arXiv:2304.10969v1 [math.SG] 21 Apr 2023

奇异值处的等变 Fukaya 范畴

YANKI LEKILI 和 ED SEGAL

Abstract. 给定一个辛流形上的 Hamiltonian 环面作用，Teleman 和 Fukaya 提出，每个辛商的 Fukaya 范畴都应当与原流形的某个等变 Fukaya 范畴等价。我们提出了一系列新的猜想，将这一理论在某些特定情形下扩展到动量映射的奇异值。这些猜想还包括一项方案，探讨在某些情况下，如何从商空间上的数据出发，恢复原流形的非等变 Fukaya 范畴。

为论证我们的猜想，我们通过镜像，并运用托里克镜像对称性中公认的启发式方法，研究了大量例子。我们还讨论了支撑我们论述的代数结构和范畴结构。

Contents

1. 引言 1

1.1. 代数环面纤维化3 1.2. 哈密顿约化4 1.3. 镜像对称7 1.4. 恢复非等变范畴9 1.5. 相对 Fukaya 范畴10 1.6. 范畴上的拓扑 S^1 作用与 KRS 2-范畴13

2. 环面镜像对称 15

2.1. 一般启发式方法 15
2.2. 环面上的环面纤维化 17
2.3. 仿射空间上的环面纤维化 18
2.4. 超托里克商 20
2.5. 超越环面纤维化 23
. 致谢。 24
参考文献 25

1. Introduction

我们从一个促使我们开展研究的例子开始。

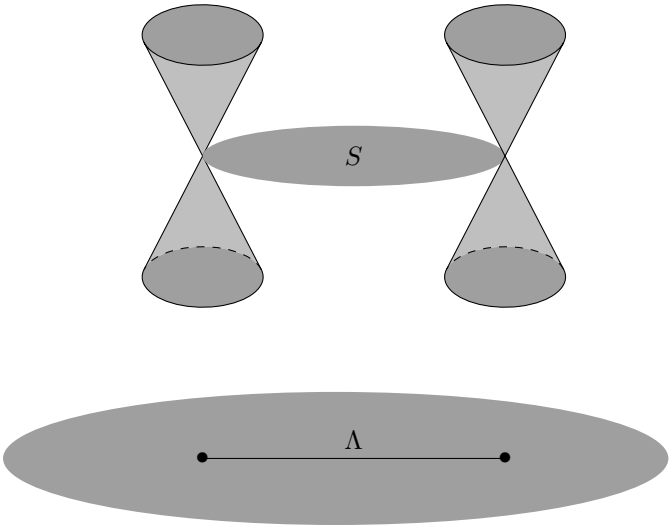

FIGURE 1. 二维球面的余切丛。

例 1.1. 考虑恰辛流形 T^*S^2 及其典范辛结构，我们可以将其识别为仿射簇

$$X = (xy + z^2 = 1) \subset \mathbb{C}^3$$

其辛形式由 $\mathbb{C}^3$ 限制而来。沿 z 方向投影，可将 X 展示为一个 $\mathbb{C}^*$ 纤维化，其底空间为 $\mathbb{C}$，并在 $\{\pm 1\}$ 上方有两个退化纤维。记 S 为 T^*S^2 中的零截面，它也是覆盖连接两个临界值的弧 $\Lambda \subset \mathbb{C}$ 的拉格朗日匹配球面。

T^*S^2 上有一个哈密顿 S^1 作用，其作用方式是旋转纤维，也就是使 x 和 y 的相位沿相反方向旋转。我们关注 T^*S^2 的 S^1-等变缠绕 Fukaya 范畴，记作 $\mathcal{W}_{S^1}(T^*S^2)$。

关于李群作用的等变 Fukaya 范畴的构造 G 由 Daemi 和 Fukaya 在 [5, 定理 8 中解释。3] [1]在这段初步讨论中，我们只需知道，恰当紧致的 S^1-不变拉格朗日子流形是该范畴的一个对象，其自同态由以下对象给出：S^1-等变 Floer 上同调 $HF^*_{S^1}(L, L)$，我们可以将其识别为通常的 S^1-等变上同调 $H^*_{S^1}(L)$（正如恰当紧致拉格朗日子流形 $HF^*(L, L)$ 的 Floer 上同调同构于 $H^*(L)$ 一样）。

恰当拉格朗日子流形球面 $S \subset X$ 在 S^1作用下保持不变，而且它确实定义了该范畴的一个对象。S 上的 S^1作用是通常的 S^1作用，其作用于 S^2 并有两个不动点，因此我们可以计算得：

$$HF^*_{S^1}(S, S) = H^*_{S^1}(S) = \mathbb{C}[x, y]/xy$$

其中 $\deg x = \deg y = 2$。请注意，这里我们使用的是 T^*S^2上的（唯一）分次结构。现在考虑我们投影的正则值集合：

$$\mathcal{P} = \mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}$$

这就是裤子曲面。缠绕 Fukaya 范畴 $\mathcal{W}(\mathcal{P})$ 很容易计算，尤其是弧 Λ -（它是 $\mathcal{P}$ 中的一个非紧拉格朗日子流形）的自同态为：

$$HW^*(\Lambda, \Lambda) = \mathbb{C}[x, y]/xy$$

[1]关于 G-等变 Floer 理论的其他近期研究可见 [12], [10], [4]。不过，涉及非紧致不变拉格朗日子流形的缠绕 Floer 理论的技术层面似乎尚未得到探讨。

此外，对于 $\mathcal{P}$ 上一个恰当（且唯一）的分次结构，我们可以安排使得 $\deg x = \deg y = 2$。因此我们观察到：

$$HW^*(\Lambda,\Lambda) = \mathbb{C}[x,y]/xy = HF^*_{S^1}(S,S)$$

Thi强烈表明存在如下 $\mathbb{Z}$-分次预三角范畴的拟等价：

$$\mathcal{W}(\mathcal{P}) \simeq \mathcal{W}_{S^1}(T^*S^2) \tag{1.2}$$

我们认为，这种等价关系确实成立，但本文不会给出证明（尽管我们会提供一种基于镜像对称的启发式论证）。相反，我们将重点从这一例子出发，进一步推导出一些一般性的猜想。

1.1. 代数环面纤维化。作为第一个推广，考虑如下设置。设 $Y = \mathbb{C}^n$，或更一般地，设一个李维尔流形，并且 $f : Y \to \mathbb{C}$ 是一个以 0 为正则值的全纯映射。于是我们可以通过令 X 为光滑超曲面来构造一个纤维化 $\pi : X \to Y$：

$$X = \{(x,y,\mathbf{w});\, xy = f(\mathbf{w})\} \subset \mathbb{C}^2 \times Y$$

$\pi : X \to Y$ 的典型纤维与 $\mathbb{C}^*$ 同构，并沿光滑超曲面 $D = \{f(\mathbf{w}) = 0\}$退化为一个节点。空间 X 具有一个由旋转纤维给出的哈密顿 S^1 作用：$(x,\ y,\ \mathbf{w}) \mapsto (e^{i\theta}x,\ e^{-i\theta}y,\ \mathbf{w})$，其中 $e^{i\theta} \in S^1$。

更一般地，假设我们有全纯线丛 $L_1, ..., L_r$ on Y以及截面 $f_i \in \Gamma(L_i^{\otimes 2})$。假设每个超曲面 $D_i = \{f_i = 0\}$ 都是光滑的，并且它们共同构成一个简单正规交叉除子 $D = \cup_{i=1}^r D_i$。那么我们可以构造如下光滑空间：

$$X = \{(x_1,y_1,\dots,x_r,y_r,\mathbf{w}) \,|\, x_iy_i = f_i(\mathbf{w}), \text{for all } i\} \subset \mathrm{Tot}\left(\oplus_{i=1}^r L_i^{\oplus 2}\right)$$

到 $\mathbf{w}$ 的投影定义了一个纤维化 $\pi : X \to Y$，其一般纤维同构于 $(\mathbb{C}^*)^r$，奇异纤维出现在除子 D 上。我们还有一个 r 维环面 T 在 X 上的哈密顿作用，通过旋转纤维实现。

如果 $r >$维数为 Y，那么所有 D_i的交集为空，因此对角 $U(1) \subset T$的作用是自由的。于是，商 $X' = X/\mathbb{C}^*$ 仍然是一个纤维化于 Y之上的流形，其一般纤维为代数环面，并且奇异纤维出现在同一个除子 D之上。它具有秩为 $r-1$的环面 $T/U(1)$ 的哈密顿作用。事实上，如果 $r =$维数为 $+k$，那么 T 中存在一个秩为 k的子环面，其作用是自由的，因此我们可以对它的任意子环面取商。

我们将把 这些带有 Hamiltonian 环面作用的 $X \to Y$或 $X' \to Y$称为代数环面纤维化 .

猜想 A. 给定一个代数环面纤维化 $X \to Y$，我们有一个拟等价：

$$\mathcal{W}_T(X)_{-\mathbf{1}} \simeq \mathcal{W}(Y \setminus D)$$

这里，如果我们使用 $\mathbb{Z}$-分次范畴，则应选择 $Y \setminus D$ 上的分次，使其能够延拓到D上。后缀 $-\mathbf{1}$ 的含义将在下一节中解释；暂时我们忽略它。
如果我们从 X 中删去除子 $\pi^{-1}D$，那么剩下的只是一个在 $Y \setminus D$上的主 $(\mathbb{C}^*)^r$ 丛。因此，存在一个拟等价并不令人太过意外：

$$\mathcal{W}_T(X \setminus \pi^{-1}D) \simeq \mathcal{W}(Y \setminus D)$$

事实上，这与我们将在下一节讨论的关于哈密顿约化的更一般理论相吻合。不过， $\mathcal{W}_T(X)$ 应当是 $\mathcal{W}_T(X \setminus \pi^{-1}D)$ 的一个变形，因为加入额外的除子会向 A_∞ 结构中添加项。猜想 A 所断言的是，这个变形实际上是平凡的。

在第2 节中，我们将利用托里克镜像对称性为该猜想提供证据；在某些例子中，这相当于一种（过于迂回的！）证明。

注 1.3. 现有文献中也有一些支持我们猜想的证据，这些证据并未使用镜像对称性；当 X 是与$Y=\mathbb{C}^n$ 中的一种特殊超平面配置相关联的超环面簇时，便是如此。

固定一组点 p_1，...，$p_k \in \mathbb{C}$。取其 n次对称积可得到一个超平面配置 $Y \setminus D = \mathrm{Sym}^n(\mathbb{C} \setminus \{p_1, \dots, p_k\})$。在 [18] 范畴 $\mathcal{W}(Y \setminus D$中，通过计算一个特定生成元的自同态代数，对其进行了显式描述。

此外，还有一个超托里克簇 X，它可以构造为一个代数环面纤维化 $\pi\colon\ X \to Y$在 D 上退化，正如猜想 A 所述。论文 [3] 研究了与 T 中的 -不变拉格朗日子流形相关的某些代数 X，预期它们与其在 $\mathcal{W}_T(X)$ 中的自同态代数一致。并且，正如 [13]，中所指出的，它们与 [18] 中发现的代数相同。

1.2. 哈密顿约化。设我们有一个辛流形 X 上的 Hamiltonian S^1 作用。S^1 作用的信息在 Fukaya 范畴中表现为一个可逆元素：

$$s \in SH^*(X)$$

这就产生了恒等函子的一个自然自同构，因此对于每个对象 $L \in \mathcal{W}(X)$，它都给出一个自同构 $s_L\colon\ L \xrightarrow{\sim} L$。确切地说，$s_L = \mathcal{CO}^0(s) \in HF^0(L,L)$，其中 $\mathcal{CO}^0$ 是单位代数映射 $\mathcal{CO}\colon\ SH^*(X) \to HH^*(CF^*(L,L))$ 的零阶部分，该映射称为闭开弦映射。

这个 s 最初由 Seidel [25] 针对紧 X构造，并且作为量子上同调 $QH^*(X)$中的一个可逆元素出现。当 X 恰当时，Seidel 的构造反而给出辛上同调中的一个元素 $SH^*(X)$ [24],，但在这两种情况下，我们都可以使用闭开映射将其映射到 Hochschild 上同调中。[2]

在上一节中，我们讨论了等变缠绕范畴$\mathcal{W}_{S^1}(X)$。事实上，对于任意给定的$\lambda \in \mathbb{C}^*$，都可以构造等变范畴的一个版本

$$\mathcal{W}_{S^1}(X)_\lambda$$

从 $\mathcal{W}(X)$ 中满足 $s_L = \lambda 1_L$ 的那些对象开始。Teleman [30] 将这些范畴称为等变 Fukaya 范畴的“谱分量”。

例如，一个 S^1-不变拉格朗日子流形 L （它是单调的，最小 Maslov 指数至少为 2，且配备了自旋结构）给出 $\mathcal{W}_{S^1}(X)_{\pm 1}$ 的一个对象。但如果我们在 L 上赋予一个非平凡的局部系统，其沿 S^1 轨道的单值化为 λ，那么我们就得到 $\mathcal{W}_{S^1}(X)_{\pm\lambda}$ 的一个对象。

本文几乎将全部注意力放在这些谱分量范畴上，而不考虑整体范畴 $\mathcal{W}_{S^1}(X)$。这样做的原因将在后面的章节中逐渐显现。

注 1.4. 上述符号的歧义源于 L 上自旋结构的选择。具体而言，沿着 L 上一点的 S^1-轨道，切丛 TL 有两种平凡化：一种由 S^1 作用诱导，另一种来自自旋结构；如果二者不一致，就会出现负号，见 [31]。特别地，将局部系统的单值化乘以 -1 来对其作修改，等价于改变自旋结构。

在例1.1 中，我们的拉格朗日子流形 S 是一个 2-球面，因此它带有唯一的自旋结构，该结构在每个 S^1 轨道上诱导出边界自旋结构。这使它成为$\mathcal{W}_{S^1}(T^*S^2)_{-1}$的一个对象。

现在考虑动量映射 μ 在某个正则值 $a \in \mathbb{R}$ 处的哈密顿约化 $X /\!/_a S^1$ 。存在一个拉格朗日对应

$$\Gamma = \{(x,[x]),\ \mu(x) = a\} \subset X^- \times (X /\!/_a S^1) \tag{1.5}$$

[2]在恰当情形下，闭开映射 $SH^*(X) \to HH^*(\mathcal{W}(X))$ 已由 Ganatra 的工作证明为同构 [8]。

它诱导出一个函子

$$\mathcal{W}(X) \to \mathcal{W}(X/\!/_a S^1) \tag{1.6}$$

通过全纯被子理论 [19, 14, 6]。此外，由于 Γ 是 S^1不变的，我们可以用它在 X的等变 Fukaya 范畴上定义一个函子。Teleman 猜想这会给出一个等价

$$\mathcal{W}_{S^1}(X)_{\pm e^a} \cong \mathcal{W}(X/\!/_a S^1) \tag{1.7}$$

于哈密顿约化的 Fukaya 范畴与等变范畴中相应谱分量之间的等价。更一般地，我们可以考虑 $\lambda = \pm e^{a+ib}$ 处的谱分量，这将给出商空间的缠绕范畴，并配备一个 B 场（或许是更一般的体变形）。Fukaya[7] 已宣布，对于紧致的 X，存在一个沿此思路的定理。

备注 1.8。 一般而言，我们必须考虑 Γ 是否无障碍。若 X 是紧致的，则可能出现 Γ 仅弱无障碍的情况，因此需要在 Γ 上选取一个边界化上链，以使函子（1.6）有定义；在这种情况下，其目标范畴也可能发生体变形（这是函子（1.6） [6]）存在所迫使的）。

注记 1.9. (1.7) 中的符号不确定性并未出现在 Teleman 的论文中；我们从例子中发现了它，但可以如下解释。在我们使用 Γ 定义函子之前，必须先为其赋予一个自旋结构，然后它就成为 $\mathcal{W}_{S^1}\big(X \times (X/\!/_a S^1)\big)_{\pm 1}$ 中的一个元素，其符号如注记 1.4 中所确定。如果 Γ 不是单连通的，那么我们或许能利用不同的自旋结构构造出两个等价 $\mathcal{W}_{S^1}(X)_{e^a} \xrightarrow{\sim} \mathcal{W}(X/\!/_{\mathfrak{a}} S^1)$ 和 $\mathcal{W}_{S^1}(X)_{-e^a} \xrightarrow{\sim} \mathcal{W}(X/\!/_a S^1)$。在其他例子中则没有选择，只能计算这个符号。

让我们看看这一观点为我们的例子 1.1。其中的动量映射为 $\mu = |x|^2 - |y|^2$。任意非零的 $a \in \mathbb{R}$ 都是 μ的正则值，并产生商 $X/\!/_a S^1 \cong \mathbb{C}$。由于 $\mathcal{W}(\mathbb{C}) \cong 0$ 相应的谱分量应为零。

鉴于备注 1.4，我们的观察（1.2）实际上应当是如下断言：

$$\mathcal{W}_{S^1}(X)_{-1} \cong \mathcal{W}(P)$$

因此， $\lambda = -1$ 处的谱分量非零。这必定对应于动量映射的奇异值 $a = 0$ ，在该处我们无法进行辛约化。相反，我们只是删除动量映射纤维 μ^{-1}(0)的奇点，并形成商：

$$\mathcal{P} = \big(\mu^{-1}(0) - (0, 0, \pm 1)\big)/S^1$$

按照这一规定，我们将等价

$$\mathcal{W}_{S^1}(X)_{-e^a} \cong \mathcal{W}(X/\!/_a S^1)$$

从（1.7）延拓至奇异值 $a = 0$。

由此例我们得出以下一般性结论：

猜想 B. 设 X 是一个李维尔流形，带有一个 Hamiltonian S^1-流形，使得不动点集X^{S^1} 的余维数为四，并假设不存在有限的非平凡稳定子群。设 $\mu\colon X \to \mathbb{R}$ 为动量映射，并令 $a \in \mathbb{R}$ 为 Imμ 内部的一个奇异值。则存在一个拟等价

$$\mathcal{W}_{S^1}(X)_{-e^a} \cong \mathcal{W}(U/S^1)$$

其中， U 是 $\mu^{-1}(a)$ 中的光滑轨迹。

正如我们所指出的，我们的猜想可能过于乐观，因为一般而言 $\mathcal{W}(U/S^1)$ 可能需要进行体变形。[3]然而，我们将在下文看到许多不存在此类体变形的例子。

注记 1.10。 根据注记1.9 ，我们应当说明为何写作 $-e^a$ 而不是 e^a。光滑轨迹 U 是一个 S^1 丛，但在 $\mu^{-1}(a)$ 中，一些 S^1 纤维会塌缩为点。因此，拉格朗日对应 Γ 应赋予一种自旋结构，该结构在轨道上的限制为边界自旋结构——这就是负号的由来。这与我们在注记 T^*S^2 中的示例所用的论证基本相同 1.4。

注记 1.11。 Teleman–Fukaya 的思想和我们的猜想 B 都未涵盖的谱分量，是位于 $\lambda = -e^{a+ib}$ 处的那些分量，其中 a 是一个奇异值，且 $b \neq 0$。对于这些分量，我们最多只能说：(i) 它们应当是 $\mathcal{W}(U/S^1)$ 的体变形；(ii) 与其说它们类似于 $\mathcal{W}(U/S^1)$，不如说它们更接近一般值处的分量。从镜像对称的角度看，我们应当预期在复余维一处会出现特殊行为。

大部分的 上述讨论很容易推广到高秩环面的哈密顿作用 $T = (S^1)^r$. 这样的一个作用得到 r Seidel 元 s_1、...、 s_r，从而为每个 $\lambda \in (\mathbb{C}^*)^r$ 生成一个范畴 $\mathcal{W}_T(X)_\lambda$。对于动量映射的正则值，相应的分量 $\mathcal{W}_T(X)_\lambda$ 将是 X 的相应辛商的 Fukaya 范畴，且可能带有体变形。对于奇异值，我们的猜想是，至少在某些情形下，应当改为取动量映射纤维的光滑部分的商。

在猜想 A 中考虑的设定是这一理论的特殊情形。一个动量映射值（a_1，.....， a_r）是正则的，当且仅当每个 a_i 都非零；此时相应的哈密顿约化是底空间 Y。因此，在值 $\lambda =$（$-e^{a_1}$，.....， $-e^{a_r}$）处取谱分量将产生 $\mathcal{W}_{S^1}$（X）$_\lambda \cong \mathcal{W}$（$Y$）。对于更一般的 λ，只要每个 λ_i 都不在单位圆上，我们就会得到 $\mathcal{W}$（Y），还可能带有体变形。

但设 $\lambda_1 = -1$。那么，动量映射的纤维在除子 D_1 上有奇点，而我们的猜想是，该谱分量

$$\mathcal{W}_{S^1}(X)_\lambda \cong \mathcal{W}(Y \setminus D_1)$$

由 $(b_2,...,b_r)$ 进行体变形。如果有多个 λ_i 等于 -1，那么我们必须删去多个除子；而在最特殊的值处

$$-\mathbf{1} = (-1, ..., -1)$$

我们得到猜想 A的陈述。

例 1.12。猜想 A 和 B 最简单的例子是取带有 S^1 作用 θ 的 $X = \mathbb{C}^2$ ： $(x, y) \to (e^{i\theta}x, e^{-i\theta}y)$。我们可以将其视为代数环面丛 π： $X \to Y = \mathbb{C}$，其上有 $\pi(x, y) = xy$，并且在 $D = \{0\}$ 上有一个奇异纤维。动量映射在一般值 μ 处的哈密顿约化是 $\mathbb{C}$，而在奇异值 $a = 0$ 处，光滑轨迹的商是 $\mathbb{C}^*$。因此我们预期

$$\mathcal{W}_{S^1}(X)_{-e^a} \cong \mathcal{W}(\mathbb{C}) \cong 0$$

若 $a \neq 0$，但 $\mathcal{W}_{S^1}(X)_{-1} \cong \mathcal{W}(\mathbb{C}^*)$ 不为零。

考虑不变拉格朗日环面 $L = \{|x| = |y| = 1\}$，并为其配备典范自旋结构以及某种 $\mathbb{C}^*$ 局部系统。于是，我们得到 $\mathcal{W}_{S^1}(X)_\lambda$ 的一个对象，其中 λ 是沿着 S^1 轨道的单值化 L。按照猜想 A 之后的讨论，我们可以删除 $\pi^{-1}D$ 和

[3]涉及体变形时，通常使用闭2-形式（或在非分次情形下使用闭 1-形式）进行变形。已知 SH^* 具有 L_∞-结构 [29] ，并且可以沿着满足相应 Maurer–Cartan 方程的那些SH^* 类对缠绕 Fukaya 范畴进行变形。尽管文献中似乎尚未给出这些体变形的几何构造，我们仍将它们称为体变形。要使用 A_∞中的体类对 SH^2-运算进行变形，应对具有与体类渐近的 $r \geq 0$ 个内部 puncture 的圆盘求和，并除以 $r!$。

只考虑 $\mathbb{C}^*$ 丛 $\pi\colon (\mathbb{C}^*)^2 \to \mathbb{C}^*$。在这个空间中， L 是恰当的，并且由于 S^1 作用是自由的，我们可以计算

$$HF_{S^1}(L,L) = HF(L/S^1, L/S^1) = H^*(S^1)$$

无论局部系统如何。这与等价关系 (1.7) 所述一致

$$\mathcal{W}_{S^1}(X \setminus \pi^{-1}D)_{-e^a} \cong \mathcal{W}(\mathbb{C}^*)$$

对于 a 的所有取值。但如果改为在 X 中进行计算，这个结果就会受到全纯圆盘的变形。事实上，边界为 L 的圆盘模空间与 $S^1 \sqcup S^1$ 微分同胚，而 S^1 作用在每个分支 [26, 引理 2。16] 上都是自由的。此外，两族 S^1 圆盘的边界类相差 L 中某个点的一个轨道，[4] 并且它们的贡献恰好在 $\lambda = -1$ 时相互抵消。

因此，如果 $\lambda \neq -1$，那么这个对象在 $\mathcal{W}_{S^1}(X)_\lambda$ 中同构于零；但如果 $\lambda = -1$，则我们有一整个由局部系统剩余单值化 $\nu \in \mathbb{C}^*$ 参数化的非零对象族。这支持了如下论断：$\mathcal{W}_{S^1}(X)_{-1} \cong \mathcal{W}(\mathbb{C}^*)$，但对于 λ 的所有其他取值，$\mathcal{W}_{S^1}(X)_\lambda \cong 0$。看来变形

$$\mathcal{W}_{S^1}(X \setminus \pi^{-1}D)_\lambda \rightsquigarrow \mathcal{W}_{S^1}(X)_\lambda$$

恰好在特殊值 $\lambda = -1$ 处是平凡的。

后续备注1.11 我们尤其可以考察分量 $\mathcal{W}_{S^1}(X)_{-e^{ib}}$ 对于 $b \neq 0$。这些似乎全都为零，因此 $\mathcal{W}_{S^1}(X)_{-1}$ 的非平凡体变形。

在例 2.3中，我们将说明所有这些论断都与镜像对称相一致。

事实上，对于按当前表述的猜想 B，我们尚未找到任何超出猜想 A 设定的例子。不过，我们确实有几个相当推测性的例子，其中去掉了 X 是 Liouville 的条件——参见截面2.5。

1.3. 镜像对称。 给定一个哈密顿作用 $S^1 \curvearrowright X$，Seidel 元使缠绕 Fukaya 范畴 $\mathcal{W}(X)$——至少在同调层面上——成为环 $\mathbb{C}[s, s^{-1}]$上的线性对象。这可以视为 Teleman 所构想的范畴上更一般的“拓扑群作用”理论的一部分[30], 参见第 1.6节。

现在假设 X 是一个代数簇的镜像。那么，由于 $\mathcal{W}(X) = D^b(\check{X})$， s的镜像必须是其中的一个可逆元素 σ：

$$HH^0(D^b(\check{X})) = \Gamma(\mathcal{O}_{\check{X}}) \tag{1.13}$$

如果我们在辛几何一侧有一个 S^1 作用，那么在镜像一侧我们有一个函数 $\sigma\colon \check{X} \to \mathbb{C}^*$。

例 1.14。取带有显然的 S^1 作用的圆柱 $X = T^*S^1$。其镜像是 $\check{X} = \mathbb{C}^*$，我们可以将其视为零截面 $S^1 \subset X$上的 $\mathbb{C}^*$局部系统空间。如果我们为这个 S^1 赋予非边界自旋结构，那么可知， S^1 作用的镜像是恒等函数$\sigma\colon X \to \mathbb{C}^*$。

更一般地， X 可能是一个朗道-金兹堡模型（$\check{X}$， $\check{W}$）的镜像。那么， $\mathcal{W}(X)$等价于矩阵分解范畴 MF（$\check{X}$, $\check{W}$），但函数 $\sigma\colon \check{X} \to \mathbb{C}^*$ 仍然确实给出了该范畴的一个自然自同构，因此它可能是 X上 S^1 作用的镜像。

“猜想” C. 假设我们在一个李维尔流形 X 上有一个哈密顿 S^1 作用。假设 X 有一个镜像朗道-金兹堡模型（$\check{X}, \check{W}$），并且该 S^1 作用与函数 $\sigma\colon \check{X} \to \mathbb{C}^*$ 镜像对应。那么对于每个 $\lambda \in \mathbb{C}^*$，我们都有一个等价

$$\mathcal{W}_{S^1}(X)_\lambda \cong \mathrm{MF}\big(\check{Z}_\lambda, \check{W}|_{\check{Z}_\lambda}\big)$$

其中 $\check{Z}_\lambda \subset \check{X}$ 表示超曲面 $\sigma^{-1}(\lambda)$。

[4]参见 [15, 引理 2。19] 其中给出了这一计算的一般化形式。

推广到更高秩的环面作用显而易见。

这一论断将成为我们为其他猜想提供的所有镜像对称证据的核心。然而，它并非真正精确的猜想，因为我们尚未说明“镜像”的含义。尤其是，仅仅假设 $\mathcal{W}(X) \cong$ 矩阵分解$(\check{X}, \check{W})$，还不足以满足要求，正如我们将在第1.6节看到的那样。

例 1.15。考虑

$$X = \mathbb{C}^2 \setminus \{xy = 1\}$$

赋予其从 $\mathbb{C}^2$上限制得到的标准辛形式。这是一个对数 Calabi–Yau 曲面，已知它是自镜像的（[22]）。这是一个重要例子，因为它是具有奇异纤维的拉格朗日环面纤维化的辛流形中最简单的例子。我们记

$$\check{X} = \mathbb{C}^2 \setminus \{\check{x}\check{y} = 1\}$$

作为镜像。

现在在 S^1 上添加一个由 X 给出的哈密顿 $e^{i\theta}(x, y) = (e^{i\theta}x, e^{-i\theta}y)$ 作用。利用一些托里克镜像对称性（见例2.5），可以论证在 $\check{X}$ 上，这变成了处处不为零函数：

$$\sigma = -1 - \check{x}\check{y}$$

如果 $\lambda \in \mathbb{C}^*$ 与 $\lambda \neq -1$，那么 $\sigma^{-1}(\lambda) \cong \mathbb{C}^*$。因此，断言是$\mathcal{W}_{S^1}(X)_\lambda \cong D^b(\mathbb{C}^*)$。但是对于 $\lambda = -1$，我们声称 $\mathcal{W}_{S^1}(X)_{-1}$ 应当等价于节点 $\check{Z}_{-1} = \{\check{x}\check{y} = 0\}$ 的导出范畴。

我们还可以将这些谱分量与辛约化联系起来，正如我们在上一节中讨论的那样。对于动量映射的一个正则值 $a \in \mathbb{R} \setminus 0$，Fukaya-Teleman 告诉我们（1.7）：

$$\mathcal{W}_{S^1}(X)_{-e^a} \cong \mathcal{W}(X /\!/_a S^1) = \mathcal{W}(\mathbb{C} \setminus 1)$$

这与我们的镜像对称猜想一致，因为 $\mathbb{C} \setminus 1$ 确实是 $\mathbb{C}^*$的镜像。在奇异值 $a = 0$ 处，我们可以应用猜想 A 或 B，它们告诉我们，在取商之前，应先从 $\mu^{-1}(0)$ 中删除奇点。结果是 $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$，即裤子曲面，[5] 而它确实是˘节点 Z_{-1}的镜像。

我们也可以离开实轴并设为 $\lambda = -e^{a+ib}$。如果 $a \neq 0$，这不会产生任何影响；$\mathbb{C} \setminus \{1\}$ 的所有体变形都是平凡的（不存在可用于变形的 SH^2 类），并且 $\mathcal{W}(\mathbb{C} \setminus \{1\}) \cong D^b(\mathbb{C}^*)$，这与镜像一致。但对于 $a = 0$ 则并非如此，我们可以从镜像看出 $\mathcal{W}_{S^1}(X)_{-e^{ib}}$ 应当是 $\mathcal{W}_{S^1}(X)_{-1}$ (参见 注释 1.11 ）。

注1.16. 我们很容易想以如下方式理解“猜想”C 。两者 $\mathcal{W}(X)$ 和 MF$(\check{X}, \check{W})$ 都是关于 $\mathbb{C}[s, s^{-1}]$的线性范畴，并且它们在这个底空间上等价。对于任意固定值$s = \lambda \in \mathbb{C}$，我们应该能够取两边的纤维，并得到等价的范畴。

Thi这种解释是一个有用的初步近似，但存在以下两个缺陷 s.

（1）Seidel 元仅在同调层面上对 $\mathcal{W}$（X）是中心的，因此需要谨慎对待“在 $\mathbb{C}[s, s^{-1}]$ 上线性”的定义。若要将 $\mathcal{W}$（X）基变换到各个单独的取值$s = \lambda$，大概需要某种 E_2 结构。近期在构造这种 E_2 结构于 [21]方面已有进展。

更严重的是：

（2）这 通常并不成立：MF$(\check{X}, \check{W})$ 在 $s = \lambda$ 处的纤维等于矩阵分解范畴
在超曲面上的.....化 Z_λ。参见第 1.6 节。

---

[5]这个裤子曲面上的分次与例1.1中的不同。

请注意，镜像上的两个函数 W 和 σ 扮演着截然不同的角色，在讨论分次时这一点会更加清楚。要为 $\mathcal{W}(X)$ 赋予一个 $\mathbb{Z}$-分次，我们必须选择一个分次结构，它是 $LGr(TX$ 的截面的一个同伦类。在镜像上，这通常[6] 对应于对“R 荷”的选择，即一个 $\mathbb{C}^*$ 在 X 上的作用，使得 W 的权重为 2。另一方面，函数 σ 的权重必须为零。

R 荷的存在会改变 Hochschild 上同调上的分次，从而破坏等式（1.13），即使在 $\check{W}=0$ 的情况下也是如此。因此，原则上，$S^1 \curvearrowright X$ 的镜像可能是一个 σ，其中包含一些由多向量场给出的高阶项。但本文不会遇到任何此类例子。

注 1.17。我们仅对谱分量的镜像作出了断言 $\mathcal{W}_{S^1}(X)_\lambda$，而不是对等变范畴$\mathcal{W}_{S^1}(X)$本身作出断言。然而，在 $\mathbb{Z}$-分次的情形下，我们相信谱分量连同非等变范畴 $\mathcal{W}(X)$ 应当能够确定 $\mathcal{W}_{S^1}(X)$。这一点也将在第 1.6 节中解释。因此，在 $\mathbb{Z}$-分次的世界里，我们或许可以将“猜想”C 理解为一个 定义，即‘S^1-等变镜像’的定义。[7]

直接理解 $\mathcal{W}_{S^1}(X)$ 的镜像将会非常有趣，我们希望在未来的工作中研究这一问题。

1.4. 恢复非等变范畴。给定 $S^1 \curvearrowright X$，对于每个 $\lambda \in \mathbb{C}^*$，我们都有一个等变 Fukaya 范畴的谱分量 $\mathcal{W}_{S^1}(X)_\lambda$。这些范畴具有一些重要的额外结构：它们关于 S^1-等变上同调的基环是线性的：

$$H^\bullet_{S^1}(pt) = \mathbb{C}[t], \quad \deg t = 2$$

这种结构已内置于构造之中，所有 A_∞ 结构映射都与之相容。因此，可以取 $\mathcal{W}_{S^1}(X)_\lambda$ 在 $t=0$处的纤维。所得结果是一个子范畴。

$$\mathcal{W}_{S^1}(X)_\lambda|_{t=0} \subset \mathcal{W}(X)$$

的或 X 的普通缠绕 Fukaya 范畴，它是由满足 $s_L = \lambda 1_L$ 的对象 L 构成的全子范畴。

例 1.18. 在例 1.1中，S 在 $\mathcal{W}_{S^1}(X)_{-1}$ 中的自同态代数是等变上同调 $H^\bullet_{S^1}(S^2) = \mathbb{C}[x,y]/xy$，等变参数 t 映射为 $x+y$。令 $t=0$，我们便得到普通上同调 $H^\bullet(S^2)$，它是 S 在 $\mathcal{W}(X)$ 中的自同态代数。

当然，这一观察并不限于此例；它一般适用于 S^1-不变的恰当紧致拉格朗日子流形。

我们有理由预期$\mathcal{W}_{S^1}(X)_\lambda$ 由不变拉格朗日子流形生成，前提是将非紧致的拉格朗日子流形也包括在内。此外，在某些例子中，$\mathcal{W}(X)$ 本身也可以由不变拉格朗日子流形生成；例如，例1.1 中，两个不动点之一处的余切纤维是不变的，并生成 $\mathcal{W}(T^*S^2)$。在这种情况下，或许可以从等变范畴的单个谱分量$\mathcal{W}_{S^1}(X)_\lambda$ 中恢复非等变范畴 $\mathcal{W}(X)$。

现在假设我们处于猜想A的设定中，并且（为简便起见）$r=1$。因此，我们有一个秩一代数环面纤维化 $\pi: X \to Y$，它在除子 $D \subset Y$上退化。猜想如下：

$$\mathcal{W}_{S^1}(X)_{-1} \cong \mathcal{W}(Y \setminus D)$$

S由于左侧的范畴是关于 $\mathbb{C}[t]$ 线性的，右侧的范畴也应如此。

关于 $\mathcal{W}(Y \setminus D)$ 上这一额外结构是什么，显然有一种猜想。事实上，存在一个类 $\tau \in SH^2(Y \setminus D)$，对应于绕除子 D 一周的简单 Reeb 轨道。有时称其为 Borman-Sheridan 类 [32]。取 τ 为这一类后，范畴 $\mathcal{W}(Y \setminus D)$ 在 $\mathbb{C}[t]$ 上成为线性的。[8]

---

[6]但并非总是如此，参见 [28]。[7]另请参阅 Aganagic 最近的论文 [2]，其中提出了一些相关思路。[8]不过，关于中心性的技术性注意事项与我们在注释中提出的一样 1.16。

猜想 D。 在猜想 A 的情形下，取 $r = 1$ 时， t 在 $\mathcal{W}_{S^1}(X)_{-1}$ 上的作用与 τ 在 $\mathcal{W}(Y \setminus D)$上的作用一致。

如果这一点正确，则意味着纤维 $\mathcal{W}(Y \setminus D)|_{t=0}$ 与由满足条件 $s_L = -1_L$ 的对象 L 生成的 $\mathcal{W}(X)$ 子范畴一致。如果这就是 $\mathcal{W}(X)$ 的全部——这大致等同于要求 $\mathcal{W}(X)$ 由不变拉格朗日子流形生成——那么便可得出:

$$\mathcal{W}(Y \setminus D)|_{t=0} \cong \mathcal{W}(X) \tag{1.19}$$

我们预期，只要 Y 的缠绕范畴为零，这一点就成立；如果 Y 是次临界 Weinstein 流形，例如 $\mathbb{C}^n$，那么这一条件就会满足。特别是，这对例 1.1 应当适用。下一节我们将更详细地讨论这一点，包括镜像图景。

在这一等价关系成立时，等价式（1.19）为证明一些新的同调镜像对称实例开辟了一条途径：从关于 Y 的定理出发，逐步推广到关于 X 的定理。

注 1.20。 在猜想 A 之后的讨论中，我们指出，变形

$$\mathcal{W}_{S^1}(X \setminus \pi^{-1}D)_{-1} \rightsquigarrow \mathcal{W}_{S^1}(X)_{-1}$$

必须是平凡的。不过现在我们可以进一步细化： A_∞结构并未发生变形，而 $\mathbb{C}[t]$ 结构发生了变形。在商上，我们从 $\mathcal{W}(Y \setminus D)$上的平凡 $\mathbb{C}[t]$ 结构出发，将其变形为非平凡结构，其中 t 的作用方式为 τ。类 τ 本身与 $\mathcal{W}(Y \setminus D)$到相对范畴 $\mathcal{W}(Y, D)$的形式变形相关，这正是下一节的主题。

备注 1.21。 “猜想”的更精确版本 C 还应包括 $\mathbb{C}[t]$ 结构。如果 $S^1 \curvearrowright X$ 的镜像是 $\sigma : \check{X} \to \mathbb{C}^*$ 那么每个范畴 $D^b(\check{Z}_\lambda)$ 自动在线性 $\mathbb{C}[t]$上，因为将 $\check{Z}_\lambda$ 表示为超曲面提供了一个 $t \in HH^2(\check{Z}_\lambda)$ 的选择。这应当与 $\mathbb{C}[t]$上的 $\mathcal{W}_{S^1}(X)_\lambda$结构一致。

如果镜像是 LG 模型，那么我们再次自动有一个选择:

$$t \in HH^2\big(\mathrm{MF}(\check{Z}_\lambda, \check{W}|_{\check{Z}_\lambda})\big)$$

但现在， t可能表示超势 $\check{W}|_{\check{Z}_\lambda}$正在随 λ变化，而不是超曲面本身在变化。或者二者可能都在发生形变。

1.5. 相对 Fukaya 范畴。 再次假设我们具有猜想 A 中的设置，其中 $r = 1$。在基空间 Y 上，我们可以考虑相对的缠绕 Fukaya 范畴:

$$\mathcal{W}(Y, D)$$

根据构造，该范畴是关于幂级数环 $\mathbb{C}[[h]]$ 的线性范畴，其中 $\deg h = 0$。相对 Fukaya 范畴最早由 Seidel 在 [27] 中进行研究。其对象是 $Y \setminus D$中的恰当拉格朗日子流形，这些子流形可以是非紧的，但必须远离 D，即它们不应渐近趋近于 D。

在相对范畴中令 $h = 0$ 可恢复由同一批拉格朗日子流形张成的 $\mathcal{W}(Y \setminus D)$ 的全子范畴。若改为将 h 取逆，则得到普通的缠绕 Fukaya 范畴 $\mathcal{W}(Y)$，其中 h 本质上成为诺维科夫参数（参见 [16, 引理 1.2]）。因此，相对范畴刻画了形式变形的“总空间”，其中心纤维为 $\mathcal{W}(Y \setminus D)$，一般纤维为 $\mathcal{W}(Y)$。

现在考虑空间 X。该 S^1 作用使 $\mathcal{W}(X)$ 成为环 $\mathbb{C}[s^{\pm 1}]$上的线性对象。在一般值λ 处， s 人们预期 $\mathcal{W}_{S^1}(X)_\lambda$ 等价于 $\mathcal{W}(Y)$，并且可能带有体变形。在 $\lambda = -1$处，我们的猜想 A 是 $\mathcal{W}_{S^1}(X)_{-1} \cong \mathcal{W}(Y \setminus D)$。

比较前面两个段落，我们得出以下结论:

猜想 E。 假设我们采用猜想 A 中的设定，其中 $r = 1$。那么，相对包裹福柯范畴 $\mathcal{W}(Y, D)$ 等价于在 $\mathcal{W}(X)$ 处的完备化 $s = -1$。

若像第 1.3 节那样用镜像对称来表述这一点，那么我们主张如下。假设 X 与（$\check{X}$，$\check{W}$）互为镜像，且 S^1 作用对应于函数 $\sigma\colon\ \check{X} \to \mathbb{C}^*$。那么 $\mathcal{W}$（Y，D）将等价于在形式概形上的矩阵分解范畴；该形式概形由沿除子 $\check{X}$ 完备化所得 $\check{Z}_{-1} = \sigma^{-1}(-1)$。

注 1.22。猜想 E 存在同样的技术缺陷 (1)，详见注1.16：我们可能需要某种 E_2 结构，才能对 $\mathcal{W}(X)$ 在 $\mathbb{C}[s, s^{-1}]$ 上进行完备化，。但更根本的问题 (2) 在这里并不适用，因为（与取纤维时不同）对范畴 $\mathrm{MF}(\check{X}, \check{W})^{\smile}$ 进行完备化，应该会得到与对空间 X 进行完备化相同的结果。

注 1.23。相对范畴 $\mathcal{W}(Y, \mathcal{D})$ 是关于 $\mathbb{C}[[h]]$ 线性的，而 $\mathcal{W}(X)$ 的完备化也关于一个幂级数环线性。我们在此隐含地声称这两种结构一致；为了使其与猜想 D 相容，我们需要 $h = s + 1$ 在一阶近似下成立。但一般而言，可能存在高阶修正。我们预期这由量子 Kirwan 映射控制（参见 [33]）。

备注 1.24。可以在猜想 E 的猜想 B的设定中，更一般地表述。如果存在多个奇异纤维，那么每个奇异值都对应一个相对 Fukaya 范畴，而断言是，每个范畴都等价于在 $\mathcal{W}(X)$ 的某个对应值处的完备化 s。

对于这一猜想而言，最有趣的情形或许是 $\mathcal{W}(Y) \cong 0$，正如我们在上一节中所讨论的。在这种情况下，根据 (1.7)，我们预期 $\lambda = -1$ 是 $\mathcal{W}_{S^1}(X)$ 唯一非零的谱分量。

在镜像一侧，这意味着：

$$\mathrm{MF}\big(\check{Z}_\lambda, \check{W}|_{\check{Z}_\lambda}\big) \cong 0 \qquad \text{for all } \lambda \neq -1$$

这说明，当 $\lambda \neq -1$ 时，将 $\check{W}$ 限制到 $\check{Z}_\lambda$ 上没有临界点。因此，Crit($\check{W}$) 在集合论意义下包含于 $\check{Z}_{-1}$ 中，从而在 $\check{Z}_{-1}$ 处完成 $\check{X}$ 对矩阵分解范畴没有影响。等价地，支撑在 $\check{Z}_{-1}$ 上的矩阵分解的子范畴矩阵分解 $\check{z}_{-1}(\check{X}, \check{W})$ 实际上就是整个矩阵分解$(\check{X}, \check{W})$。

回到 A 侧，我们得出结论：如果 $\mathcal{W}(Y) \cong 0$ 那么对 $\mathcal{W}(X)$ 进行完备化不会产生任何影响。等价地，$\mathcal{W}(X)$ 由满足 L 的对象生成，其中 $s_L = -1_L$。因此（1.19）成立，而猜想 E则变为以下断言：$\mathcal{W}(Y,\ D)$ 与 $\mathcal{W}(X)$ 等价。

为了更详细地理解这一断言，我们绘制如下图表：

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{MF}(\check{X}, \check{W}) & \text{-----}\simeq\text{-----} & \mathcal{W}(X) & \xrightarrow[F]{\simeq} & \mathcal{W}(Y, D) \\ {\scriptstyle i_*}\uparrow\downarrow{\scriptstyle i^*} & & {\scriptstyle t=0}\uparrow\downarrow & & \uparrow\downarrow{\scriptstyle h=0} \\ \mathrm{MF}(\check{Z}_{-1}, \check{W}|_{\check{Z}_{-1}}) & \text{--}\simeq\text{--} & \mathcal{W}_{S^1}(X)_{-1} & \xleftarrow[G]{\simeq} & \mathcal{W}(Y \setminus D) \end{array} \tag{1.25}$$

这里，顶行的范畴都应当彼此等价，底行的三个范畴也是如此。竖直箭头是伴随。

在 B 侧，伴随是显然的，它由沿包含映射进行的正向推送或反向拉回给出。$\jmath\colon\ Z_{-1} \hookrightarrow X$。在辛流形 X 上，只有向上的函子是显然的——它是第 1.4 节中的函子，将 $\mathcal{W}_{S^1}(X)_{-1}$ 中的不变拉格朗日子流形视为 $\mathcal{W}(X)$ 中的一个对象。这个函子的伴随则不太明确。

有趣的是，在底空间 Y 上，向下函子显而易见——只需将变形参数 h 设为零即可；而向上函子则稍微出人意料。

[9]如果 $\check{W}$ 在某个除子 $\check{Z}$ 上的限制没有临界点，那么由此可知，$\check{W}$ 在 $\check{Z}$的某个形式邻域内没有临界点。但反过来则不成立。这个初等事实将在下一节中发挥重要作用。

我们猜想的等价 $G:\ \mathcal{W}(Y\setminus D)\xrightarrow{\sim}\mathcal{W}_{S^1}(X)_{-1}$ 大致应由拉格朗日对应 Γ 给出，该对应与 $\mu^{-1}(0)$ 相关，见 (1.5)。因此，至少近似而言，它将一个拉格朗日子流形 Λ 映射为不变拉格朗日子流形 $\pi^{-1}(\Lambda)\cap\mu^{-1}(0)$。

在上方一行，函子 $F\colon \mathcal{W}(X)\xrightarrow{\sim}\mathcal{W}(Y,D)$ 必须是 G 的伴随，因此它由同一个对应关系 Γ 给出，只是将其视为一个方向相反的函子。要将此函子应用于一个拉格朗日子流形$L\subset X$，我们必须进行扰动，直到 L 与 $\mu^{-1}(0)$ 横截相交，然后将 $L\cap\mu^{-1}(0)$ 投影到 Y。

注 1.26. 如果我们去掉 $s=-1$ 是唯一非零分量这一条件，仍然可以画出此图；唯一的变化是 F 不再是等价。它是从 X 到沿着 Z_{-1} 对 X 作形式完备化所得空间的限制 $\breve{\ }$ $\breve{\ }$ $\breve{\ }$ 的镜像。

例 1.27. 重新审视例 1.1，猜想 E 断言我们有一个等价：

$$\mathcal{W}(T^*S^2)\cong\mathcal{W}(\mathbb{C},\{\pm1\}) \tag{1.28}$$

在这个例子中，我们可以非常明确地计算（1.25）中所有函子的作用。

取 $\mathbb{C}$ 中一条从任一 puncture 延伸至无穷远的直弧，即图 1.27 中的 Λ_2 或 Λ_3。在 G 下，它们提升为两个不动点处的余切纤维。这些对象在 $\mathcal{W}_{S^1}(X)_{-1}$ 中不同构，但在转到 $\mathcal{W}(X)$ 后便变得同构，因为所有余切纤维在那里都同构。现在，若要应用函子 F，我们必须取一般点处的一条余切纤维，使其与 $\mu^{-1}(0)$ 横截相交，所得结果便是弧 Λ_4。因此，出现在（1.25）第三列中的这个“令人惊讶”的函子 $\mathcal{W}(Y\setminus D)\to\mathcal{W}(Y,D)$ 会将 Λ_2 和 Λ_3 都映到 Λ_4。

为了检验我们所声称的等价（1.28），我们可以直接利用包裹弗洛尔复形计算 $\mathrm{Hom}^{\mathcal{W}(Y,D)}(\Lambda_4,\Lambda_4)$。结果为

$$\frac{\mathbb{C}\langle u,v\rangle[h]}{(u^2,v^2)},\quad du=h\cdot1,dv=h\cdot1,\quad |u|=|v|=-1$$

容易看出，这与 $\mathbb{C}[x]$ with $|x|=-1$ 拟同构，而它确实是 $\mathcal{W}(T^*S^2)$ 中一个余切纤维的自同态代数。

如果我们将 G 应用于弧 Λ（例1.1 中的弧），就得到 S^2，作为 $\mathcal{W}_{S^1}(X)_{-1}$中的一个对象。但将$F$ 应用于 $S^2\in\mathcal{W}(X)$ 并不会得到 Λ；没有任何一条以 1 或 -1 为端点的弧能属于 F的像。事实上，$F(S^2)$ 是一条环绕两个穿孔的八字形曲线。

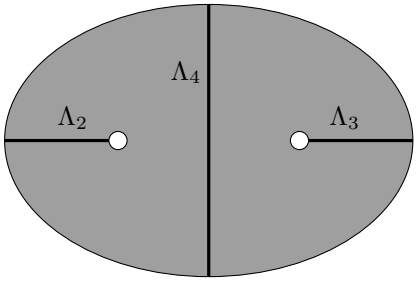

FIGURE 2. $\mathbb{C}\setminus\{\pm1\}$中的拉格朗日子流形。

注1.29。这个“令人惊讶”的函子 $\mathcal{W}(Y\setminus D)\to\mathcal{W}(Y,D)$，形式上可通过将 Borman-Sheridan 类 τ 设为零来定义。通过镜像，我们可以获得更明确的理解。

在 B 侧，复合 i_*i_* 作用于对象的方式为

$$i^*i_*\colon\ \mathcal{E}\ \mapsto\ \left[\mathcal{E}\xrightarrow{t\varepsilon}\mathcal{E}[2]\right]$$

其中， $t_{\mathcal{E}}$ 是取值于对象 $\mathcal{E}$上的 HH^2 类，即备注1.21 中所述的 $\mathcal{E}$。在 A 侧，这对应于取一个拉格朗日子流形 $L \subset Y \setminus D$ 并构造扭曲复形

$$\left[L \xrightarrow{\tau_L} L[2]\right]$$

其中， τ_L 是闭开映射 $\mathcal{CO}^0$： $SH^*(\mathcal{W}(Y \setminus D)) \to HF(L,L)$ 作用于 τ所得的像。但我们声称，~这个扭曲复形可以由一个对象 L 表示，该对象不渐近于 D，因此可将其视为相对范畴 $\mathcal{W}(Y,D)$ 的对象。在对象层面上，我们相信这就是我们的函子。很容易看出，这与我们在上面的例子中对对象 Λ、 Λ_2 和 Λ_3 的讨论是一致的。

注意，如果 L 没有一端收敛到 D ，那么应有 $\tau_L = 0$，因此应用该函子所得的结果应仅为 $L \oplus L[1]$。在镜像中，当 $\mathcal{E} = i^*\mathcal{F}$对于某个 $\mathcal{F} \in \mathrm{MF}(\check{X}, \check{W})$ 时，情况正是如此。

注 1.30。我们也可以考虑相对范畴：

$$\mathcal{W}(X, \pi^{-1}D)$$

这将是 $\mathbb{C}[[h]]$上的线性结构，同时还应具有一个由 $\mathbb{C}[s,s^{-1}]$ 作用所赋予的 S^1 结构。我们相信，这两种结构本质上是相同的，而这概括了我们的许多主张。关于我们对此含义的一个例子（在镜像一侧），请参见例2.3 。

1.6. 范畴上的拓扑 S^1 作用与 KRS 2-范畴。 我们所遇到的结构，可以借助 Teleman 在 [30]中概述的“拓扑群作用”范畴框架得到更清晰的理解。本节将简要解释这些思想，仅限于拓扑 S^1 作用的情形。推广到高秩环面的作用是容易的；非阿贝尔情形则深刻得多，但我们不需要涉及。

粗略地说，范畴上的拓扑 S^1 作用 $\mathcal{C}$ 是对恒等函子的一个自然自同构的选择s： $1_{\mathcal{C}} \to 1_{\mathcal{C}}$ 或者等价地，是一个 $\mathbb{C}[s,s^{-1}]$ 结构 $\mathcal{C}$。我们在第 1.3 节看到，Seidel 元在 $\mathcal{C} = \mathcal{W}(X)$ 上提供了这一结构，其中 X 是一个 Hamilton S^1-流形。在镜像一侧， $\check{X}$ 上的处处不为零函数为 $\mathcal{C} = D^b(\check{X})$ 提供了这一结构。

对此定义的一种启发式概括解释如下。设 $\mathcal{C}$ 是一个拓扑范畴（或 ∞-范畴），其对象空间为 $Ob_{\mathcal{C}}$。那么，根据定义，任意对象 $x \in Ob_{\mathcal{C}}$的自同构空间都是基点环路空间 $\Omega_x Ob_{\mathcal{C}}$。所谓“拓扑 S^1 作用”是指一个作用 $S^1 \curvearrowright Ob_{\mathcal{C}}$，于是对于任意对象 x ，我们都有一个自同构 s_x： $x \xrightarrow{\sim} x$ ，它由 x 在 S^1 作用下的轨道给出。

如果我们在 $\mathcal{C}$ 上有一个拓扑 S^1 作用，就可以进一步讨论等变范畴。对象 x 上的一种自然的“等变结构”定义，是选取环路s_x 的一个收缩同伦 h （这类似于等变层的定义）。这样的 h 会在同伦意义下诱导出 $\Omega_x Ob_{\mathcal{C}}$上的一个 S^1 作用，因此，等变范畴中 (x,h) 的自同构空间将类似于同伦商 $\Omega_x Ob_{\mathcal{C}} \times_{S^1} ES^1$。因此，如果我们通过用上同调替换空间来进行线性化，就预期等变范畴将是在线性 $H^\bullet(BS^1) = \mathbb{C}[t]$上的。

从代数角度来看，这一讨论表明，等变范畴应当是 $\mathcal{C}$ 在点 $s = 1$处的纤维。而事实上，纤维范畴总是关于 $\mathbb{C}[t]$线性的。[10] 更一般地，我们可以取某个值 $s = \lambda$ 处的纤维，并将其解释为“扭曲等变范畴”。这似乎可能是等变 Fukaya 范畴 $\mathcal{W}_{S^1}(X)_\lambda$ 以及第 1.3节中的镜像对称图景的正确框架。

遗憾的是（正如我们在注记 1.16 中所提醒的那样），这一论述过于简单化了。

例 1.31. [30, 例 4.5。] 令 S^1 作用于 $\mathbb{C}^n$ 并采用标准对角作用，因此非空的辛商为 $\mathbb{P}^{n-1}$。于是 $\mathcal{F}(\mathbb{P}^{n-1})$ 是 $\mathcal{W}(\mathbb{C}^n)$ 的一个谱分量。但 $\mathcal{W}(\mathbb{C}^n) \cong 0$和 $\mathcal{F}(\mathbb{P}^{n-1}) \ncong 0$，所以后者不可能是前者的纤维。

[10]这也是超曲面的导出范畴在线性空间上呈线性的原因 $\mathbb{C}[t]$，参见注1 .21.

该例不能赋予 $\mathbb{Z}$-分次，但下一个例子可以。

例 1.32。 猜想 A 的最简单例子是 $X = \mathbb{C}^2$ 通过映射 $Y = \mathbb{C}$ 映射到$\pi = xy$，正如我们在例 1.12 中所考虑的那样。我们的猜想是 $\mathcal{W}_{S^1}(X)_{-1} \cong \mathcal{W}(\mathbb{C}^*)$。由于它非零，因此不可能是 $\mathcal{W}(X)$ 的纤维。

在镜像侧，这两个例子非常相似：镜像超势 W 没有临界点，但将 $\check{W}$ 限制在超曲面 $\check{Z}_\lambda$ 上后却有临界点。[11] 因此，$\mathrm{MF}(\check{W}) \cong 0$，但 $\mathrm{MF}(\check{W}|_{\check{Z}_\lambda}) \ncong 0$。这显然是一种普遍现象，也清楚地说明了为什么 $\mathrm{MF}(\check{W}|_{\check{Z}_\lambda})$ 不可能是 $\mathrm{MF}(\check{W})$ 的一个纤维。

Teleman 对这个谜题的解答运用了 Kapustin-Rozansky-Saulina 2-范畴。这是一个源自三维拓扑场论（Rozansky-Witten 理论）的猜想性构造，它将一个 2-范畴与一个全纯辛流形 M 相关联。

此 2-范畴 $KRS(M)$ 的一个对象，是一个全纯拉格朗日子流形 $L \subset M$ 的选择，以及一个关于 L 线性的范畴 $\mathcal{C}_L$，也就是说，它带有张量范畴 $Coh(L)$ 的作用。特别地，每个 L 都可通过设定 $\mathcal{C}_L = Coh(L)$ 来定义一个对象。这些特殊对象应当生成 $KRS(M)$，因此利用 Yoneda 嵌入，我们可以将一般对象 $\mathfrak{X}$ 视为一种操作

$$L \mapsto \mathrm{Hom}_{KRS(M)}(L, \mathfrak{X})$$

它为每个拉格朗日子流形关联一个（1-）范畴。我们需要这种视角来处理我们版本的等变镜像对称（见下文）。它还有一个优点：我们可以立即处理支撑在奇异拉格朗日子流形上的对象 $\mathfrak{X}$，方法是将其视为作用于光滑拉格朗日子流形上的操作。

对于拓扑 S^1 作用，相关的全纯辛流形是移位余切丛：

$$M = T^\vee[-2]\mathbb{G}_m = \mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[s^{\pm 1}, t]$$

在 $\mathbb{Z}_2$-分次的世界中，它是辛的；在 $\mathbb{Z}$-分次的世界中，它是移位辛的。后一种情况简单得多，因为其中（光滑）拉格朗日子流形寥寥无几。事实上，唯一可能的 L 是零截面和余切纤维，而且它们的交方式非常简单。因此，在 $\mathbb{Z}$-分次的世界中， $KRS(T^\vee[-2]\mathbb{G}_m)$ 的一个对象应由以下数据构成：

(i) 一个 $\mathbb{C}[s^{\pm 1}]$-线性范畴 $\mathcal{C}$。(ii) 对每个 $\lambda \in \mathbb{C}^*$，都有一个 $\mathbb{C}[t]$-线性范畴 $\mathcal{D}_\lambda$。(iii) 对每个 λ，都有一个嵌入

$$\mathcal{C}|_\lambda \hookrightarrow \mathcal{D}_\lambda$$

其中源是 $\mathcal{C}$ 在 $s = \lambda$ 处的纤维，像是由支撑在 $t = 0$ 处的对象组成的 $\mathcal{D}_\lambda$ 子范畴。

(iv) 对每个 λ，都有一个嵌入

$$(\mathcal{D}_\lambda)|_0 \hookrightarrow \mathcal{C}$$

其中源是 $\mathcal{D}_\lambda$ 在 $t = 0$ 处的纤维，像是由支撑在 $s = \lambda$ 处的对象组成的 $\mathcal{C}$ 子范畴。

注 1.33。(iii) 和 (iv) 可能等价。它们源自考察 $KRS(T^\vee[-2]\mathbb{G}_m)$ 中零截面与余切纤维之间的态射，而我们尚未讨论这一点。

Teleman 的一个洞见是，“带有拓扑 S^1 作用的范畴”实际上是 $KRS(T^\vee[-2]\mathbb{G}_m)$ 的一个对象。在 $\mathbb{Z}$-分次的世界中，我们可以将其视为上述范畴系统。

关于 B 侧的 e 我们通过取一个带有函数 σ 的光滑簇 X，并令 $X \to \mathbb{C}^*$，得到一个例子。 g

$$\mathcal{C} = D^b(X) \qquad \text{and} \qquad \mathcal{D}_\lambda = D^b(Z_\lambda)$$

[11] 在第二个例子中，$\check{W}|_{\check{Z}_{-1}}$ 恒等于零，见例2.3。

其中 $Z_\lambda = \sigma^{-1}(\lambda)$。此时，(iii) 就转化为这样一个事实： $D^b(X)$ 在 $s = \lambda$ 处的纤维是 $\mathrm{Perf}(Z_\lambda)$，它同时也是 $D^b(Z_\lambda)$ 中 t 幂零作用的子范畴。而 (iv) 则是这样一个事实：在 $D^b(Z_\lambda)$ 中令 $t = 0$，即可恢复由 Z_λ 支撑的对象所构成的子范畴 $D^b_{Z_\lambda}(X) \subset D^b(X)$。

更一般地，我们可以取一个带有 R 荷的 LG 模型（X， W），并配备函数 $\sigma\colon X \to \mathbb{C}^*$。然后我们定义 $\mathcal{C} =$ 矩阵分解(X, W) 和 $\mathcal{D}_\lambda =$ 矩阵分解$(Z_\lambda, W|_{Z_\lambda})$。

关于 A hөкүмити -侧，我们可以通过取一个分次 Hamilton S^1-流形 X 并设置来得到一个例子。 g:

$$\mathcal{C} = \mathcal{W}(X) \qquad \text{and} \qquad \mathcal{D}_\lambda = \mathcal{W}_{S^1}(X)_\lambda$$

I如果动量映射的所有纤维都是正则的，我们应该能够将每个 $\mathcal{W}_{S^1}(X)_\lambda$ 替换为

$$\mathcal{W}(X/\!/_{\log|\lambda|}S^1, \arg(\pm\lambda))$$

如1.2截面中所讨论的。在猜想A 的情形下，若令 $\mathcal{C} = \mathcal{W}(X)$，令 $\mathcal{D}_\lambda = \mathcal{W}(Y)$ 对于 $\lambda \neq -1$，并令 $\mathcal{D}_{-1} = \mathcal{W}(Y \setminus D)$。

事实上，在 A 侧我们可以更直接地处理。完整的等变范畴 $\mathcal{W}_{S^1}(X)$ 自然地应当是 $KRS(T^\vee[-2]\mathbb{G}_m)$ 中的一个对象，支撑在某个拉格朗日子流形 L上，并且应当导出上述范畴系统。但我们不知道 B 侧是否存在与之类似的情形，参见注 1.17。

注 1.34。 如果我们采用 $\mathbb{Z}$-分次，且每个范畴 $\mathcal{D}_\lambda$ 都光滑且适当，那么 t 必定是挠元（因为 $\deg(t) = 2$）。由此可知，(iii) 必须是一个等价 $\mathcal{C}|_\lambda \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_\lambda$。在这种情况下，范畴$\mathcal{C}$ 决定了一切，因此本节前面描述的更简单的情形就足够了，参见 [30, 注 3。2]。在 KRS 2-范畴中，我们只有范畴 $\mathcal{C}$，支撑在拉格朗日子流形 $\{t = 0\}$上。

但例 1.32 表明，仅凭 $\mathbb{Z}$-分次这一假设，并不足以使更简单的情形成立。在该例中，我们有 $\mathcal{D}_{-1} = \mathcal{W}(\mathbb{C}^*)$，并且我们声称 $\mathbb{C}[t]$ 结构就是坐标函数，即

$$\mathcal{D}_{-1} \cong \operatorname{Spec}\mathbb{C}[t^{\pm 1}]$$

（参见例 2.3）。因此 $\mathcal{D}_{-1} \ncong 0$，但其中不包含任何支撑于 $t = 0$ 的对象。这个$KRS(T^\vee[-2]\mathbb{G}_m)$ 的对象支撑于不完备拉格朗日子流形 $\{s = -1, t \neq 0\}$。

2. Toric mirror symmetry

在本截面中，我们首先回顾镜像对称中的一些众所周知且可能都已得到确立的启发式方法。[12] 然后我们讨论一系列示例，为第 1 截面中的猜想提供证据。

2.1. 一般启发式方法。出发点是一个环面 $T \cong (\mathbb{C}^*)^n$。 T 的镜像就是对偶环面 $T^\vee$。从这里出发，我们通过应用以下两种构造得到更复杂的例子：

(1) 我们可以将 T 部分紧化为托里克簇 X。在镜像一侧，这对应于添加一个超势 $\check{W} \in \Gamma(\mathcal{O}_{T^\vee})$，因此 X 的镜像是一个朗道-金兹堡模型（$T^\vee, \check{W}$）。更准确地说， X 的托里克扇的射线在格中给出一个有限点集】【。

$$L = \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^*, T) = \mathrm{Hom}(T^\vee, \mathbb{C}^*)$$

且 $\check{W}$ 是相应的劳伦多项式。[13]

如果我们从 A 侧的缠绕 Fukaya 范畴 $\mathcal{W}(T)$ 出发，那么加入托里克边界∂X 会使该范畴发生变形，而这在镜像侧对应于将 $D^b(T^\vee)$ 变形为矩阵分解范畴 $\mathrm{MF}(T^\vee, \check{W})$。

[12]然而，要在浩如烟海的相关文献中逐一追溯所有参考文献，超出了作者的能力范围。[13]一种更为复杂的版本则包含托里克堆栈。

另一方面，向 $T^\vee$ 添加 $\check{W}$ 会通过在无穷远处引入停止点来改变 $\mathcal{W}(T^\vee)$。这意味着，某些非紧拉格朗日子流形会成为非零对象，而这些对象对应于 $D^b(X)$ 中由 ∂X 支撑的复形。

当然可以交换 T 和 $T^\vee$ 的角色，我们也可以对两侧同时执行这两种操作，因此环面朗兰兹–吉宁模型（X， W）的镜像是另一个环面朗兰兹–吉宁模型（$\check{X}$， $\check{W}$）。

（2）设 X 是底空间 B 上线丛 L 的全空间。给定对偶线丛的一个截面 $f \in \Gamma(B, L^\vee)$，我们在 X 上得到一个诱导超势 $W = pf$，其中 p 是纤维坐标。于是，LG 模型（X， W）等价于以下簇：

$$H = \{f = 0\} \subset B$$

更一般地，可以引入一个函数 $g \in \Gamma(\mathcal{O}_B)$ 并令 $W' = pf + g$，那么 LG 模型（X， W'）和（H， $g|_H$）是等价的。

在 B 侧，这一现象称为 Kn¨orrer 周期性，许多人（[20],.....）已经证明了X， W'） $\cong$MF（H, $g|_H$）。在 A 侧，类似的结果最近也已得到确立 [11, 定理 1]。

在这两种广为确立的启发式方法之外，我们再提出第三种，见第 1.3 节。

(3) 假设我们有一对如 (1) 所示的环面 LG 模型镜像对 (X, W), ($\check{X}, \check{W}$)。选择一参数子群 $l \in L$ 可确定 X 上的 S^1 作用，以及一个单项式函数 $l \in \Gamma(\mathcal{O}_{\check{X}})$。与 S^1 作用对应的镜像是函数：

$$\sigma = l$$

我们要求 W 在 S^1 作用下不变，也就是说， W 中的每个单项式都属于子格 $\langle l \rangle^\perp \subset L^\vee$。由此可知， σ 是 $\check{X}$ 上的处处不为零函数。

注 2.1。 这些启发式方法只有在以下假设下才能按上述方式成立： X 是恰当的或单调的，或者更一般地，满足 [1], 中的假设 1.4；该假设保证 $\check{W}$ 和 σ 不会受到涉及诺维科夫参数的任何高阶修正。

备注 2.2。 可以说，我们在此的阐述顺序颇为颠倒。由于托里克簇是向量空间的辛约化，因此可以根据启发式假设（1）、（1.7）“猜想” C、启发式假设（3），以及镜像为 $\mathbb{C}^N$ 是（（$\mathbb{C}^*$）^{N}， $\check{x}_1 + ... + \check{x}_N$）这一已知结果，推导出启发式假设（1）。而这似乎更接近托里克镜像对称性最初的物理推导。

例 2.3。 回顾非常简单的例 1.12 其中 $X = \mathbb{C}^2$。我们将其视为通过映射 $Y = \mathbb{C}$纤维化于 $\pi = xy$，该映射在 $D = \{0\}$上有一个奇异纤维。该纤维化由 S^1在 X 上的作用保持不变，其权为 $(1, -1)$。

根据上面的启发式（1）， X的镜像是 LG 模型 $\check{X} = (\mathbb{C}^*)^2$，其中 $\check{W} = \check{x} + \check{y}$。而启发式（3）指出， S^1 作用的镜像是函数 $\sigma = \check{x}/\check{y}$。如果我们想要一个 $\mathbb{Z}$-分次，唯一的选择是 $\deg(\check{x}) = \deg(\check{y}) = 2$，于是 $\deg(\check{W}) = 2$，但 $\deg(\sigma) = 0$，正如所要求的。

如果我们想要 让 $\mathbb{C}[s^{\pm 1}]$ 结构完全明确，我们可以改变坐标，并声明
镜像 o X 是

$$(\mathbb{C}^*_{\check{y}} \times \mathbb{C}^*_s, (1+s)\check{y}) \tag{2.4}$$

如果我们在 $s = -1$ 处切片，就只得到 $\mathbb{C}^*_{\check{y}}$，没有超势。因此，我们的“猜想” C 预测：

$$\mathcal{W}_{S^1}(X)_{-1} \cong D^b(\mathbb{C}^*)$$

这符合猜想 A，因为 $Y \setminus D = \mathbb{C}^*$ 是自镜像的。若在值 $s \neq -1$ 处切开，我们得到其镜像$Y = \mathbb{C}$，并且镜像两侧的范畴确实都为零。这支持了我们在例1.12中提出的论断。

$\mathbb{C}[t]$ 在 $D^b(\mathbb{C}^*_{\check{y}})$ 上的结构显然就是坐标函数 $t=\check{y}$ （参见注 1.21）。注意，这与分次相符，因为 $\deg(\check{y})=2$。它也与 $\mathcal{W}(\mathbb{C}^*)$ 上的 Borman-Sheridan 类相吻合；该类计数的是填补 puncture 后出现的额外全纯圆盘。从同一幅图中我们可以看出，底空间上的相对 Fukaya 范畴必定是

$$\mathcal{W}(Y,D)\cong \mathrm{MF}\big(\operatorname{Spec}\mathbb{C}[\check{y}^{\pm1}][[h]],\ h\check{y}\big)$$

这确实是（2.4）在 $s=-1$处的完备化，与猜想E相符。但最后这一观察并无实际意义，因为这两个范畴均为零。

我们可以更仔细地考察我们提出的等价 $\mathcal{W}(\mathbb{C}^*)\xrightarrow{\sim}\mathcal{W}_{S^1}(X)_{-1}$，也就是说，来自 G （1.25）的函子。如果 $\Lambda\subset\mathbb{C}^*$ 是从 0 到 ∞ 的一条弧，那么显然 $G(\Lambda)$ 将是一个 S^1-不变拉格朗日子流形 thimble L。我们的主张是，这样的 L 是 $\mathcal{W}_{S^1}(X)_{-1}$ 的一个生成元，并且具有自同态代数$\mathbb{C}[t^{\pm1}]$。想必可以直接验证这一主张。

最后，让我们履行在备注 1.30 中的承诺，讨论相对范畴 $\mathcal{W}(X,\pi^{-1}D)$。由于$\pi^{-1}(D)$ 在此处恰好就是托里克边界 $\{\check{x}\check{y}=0\}$，因此显然，相对范畴与以下对象互为镜像：

$$\mathrm{MF}\Big(\mathbb{C}[\check{x}^{\pm1},\check{y}^{\pm1}][[h]],\ h(\check{x}+\check{y})\Big)\ \cong\ \mathrm{MF}\Big(\mathbb{C}[\check{y}^{\pm1},s^{\pm1}][[h]],\ h(1+s)\check{y}\Big)$$

在此我们应用了与上述相同的坐标变换。我们看到，$\mathbb{C}[s^{\pm1}]$ 结构与$\mathbb{C}[[h]]$ 结构通过作用于乘积 $h(s+1)$ 而相互关联。由此可知，一旦我们在 $s=-1$ 处切片，h 方向上的变形就是平凡的；这就是我们的断言：加入 $\pi^{-1}(D)$ 不会使 $X\setminus D$ 的等变 Fukaya 范畴发生变形。但切片上的 $\mathbb{C}[t]$ 结构确实会发生变形，因为 $t=h\check{y}$。这应当是一种普遍现象。

2.2. 环面上的环面纤维化

例 2.5。 作为例 2.3的一种变体，令 X 为开簇 $X=\mathbb{C}^2\setminus\{xy=1\}$ 并考虑如下投影：

$$\pi=xy-1\colon\ X\to Y=\mathbb{C}^*$$

我们在例 X 中已经考虑过完全相同的1.15。它是一个代数环面纤维化，在 $D=\{1\}$ 上有一个奇异纤维，并且它再次在具有权重 $(1,-1)$ 的 S^1 作用下保持不变。与例2.3不同的是，现在 $Y=\mathbb{C}^*$ 是对数卡拉比–丘的，并且 $\mathcal{W}(Y)\neq 0$。因此，我们预期 $\mathcal{W}(X)$ 将支撑在整个 $\mathbb{C}^*_s$ 上，而不仅仅是在 $s=-1$上。

为应用镜像对称的启发式方法，我们将 X 视为超曲面：

$$X=(z-xy+1)\ \subset\mathbb{C}^2_{x,y}\times\mathbb{C}^*_z$$

The根据启发式方法（2），它等价于 LG 模 型：

$$\mathbb{C}^3_{x,y,p}\times\mathbb{C}^*_z,\quad W=p(z-xy+1)$$

若没有 W，镜像将是 $(\mathbb{C}^*)^4$，其超势为 $\check{W}=\check{x}+\check{y}+\check{p}$，并且 $\sigma=\check{x}/\check{y}$。$W$ 的存在会导致镜像发生部分紧化。为了解这是什么，我们进行坐标变换

$$z\mapsto pz,\quad y\mapsto pxy$$

于是现在 $W=z-y+p$。在镜像上，我们必须进行对偶坐标变换：

$$\check{p}\mapsto\check{p}\check{z}\check{y},\quad \check{x}\mapsto\check{x}\check{y}$$

因此镜像为

$$\mathbb{C}^3_{\check{y},\check{z},\check{p}}\times\mathbb{C}^*_{\check{x}},\quad \check{W}=(1+\check{x})\check{y}+\check{y}\check{z}\check{p}\tag{2.6}$$

其中有 $\sigma=\check{x}$。

运用启发式方法（3），我们可以去掉 $\check{y}$ 方向，从而得到镜像是超曲面 e

$$\check{H}=(1+\check{x}+\check{z}\check{p})\ \subset\mathbb{C}^2_{\check{z},\check{p}}\times\mathbb{C}^*_{\check{x}}$$

它实际上与 X同构。若将 $\check{H}$ 视为$\mathbb{C}^2$的一个开子集，$\check{p}$ 那么 $\sigma = -1 - \check{z}\check{p}$，正如例1.15中所述。我们在那里看到，在 σ 不同取值处切片支持我们的猜想。

˘完成 H 处 $\lambda = -1$ 会产生节点的形式平滑化，这与猜想 E中的相对 Fukaya 范畴 $\mathcal{W}(Y, D)$ 一致。然而，它并不等同于 $\check{H}$，这反映了镜像中的事实：$\mathcal{W}(X)$ 并非由不变拉格朗日子流形生成。由不变拉格朗日子流形生成的子范畴，也就是 $\mathcal{W}_{S^1}(X)_1 \cong D^b(\check{z}\check{p} = 0)$ 在 $t = 0$处的纤维，应当等价于由支撑在节点上的对象构成的子范畴

$$D^b_{\check{z}\check{p}=0}(\check{H}) \subset D^b(\check{H})$$

由支撑在节点上的对象构成的

前一个例子可以直接推广到环面 $Y = (\mathbb{C}^*)^n$ 上的秩 1 代数环面纤维化。给定一个除子 $D = (f) \subset Y$，我们有一个代数环面丛

$$X = (xy - f) \subset \mathbb{C}^2_{x,y} \times Y$$

其上有一个 S^1 作用，在（x，y）上的权为（1，-1），并固定 Y。

首先，我们构造 D的镜像。由于 D 是环面 Y 中的一个超曲面，因此我们可以使用启发式方法（2），将其替换为 LG 模型（$Y \times \mathbb{C}_p$，pf）。如果我们改为考虑（$Y \times \mathbb{C}^*_p$，pf），那么其镜像将是˘一个环面 Calabi–Yau D，其维数为 $n+1$，由 f的牛顿多面体确定。添加除子˙ ˙$p = 0$ 会在镜像上诱导出一个超势 W，而 W 是定义托里克边界的单项式∂D。

接下来，我们考虑 $Y \setminus D$的镜像。这是超曲面（$z - f$） $\subset \mathbb{C}^*_z \times Y$，因此它等价于定义在 $\mathbb{C}_p \times \mathbb{C}^*_z \times Y$上的 LG 模型 $W = p(z - f)$。于是，镜像为 $\check{D} \times \mathbb{A}^1_{\check{z}}$，其超势为 $\check{W}\check{z}$。根据启发式方法（2），我们推断 $Y \setminus D$ 的镜像是 $\check{D}$的托里克边界。

最后，我们可以讨论 X 的镜像。我们再次将 X 替换为 LG 模型 $\mathbb{C}^3_{x,\ y,\ p} \times Y$其中带有$W = (xy - f)p$。镜像是带有超势的 $\check{D} \times \mathbb{C}_{\check{y}} \times \mathbb{C}^*_{\check{x}}$

$$\check{x}\check{y} + \check{y} + \check{y}\check{W}$$

而 S^1 作用的镜像是 $\sigma = \check{x}$。利用启发式方法（2）并记 $s = \check{x}$，我们得到 X 的镜像是超曲面：

$$\check{X} = (\check{W} + 1 + s) \subset \check{D} \times \mathbb{C}^*_s$$

这与 $\check{D} \setminus \{\check{W} = -1\}$ 同构。投影到 s 上，将其表示为一个环面族，并在 $s = -1$ 处退化为托里克边界 $\partial\check{D}$。这与我们的猜想相符：$\mathcal{F}(X)$ 的一般纤维应为 $\mathcal{F}(Y)$，而在 $s = -1$ 处的纤维应为 $\mathcal{W}(Y \setminus D)$。

如果我们希望得到相对 Fukaya 范畴 $\mathcal{F}(Y, D)$，则如上所述，将 $Y \setminus D$ 与超曲面 $(z - f)$ 识别，并注意到 D 现在是除子 $z = 0$。因此，$\mathcal{F}(Y, D)$ 的镜像是

$$\check{D} \times \mathbb{A}^1_{\check{z}} \times \operatorname{Spf} \mathbb{C}[[h]], \quad \check{W}\check{z} + h\check{z}$$

˘这等价于在 $s = -1$处对 X 进行完备化。

2.3. 仿射空间上的环面纤维化。上一节的构造可以通过将 $Y = (\mathbb{C}^*)^n$ 部分紧化为 $\overline{Y} = \mathbb{C}^n$，从而适用于仿射空间上的秩 1 代数环面纤维化。在镜像一侧，这会在超势中引入 n 额外的单项式。

例 2.7. 在例 2.5中，我们可以将 Y 延拓到 $\overline{Y}=\mathbb{C}$ 并将 X 延拓到 $\overline{X}=\mathbb{C}^2$。显然，这只是例 2.3的平移，但在我们的镜像描述中，这一点不那么显而易见。加入除子 $\{z=0\}$ 会在 $\check{W}$中添加一个单项式，而镜像变为：

$$\mathbb{C}^3_{\check{y},\check{z},\check{p}}\times\mathbb{C}^*_{\check{x}},\quad W=\check{x}\check{y}+\check{y}+\check{y}\check{z}\check{p}+\check{z}$$

利用启发式方法（2），这等价于超曲面

$$(\check{y}\check{p}+1)\subset\mathbb{C}^2_{\check{y},\check{p}}\times\mathbb{C}^*_{\check{x}}$$

配备超势 $\check{x}\check{y}+\check{y}$。这是例 2.3 中的镜像。

例 2.8。 本文以例 1.1开篇，即辛流形 $X=T^*S^2$ 由超曲面（$xy-z^2+1$） $\subset\mathbb{C}^3$得到。它是一个在 $Y=\mathbb{C}$ 上方纤维化，并在两点 $D=$ （z^2-1处退化。现在来求其环面镜像。

我们从 D 的镜像出发，将其视为 $\mathbb{C}^*$ 内的一个除子。按照上一节的讨论，该镜像是 LG 模型

$$\check{D}=\mathrm{Tot}\left\{\mathcal{O}(-2)\to\mathbb{P}^1_{\check{u}:\check{v}}\right\},\quad \check{W}=\check{u}\check{v}\check{p}$$

其中 $\check{p}$ 是纤维坐标。注意， W 有两个孤立非退化临界点，这与其作为 D 的镜像相符。

其镜像是 $\mathbb{C}^*\setminus D$ 托里克边界 $\partial\check{D}$。带 puncture 曲面的镜像已得到充分研究，而$\partial\check{D}$ 是“气球链”镜像，参见例如[17]。

令 X^o 为 X 与环面的交，因此它是一个以 $\mathbb{C}^*$ 为底空间的代数环面纤维化，并且截去了一个光滑纤维。按照上一节的思路， X^o 的镜像仍为：

$$\check{X}^o=\check{D}\setminus\{\check{u}\check{v}\check{p}=-1\}\tag{2.9}$$

因此 X^o 是自镜像的。

为了得到的 镜像到其自身，我们取镜像到 X 的 LG 模型，并向其中添加一个额外项，以便..... 超势函数 al，且与 $\{z=0\}$ 对偶。结果为：

$$\check{D}\times\mathbb{C}_{\check{y}}\times\mathbb{C}^*_s,\quad \check{y}(1+s)+\check{y}\check{u}\check{v}\check{p}+\check{p}\check{u}^2$$

从几何角度解释这个模型稍微困难一些，但我们仍然可以做出一些观察：

- 如果我们将 s 固定为除 $s=-1$ 之外的任意值，那么该除子上的超势没有临界点，因此矩阵分解范畴为零。这与我们的猜想相符，因为$\mathcal{F}(Y)\cong 0$。

- 在除子 $\{s=-1\}$ 我们可以使用启发式方法（2）来移除 $\check{p}$ 方向，从而得到超曲面

$$\check{H}=(\check{y}\check{u}\check{v}+\check{u}^2)\subset\mathbb{P}^1_{\check{u}:\check{v}}\times\mathbb{C}_{\check{y}}$$

它是一个与节点同构的仿射簇。这符合我们的猜想，因为 $Y\setminus D$ 是裤子曲面。

- 在任意截面 $\{s=\lambda\}$ 上，的超势的临界点都包含在满足 $\check{v}\neq 0$ 的仿射图中。因此，我们可以删去轨迹 $\{\check{v}=0\}$ ，得到一个等价模型。经过显然的坐标变换后，结果为：

$$\mathbb{C}^3_{\check{u},\check{p},\check{y}}\times\mathbb{C}^*_s,\quad (\check{y}-\check{p})(1+s)+\check{y}\check{u}\check{p}\tag{2.10}$$

- 将此与例2.5进行比较颇有启发，具体来说，是 LG 模型（2.6）。在那里，我们看到节点的导出范畴出现在 $s=-1$，而一般纤维是节点的光滑化。这里，我们有一种更抽象的节点变形，其一般纤维为零。

在 A 侧，可以通过封闭一个穿孔或同时封闭两个穿孔来变形裤子曲面的缠绕范畴。例子 2.5 是前者，而此处是后者。

<escape>在所有这类例子中，我们都有 $Y=\mathbb{C}^n$ 因此 $\mathcal{W}(Y)\cong 0$。正如我们在第 1.5 节中所解释的，应当可以推出</escape>

$$\mathrm{Crit}(\check{W})\subset\{s=-1\}$$

而且很容易验证，上述两个例子中的情形确实如此。

2.4. 超托里克商。

例 2。 11. 流形 T^*S^2 不仅是辛流形，而且实际上是超K¨ahler 流形，并且可以构造为一个超K¨ahler 商的 $\mathbb{C}^4$。这为例 2.8 提供了另一种视角。

取超曲面

$$X=(xy+zw-1)\subset\mathbb{C}^4$$

其辛结构为 T^*S^3。若令 $U(1)$ 作用于 $\mathbb{C}^4$，其权为 $(1,-1,1,-1)$，则 X 保持不变，且该作用是自由的。在动量映射取值 $a=0$ 处进行辛商 T^*S^2，得到 T^*S^2。在 a 的其他取值处，我们得到一个非恰辛流形，它与 T^*S^2微分同胚；并且已知所有这些非恰辛商的缠绕范畴均为零 [24]。

因此，根据（1.7），我们预期谱分量 $\mathcal{W}_{S^1}(X)_\lambda$ 在 λ的某一个取值处等价于 $\mathcal{W}(T^*S^2)$，该取值为 $\lambda=1$ 或 $\lambda=-1$之一；而在 λ的所有其他取值处均为零。为确定符号，可以计算出：在 X中的拉格朗日子流形 S^3，配备其唯一的自旋结构，定义了 $\mathcal{W}_{S^1}(X)_1$ 的一个对象（见下文注释 2.17）。因此我们预期：

$$\mathcal{W}_{S^1}(X)_1\cong\mathcal{W}(T^*S^2)\qquad\text{and}\qquad\mathcal{W}_{S^1}(X)_\lambda\cong 0\ \text{ for }\lambda\neq 1$$

但我们可以进一步提升这一点，因为 X实际上受秩 2 环面 T保持，该环面分别作用于 (x,y) 和 (z,w)。这在商 T^*S^2 上诱导出一个剩余的 S^1 作用，这正是我们之前考察过的作用。显然的预言是：

$$\mathcal{W}_T(X)_{(\lambda,\lambda^{-1})}\cong\mathcal{W}_{S^1}(T^*S^2)_\lambda\qquad\text{and}\qquad\mathcal{W}_T(X)_{(\lambda,\mu)}\cong 0\ \text{ for }\lambda\mu\neq 1\tag{2.12}$$

将 X 通过 xy 投影到 $\mathbb{C}$，可将其展示为一个秩 2 代数环面纤维化，并在两个点$D_0=\{0\}$、$D_1=\{1\}$处退化，如猜想 A所述。取 S^1 的商，我们恢复了先前关于 T^*S^2的图景：它是一个秩 1 环面纤维化，并在除子 $D=D_0\cup D_1$处退化。

现在我们可以构造环面镜像；由于这里有一个秩 2 环面作用，镜像应定义在 Spec $\mathbb{C}[s_1^{\pm},s_2^{\pm}]$上。按照上一节的规定，所得结果是 Landau-Ginzburg 模型 $\mathbb{C}^3_{\check{y},\ \check{w},\ \check{p}}\times(\mathbb{C}^*)^2_{s_1,\ s_2}$ 其满足：

$$\check{W}=\check{y}\check{w}\check{p}+(1+s_1)\check{y}+(1+s_2)\check{w}\tag{2.13}$$

为了得到 T^*S^2 的镜像，我们限制在除子 $s_1s_2=1$上，这经过显然的坐标变换后便得到（2.10）。同样容易验证，对任意值 $s_1s_2=\lambda$，令 $\lambda\neq 1$ 会得到一个没有临界点的超势。因此，我们的预测（2.12）与镜像一致。

如果令 $s_1=-1$ 和 $s_2=-1$，我们就再次得到裤子曲面的镜像。但采用这种方法，我们在 $MF(\check{y}\check{w}\check{p})$ 上得到一个 $\mathbb{C}[t_1,t_2]$结构，其中两个 HH^2类分别是 $t_1=\check{y}$和 $t_2=\check{w}$。它们对应于分别封住两个穿孔的镜像。

另请注意，Crit($\check{W}$) 包含于 $\{s_1=s_2=-1\}$，这对应于这样一个镜像事实： $\mathcal{W}_T(X)_{(-1,-1)}$是唯一非零的谱分量。

前面的例子可以直接推广到更高维情形。

例 2.14。我们可以将 $T^*\mathbb{CP}^n$ 作为 $\mathbb{C}^{2n+2}$ 的超 Kähler 商，得到辛流形。取超曲面

$$X = (x_0y_0 + ... + x_ny_n - 1) \cong T^*S^{2n+1}$$

然后对 X 取关于 S^1 作用的辛商，其权为 $(1, -1, ..., , -1)$。在 $a = 0$处，我们得到 $T^*\mathbb{CP}^n$，而在 a 的其他取值处，我们得到与之微分同胚但非恰当的对象。因此，我们预期只会出现一个非零谱分量，而关于自旋结构的计算（注释 2.17）表明，该谱分量应出现在 $\lambda = (-1)^{n+1}$处。所有其他谱分量都应为零。

此外，由于这个 S^1 只是一个作用于 X 的秩为 $n+1$ 的环面 T 的一参数子群，我们预期：

$$\mathcal{W}_T(X)_{(\lambda_0,...,\lambda_n)} \cong \begin{cases} \mathcal{W}_{T/S^1}(T^*\mathbb{CP}^n)_{(\lambda_1,...,\lambda_n)} & \text{for } \lambda_0\lambda_n = (-1)^{n+1} \\ 0 & \text{for } \lambda_0\lambda_n \neq (-1)^{n+1} \end{cases} \tag{2.15}$$

我们有一个投影

$$\pi = (x_1y_1, ..., x_ny_n) : X \to \mathbb{A}^n$$

这表明 X 是一个代数环面纤维化，如猜想A中所述，其在由超平面构成的一个“单形”上发生退化：

$$D = \bigcup_{i=1}^{n} \{z_i = 0\} \cup \{z_1 + ... + z_n = 1\}$$

经过对 S^1 取商后，我们得到 $T^*\mathbb{CP}^n$ 的类似图景（但现在这是猜想 A 中构造的一个轻微推广）。超平面配置 $\mathbb{A}^n \setminus D$ 的补空间可以视为裤子曲面的高维类比。

X 的环面镜像是 $\mathbb{C}^{n+2}_{\check{p}\,\check{y}_0\,,,...,\check{y}_n} \times (\mathbb{C}^*)^{n+1}_{s_0,...,s_1}$，其中

$$\check{W} = \check{p}\check{y}_0...\check{y}_n + \sum_{i=0}^{n}(1 + s_i)\check{y}_i \tag{2.16}$$

其中，$S^1)^n$ 对 X 的作用与给定的 $\mathbb{C}[s_0^{\pm 1}, ..., s_n^{\pm 1}]$ 结构互为镜像。若我们令所有 $s_i = -1$，则这将化简为 $\mathrm{MF}(\check{p}\check{y}_0...\check{y}_n)$，[18] 已证明它是 $\mathbb{A}^n \setminus D$的镜像。因此，这与我们的猜想 A一致。

为了得到 $T^*\mathbb{CP}^n$ 的镜像，我们应将其限制在除子 $\{s_0...s_n = (-1)^{n+1}\}$ 上，这给出：

$$\check{W}' = \check{p}\check{y}_0...\check{y}_n + \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{s_1...s_n}\right)\check{y}_0 + \sum_{i=1}^{n}(1 + s_i)\check{y}_i$$

如果我们准备忘记环面作用的信息，那么就可以大大简化这一点。临界轨迹 $\check{W}'$ 包含于 $\{s_i = -1, \forall i\}$中，因此通过在该轨迹处完成并反复应用（2），我们可以将其化简为以下模型：

$$\mathbb{C}^2_{\check{p},\check{y}}, \quad \check{p}\check{y}^{n+1}$$

因此，断言是

$$\mathcal{W}(T^*\mathbb{CP}^n) \cong \mathrm{MF}(\check{p}\check{y}^{n+1})$$

而且直接验证这一点并不难。[14] 但这种描述掩盖了 $\mathbb{C}[s_1^{\pm 1}, ..., s_n^{\pm 1}]$结构。

[14]拉格朗日子流形 $\mathbb{CP}^n$ 应映到沿着 $\check{p} = 0$的结构层，而余切纤维则应映到沿着$\check{y} = 0$的结构层。

备注 2.17。 一个 S^1 在 S^k 上的作用会在 S^1 上诱导出一个哈密顿 $X = T^*S^k$作用，进而 X 中的不变拉格朗日球面定义了 $\mathcal{W}_{S^1}(X)_1$ 或 $\mathcal{W}_{S^1}(X)_{-1}$ 的一个对象，如备注 1.4所述。要判断它属于 $+1$ 还是 -1，我们需要对自旋结构做一个简单的计算，这是对我们针对 T^*S^2所做计算的推广。

或者，根据备注 1.9，我们可以询问拉格朗日对应 Γ 是否给出 $\mathcal{W}_{S^1}(X \times X//S^1)_1$ 或 $\mathcal{W}_{S^1}(X \times X//S^1)_{-1}$中的一个对象。但这与前面的计算相同。

S^k 的标架丛（在同伦意义下）仅为 $SO(k+1)$，而 S^k 上的唯一自旋结构是双覆盖 $\mathrm{Spin}(k+1) \to SO(k+1)$。假设我们的 S^1 作用于 S^k，且该作用是 $SO(k+1)$的一个子群，它旋转一个平面并固定其正交的 $k-1$ 子空间。在标架丛上诱导的作用是显然的，而轨道是 $\pi_1(SO(k+1))$中的非平凡元素。因此，对于这一 S^1 作用，拉格朗日球面给出了$\mathcal{W}_{S^1}(X)_{-1}$的一个对象。

但现在假设 $k = 2n+1$ 是奇数，并且我们在 S^k 上取自由的 S^1 作用。由于这会旋转 $n+1$ 个正交平面，因此当且仅当 $n+1$ 是偶数时，所得的标架丛中的轨道才是可缩的，由此可知，拉格朗日子流形球面给出了 $\mathcal{W}_{S^1}(X)_{(-1)^{n+1}}$ 的一个对象。

我们应该能够利用前两个例子中的方法，处理向量空间被环面取双曲¨ahler商的任意情形。

例 2.18. 设 Y 是 $\mathbb{CP}^2$ 在一点处的爆破的余切丛。我们可以将 Y 构造为 $\mathbb{C}^8$ 关于 $U(1)^2$ 的超凯勒商，其中该群按以下权作用：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

因此，它是一个 6 维仿射簇的辛商。

$$X = \{x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = \alpha,\ x_3y_3 + x_4y_4 = \beta\} \subset \mathbb{C}^8$$

（对于一般的 α, β），由一个秩为二的环面作用。通过带有（x_1y_1, x_2y_2）的 $\mathbb{A}^2$ 进行投影，表明 X 是一个代数环面纤维化，其在一个除子上发生退化，该除子是四个超平面的并集：

$$D = \{z_1z_2(z_1 + z_2 - \alpha)(z_1 + z_2 + \beta - \alpha) = 0\}$$

的环面镜像 X 可以使用第 2.1 节中的启发式方法构造，第一步是转向定义在 $\mathbb{C}^{10}$上的 LG 模型。其结果是托里克簇

$$\mathrm{Tot}\left\{\mathcal{O}(-1)^{\oplus 2}_{\check{p},\check{q}} \to \mathbb{P}^1_{\check{u}:\check{v}}\right\} \times \mathbb{C}^3_{\check{y}_1,\check{y}_2,\check{y}_3} \times (\mathbb{C}^*)^4_{s,s_2,s_3,s_4} \tag{2.19}$$

带有超势：

$$\check{W} = \check{q}\check{u}\check{y}_1\check{y}_2 + \check{p}\check{v}\check{y}_3 + (1+s_1)\check{y}_1 + (1+s_2)\check{y}_2 + (1+s_3)\check{y}_3 + (1+s_4)\check{q}\check{v}$$

现在假设 α 和 β 都为实数，从而 D 是一个实超平面配置的复化，并进一步假设 $\beta > \alpha > 0$。那么我们可以将 $\mathbb{A}^2 \setminus D$ 切分为两个开集，一个是三角形超平面的补集，另一个是正方形超平面的补集，参见 [23, 例 2.1。5]第一个开集在拓扑上是一个“4d 裤子曲面”，这正是由 $T^*\mathbb{CP}^2$ 产生的超平面配置，正如我们在前一个例子中所看到的那样。第二个开集是两个 2d 裤子曲面的直积，这将由 $T^*\mathbb{CP}^1 \times T^*\mathbb{CP}^1$ 产生。

在 B 侧，簇（2.19）可由两个开图覆盖。令 $s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = -1$，这样在 $\check{q}\check{u}\check{y}_1\check{y}_2 + \check{p}\check{v}\check{y}_3$中只剩下 $\check{W}$中的项。于是，在图 $\{\check{v} \neq 0\}$上，我们可以根据启发式规则（2）去掉变量 $\check{p}$和 $\check{y}_3$，剩下的恰好是 4 维裤子曲面的镜像。在图 $\{\check{u} \neq 0\}$ 上，我们得到两个 2 维裤子曲面镜像的直积。因此，在这个层面上，无论在镜像的哪一侧，都可以将其分解为两个开集，并得到相同的结果。

然而，如果我们重复 B 侧的讨论，但不将 s_i 设为 -1，那么第二个图就不是直积，这反映出 Y 实际上并不是 $T^*\mathbb{CP}^2$ 与 $T^*\mathbb{CP}^1 \times T^*\mathbb{CP}^1$ 的并集。

“切分为开子集并重新粘合”的方法此前已用于理解各种情形下的镜像对称。前面的例子表明，超环面簇的镜像对称也可以用这种方式来研究；若能将其发展为一个一般性的理论，将会很有意思。

2.5. 超越环面纤维化。 最后，我们以两个例子作结。这两个例子并非代数环面纤维化，但确实符合第 1.2 节的更一般框架，不过其中涉及的流形并非 Liouville 流形。

例 2.20. 令 $X = \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ 带有对角 S^1 作用：

$$(x : y,\, z : w) \mapsto (\lambda x : y,\, \lambda z : w)$$

动量多面体是一个区间，对于区间中的一般值，辛商为$\mathbb{CP}^1$。但区间内部有一个奇异值。奇异纤维的光滑轨迹为 $U = S^1 \times \mathbb{C}^*$，因此 $U/S^1 = \mathbb{C}^*$。

如果我们想将其视为环面纤维化，最好的做法就是取有理映射：

$$\pi = xw : yz \;:\; \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1 \dashrightarrow \mathbb{CP}^1$$

Away 由这两个基点可知，这是一个具有两个奇异纤维的秩一代数环面纤维化。 s. X 的镜像是 LG 模型 $(\mathbb{C}^*)^2_{\check{x},\,\check{z}}$ 其中 $\check{W} = \check{x} + 1/\check{x} + \check{z} + 1/\check{z}$，而 S^1 作用的镜像是 $\sigma = \check{x}\check{z}$。改变坐标可得：

$$(\mathbb{C}^*)^2_{\check{x},s},\quad \check{W} = (1 + s^{-1})\check{x} + (1 + s)/\check{x}$$

如果我们将其限制在一个一般值 s，就会得到 $\mathbb{CP}^1$ 的镜像（带有一些特定的系数）。但在$s = -1$，我们得到的是 $\mathbb{C}^*$，其超势为零，正如猜想 B 所预测的那样。

这个例子显然是例 2.3 的一种紧化，而这个镜像显然是该镜像的一种变形。一个稍微有趣一些的观察是，我们可以删除轨迹 $\{xw = yz\}$，从而得到一个真正的秩为 1 的代数环面纤维化，其底空间为 $\mathbb{C}$，并且具有两个临界点；它与 T^*S^2 辛同构。因此，我们预期这个例子也可以看作例 2.8 的一种紧化/变形。在镜像一侧，这一点确实成立：我们可以将 (2.10) 变形为

$$\check{W} = \check{y}\check{p}(\check{u} - h) + (1 - s)(\check{y} - \check{p})$$

然后，对于 h 的一般取值，这等价于 $(\mathbb{C}^*)^2$，并带有超势 $(1 + s)(\check{y} - h/\check{y})$。

例 2.21。考虑簇 $X = K_{\mathbb{CP}^1}$，它可以表示为 $\mathbb{C}^3_{x,\,y,\,p}$ 在 S^1 以权 (1, 1, −2) 作用下的辛商。它与 T^*S^2 微分同胚，但并非辛同胚。

现在考虑由 $\mathbb{C}^3$ 上权 $(-1, 0, 1)$ 的作用所诱导的 S^1 在 X 上的作用。该作用保持投影：

$$\pi = xyp : X \to \mathbb{C}$$

这与猜想 A 的设定并不完全相同，因为 π 的一般纤维是 $\mathbb{C}^*$，但 0 上方的纤维是 X 的托里克边界，且它有两个节点。对于动量映射的一般取值，辛商是 $\mathbb{C}$，但有两个奇异值，每个奇异纤维都包含其中一个节点。

X 的镜像是 $(\mathbb{C}^*)^2$，其中

$$\check{W} = \check{x} + \check{p} + \frac{\check{p}^2}{\check{x}}$$

以及镜像到 S^1 作用的结果为 $\sigma = \check{p}/\check{x}$。改变坐标可得 $\check{W} = (1 + s + s^2)\check{x}$。

因此，在 s 的一般取值处，我们得到 $\mathbb{C}$的镜像；而在二次式 $1+s+s^2$ 的两个根处，我们得到$\mathbb{C}^*$。这正如（1.7）和猜想 B所预言的那样。如果我们在 s 的两个特殊取值中的任意一个处，对 MF$((\mathbb{C}^*)^2, \check{W})$ 取完备化，就会得到一个相对 Fukaya 范畴 $\mathcal{W}(\mathbb{C}, \{0\})$ 的副本，这与备注 1.24相符。

这个例子实际上是 T^*S^2 的一次退化，纤维化的两个临界点发生了碰撞。从超凯勒¨视角来看，例 2.11 清楚地揭示了这一点——为了得到 $K_{\mathbb{CP}^1}$ 而不是 T^*S^2 ，我们将复矩映射设为零，并对奇异超曲面取辛商：

$$Y = (xy + zw) \subset \mathbb{C}^4$$

在镜像一侧， Y 是奇异的这一事实并不会造成问题。从方程中移除常数项只会使我们删除除子 $\check{p} = 0$，因此 Y 的镜像是 $\mathbb{C}^2_{\check{y},\ \check{w}} \times (\mathbb{C}^*)^3_{\check{p},\ s_1,\ s_2}$ 其超势为（2.13）。为了得到 X 的镜像，我们令 $s_1 s_2 = 1$，然后利用启发式（2）消去两个变量，便恢复出刚刚得到的镜像。

前面的例子表明，在研究超凯勒簇的镜像对称时，处理多个超平面重合的退化超平面配置应该不会有问题。

在最后一个例子中，我们考虑这样一种情形：辛几何一侧不只是一个流形 X，而是一个朗道-金兹堡模型（X， W）。这表明，我们可以将第 1 节中的所有想法应用于这一更一般的情形。

例 2.22。 与例 1.12 一样，我们取 $X = \mathbb{C}^2$ ，其 S^1 作用的权为 (1， -1)。现在添加 S^1-不变超势 $W = xy$。

的存在 W 诱导出我们在例 2.4中发现的镜像的部分紧化，结果如下：2.3。很容易计算得出：

$$\left(\mathbb{C}_{\check{y}} \times \mathbb{C}^*_s,\ (1+s)\check{y}\right)$$

事实上，这有一个非退化临界点，因此矩阵分解范畴等价于 $D^b(pt)$，这与 W 的 Fukaya-Seidel 范畴相符。

如果我们将 s 设为任意值 $\lambda \neq -1$ ，就会得到带有超势 $(1+\lambda)\check{y}$ 的 $\mathbb{C}_{\check{y}}$ ，其矩阵分解范畴为零；但对于 $\lambda = -1$ ，我们得到 $D^b(\mathbb{C})$。因此，镜像对称表明， W 的 S^1-等变 Fukaya-Seidel 范畴（假设这类对象可以定义）除 $\lambda = -1$ 处的分支外都为零。

X 在正则值处的辛商是 $\mathbb{C}$，而 W 下降后给出了坐标函数。在奇异值处，我们的猜想告诉我们应当用 $\mathbb{C}^*$ 替换 $\mathbb{C}$ 。($\mathbb{C}$, z) 的 Fukaya-Seidel 范畴为零，但 ($\mathbb{C}^*$, z) 的 Fukaya-Seidel 范畴等价于 $D^b(\mathbb{C})$ （其环面镜像）。因此，来自镜像对称和辛约化的图景彼此吻合。

致谢。我们受益于与 Denis Auroux、Kenji Fukaya、Dan Pomerleano、Ivan Smith 和 Jack Smith 的交流、建议及通信。YL 获英国皇家学会 URF\R\180024和英国工程与自然科学研究委员会资助项目 EP/W015889/1 的部分支持。

References

[1] M. Abouzaid、D. Auroux、L. Katzarkov，托里克簇爆破上的拉格朗日纤维化与超曲面的镜像对称。Pub. math. de l'IH ´ES 123, 199 282 2016 1205 0053 – ( )。arXiv: 。M. Aganagic, [2]《镜像对称中的纽结范畴化，第二部分：拉格朗日子流形》。预印本。arXiv: 2105 06039 。T. [3] Braden、A. Licata、N. Proudfoot、B. Webster，Gale 对偶与 Koszul 对偶。Adv. Math. ( )，第 4 期，2002 2049– 225 2010 。[4] G. Cazassus，通过 EG_N 的余切丛研究等变拉格朗日 Floer 同调，预印本，arXiv:2202.10097。[5] A. Daemi、K. Fukaya，Atiyah–Floer 猜想：一种表述、证明策略及推广。现代几何学：庆祝 Simon Donaldson 的工作，23–57，Proc. Sympos. Pure Math.，99，Amer. Math. Soc.，Providence，RI，2018 1707 03924 。arXiv: 。K. Fukaya，无阻碍浸入拉格朗日对应与过滤 A infinity 函子。[6]预印本。arXiv:1706.02131[7] K. Fukaya，题为"除子补集的拉格朗日 Floer 理论及其在规范理论中的可能应用"的报告，载于《镜像对称与相关主题》，迈阿密，2019 年 1 月 28 日至 2 月 2 日。[8] S. Ganatra，缠绕 Fukaya 范畴的辛上同调与对偶性。学位论文（博士）——麻省理工学院。2012。arXiv:1304.7312[9] E. Gonzalez、H. Iritani，全纯圆盘计数的 Seidel 元与势函数。Eduardo Gonzalez、Hiroshi Iritani。Tohoku Math. J. (2 69 3 327 368 2017 1301 5454) ( ): - ( )。arXiv: 。K. Hendricks、R. [10] Lipshitz、S. Sarkar，-等变 Floer 同调的单纯构造。Proc. Lond. Math. Soc. (3)，121(6):1798–1866，2020。[11] M. Jeffs，奇异超曲面的镜像对称与 Fukaya 范畴。Adv. Math. 397 (2022)，论文编号 108116，36 页。arXiv:2012.09764[12] Y. Kim、S-C Lau、X. Zheng。 T-等变圆盘势函数与 SYZ 镜像构造。预印本，arXiv:1906.11749。[13] A. Lauda、A. Licata、A. Manion，从超托里克几何到带边 Floer 同调：经由 m=1 振幅子，预印本，arXiv:2009.03981[14]Y. Lekili、M. Lipyanskiy，被缝 Floer 理论中的几何复合。Adv. Math. 236 (2013)，1–23。arXiv:1003.4493[15] Y. Lekili、M. Maydanskiy，某些有理同调球的辛拓扑。Comment. Math. Helv. 89 (2014)，第 3 期，571–596。 [16] 2 1211 4632 Y. Lekili、T. Perutz，- [17] 环面的算术镜像对称。预印本。arXiv: 。Y. Lekili、A. Polishchuk，节点叠曲线上的 Auslander 序与部分缠绕 Fukaya 范畴。J. Topol. 11 (2018)，第 3 期，615–644。[18] Y. Lekili、A. Polishchuk，高维裤子空间的同调镜像对称。Compos. Math. 156 (2020 7, 1310 1347)，第 – 期。S. Ma'u、K. Wehrheim、C. Woodward， A_∞ 拉格朗日对应的函子。Selecta [19] Math. (N.S.) 24 (2018)，第 3 期，1913—2002。arXiv:1601.04919[20] D. Orlov，奇异性三角范畴与朗道-金兹堡模型之间的等价。Sb. Math. 197 (2006 1827 1840, 0503630)，- arXiv:math/ Y-G. Oh、H. Tanaka，缠绕 Fukaya 范畴上的连续相干作用。[21]预印本，arXiv:1911.00349。[22] J. Pascaleff，射影平面的镜像与双节点三次曲线中的 Floer 上同调。Duke Math. J. 163 (2014 13, 2427 2516 1109 3255)，第 – 期。arXiv: 。N. Proudfoot，超托里克几何与拓扑综述。Contemp. [23] Math. 460, 323 338 0705 4236 - 。 [24] 262 2014 1035 arXiv: 。A. Ritter，通过 Gromov–Witten 不变量研究负线丛的 Floer 理论。Adv. Math. ( )，–1106。[25] P. Seidel， π_1 辛自同构群与量子同调环中的可逆元。Geom. Funct. Anal. 7 (1997 6, 1046 1095 9511011)，第 – 期。 arXiv:dg-ga/ P. Seidel，辛 Floer 上同调的一个长正合序列。[26]Topology 42 (2003)，第 5 期，1003–1063。[27] P. Seidel，Fukaya 范畴与变形，国际数学家大会论文集，第二卷（北京，2002 2002, 351 360 0206155 ），Higher Ed. Press，北京，第 – [28] 页。arXiv:math/ E. Segal，带 puncture 曲面上的线场与扭曲导出范畴。预印本，arXiv:2106.05745。[29] K. Siegel，Dehn 扭转的平方与变形辛不变量。J. Symplectic Geom. 19 (2021)，第 5 期，1189–1280。[30] C. Teleman，规范理论与镜像对称。国际数学家大会论文集——首尔 2014 1309 1332, 2014 1404 6305 。 第二卷，– Kyung Moon Sa，[31]首尔，。arXiv: 。D. Tonkonog，-不变拉格朗日子流形的闭开弦映射。Algebr. Geom. Topol. 18 1，15 2018 68 1504 01621 ( )，第 – 期。arXiv: 。[32] D. Tonkonog，从辛上同调到拉格朗日枚举几何。Adv. Math. 352 (2019)，717–776。arXiv:1711.03292[33] C. Woodward、G. Xu，一个开量子 Kirwan 映射。预印本，arXiv:1806.06717。