}(D)$。 $\mathrm{Idl}(D)$ 的一个点 x 等价地是一个框架态射

$$x^* : \mathrm{Idl}(D) \to \mathbf{2},$$

它在 $\mathrm{Idl}(D)$ 中保持有限交和任意并。分配格 D 也全忠实地嵌入 $\mathrm{Idl}(D)$ ，作为一个子分配格，具体如下：

$$p \mapsto \downarrow p.$$

因此，通过与嵌入 $D \hookrightarrow \mathrm{Idl}(D)$ 预复合，我们得到一个单调函数 $\mathrm{pt}(\mathrm{Idl}(D)) \to \mathrm{Mod}(D)$，众所周知，这是一个同构。其逆映射将 D 的一个模型 x 映射为框架态射 $x^* : \mathrm{Idl}(D) \to \mathbf{2}$ ，如下所示：

$$x^*(I) = \bigvee_{p \in I} x(p).$$

有关此内容的详细说明，请参见 [12, 第 II 章 3] 。

因此，对于任意相干局部，通过考察其点偏序集，我们已经得到一个超偏序集。我们只需证明这一构造是函子性的：

定理 4.6。 指派 $L \mapsto \mathrm{pt}(L)$ 可扩展为一个函子

$$\mathrm{pt}(-) : \mathbf{CLoc} \to \mathbf{UltLPos}.$$

证明。 我们需要证明，对于任意 locale 映射 $g : \mathrm{Idl}(C) \to \mathrm{Idl}(D)$，其诱导映射 $\mathrm{pt}(g) : \mathrm{Mod}(C) \to \mathrm{Mod}(D)$（通过与 g 的逆像 g^* 进行预复合而定义）是一个左超函子。考虑任意族 $f : S \to \mathrm{Mod}(C)$ 和 $\mu \in \beta S$，对于任意 $p \in D$，

$$(\mathrm{pt}(g)\langle f, \mu\rangle)(p) = \langle f, \mu\rangle(g^*(\downarrow p)) = \bigvee_{q \in g^* \downarrow p} \langle f, \mu\rangle(q) = \bigvee_{q \in g^*(\downarrow p)} \bigvee_{A \in \mu} \bigwedge_{s \in A} f s q.$$

另一方面，

$$\langle \mathrm{pt}(g)f, \mu\rangle(p) = \bigvee_{A\in\mu}\bigwedge_{s\in A}(\mathrm{pt}(g)f)sq = \bigvee_{A\in\mu}\bigwedge_{s\in A}\bigvee_{q\in g^*(\downarrow p)} fsq.$$

由上述描述很容易得出，

$$g\langle f, \mu\rangle(p) \le \langle gf, \mu\rangle(p),\ \forall p \in D,$$

因此， $\mathrm{pt}(g) : \mathrm{Mod}(C) \longrightarrow \mathrm{Mod}(D)$ 是一个左超函子。 □

注 4.7. 定理 4.6 表明，每个相干 locale 的点偏序集都是一个带有规范超结构的预层超偏序集的闭子集。实际上，这对更广泛的一类 locales 也成立。 [6] 已证明，对于关于形如 $X \hookrightarrow \beta X$ 的嵌入右 Kan 单射的 locales 类，这一结论更一般地成立，其中 X 被视为一个˘离散空间，而 βX 是它的 Stone-Cech 紧化。

5. 从模型和点重构

在上一节中，我们已经成功构造了两个函子

$$\mathrm{Mod} : \mathbf{DL}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{UltPos}, \quad \mathrm{pt} : \mathbf{CLoc} \longrightarrow \mathbf{UltLPos}.$$

我们的最终目标是证明它们是全忠实的。不过，在本节中，我们首先建立一个部分结果，证明可以从相干 locale $\mathrm{Idl}(D)$ 的点超偏序集 $\mathrm{Mod}(D)$重构该相干 locale。具体来说，我们证明存在如下类型的自然同构，

$$\mathbf{UltLPos}(\mathrm{Mod}(D), \mathbf{2}) \cong \mathrm{Idl}(D).$$

由此，我们还证明，可以改为考察超函子，从 $\mathrm{Mod}(D)$重构 D 本身，

$$\mathbf{UltPos}(\mathrm{Mod}(D), \mathbf{2}) \cong D.$$

在第 3 节中，我们已经在定理 3.11 中证明，任意超偏序集 P 到 $\mathbf{2}$ 的左超函子，以反变方式刻画了 P 的闭子集和向下闭子集。因此，我们只需证明存在一个同构

$$\mathrm{Idl}(D)^{\mathrm{op}} \cong \mathrm{Cl}_{\downarrow}(\mathrm{Mod}(D)).$$

我们通过构造 D上的理想与 $\mathrm{Mod}(D)$的子集之间的伽罗瓦连接来进行。给定 D中的一个理想 I，我们考虑如下定义的子集 $K_I \subseteq \mathrm{Mod}(D)$ ，[5]

$$K_I := \{\, x \in \mathrm{Mod}(D) \mid x \supseteq I \,\}.$$

引理 5.1. $K_I \subseteq \mathrm{Mod}(D)$ 对于任意理想 I都是闭的且向下封闭。

[5]回顾一下，第4节已将 $\mathrm{Mod}(D)$ 识别为 $\supseteq$下 D 上的素理想集合。

证明. K_I 显然向下封闭。对于映射 $f : S \to K_I \subseteq \mathrm{Mod}(D)$和任意 $\mu \in \beta S$, 由于根据定理 4.4, $\mathrm{Mod}(D)$ 在 $[D, \mathbf{2}]$ 中是闭的,

$$\langle f, \mu \rangle = \{ p \mid f^{-1}(C_p) \in \mu \} \in K_I \iff \{ p \mid f^{-1}(C_p) \in \mu \} \supseteq I.$$

对于任意 $s \in S$, 由于根据假设 $fs \in K_I$, 可得 $fs \supseteq I$, 因此对于任意 $p \in I$, 我们有 $fs \in C_p$。这意味着 $f^{-1}(C_p) = S \in \mu$, 从而$\langle f, \mu \rangle \in K_I$。这证明了 $K_I \in \mathrm{Cl}_{\downarrow}(\mathrm{Mod}(D))$。□

为了从 $\mathrm{Mod}(D)$ 的一个子集构造 D 的理想，我们先介绍一些预备知识。对于任意 $p \in D$, 令 B_p 和 O_p 分别表示交集 $C_p \cap \mathrm{Mod}(D)$ 和 $D_p \cap \mathrm{Mod}(D)$。由于 $\mathrm{Mod}(D)$ 是 $[D, \mathbf{2}]$ 的闭子集，且根据引理 4.1 $(C_p, D_p) \in \mathrm{Cl}^{\uparrow}_{\downarrow}([D, \mathbf{2}])$, 可得$(B_p, O_p) \in \mathrm{Cl}^{\uparrow}_{\downarrow}(\mathrm{Mod}(D))$。此外, B_p 和 O_p 也可用于描述 $\mathrm{Mod}(D)$ 上的超结构：对于任意族 $f : S \to \mathrm{Mod}(D)$ 以及任意 $\mu \in \beta S$,

$$\langle f, \mu \rangle = \{ p \mid f^{-1}(C_p) \in \mu \} = \{ p \mid f^{-1}(B_p) \in \mu \} = \{ p \mid f^{-1}(O_p) \notin \mu \}.$$

这些子集 B_p 和 O_p 也与格结构良好地相互作用：

引理 5.2。 对于任意 p, $q \in D$, 我们有 $B_{p \vee q} = B_p \cap B_q$ 和 $B_{p \wedge q} = B_p \cup B_q$。对偶地, $O_{p \vee q} = O_p \cup O_q$ 和 $O_{p \wedge q} = O_p \cap O_q$。

证明。 我们证明 $p \vee q$的情形。根据定义,

$$B_{p \vee q} = \{ x \mid x(p \vee q) = 0 \} = \{ x \mid x(p) = 0 \,\&\, x(q) = 0 \} = B_p \cap B_q.$$

合取的情形同理，而 O_p的情形则完全对称。 □

这样，对于 $\mathrm{Mod}(D)$的任意子集 $P \subseteq \mathrm{Mod}(D)$, 我们可以如下构造 D 的一个理想 I_P ,

$$I_P := \{ p \mid P \subseteq B_p \}.$$

推论 5.3。 对于任意子集 $P \subseteq \mathrm{Mod}(D)$, I_P 都是 D 的一个理想。

证明。 这主要归因于引理 5.2。根据定义，对于任意 $p \leq q$,$B_q \subseteq B_p$。因此，若 $q \in I_P$, 则 $P \subseteq B_q \subseteq B_p$, 这也意味着 $p \in I_P$, 故 I_P 是向下闭的。对于任意 p, $q \in I_P$, $P \subseteq B_p$ 和 $P \subseteq B_q$, 有$P \subseteq B_p \cap B_q = B_{p \vee q}$, 因此 $p \vee q \in I_P$ 也成立。这证明了 I_P 是一个理想。□

因此，我们的任务是证明，构造 $I \mapsto K_I$ 和 $P \mapsto I_P$在 $\mathrm{Idl}(D)$ 与 $\mathrm{Cl}_{\downarrow}(\mathrm{Mod}(D))$之间构成一个反变同构。其中一个方向实际上相当直接：

引理 5.4. 构造 $I \mapsto K_I \mapsto I_{K_I}$ 返回其自身 I。

证明. 根据定义，对于任意理想 I，在 D 中，

$$\begin{aligned} I_{K_I} &= \{\, p \mid K_I \subseteq B_p \,\} = \{\, p \mid \forall x \in K_I,\ x \in B_p \,\} \\ &= \{\, p \mid \forall x \in \mathrm{Mod}(D),\ x \supseteq I \Longrightarrow p \in x \,\} \\ &= \bigcap \{\, x \in \mathrm{Mod}(D) \mid x \supseteq I \,\} = I. \end{aligned}$$

最后一个等式源于一个众所周知的事实：分配格中的任意理想都等于所有包含它的素理想的交集。证明见附录 A，引理 A.4。□

为了证明任意 $K \in \mathrm{Cl}_{\downarrow}(\mathrm{Mod}(D))$, K_{I_K} 也会得到其自身 K，我们还需要一些进一步的观察。

引理 5.5. 对于任意偏序集 P 和任意 $I \in [P, \mathbf{2}]$，我们有 [6]

$$\downarrow I = \bigcap_{p \in I} C_p, \quad \uparrow I = \bigcap_{p \notin I} D_p.$$

证明。首先，如果 $J \supseteq I$，那么对于任意 $p \in I$，我们也有 $p \in J$，因此 $J \in \bigcap_{p \in I} C_p$。另一方面，对于任意满足 $J \supsetneq I$ 的 J，都存在某个 $p \in I$ 满足 $p \notin J$。由此可得 $J \notin C_p$，因此 $\downarrow I = \bigcap_{p \in I} C_p$。$\uparrow I = \bigcap_{p \notin I} D_p$ 的证明完全类似。□

引理 5.5 蕴含，$[P, \mathbf{2}]$ 的原始子集足以区分 $[P, \mathbf{2}]$ 中的所有元素。此外，若我们有一个分配格 D，则形如 B_p 和 O_p 的子集也足够：

引理 5.6。设 D 是一个分配格，且令 $K \in \mathrm{Cl}_{\downarrow}(\mathrm{Mod}(D))$。若 $x \in \mathrm{Mod}(D)$ 不属于 K，则存在某个 $p \in D$，使得 $K \subseteq B_p$ 且 $x \in O_p$。

证明。由于 K 向下闭且 $x \notin K$，因此可推出 $\uparrow x$ 与 K 不相交。由引理 5.5 可推出 $K \cap \bigcap_{p \notin x} O_p = \emptyset$。由于 K 和所有 O_p 都是闭的，且根据引理 3.4，$\mathrm{Mod}(D)$ 是紧致的，因此必定存在某个有限子族，使得

$$K \cap \bigcap_{i=1}^{n} O_{p_i} = \emptyset.$$

注意到，K 必须属于这个有限子族，因为根据定义，$x \in \bigcap_i O_{p_i}$。然后令 $p_1 \wedge \cdots \wedge p_n$ 为 p。根据引理 5.2，

$$x \in O_{p_1} \cap \cdots \cap O_{p_n} = O_{p_1 \wedge \cdots \wedge p_n} = O_p,$$

且 K 与 O_p 不相交。由于 B_p 和 O_p 都有补集，$K \subseteq B_p$。 □

[6]注意，我们已将 $[P, \mathbf{2}]$ 识别为在 $\supseteq$ 下的 P 的向下闭子集集合，因此 $\downarrow I$ 实际上表示包含 I 的所有向下闭子集的集合，同样，$\uparrow I$ 表示包含于 I 中的所有向下闭子集的集合。

推论 5.7。 对于任意 $K \in \mathrm{Cl}_{\downarrow}(\mathrm{Mod}(D))$，我们有 $K = \bigcap_{K \subseteq B_p} B_p$。

证明。 对于任意 $x \notin K$，由前面的引理可知，存在某个 $p \in D$ that $K \subseteq B_p$ and $x \notin B_p$。因此，$K = \bigcap_{K \subseteq B_p} B_p$。 □

推论 5.8。 对于任意 $K \in \mathrm{Cl}_{\downarrow}(\mathrm{Mod}(D))$，构造 $K \mapsto I_K \mapsto K_{I_K}$将其还原为自身。

证明。 根据定义，我们有

$$\begin{aligned} K_{I_K} &= \{\, x \in \mathrm{Mod}(D) \mid x \supseteq I_K \,\} \\ &= \{\, x \in \mathrm{Mod}(D) \mid \forall p \in D,\, K \subseteq B_p \Longrightarrow x \in B_p \,\} \\ &= \bigcap_{K \subseteq B_p} B_p = K. \end{aligned}$$ □

因此，我们确实在 $\mathrm{Idl}(D)$ 和 $\mathrm{Cl}_{\downarrow}(\mathrm{Mod}(D))$ 之间建立了一个双射。根据我们对 $I_{(-)}$ 和 $K_{(-)}$ 的定义，显然这个双射是逆变的，因此我们得到以下结果：

定理 5.9。 对于任意分配格 D，我们有以下格同构，

$$\mathbf{UltLPos}(\mathrm{Mod}(D), \mathbf{2}) \cong \mathrm{Cl}_{\downarrow}(\mathrm{Mod}(D))^{\mathrm{op}} \cong \mathrm{Idl}(D).$$

注 5.10. 我们还有定理 5.9 的完全对偶陈述。令 $\mathrm{Fil}(D)$ 表示 D 上的滤子格。通过本质上与之前相同的论证，我们可以证明以下同构，

$$\mathbf{UltRPos}(\mathrm{Mod}(D), \mathbf{2}) \cong \mathrm{Cl}_{\uparrow}(\mathrm{Mod}(D)) \cong \mathrm{Fil}(D).$$

这部分体现了超偏序集方法的优势，因为它以统一的理论框架涵盖了所有这些结果。

现在可以直接导出分配格本身的重构，即证明 D 同构于从 $\mathrm{Mod}(D)$ 到 $\mathbf{2}$ 的超函子。在嵌入 $D \hookrightarrow \mathrm{Idl}(D)$ 下，将每个 $p \in D$ 映射到 $\downarrow p$，同构 $\mathrm{Idl}(D) \cong \mathbf{UltLPos}(\mathrm{Mod}(D), \mathbf{2})$ 按定义将其映射为 $\mathrm{Mod}(D)$ 中的以下闭子集 $K_{\downarrow p}$：

$$K_{\downarrow p} = \{\, x \in \mathrm{Mod}(D) \mid x \supseteq \downarrow p \,\} = \{\, x \in \mathrm{Mod}(D) \mid p \in x \,\} = B_p.$$

如前所述，$(B_p, O_p) \in \mathrm{Cl}^{\uparrow}_{\downarrow}(\mathrm{Mod}(D))$，并且我们已从推论 3.12 中看到，此类对恰好对应于从 $\mathrm{Mod}(D)$ 到 $\mathbf{2}$ 的超函子，同构 $\mathrm{Idl}(D) \cong \mathbf{UltLPos}(\mathrm{Mod}(D), \mathbf{2})$ 确实限制为一个嵌入

$$D \hookrightarrow \mathbf{UltPos}(\mathrm{Mod}(D), \mathbf{2}).$$

为了证明这是一个同构，我们只需证明每一对$(K, \overline{K}) \in \mathrm{Cl}^{\uparrow}_{\downarrow}(\mathrm{Mod}(D))$都来自某个 $p \in D$。

众所周知，嵌入 $D \hookrightarrow \mathrm{Idl}(D)$ 将 D 识别为 $\mathrm{Idl}(D)$ 中有限元的子格（参见 [12, 第 II 章3]）。完备格 P 中的一个元素 a称为<escape>有限</escape>的，如果对于 P 的任意理想 I，$a \leq \bigvee I$ 当且仅当 $a \in I$。在格 $\mathrm{Cl}_{\downarrow}(\mathrm{Mod}(D))^{\mathrm{op}}$ 中，一个元素 K 是有限的，当且仅当对于 $\mathrm{Cl}_{\downarrow}(\mathrm{Mod}(D))^{\mathrm{op}}$ 中的任意理想 $\{K_i\}_{i\in I}$，若 $K = \bigcap_{i\in I} K_i$，则存在某个 $i \in I$ 使得 $K = K_i$。

引理 5.11. 对于任意 $K \in \mathrm{Cl}_{\downarrow}(\mathrm{Mod}(D))$，如果其补集也是闭的，即 $\overline{K} \in \mathrm{Cl}_{\uparrow}(\mathrm{Mod}(D))$，那么它是有限的。

证明。令 $K \in \mathrm{Cl}_{\downarrow}(\mathrm{Mod}(D))$ 满足 $\overline{K} \in \mathrm{Cl}_{\uparrow}(\mathrm{Mod}(D))$。设$K = \bigcap_{i\in I} K_i$，其中 $\{K_i\}_{i\in I}$是 $\mathrm{Cl}_{\downarrow}(\mathrm{Mod}(D))^{\mathrm{op}}$的理想。如果 $K \subsetneq K_i$对所有 $i \in I$成立，则 $\overline{K} \cap K_i \neq \emptyset$ 对所有 $i \in I$成立。因此，对于 $\left\{\overline{K}\right\} \cup \{K_i\}_{i\in I}$的任意有限子族，其交集非空，因为 $\{K_i\}_{i\in I}$ 是一个理想。由引理 3.4 的紧致性，$\overline{K} \cap \bigcap_{i\in I} K_i$ 非空，这与 $K = \bigcap_{i\in I} K_i$的事实矛盾。因此，我们必须有 $\overline{K} \cap K_i = \emptyset$，这意味着对于某个 $i \in I$，有 $K = K_i$。所以 K 是有限的。□

推论 5.12. 同构 $\mathbf{UltLPos}(\mathrm{Mod}(D), 2) \cong \mathrm{Idl}(D)$ 限制为一个同构

$$\mathbf{UltPos}(\mathrm{Mod}(D), 2) \cong \mathrm{Cl}^{\updownarrow}_{\downarrow}(\mathrm{Mod}(D)) \cong D.$$

证明。由引理 5.11，从 $\mathrm{Mod}(D)$ 到 $\mathbf{2}$ 的每个超函子都会将 $\mathrm{Cl}_{\downarrow}(\mathrm{Mod}(D))^{\mathrm{op}}$ 中的某个有限元分类，因此对应于某个 $p \in D$。□

6. 分配格与相干局部的对偶

在本节中，我们还将证明从 $\mathbf{DL}^{\mathrm{op}}$ 和 $\mathbf{CLoc}$ 到 $\mathbf{UltPos}$ 和 $\mathbf{UltLPos}$ 的函子 Mod 和 pt 都是全忠实的。我们首先注意到，赋值 $P \mapsto \mathbf{UltLPos}(P, 2) \cong \mathrm{Cl}_{\downarrow}(P)$ 实际上可以扩展为一个函子

$$\Omega : \mathbf{UltLPos} \to \mathbf{Loc},$$

它在某种意义上将是 pt 的左伴随 。然后，定理 5.9 的重构结果表明，将该伴随限制到 $\mathbf{CLoc}$ 和 $\mathbf{UltLPos}$ 的某个合适的全子范畴时，它会限制为一个等价。

我们已经看到，对于任意超偏序集 P，$\mathbf{UltLPos}(P, 2)$ 都同构于 $\mathrm{Cl}_{\downarrow}(\mathrm{Mod}(D))^{\mathrm{op}}$。由引理 3.3 可知，$\mathrm{Cl}_{\downarrow}(\mathrm{Mod}(D))$ 在任意交和有限并下闭，因此 $\mathrm{Cl}_{\downarrow}(\mathrm{Mod}(D))^{\mathrm{op}}$ 将是一个 locale。很容易看出，这可以扩展为一个函子：

引理 6.1. 赋值 $P \mapsto \mathbf{UltLPos}(P, 2)$ 展示了一个函子

$$\Omega : \mathbf{UltLPos} \to \mathbf{Loc}.$$

证明。 我们只需验证，对于任意左超函子 $\varphi : Q \to P$，与 φ 进行前复合会诱导出如下框架同态，

$$\varphi^* : \Omega(Q) \to \Omega(P).$$

但这显而易见，因为根据引理 3.6，我们已经知道 φ^* sim- 只将 $K \in \mathrm{Cl}_\downarrow(Q)$映射到 $\varphi^{-1}(K) \in \mathrm{Cl}_\downarrow(P)$，而 φ^{-1}保留任意交与并。□

令 **CUltLPos**为 **UltLPos** 的全子范畴，它包含于函子 $\mathrm{pt} : \mathbf{CLoc} \to \mathbf{UltLPos}$的本质像中。首先，由定理 5.9 可知， Ω 限制为如下形式的函子

$$\Omega : \mathbf{CUltLPos} \to \mathbf{CLoc}.$$

验证 Ω 与 pt 构成伴随关系十分简单。事实上，我们可以证明一个更一般的结论：

引理 6.2。 对于任意超偏序集 P 和相干局部 L，存在一个自然同构

$$\mathbf{UltLPos}(P, \mathrm{pt}(L)) \cong \mathbf{Loc}(\Omega(P), L).$$

证明。 设 $L \cong \mathrm{Idl}(D)$，考虑以下交换图，

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{UltLPos}(P, \mathrm{pt}(L)) & \xrightarrow{\Omega} & \mathbf{Loc}(\Omega(P), \Omega(\mathrm{pt}(L)) \cong L) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{UltLPos}(P, [D, \mathbf{2}]) & \xrightarrow[\cong]{} & [D, \Omega(P)] \end{array}$$

上方的箭头应用引理 5.9。左侧的箭头由嵌入给出

$$\mathrm{pt}(L) \cong \mathrm{Mod}(D) \hookrightarrow [D, \mathbf{2}].$$

右侧的箭头将 $g : \Omega(P) \to L$ 中的 **Loc** 映射为从 D到 $\Omega(P)$的映射 $p \mapsto g^*(\downarrow p)$。根据定义，底部的箭头实际上是一个同构，因为$[D, \mathbf{2}]$配备了逐点超结构。很容易验证上述图表是一个拉回。□

注 6.3。 引理 6.2 表明，在带有左超函子的超偏序集范畴 **UltLPos** 与某个局部的全子范畴之间，应存在一个伴随，其中 $\Omega \dashv \mathrm{pt}$。这使我们想起局部与拓扑空间之间的伴随，它也常写作 $\Omega \dashv \mathrm{pt}$，如下所示：

$$\Omega : \mathbf{Top} \rightleftarrows \mathbf{Loc} : \mathrm{pt}.$$

有趣的是，刻画究竟是哪一个使伴随成立的 **Loc** 子范畴。我们将在第 8 节中对此作进一步说明。

下面的定理是一个直接推论，也是本文的主要目标之一：

定理 6.4。 Ω 和 pt 限制为一个等价 $\mathbf{CLoc} \simeq \mathbf{CUltLPos}$。

证明。 根据 **CUltPos** 的定义和定理 5.9，引理 6.2 中的结果表明存在如下伴随，

$$\Omega : \mathbf{CUltLPos} \rightleftarrows \mathbf{CLoc} : \mathrm{pt}.$$

定理 5.9 还表明，该伴随的余单位 $\Omega \circ \mathrm{pt} \Rightarrow \mathrm{id}$ 是一个同构，因此 pt 必定是全忠实的。根据 **CUltLPos**的定义，pt 也本质满，故二者构成一个等价。□

照例，下一步是将上述等价限制为分配格之间的等价。正如 $\mathbf{UltLPos}(-,2)$ 给出了一个从 **UltLPos** 到 **Loc**的函子， $\mathbf{UltPos}(-,2)$ 同样将建立一个从 **UltPos**到 $\mathbf{DL}^{\mathrm{op}}$的函子。令 **CUltPos** 为 **UltPos**的全子范畴，它由 $\mathrm{Mod} : \mathbf{DL}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{UltPos}$的像中的对象构成。 **CUltPos** 与 **CUltLPos**具有相同的对象，只是态射限制为超函子。于是我们有：

引理 6.5. 函子 $\mathbf{UltPos}(-,2)$ 定义了一个从 **UltPos** 到 $\mathbf{DL}^{\mathrm{op}}$的函子，我们将其记为 Ω_u，

$$\Omega_u : \mathbf{UltPos} \to \mathbf{DL}^{\mathrm{op}}.$$

此外，以下图表是可交换的，

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{CUltPos} & \xrightarrow{\Omega_u} & \mathbf{DL}^{\mathrm{op}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{CUltLPos} & \xrightarrow[\Omega]{} & \mathbf{Loc} \end{array}$$

证明。 在推论 3.12 给出的同构下，我们有

$$\mathbf{UltPos}(P,2) \cong \mathrm{Cl}^{\uparrow}_{\downarrow}(P).$$

由于 $\mathrm{Cl}_{\downarrow}(P)$ 和 $\mathrm{Cl}_{\uparrow}(P)$ 对有限交和并封闭，因此 $\mathrm{Cl}^{\uparrow}_{\downarrow}(P)$ 是一个分配格。此外，在此同构下，任意超函子 $\varphi : P \to Q$ 都映射为逆像φ^{-1}，从而保持分配格结构。

现在，对于某个分配格 D所对应的形如 $\mathrm{Mod}(D)$ 的任意超偏序集，我们已在定理 5.9 和推论 5.12 中证明

$$\mathbf{UltPos}(\mathrm{Mod}(D),2) \cong D, \quad \mathbf{UltLPos}(\mathrm{Mod}(D),2) \cong \mathrm{Idl}(D).$$

由此可知，上述图表在对象上交换。在态射上也交换，因为根据定理 3.11 和推论 3.12 给出的同构，两者都映为逆像 φ^{-1}。□

引理 6.5 表明，这两个函子仅在定义域上有所不同。这便立即完成了本节的任务：

定理 6.6. $\mathrm{Mod} : \mathbf{DL}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{CUltPos}$ 是一个等价。

证明。 对于任意分配格 C、 D，由引理 6.5 和定理 6.4 可得以下交换图，

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{UltPos}(\mathrm{Mod}(C), \mathrm{Mod}(D)) & \underset{\mathrm{Mod}}{\overset{\Omega_u=\Omega}{\rightleftarrows}} & \mathbf{DL}(D, C) \\ \big\uparrow & & \big\uparrow \\ \mathbf{UltLPos}(\mathrm{Mod}(C), \mathrm{Mod}(D)) & \xrightarrow[\cong]{} & \mathbf{Loc}(\mathrm{Idl}(C), \mathrm{Idl}(D)) \end{array}$$

由此可知， Mod 是全忠实的，并且根据 **CUltPos** 的定义是本质满的，因此是一个等价。□

在本节中，我们主要证明了以下两个嵌入函子确实是全忠实的，

$$\mathrm{Mod} : \mathbf{DL}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{UltPos}, \quad \mathrm{pt} : \mathbf{CLoc} \to \mathbf{UltLPos},$$

并且分别将这些嵌入的本质像定义为 **CUltPos** 和 **CUltLPos**。不过，我们也希望对属于这些本质像的超偏序集给出内在刻画。这是下一节的任务。

7. 超偏序集的分离性质

我们首先进一步讨论一般情况下超偏序集与分配格之间的关系。由引理 6.5 可知，对于任意超偏序集P， $\Omega_u(P) \cong \mathbf{UltPos}(P, \mathbf{2})$都将是一个分配格。总存在一个求值映射 $\eta : P \to \mathrm{Mod}(\Omega_u(P))$，定义如下。

$$\eta(p) = \varphi \mapsto \varphi(p).$$

这个求值映射始终是一个超函子：

引理 7.1. 对于任意超偏序集 P，求值映射是一个超函子，

$$\eta : P \to \mathrm{Mod}(\Omega_u(P)).$$

证明。 根据定义，对于任意族 $f : S \to P$、 $\mu \in \beta S$ 和 $\varphi \in \Omega_u(P)$，

$$(\eta\langle f, \mu\rangle)(\varphi) = \varphi\langle f, \mu\rangle = \langle \varphi f, \mu\rangle.$$

回顾一下， $\mathrm{Mod}(\Omega_u(P))$ 上的超结构继承自 $[\Omega_u(P), \mathbf{2}]$上的规范超结构，而后者是逐点定义的，因此

$$\langle \eta \circ f, \mu\rangle(\varphi) = \langle (\eta \circ f)(\varphi), \mu\rangle = \langle \varphi f, \mu\rangle.$$

这意味着 η 是一个超函子。 □

定理 7.2。 $\Omega_u \dashv \mathrm{Mod}$ 构成如下伴随,

$$\Omega_u : \mathbf{UltPos} \rightleftarrows \mathbf{DL}^{\mathrm{op}} : \mathrm{Mod},$$

它将 $\mathbf{DL}^{\mathrm{op}}$ 识别为 **UltPos**的一个反射子范畴。

证明。 引理 7.1 给出了单位，而推论 5.12 给出了余单位。验证它们满足所有三角恒等式并不困难，因此$\Omega_u \dashv \mathrm{Mod}$ 构成一个伴随。根据推论 5.12，余单位是一个自然同构，因此 $\mathbf{DL}^{\mathrm{op}}$ 是 **UltPos**的一个反射子范畴。□

由定理 7.2 可知，范畴 **CUltPos**恰好由那些单位 η 是一个同构的超偏序集组成。因此，我们的目标是刻画那些满足 $\eta : P \cong \mathrm{Mod}(\Omega_u(P))$的超偏序集 P。

我们先考察一些形如 $\mathrm{Mod}(D)$ 、其中 D是某个分配格的超偏序集的重要性质。回顾一下，前两节中广泛使用的一个重要事实是引理 5.7，即任何 $K \in \mathrm{Cl}_{\downarrow}(\mathrm{Mod}(D))$ 都可写成原始子集 $K = \bigcap B_p$的交集，其中 (B_p, O_p) 属于 $\mathrm{Cl}^{\uparrow}_{\downarrow}(\mathrm{Mod}(D))$。由此引出以下定义:

定义 7.3。 设 P为一个超偏序集。若对于任意 p、 $q \in P$，当 $p \not\leq q$ 时，存在 $(K, \overline{K}) \in \mathrm{Cl}^{\uparrow}_{\downarrow}(P)$，使得 $p \in \overline{K}$且$q \in K$，则称 P是零维的。

注 7.4。 对于一个超集 X，从 X到 2 的超函子等价于 X的一个既开又闭子集对。于是，在同构 **UltSet** $\cong$ **Comp**下，我们关于超偏序集为零维的概念，归结为零维空间或 Stone 空间的拓扑概念。因此，一旦我们证明 **CUltPos**恰好是零维超偏序集的范畴，Stone 对偶性 $\mathbf{Bool}^{\mathrm{op}} \simeq$ **Stone** 就会作为一个推论得到，因为 $\mathrm{Mod}(D)$ 上的序是离散的，当且仅当 D 是布尔的。

一个直接的观察是，对于某个分配格 D，任何形如 $\mathrm{Mod}(D)$的超偏序集都是零维的:

引理 7.5。 **CUltPos** 中的任意超偏序集都是零维的。

证明。 对于任意 $x \in \mathrm{Mod}(D)$，由于 $\mathrm{Mod}(D)$ 是 $[D, 2]$的闭子集，且根据引理 3.7 $\downarrow x$在 $[D, 2]$中是闭的，因此 $\downarrow x \in \mathrm{Cl}_{\downarrow}(\mathrm{Mod}(D))$ 也是闭的。如果 $x \not\leq y$，那么 $y \notin \downarrow x$，由引理 5.7可知，必定存在某个 B_P 满足 $\downarrow x \subseteq B_p$ 和 $y \notin B_p$，即 $y \in O_p$。因此， $\mathrm{Mod}(D)$是零维的。□

为了证明另一个方向，如前所述，我们只需证明单位 $\eta : P \to \mathrm{Mod}(\Omega_u(P))$ 对

任意零维超偏序集实际上都是一个同构。关键观察是，任意零维超偏序集 P 实际上都可以视为一个紧有序空间，也就是说，它实际上可以视为一个带有闭偏序的紧豪斯多夫空间，其超结构由其拓扑提供：

引理 7.6. 设 P 是一个零维超偏序集 P。对于任意 $f : S \to P$、$\mu : T \to \beta S$ 和任意 $\nu \in \beta T$，

$$\langle f, \langle \mu, \nu \rangle \rangle = \langle \langle f, \mu \rangle, \nu \rangle.$$

证明。 首先，我们证明，如果 $(K, \overline{K}) \in \mathrm{Cl}^{\updownarrow}(P)$，那么对于任意 $f : S \to P$ 和任意 $\mu \in \beta S$，必有

$$\langle f, \mu \rangle \in K \iff f^{-1}(K) \in \mu.$$

从右到左的方向显然，因为 K 在 P 中是闭的。对于从左到右的方向，我们利用 $\overline{K}$ 也是闭的这一事实，因此

$$f^{-1}(K) \notin \mu \Rightarrow f^{-1}(\overline{K}) \in \mu \Rightarrow \langle f, \mu \rangle \in \overline{K} \Rightarrow \langle f, \mu \rangle \notin K.$$

现在假设 P 是零维的，并且对于某些 f、μ、ν，我们有

$$\langle f, \langle \mu, \nu \rangle \rangle < \langle \langle f, \mu \rangle, \nu \rangle,$$

其中该不等式严格成立。因此，我们可以找到 $(K, \overline{K}) \in \mathrm{Cl}^{\updownarrow}(P)$ 使得

$$\langle f, \langle \mu, \nu \rangle \rangle \in K, \quad \langle \langle f, \mu \rangle, \nu \rangle \in \overline{K}.$$

根据前面的等价关系，由 $\langle f$、$\langle \mu$、$\nu \rangle \rangle \in K$ 可知

$$f^{-1}(K) \in \langle \mu, \nu \rangle \iff \{\, t \mid f^{-1}(K) \in \mu_t \,\} \in \nu.$$

由 $\langle \langle f$、$\mu \rangle$、$\nu \rangle \in \overline{K}$ 还可知

$$\langle f, \mu \rangle^{-1}(\overline{K}) \in \nu \iff \{\, t \mid \langle f, \mu_t \rangle \in \overline{K} \,\} \in \nu \iff \{\, t \mid f^{-1}(\overline{K}) \in \mu_t \,\} \in \nu.$$

然而，由于 K 和 $\overline{K}$ 均有补集，因此对于任意 $t \in T$，

$$f^{-1}(K) \in \mu_t \iff f^{-1}(\overline{K}) \notin \mu_t.$$

于是 ν 包含 T 的两个有补子集，这是不可能的。因此，我们必有

$$\langle f, \langle \mu, \nu \rangle \rangle = \langle \langle f, \mu \rangle, \nu \rangle.$$ □

引理 7.6 表明，即使我们在 P 上考虑离散序 P^d， P 上的超结构仍将是 P^d 上的超结构。在同构 **UltSet** $\cong$ **Comp** 下可知， P 上所有闭集构成的拓扑 $\mathrm{Cl}(P)$ 是紧豪斯多夫的，并且 P 上的超结构与该紧豪斯多夫拓扑所提供的超结构相同。

回顾一下，赋予一个序的紧豪斯多夫空间恰好是 *Priestley* 空间：

定义 7.7。*Priestley* 空间是一个紧致豪斯多夫拓扑空间X，配备偏序 $\leq$，使得对于任意 $x, y \in X$，如果 $x \not\leq y$，则存在 X 中的一个既开又闭的下集 K，满足 $y \in K$ 且 $x \notin K$。Priestley 空间之间的态射就是一个同时也是单调映射的连续映射。

在 Priestley 空间中，序必然是闭的。我们用 **Pries** 表示 Priestley 空间的（2-）范畴，其中箭头之间的序是逐点定义的。显然，存在如下范畴同构：

推论7.8. 带有其间超函子的普里斯特利空间和零维超偏序集的 *(2-)*范畴是同构的。

证明。 根据引理 2.6 和引理 7.6，Priestley 空间 $(X, \leq)$ 恰好是一个零维超偏序集。给定这样的 P、Q，函数 $\varphi : P \to Q$ 是超函子，当且仅当它是单调的，并且保持超结构。注意，在同构 **UltSet** $\cong$**Comp** 下，φ 保持超结构，当且仅当它关于拓扑 $\mathrm{Cl}(P)$ 和 $\mathrm{Cl}(Q)$是连续的。这意味着 φ是超函子，当且仅当它是 Priestley 空间之间的一个态射。□

注记 7.9. 有两个众所周知的、与 **Pries** 同构的特定拓扑结构范畴，即谱空间和成对 *Stone* 空间（参见 [2, 5]）。给定一个 Priestley 空间 $(X, \leq)$，与之相关的还有两种拓扑 τ^u, τ^d，它们分别由开上集和开下集构成。赋予集合 X 拓扑 τ^u 后，它成为一个谱空间；赋予 X 拓扑 τ^u, τ^d 后，它成为一个成对 Stone 空间。将 X 视为零维超偏序集时，这些附加拓扑的闭集恰好分别为 $\mathrm{Cl}_{\downarrow}(X)$ 和 $\mathrm{Cl}_{\uparrow}(X)$；根据定理 3.11，它们自然地由函子 **UltLPos**$(-, 2)$ 和 **UltRPos**$(-, 2)$ 得到。超偏序集与（左/右）超函子理论再次为研究这些不同的拓扑概念提供了一个统一框架。

Priestley 空间的范畴 **Pries** 与分配格的范畴 **DL** 互为对偶，这一事实是对偶理论中的经典结果；教科书式的论述参见 [7]。特别地，每个 Priestley 空间都同构于其开闭上集的模型空间，因此我们有：

推论 7.10。 对于所有零维超偏序集，单位 $\eta : P \to \mathrm{Mod}(\Omega_u(P))$ 都是同构。

证明。 由 P 是一个 Priestley 空间这一事实可得。 □

定理 7.11. **CUltPos** （分别为 **CUltLPos**）恰好是由零维超偏序集及其间的超函子（分别为左超函子）构成的范畴。

证明。 根据构造，两个范畴 **CUltPos** 和 **CUltLPos**具有相同的对象。其余结论直接由引理 7.5 和推论 7.10 得出。□

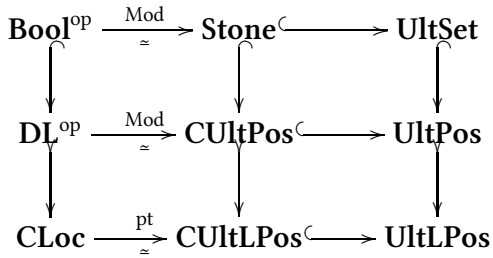
正如我们在注记 7.4 中提到的，将零维超偏序集的概念应用于超集，恰好得到 Stone 空间。因此，经典的 Stone 对偶性可轻易地推得：

推论 7.12. 存在一个范畴等价 $\mathbf{Stone} \simeq \mathbf{Bool}^{\mathrm{op}}$。

证明. 对于任意分配格 D， $\mathrm{Mod}(D)$ 是离散的，当且仅当 D 是布尔的（参见 [12, 第 II 章，4.4]）。因此，由定理 6.6 和定理 7.11， $\mathbf{Bool}^{\mathrm{op}}$ 等价于离散的零维超偏序集，即零维超集；根据注记 7.4，它们恰好就是 Stone 空间。□

8. 结论与未来工作

本文完整地描述了以下图表：



特别地，遵循 Lurie [13], ，我们定义了由带有（左/右）超函子的超偏序集构成的（2-）范畴 **UltPos**、**UltLPos**和 **UltRPos**，并证明分配格范畴的对偶 $\mathbf{DL}^{\mathrm{op}}$ 全忠实地嵌入 **UltPos**，而相干 locale 范畴 **CLoc**全忠实地嵌入 **UltLPos**。这些嵌入的本质像对应于我们称为零维超偏序集的对象。

超偏序集，或者更一般地说，超范畴，整个概念都是对超积结构的一种公理化。这类对偶结果再次彰显了 Łoś 超积定理在逻辑中的重要意义：从点空间上的超结构出发，我们可以在等价意义下重构该理论的语法。

从本文也可以清楚看出，左超函子和右超函子这一概念，而不只是超函子，对我们的论述至关重要；正如我们在本文中已有所见，它们确实涵盖了不同语境下的许多不同概念。这正是我们认为 Lurie [13] 研究超范畴的方法前景十分光明的原因。

正如我们在引言中所提到的，我们将本文视为对超偏序集和超范畴进行更深入研究的第一步

总体而言，这项研究可能在逻辑领域具有潜在应用。本文最后讨论了由本文自然引出的若干未来研究方向。

8.1. 超偏序集与有序拓扑结构。 我们希望本文已经阐明了超偏序集与有序拓扑结构之间的联系。从引理 2.6 可知，紧有序空间的范畴 **CompOrd** 全忠实地嵌入 **UltPos**，而这一嵌入将我们在实践中遇到的大量例子带入了超偏序集的世界。

具体而言，第 7 节提到，所有普里斯特利空间都属于这种形式。然而，在这种情况下，定理 6.4 清楚地表明，考察这些空间之间的左超函子仍然很有意义。单从有序拓扑结构的角度无法看出这一点，因为正如我们所见，左超函子对于这些拓扑空间而言甚至可能不是连续的。因此，观察其他有序拓扑结构如何作为超偏序集来研究，以及它们是否与局部理论等其他领域存在进一步联系，都是很有意义的。

8.2. 超偏序集与域理论。 正如我们所见，引理 2.8 还表明，**CPos**（即以 Scott 连续映射为态射的完备格（2-）范畴）存在一个到 **UltLPos** 中的全忠实嵌入。

域理论尤其关注 **CPos** 的连续格 全子范畴。特别地，连续格之间的每个 Scott 连续函数都是一个左超函子；如果该函数还保持任意交，那么它实际上就是一个超函子。连续格之间的这些态射概念在域理论中被广泛使用（参见 [8]），以构造各种类型理论的模型，并且确实可以纳入超偏序集理论之中。进一步的域理论性质能否用超偏序集的语言表达，以及这对域理论有何用处，将会是一个有趣的问题。

8.3. 超偏序集与局部。 在前面的章节中，我们构造了两个函子

$$\Omega_u : \mathbf{UltPos} \longrightarrow \mathbf{DL}^{\mathrm{op}}, \quad \Omega : \mathbf{UltLPos} \longrightarrow \mathbf{Loc}.$$

我们已证明，前者实际上具有右伴随 Mod，这将 $\mathbf{DL}^{\mathrm{op}}$ 识别为 **UltPos** 的反射子范畴。然而，后者 Ω 并不立即具有右伴随，因为任意 locale 的点偏序集 $\mathrm{pt}(L)$ 在赋予典范超结构的 $[L, \mathbf{2}]$ 中可能不是闭的。

然而，我们已在注 4.7 中提到，[6] 已识别出一类 locale，其点偏序集确实继承了典范超结构。

这些是相对于空间的嵌入而言右 Kan 单射的 locale，即对于任意集合 X，将其视为从离散空间X到紧豪斯多夫空间 βX的 locale 映射。令 β**Loc** 为这些 locale 构成的范畴。Ω 是否属于 **UltLPos**与 β**Loc**之间的一个伴随？我们将这一问题留待未来工作。

8.4. **超偏序集的理论发展**。我们采用 Lurie 关于超范畴（尤其是超偏序集）的方法，最重要的原因是它自然引出了左超函子和右超函子的概念，而这比超范畴的概念更为基础。

虽然本文总体上研究了超偏序集和（左/右）超函子，但在很大程度上，我们主要关注的是零维超偏序集。然而，在所有超偏序集构成的类中，这类超偏序集的限制相当严格，因为每个零维超偏序集都来自一个紧致有序空间。

然而，来自不同领域的许多例子都自然地嵌入超偏序集范畴之一 **UltPos**、**UltLPos** 或 **UltRPos**中。总体而言，它们的性质可能迥然不同。对超偏序集本身进行更系统的研究，有望为这些不同主题提供统一的处理方式；我们将此留待今后进一步研究。

参考文献

[1] Abramsky, S. 和 Jung, A.（1995）。域理论，第 1–168 页。美国牛津大学出版社。[2] Bezhanishvili, G.、Bezhanishvili, N.、Gabelaia, D. 和 Kurz, A.（2010）。分配格与 Heyting 代数的双拓扑对偶。计算机科学中的数学结构，20(3):359–393。[3] Börger, R.（1987）。余积与超滤子。纯粹与应用代数杂志，46(1):35–47。[4] Caramello, O.（2018）。理论、站点、拓扑斯：通过拓扑斯论“桥梁”联系和研究数学理论。牛津大学出版社。[5] Cornish, W. H.（1975）。论 H. Priestley 对有界分配格范畴的对偶。《数学信使》，12(60):329–332。[6] Di Liberti, I.（2022）。相干拓扑斯与超结构的几何。*arXiv* 预印本 *arXiv:2211.03104*。[7] Gehrke, M. 和 van Gool, S.（2022）。分配格的拓扑对偶及其应用。*arXiv* 预印本 *arXiv:2203.03286*。[8] Gierz, G.、Hofmann, K. H.、Keimel, K.、Lawson, J. D.、Mislove, M. 和 Scott, D. S.（2003）。连续格与定义域，第 93 卷。剑桥大学出版社。

[9] Goldbring, I.（2022）。贯穿数学的超滤子，第 220 卷。美国数学会。[10] Harnik, V.（2011）。模型论与范畴逻辑之比较：预拓扑斯完备化（又称 teq）的两种方法。模型、逻辑与高维范畴：献给 *Mihaly Makkai* 的学术贡献，53:79。[11] Hodges, W. 等（1997）。简明模型论。剑桥大学出版社。[12] Johnstone, P. T.（1982）。*Stone* 空间，第 3 卷。剑桥大学出版社。[13] Lurie, J.（2018）。超范畴。预印本见 *www. math. harvard.edu/˜ lurie/papers/Conceptual.pdf*。[14] Makkai, M.（1987）。一阶逻辑的 Stone 对偶性。数学进展，65(2):97–170。[15] Manes, E. G.（1976）。代数理论。纽约施普林格出版社，纽约州纽约市。[16] Nachbin, L.（1965）。拓扑与序。Van Nostrand 数学研究丛书。Van Nostrand。[17] Scott, D.（1976）。作为格的数据类型。*SIAM* 计算杂志，5(3):522–587。

附录 A. 超滤子与格的性质

在本附录中，我们记录本文所用的关于超滤子和格的一些基本性质。下面的引理至关重要：

引理 A.1. 给定任意分配格 D，设 I 是一个理想，F 是 D 中的一个滤子。若 I 和 F 不相交，则 I 可扩张为一个与 F 不相交的极大理想。类似地，F 可扩张为一个与 I 不相交的极大滤子。这些极大理想和滤子都是素的。

证明。 我们只证明理想扩张的情形；滤子的情形完全类似。根据佐恩引理，存在与 F 不相交的此类极大理想。对于任意一个与滤子 F 不相交的此类极大理想 I，设 p、$q \in D$ 满足 $p \wedge q$ 属于 I。假设 $p \notin I$，那么将 p 并入 I 所得的理想 $I\langle p\rangle$ 将适当地扩张 I，因此根据 I 的极大性，它将与 F 相交。具体而言，这意味着存在 $i \in I$ 使得 $i \vee p \in F$。类似地，若 $q \notin I$，则存在 $j \in I$ 使得 $j \vee q \in F$。现在假设 p、$q \notin I$ 均成立，那么我们有

$$(i \vee p) \wedge (j \vee q) \in F.$$

另一方面，我们有

$$(i \vee p) \wedge (j \vee q) = ((i \vee p) \wedge j) \vee ((i \vee p) \wedge q).$$

显然， $(i \vee p) \wedge j \in I$。我们还知道

$$(i \vee p) \wedge q = (i \wedge q) \vee (p \wedge q) \in I,$$

因为根据假设 $p \wedge q \in I$。这实际上意味着

$$(i \vee p) \wedge (j \vee q) \in I,$$

这与 I 和 F 不相交的假设矛盾。因此， p 和 q 中至少有一个属于 I，故 I 是一个素理想。□

A.1. **超滤子**。 对于任意集合 X， X 上的超滤子 μ 是 X 的子集所组成的族，满足向上封闭、对有限交封闭，并且对于 X 的任意子集 A，$A \in \mu$ 或 $\overline{A} \in \mu$。等价地， μ 是 $\wp(X)$ 上的极大滤子。

设 X 是一个集合，若 X 的子集族 $\{K_i\}$ 具有有限交性质，则称其具有该性质，即 $\{K_i\}$ 的任意有限子族的交集非空。

引理 A.2。 对于任意集合 X 及具有有限交性质的任意 X 族 $\{K_i\}$，存在一个 X 上的超滤子 μ，使其扩张该族，其意义是

证明。 任何这样的族都可以通过对其取有限交扩展为一个滤子。然后根据引理 A.1，这个滤子可以扩展为 X 上的极大滤子，而这恰好是一个超滤子。□

A.2. **分配格及其模型**。 分配格的模型对应于它的素理想：

引理 A.3。 单调映射 $x : D \longrightarrow \mathbf{2}$ 是分配格之间的态射，当且仅当 $x^{-1}(0)$ 是 D 中的一个素理想。

证明。 假设 $x : D \longrightarrow \mathbf{2}$ 是分配格之间的一个态射。对于任意 p、 $q \in D$，若 $p \wedge q \in x^{-1}(0)$，则 $x(p) \wedge x(q) = x(p \wedge q) = 0$。由此可知， $x(p)$、 $x(q)$ 至少有一个等于 0，因此 $p \in x^{-1}(0)$ 或 $q \in x^{-1}(0)$。

另一方面，如果 $x^{-1}(0)$ 是一个素理想，那么对于任意的 p、 $q \in D$，如果p、$q \in x^{-1}(0)$，那么 $p \wedge q \in x^{-1}(0)$ 和 $p \vee q \in x^{-1}(0)$均成立。如果 $p \in x^{-1}(0)$和 $q \notin x^{-1}(0)$，那么 $p \wedge q \in x^{-1}(0)$成立，而 $p \vee q \notin x^{-1}(0)$成立，因为 $x^{-1}(0)$ 是向下闭的。如果 p、$q \notin x^{-1}(0)$，那么由于 $x^{-1}(0)$ 是素的， $p \wedge q \notin x^{-1}(0)$ 成立，同时 $p \vee q \notin x^{-1}(0)$也成立。在每种情况下， x 都保持格结构。□

以下定理等价于命题逻辑完备性定理：

引理 A.4. 设 I 是分配格 D的一个理想，则 I 是所有包含 I 的素理想的交集。

证明。 对于任意 $p \notin I$，考虑由 p生成的主滤子 $\uparrow p$；根据假设，它与 I不相交。由引理 A.1，我们可以将 I 扩展为一个与 $\uparrow p$不相交的极大理想 x，而该理想 x 将是素理想。因此，对于任意 $p \notin I$，存在某个包含 I 但不包含 p的素理想 x，从而 $I = \bigcap_{I \subseteq x} x$。□

推论 A.5（命题逻辑的完备性）。 对于任意分配格 D，若 $p \not\leq q$，则存在某个素理想 x，它属于 D，使得 $q \in x$且 $p \notin x$。

证明。 考虑 D 中的理想 $\downarrow q$。由于 $p \not\leq q$，因此 $p \notin \downarrow q$。根据引理 A.3，必然存在某个素理想 x 扩张 $\downarrow q$，使得 $p \notin x$。□