arXiv:2304.10975v1 [cs.LO] 21 Apr 2023

一个简单证明：超一致性蕴含割消去

Gilles Dowek*和 Olivier Hermant †

摘要

我们给出一个简单而直接的证明，证明在模演绎中，超一致性蕴含割消去性质。该证明可以视为对超一致性蕴含证明规范化这一证明的简化。它还借鉴了语义割消去证明中的一些思想，这类证明通过证明无割演算的完备性来实现割消去。作为一项应用，我们将本研究与高阶逻辑中涉及V-复合体的割消去定理进行比较。

1 引言

模演绎是谓词逻辑的一种扩展，其中某些公理可以由重写规则替代。例如，公理 $x + 0 = x$ 可以由重写规则 $x + 0 \longrightarrow x$ 替代，而公理 $x \subseteq y \Leftrightarrow \forall z\,(z \in x \Rightarrow z \in y)$可以由重写规则 $x \subseteq y \longrightarrow \forall z\,(z \in x \Rightarrow z \in y)$替代。

在模演绎的模型论中，区分以下两点非常重要：某些命题在计算上等价，即同余（例如$x \subseteq y$ 和 $\forall z\,(z \in x \Rightarrow z \in y)$），在这种情况下，它们在模型中的值应相同；以及它们可证地等价，在这种情况下，它们的值可能不同。这促使 [4], 引入了一种称为真值代数的海廷代数推广，以及 $\mathcal{B}$值模型的概念，其中 $\mathcal{B}$ 是真值代数。我们将对所有真值代数$\mathcal{B}$ 都存在 $\mathcal{B}$值模型的理论称为超一致的，并给出了超一致理论的例子，以及一致但并非超一致的理论的例子。

在模演绎中，有些理论存在无法规范化的证明。但是，我们已在 [4] 中证明，超一致的理论中的所有证明都可以规范化。证明思路是观察到，可约候选集 [9] 可以构成一个真值代数，因此超一致的理论具有以可约候选集为值的模型。接着，这种模型的存在意味着证明规范化 [8]，进而意味着割消去。

*法国巴黎第十三区，意大利大道 23 号，邮政信箱 CS 81321，邮编 75214，gilles.dowek@polytechnique.edu, http://www-roc.inria.fr/who/Gilles.Dowek/.

†法国巴黎阿萨斯街 21 号，邮编 75006，ISEP，olivier.hermant@isep.fr，http://perso.isep.fr/ohermant。

许多理论，尤其是算术和简单类型理论，都是超一致的，因此我们可以将Gentzen定理和Girard定理作为推论得到。

本文尝试通过将可约候选集代数 $\mathcal{C}$ 替换为更简单的真值代数 $\mathcal{S}$，来简化这一证明。可约候选集是证明的集合。我们证明，可以用每个此类集合中证明的结论来替代该证明，从而为真值获得序列式集合，而不是证明集合。

尽管我们的模型中的真值是序列式集合，但我们的割消去证明使用了另一种真值代数，其元素是上下文集合：上下文代数 Ω；该代数恰好是一个海廷代数。对于理论的任意 $\mathcal{S}$值模型，我们构造一个第二层模型，即 Ω值模型，并利用它证明割消去。

这一技术给出了一种证明，同时采用了证明割消去所用两种方法的思想：证明项规范化和无割演算的完备性。前一种方法带来了真值代数和中性证明的思想，后一种方法则带来了如下思想：构造一个模型，使得在该模型中有效的序列式具有无切证明。

本文是同一作者所著会议论文 [7] 的扩展版本。本版本修正了 [7] 中的一些技术性错误。第 2 节回顾了理解第 3 节所需的技术内容，而第 3 节是本文的核心。本文最后分析了在高阶逻辑情形下得到的证明，并将其与其他语义证明进行比较。

2 超一致性

为使本文内容自洽，本节将回顾模去演绎、真值代数、 $\mathcal{B}$-值模型和超一致性的定义。更详细的介绍见 [4]。

2.1 模演绎

模演绎 [6, 8] 是谓词逻辑（单排序或多排序谓词逻辑）的扩展，其中理论由一组公理 Γ和一个同余 $\equiv$定义，而同余本身由一个合流重写系统定义，该系统将项重写为项，并将原子命题重写为命题。

本文中我们考虑自然演绎规则。这些规则经过修改，以考虑同余 $\equiv$ 。例如，蕴涵消去规则的表述并非通常的形式。

$$\frac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}$$

但由于

$$\frac{\Gamma \vdash C \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}\, C \equiv A \Rightarrow B$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash B}\ \text{公理（}B \equiv A\ \text{对于某个}\ A\ \text{在}\ \Gamma\text{中）}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash C} \Rightarrow_i,\quad C \equiv A \Rightarrow B \qquad \frac{\Gamma \vdash C \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B} \Rightarrow_e,\quad C \equiv A \Rightarrow B$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash C} \wedge_i,\quad C \equiv A \wedge B \qquad \frac{\Gamma \vdash C}{\Gamma \vdash A} \wedge_e\text{-1},\quad C \equiv A \wedge B$$

$$\frac{\Gamma \vdash C}{\Gamma \vdash B} \wedge_e\text{-2}, C \equiv A \wedge B$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash C} \vee_i\text{-1},\quad C \equiv A \vee B$$

$$\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash C} \vee_i\text{-2}, C \equiv A \vee B \qquad \frac{\Gamma, A \vdash C \qquad \Gamma, B \vdash C \qquad \Gamma \vdash D}{\Gamma \vdash C} \vee_e, D \equiv A \vee B$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash A} \top_i, A \equiv \top \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A} \bot_e, B \equiv \bot$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B} \forall_i, B \equiv \forall x A,\ \text{且}\ x \notin FV(\Gamma) \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash C} \forall_e, B \equiv \forall x A\ \text{和}\ C \equiv (t/x)A$$

$$\frac{\Gamma \vdash C}{\Gamma \vdash B} \exists_i, B \equiv \exists x A\ \text{和}\ C \equiv (t/x)A \qquad \frac{\Gamma \vdash C \qquad \Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash B} \exists_e,\ C \equiv \exists x A,\ \text{以及}\ x \notin FV(\Gamma, B)$$

图 1：模论自然演绎规则

所有演绎规则都以类似于图 1 所示的方式进行了修改。请注意，通常要求 x 不在 $\forall_i$ 和 $\exists_e$ 规则中自由出现的附带条件仍然成立，侧条件对此作了非正式的提示。更全面的介绍请参见 [8] 。

在模演绎中，有些理论存在不规范化的证明。例如，在由重写规则$P \longrightarrow (P \Rightarrow Q)$构成的理论中，命题 Q 有一个证明

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P \vdash P \Rightarrow Q}\,\text{axiom} \quad \dfrac{}{P \vdash P}\,\text{axiom}}{P \vdash Q}\,\Rightarrow\text{-elim}}{\vdash P \Rightarrow Q}\,\Rightarrow\text{-intro} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P \vdash P \Rightarrow Q}\,\text{axiom} \quad \dfrac{}{P \vdash P}\,\text{axiom}}{P \vdash Q}\,\Rightarrow\text{-elim}}{\vdash P}\,\Rightarrow\text{-intro}}{\vdash Q}\,\Rightarrow\text{-elim}$$

不能规范化。而在其他一些理论中，例如由重写规则 $P \longrightarrow (Q \Rightarrow P)$构成的理论，所有证明都强规范化。

在模演绎中，与谓词逻辑一样，闭正规证明总是以引入规则结束。因此，如果一个理论能够仅用重写规则（即不含公理）在模演绎中表达，使得证明

模这些重写规则强正规化，那么该理论是一致的，具有析取性质和见证性质，并且针对该理论的各种证明搜索方法都是完备的。

许多理论都可以仅通过重写规则在模演绎框架中表达，尤其是算术和简单类型理论。模演绎中的切规则概念涵盖了针对这些理论分别定义的切规则概念。例如，简单类型理论可以定义如下。

定义 1（简单类型理论 [2, 5, 3]）类型是归纳定义的:

- ι和 o 是类属，
- 如果 T 和 U 是类，则 $T \to U$ 是一个类。

该语言包含以下常量：$K_{T,U}$，其类型为 $T \to U \to T$；$S_{T,U,V}$，其类型为 $(T \to U \to V) \to (T \to U \to T \to V$ $\dot{\top}$ o $\dot{\bot}$ o $\dot{\Rightarrow}$ $\dot{\wedge}$ $\dot{\vee}$)，类型为 和类型为，，以及类型为 $o \to o \to o$；$\forall_T$ 和 $\exists_T$，其类型为 $(T \to o) \to o$；函数符号 $\alpha_{T,U}$，其秩为 $\langle T \to U;\ T、\ U\rangle$；以及谓词符号 ε，其秩为 $\langle o\rangle$。

规则如下

$$\alpha(\alpha(\alpha(S_{T,U,V}, x), y), z) \longrightarrow \alpha(\alpha(x, z), \alpha(y, z))$$

$$\alpha(\alpha(K_{T,U}, x), y) \longrightarrow x$$

$$\varepsilon(\dot{\top}) \longrightarrow \top$$

$$\varepsilon(\dot{\bot}) \longrightarrow \bot$$

$$\varepsilon(\alpha(\alpha(\dot{\Rightarrow}, x), y)) \longrightarrow \varepsilon(x) \Rightarrow \varepsilon(y)$$

$$\varepsilon(\alpha(\alpha(\dot{\wedge}, x), y)) \longrightarrow \varepsilon(x) \wedge \varepsilon(y)$$

$$\varepsilon(\alpha(\alpha(\dot{\vee}, x), y)) \longrightarrow \varepsilon(x) \vee \varepsilon(y)$$

$$\varepsilon(\alpha(\dot{\forall}_T, x)) \longrightarrow \forall y\ \varepsilon(\alpha(x, y))$$

$$\varepsilon(\alpha(\dot{\exists}_T, x)) \longrightarrow \exists y\ \varepsilon(\alpha(x, y))$$

2.2 真值代数

定义 2（真值代数）设 B 为一个集合，其元素称为真值；设 B^+ 为 B 的子集，其元素称为正真值；设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{E}$ 为 $\wp(B)$ 的子集；设 $\top$ 和 $\bot$ 为 B、$\tilde{\Rightarrow}$、$\tilde{\wedge}$、$\tilde{\vee}$ 中的元素；设 $\tilde{\wedge}$、$\tilde{\vee}$ 为从 $B \times B$ 到 B的函数；设 $\forall$ 为从 $\mathcal{A}$ 到 B 的函数；设 $\exists$ 为从 $\mathcal{E}$到 B的函数。若集合 B^+ 在直觉主义演绎规则下封闭，则结构 $\mathcal{B} = \langle B、B^+、\mathcal{A}、\mathcal{E}、\top、\bot、\tilde{\Rightarrow}、\tilde{\wedge}、\tilde{\vee}、\forall、\exists\rangle$ 称为真值代数；也就是说，对于所有 a、b、c 属于 B、A 属于 $\mathcal{A}$ 以及 E 属于 $\mathcal{E}$,

1. 如果 $a \tilde{\Rightarrow} b \in B^+$ 和 $a \in B^+$，那么 $b \in B^+$,
2. $a \tilde{\Rightarrow} b \tilde{\Rightarrow} a \in B^+$,

3. $(a \Rightarrow b \Rightarrow c) \Rightarrow (a \Rightarrow b) \Rightarrow a \Rightarrow c \in B^+$, 4. $\top \in B^+$, 5. $\tilde{\bot} \Rightarrow a \in B^+$, 6. $a \Rightarrow b \Rightarrow (a \tilde{\wedge} b) \in B^+$, 7. $(a \tilde{\wedge} b) \Rightarrow a \in B^+$, 8. $(a \tilde{\wedge} b) \Rightarrow b \in B^+$, 9. $a \Rightarrow (a \tilde{\vee} b) \in B^+$, 10. $b \Rightarrow (a \tilde{\vee} b) \in B^+$, 11. $(a \tilde{\vee} b) \Rightarrow (a \Rightarrow c) \Rightarrow (b \Rightarrow c) \Rightarrow c \in B^+$, 12. 集合 $a \Rightarrow A = \{a \Rightarrow e \mid e \in A\}$ 属于 $\mathcal{A}$，集合 $E \Rightarrow a = \{e \Rightarrow a \mid e \in E\}$ 属于 $\mathcal{A}$，13. 如果 A 的所有元素都属于 B^+，那么 $\tilde{\forall}\, A \in B^+$, 14. $\tilde{\forall}\, (a \Rightarrow A) \Rightarrow a \Rightarrow (\tilde{\forall}\, A) \in B^+$, 15. 如果 $a \in A$，那么 $(\tilde{\forall}\, A) \Rightarrow a \in B^+$, 16. 如果 $a \in E$，那么 $a \Rightarrow (\tilde{\exists}\, E) \in B^+$, 17. $(\tilde{\exists}\, E) \Rightarrow \forall\, (E \Rightarrow a) \Rightarrow a \in B^+$。

命题 1 任意海廷代数都是真值代数。运算 $\tilde{\top}$、$\tilde{\wedge}$、$\tilde{\forall}$ 是最大下界，运算 $\tilde{\bot}$、$\tilde{\vee}$、$\tilde{\exists}$ 是最小上界，运算 $\Rightarrow$ 是海廷代数的蕴含运算，并且 $B^+ = \{\top\}$。

证明。见 [4]。

定义 3（完备性）若真值代数满足 $\mathcal{A} = \mathcal{E} = \wp(B)$，则称其为完备的；也就是说，对于 B 的所有子集 A，$\forall\, A$ 和 $\exists\, A$ 都存在。

定义 4（有序真值代数）有序真值代数是真值代数连同 B 上的一个关系 $\sqsubseteq$，使得

- $\sqsubseteq$ 是一个序关系，即具有自反性、反对称性和传递性的关系，
- B^+ 是向上封闭的，
- $\tilde{\top}$ 和 $\tilde{\bot}$ 是极大元素和极小元素，
- $\tilde{\wedge}$、$\tilde{\vee}$、$\tilde{\forall}$ 和 $\tilde{\exists}$ 是单调的，$\Rightarrow$ 是左反单调、右单调的。

定义5（完备有序真值代数）如果 B 的每个子集都有 $\sqsubseteq$ 的最大下界，则称有序真值代数是完备的。

2.3 模型

定义6（$\mathcal{B}$-结构）设 $\mathcal{L}=\langle f_i, P_j\rangle$ 是谓词逻辑的语言， $\mathcal{B}$ 是真值代数。对于语言 $\mathcal{L}$， $\mathcal{B}$-结构 $\mathcal{M}=\langle M, \mathcal{B}, \hat{}f_i, \hat{}P_j\rangle$是满足以下条件的结构： f_i 是从 M^n 到 M 的函数，其中 n 是符号 f_i 的元数； P_j 是从 M^n 到 B 的函数，其中 n 是符号 P_j的元数。

此定义可以平凡地扩展到多排序语言。

定义 7（指称）设 $\mathcal{B}$ 是一个真值代数， $\mathcal{M}$ 是一个 $\mathcal{B}$-结构， ϕ 是一个赋值。 $\mathcal{M}$ 中命题和项的指称按如下方式归纳定义：

- $[\![x]\!]_\phi=\phi(x)$， $\hat{}$
- $[\![f(t_1, ..., t_n)]\!]_\phi=f([\![t_1]\!]_\phi, ..., [\![t_n]\!]_\phi), \hat{}$
- $[\![P(t_1, ..., t_n)]\!]_\phi=P([\![t_1]\!]_\phi, ..., [\![t_n]\!]_\phi),_\sim$
- $[\![\top]\!]_\phi=\top,_\sim$
- $[\![\bot]\!]_\phi=\bot,$
- $[\![A\Rightarrow B]\!]_\phi=[\![A]\!]_\phi \tilde{\Rightarrow} [\![B]\!]_\phi,$
- $[\![A\wedge B]\!]_\phi=[\![A]\!]_\phi \tilde{\wedge} [\![B]\!]_\phi,$
- $[\![A\vee B]\!]_\phi=[\![A]\!]_\phi \tilde{\vee} [\![B]\!]_\phi,_\sim$
- $[\![\forall x\ A]\!]_\phi=\forall\{[\![A]\!]_{\phi+(d/x)} \mid d\in M\},$
- $\tilde{}$ $[\![\exists x\ A]\!]_\phi=\exists\{[\![A]\!]_{\phi+(d/x)} \mid d\in M\}。$

请注意，含有量词的命题的指称可能没有定义，但如果真值代数是完备的，其指称总是有定义的。

定义 8（上下文和序列式的指称）上下文 $A_1, ..., A_n$ 的指称 $[\![A_1, ..., A_n]\!]_\phi$ 就是命题 $A_1\wedge ...\wedge A_n$ 的指称。序列式 $A_1, ..., A_n\vdash B$ 的指称 $[\![A_1, ..., A_n\vdash B]\!]_\phi$ 就是命题 $(A_1\wedge ...\wedge A_n)\Rightarrow B$ 的指称。

定义 9（模型）如果对于所有赋值 ϕ， $[\![A]\!]_\phi$ 都有定义且是正真值，则称命题 A 在 $\mathcal{B}$-结构 $\mathcal{M}$ 中有效，并称 $\mathcal{B}$-结构 $\mathcal{M}$ 是 A 的模型。

考虑由一组公理 Γ和一个同余 $\equiv$定义的模演绎理论。若 $\mathcal{B}$-结构 $\mathcal{M}$ 满足以下条件，则称其为理论 $\Gamma, \equiv$ 的模型： Γ 的所有公理在 $\mathcal{M}$ 中均有效；并且对于所有满足 $A\equiv B$ 的项或命题 A 和 B，赋值 ϕ, $[\![A]\!]_\phi$ 和 $[\![B]\!]_\phi$ 均有定义，且 $[\![A]\!]_\phi=[\![B]\!]_\phi$。

相对于这一模型概念，模演绎是可靠且完备的。

命题 2（可靠性与完备性）命题 A在由公理 Γ 和同余 $\equiv$构成的理论中可证明，当且仅当它在 Γ的所有模型中都有效，其中真值代数是完备、有序且完整的。

证明。参见 [4]。

2.4 超一致性

定义 10（超一致的）在模演绎中，由公理 Γ 和同余 $\equiv$ 构成的理论是超一致的，是指对于所有完备、有序且完整的真值代数 $\mathcal{B}$，它都有一个 $\mathcal{B}$值模型。

命题 3 简单类型理论是超一致的。

证明。设 $\mathcal{B}$ 是一个完备的真值代数。我们如下构造模型 $\mathcal{M}$ 。论域 M_ι是任意非空集合，例如单元素集 $\{0\}$；论域 M_o是 $\mathcal{B}$，论域 $M_{T\to U}$是从 M_T到 M_U的函数集合 $M_U^{M_T}$。$\hat{}$ 语言中符号的解释为 $S_{T、U、V} = a \mapsto (b \mapsto (c \mapsto \hat{}\,\hat{}\,\hat{}\,\tilde{}\,\dot{}\,\tilde{}\,\dot{}\,a(c)(b(c))))$、$K_{T、U} = a \mapsto (b \mapsto a)$、$\hat{}\alpha(a,b) = a(b)$、$\hat{}\varepsilon(a) = a$、$\top = \top$、 $\bot = \bot$、$\hat{\dot{\Rightarrow}} = \tilde{\Rightarrow}$、$\hat{}\dot{\wedge} = \tilde{\wedge}$、$\hat{}\dot{\vee} = \tilde{\vee}$、$\hat{}\dot{\forall}_T = a \mapsto \tilde{\forall}(Range(a))$、$\hat{}\dot{\exists}_T = a \mapsto \tilde{\exists}(Range(a))$，其中 $Range(a)$是函数 a的值域。模型 $\mathcal{M}$ 是简单类型理论的 $\mathcal{B}$值模型。

3 割消去

3.1 序列式的代数

定义 11（中性证明）如果一个证明的最后一条规则是公理规则或消去规则，而不是引入规则，则称该证明为中性证明。

现在我们来定义无切证明的概念。我们不采用语法定义（即不含割），而是给出一个正向的归纳定义。

定义 12（无切证明）无切证明按如下方式归纳定义：

- 以公理规则结束的证明是无切证明，
- 以引入规则结束，且最后一条规则的前提均由无切证明证成的证明是无切的，
- 以消去规则结束的证明，如果最后一条规则的主要前提由中性无割证明证明，而其他前提由无切证明证明，则该证明是无切的。

定义 13（序列演算代数）

- $\tilde{\top}$ 是这样一组序列式： $\Gamma \vdash C$ 它们具有中性无割证明，或者满足 $C \equiv \top$。
- $\tilde{\bot}$ 是具有中性无割证明的序列式集合 $\Gamma \vdash C$。
- $a \tilde{\wedge} b$ 是具有中性无割证明的序列式集合 $\Gamma \vdash C$，或者满足 $C \equiv (A \wedge B)$，其中 $(\Gamma \vdash A) \in a$ 且 $(\Gamma \vdash B) \in b$。
- $a \tilde{\vee} b$ 是具有中性无割证明的序列式集合 $\Gamma \vdash C$，或者满足 $C \equiv (A \vee B)$，其中 $(\Gamma \vdash A) \in a$ 或 $(\Gamma \vdash B) \in b$。
- $a \tilde{\Rightarrow} b$ 是具有中性无割证明的序列式集合 $\Gamma \vdash C$，或者满足 $C \equiv (A \Rightarrow B)$，并且对于所有上下文 Σ，若 $(\Gamma, \Sigma \vdash A) \in a$，则有 $(\Gamma, \Sigma \vdash B) \in b$。
- $\tilde{\forall} S$ 是序列式的集合 $\Gamma \vdash C$，其中的序列式具有中性无割证明，或者满足 $C \equiv (\forall x\ A)$，且对每个项 t 和每个属于 S的 a，$(\Gamma \vdash (t/x)A) \in a$。
- $\tilde{\exists} S$ 是序列式的集合 $\Gamma \vdash C$，其中的序列式具有中性无割证明，或者满足 $C \equiv (\exists x\ A)$，且存在某个项 t 和某个属于 S的 a，使得 $(\Gamma \vdash (t/x)A) \in a$。

令 S 为满足 $\top$、 $\bot$、 $\tilde{\wedge}$、 $\tilde{\vee}$、 $\tilde{\Rightarrow}$、 $\tilde{\forall}$、$\tilde{\exists}$ 以及任意交封闭的最小序列式集合的集合。

命题 4 结构 $\mathcal{S} = \langle S, S, \wp(S)\ \wp(S)\ \top, \bot, \tilde{\Rightarrow}, \tilde{\wedge}, \tilde{\vee}, \tilde{\forall}, \tilde{\exists}, \subseteq \rangle$ 是一个完备、全序的真值代数。

证明。由于所有真值均为正数，因此显然满足定义 2 的条件$\tilde{}$ $\tilde{}$。因此， $\mathcal{S}$ 是真值代数。由于 $\forall$ 和 $\exists$ 的论域定义为 $\wp(S)$，该代数是完备的。由于它对任意交封闭， S 的所有子集都有最大下界，因此 S 的所有子集都有最小上界，且该代数是完备的。

注。代数 $\mathcal{S}$ 不是海廷代数。特别是， $\top \tilde{\wedge} \top$ 和 $\top$不同：第一个集合包含序列式 $\vdash \top \wedge \top$，但第二个不包含。

命题 5 对于所有 S的元素 a 、上下文 Γ以及命题 A 和 B

- $(\Gamma, A \vdash A) \in a$,
- if $(\Gamma \vdash B) \in a$ then $(\Gamma, A \vdash B) \in a$,
- 若（Γ、 A、 $A \vdash B$） $\in a$ 则（Γ、 $A \vdash B$） $\in a$,
- 若（$\Gamma \vdash A$） $\in a$ 且 $B \equiv A$ 则（$\Gamma \vdash B$） $\in a$,
- 如果 $(\Gamma \vdash A) \in a$ 那么 $\Gamma \vdash A$ 有一个无切证明。

证明。第一个命题可通过注意到序列式 $\Gamma, A \vdash A$ 有一个中性无割证明来证明。其余命题可通过对 a的构造进行简单归纳来证明。例如，如果 $a = c \tilde{\wedge} d$，那么：

- 如果 $\Gamma \vdash B$ 有一个中性无割证明，那么 Γ也有一个中性无割证明，$A \vdash B$。否则 $B \equiv (C \wedge D)$，$(\Gamma \vdash C) \in c$ 和$(\Gamma \vdash D) \in d$。根据归纳假设，$(\Gamma, A \vdash C) \in c$和 $(\Gamma, A \vdash D) \in d$，因此根据定义 $\Gamma, A \vdash B \in c \tilde{\wedge} d$。
- 如果 Γ、A、$A \vdash B$有一个中性无割证明，那么 Γ、$A \vdash B$也有。否则$B \equiv (C \wedge D)$、(Γ、A、$A \vdash C) \in c$以及 (Γ、A、$A \vdash D) \in d$。根据归纳假设，(Γ、$A \vdash C) \in c$且 (Γ、$A \vdash D) \in d$，因此根据定义，Γ、$A \vdash B \in c \tilde{\wedge} d$。

- 若 $\Gamma \vdash A$ 有中性无割证明，则 $\Gamma \vdash B$也有。否则 $A \equiv (C \wedge D) \equiv B$，($\Gamma \vdash C) \in c$ 且$(\Gamma \vdash D) \in d$，因此根据定义 $\Gamma \vdash B \in c \tilde{\wedge} d$。
- 若 $\Gamma \vdash A$ 有中性无割证明，则无需证明其他内容。否则$A \equiv (C \wedge D)$，($\Gamma \vdash C) \in c$ 且$(\Gamma \vdash D) \in d$。根据归纳假设，$\Gamma \vdash C$ 和 $\Gamma \vdash D$ 有无切证明，我们可以添加一个 ∧引入规则，从而得到 $\Gamma \vdash A$的无切证明。

考虑一个超一致的理论 Γ、≡。根据定义，它有一个 $\mathcal{S}$-模型 $\mathcal{M}$。在本文其余部分，$\mathcal{M}$ 指的是这个模型。其论域写作 M。

命题6（代换）设 A 是一个命题，ϕ 是一个赋值，x 是一个变量，t 和 u 是项。设 $\phi' = \phi + ([\![t]\!]_\phi / x)$。则 $[\![(t/x)u]\!]_\phi = [\![u]\!]_{\phi'}$ 且 $[\![(t/x)A]\!]_\phi = [\![A]\!]_{\phi'}$。

证明。通过结构归纳。

3.2 上下文的代数

定义 14（纤维）设 b 是一个序列式集合，A 是一个命题，σ 是一个代换，f 是一个将命题映射到序列式集合的函数。我们将 A 在 b, $b \lhd^f_\sigma A$ 上方的参数化纤维定义为上下文集合$\Gamma = A_1, \cdots, A_n$，使得对于任意 Δ，若 $(\Delta \vdash \sigma A_i) \in f(A_i)$，则对任意 i，有 $(\Delta \vdash \sigma A) \in b$。

定义 15（Γ-适配上下文）设 $\Gamma = A_1,...,A_n$ 是一个命题集合，ϕ 是一个赋值，σ 是一个代换。设 Δ 是一个命题集合。若对于任意 i，$(\Delta \vdash \sigma A_i) \in [\![A_i]\!]_\phi$，则称 Δ 对 ϕ, σ 是 Γ-适配的（简称：Δ 是 Γ-适配的）。

命题 7（适配上下文的组合）设 Γ_1、Γ_2 为两个命题集。设 ϕ 为一个赋值，σ 为一个代换，且 Δ_1、Δ_2 为针对 ϕ、σ 的Γ_1-适配（分别为 Γ_2-适配）上下文。那么，

- Δ_1, Δ_2 *is* Γ_1, Γ_2*-adapted for* ϕ, σ*.*

- 如果 $\Delta_1 = \Delta$、B、B，那么 Δ、B 是针对 ϕ 的 Γ_1-适配的。

证明。令 A 为 Γ_1 的一个成员，且 A' 为 Γ_2的一个成员。$(\Delta_1 \vdash \sigma A)$ 根据定义有 $\in [\![A]\!]_\phi$，且 $(\Delta_2 \vdash \sigma A')$ 有 $\in [\![A']\!]_\phi$。于是，

- $(\Delta_1, \Delta_2 \vdash \sigma A)$ 有 $\in [\![A]\!]_\phi$，且 $(\Delta_1, \Delta_2 \vdash \sigma A')$ 根据命题 5 的第二点有 $\in [\![A']\!]_\phi$。

若 Δ_1 符合假设，则根据命题 5 的第三点，$(\Delta, B \vdash \sigma A)$ 有 $\in [\![A]\!]_\phi$。

定义 16（外层值）令 A 为一个命题，我们将上下文集合 $[A]$ 定义为上下文集合 $\Gamma = A_1, \cdots, A_n$，使得对于任意赋值 ϕ、任意代换 σ和任意上下文 Δ，只要对任意i 都有 $(\Delta \vdash \sigma A_i) \in [\![A_i]\!]_\phi$ （换言之， Δ 是 Γ-适配的），就有 $(\Delta \vdash \sigma A) \in [\![A]\!]_\phi$。注意， $[A]$ 恰好是 $[\![A]\!] \lhd_\sigma^{[\![-]\!]} A$。

命题 8 对于任意上下文 Γ、任意命题 A 和 B,

- $(\Gamma, A) \in [A]$,
- 若 $\Gamma \in [B]$，则 $(\Gamma, A) \in [B]$,
- 若 $(\Gamma, A, A) \in [B]$，则 $(\Gamma, A) \in [B]$,
- 若 $\Gamma \in [A]$ 且 $B \equiv A$，则 $\Gamma \in [B]$,
- 若 $\Gamma \in [A]$，则 $\Gamma \vdash A$ 具有无切证明。

证明。根据定义和命题 5，这一结论可直接得出。对于第一点，考虑某些 ϕ, σ，以及一个对于 ϕ, σ 是 (Γ, A)-适配的 Δ。特别地，根据定义 16，$(\Delta \vdash \sigma A) \in [\![A]\!]_\phi$，这正是需要证明的内容。第二点限制了上下文集合：如果 Δ 是 (Γ, A)-适配的，那么显然它也是 Γ-适配的，并且满足定义 16 的条件。类似地，对于第三点，如果 Δ 是 (Γ, A, A)- 适配的，那么它就是 (Γ, A)- 适配的。第四点由命题 5 得出，因为根据模型的定义， $[\![A]\!]_\phi = [\![B]\!]_\phi \quad \mathcal{M}$。最后一点是命题 5 的推论。

定义 17（上下文代数）设 Ω 为包含所有形如 $[A]$ 的集合（其中 A 是某个命题）的最小上下文集合族，并且对任意交封闭。

注：请注意，Ω 中的元素 c 始终可以写成以下形式

$$c = \bigcap_{i \in \Lambda_c} [A_i]$$

命题9 按包含关系排序的集合 Ω 是一个完备海廷代数。

证明。由于 Ω 按包含关系排序，且对任意交封闭，Ω 的任意子集的最大下界都可定义为其所有元素的交集，并且始终存在。因此，Ω 的所有子集也都有最小上界，即其所有上界的最大下界。

这些被定义为零元、二元和无穷元最大下界，而运算ˇ⊥、ˇ∨ 和ˇ∃ 被定义为零元、二元和无穷元最小上界。最后，两个元素a 和 b 的箭头ˇ⇒ 是Ω中所有满足 $a \cap c \leq b$的 c 的最小上界

$$a \Rightarrow b = \check{\exists} \{c \in \Omega \mid a \cap c \leq b\}$$

要证明Ω是一个海廷代数，ˇ⇒ 必须具有某些特定性质[17]。以下条件是必要且充分的:

$$a \leq b \Rightarrow c \text{ iff } a \cap b \leq c$$

根据格论的基本原理，逆向蕴含直接由ˇ⇒的定义得出，但正向蕴含则需要一些推导。设 $\Gamma = A_1$、 $\cdots$、 A_n，并假设它属于 $a \cap b$，我们的目标是证明 $\Gamma \in c = \bigcap [C_i]$。设 C 是其中一个 C_i，我们来证明 $\Gamma \in [C]$。

ˇ展开假设可知， $a \leq \exists \mathsf{D}$，其中$\mathsf{D} = \{d \mid b \cap d \leq c\}$；或者再进一步展开（见（2）：

$$a \quad \leq \quad \bigcap \left\{ [E] \mid \bigcup \mathsf{D} \subseteq [E] \right\} \tag{1}$$

我们首先证明 $\bigcup \mathsf{D} \subseteq [\Gamma \Rightarrow C]$，其中 $\Gamma \Rightarrow C$ 表示 $A_1 \Rightarrow \cdots A_n \Rightarrow C$，稍后将在 (1) 中利用这一点。

设 $d \in \mathsf{D}$，且 $\Delta \in d$。根据命题 8，我们有 $(\Delta, \Gamma) \in d$ 和 $(\Delta, \Gamma) \in a \cap b \subseteq b$。因此，$(\Delta, \Gamma) \in b \cap d$，又由于 $d \in \mathsf{D}$，$(\Delta, \Gamma) \in c \subseteq [C]$。

现在我们通过对 n （ Γ 的基数）进行归纳来证明：若 $(\Delta, \Gamma) \in [C]$，则 $\Delta \in [\Gamma \Rightarrow C]$。当 $n = 0$ 时，这显然成立。否则，我们应用归纳假设，得到 $(\Delta, A_1) \in [\Gamma_1 \Rightarrow C]$。设 ϕ 为一个赋值， σ 为一个代换， Σ_Δ 为一个 Δ-适配上下文。我们必须证明 $(\Sigma_\Delta \vdash \sigma\Gamma \Rightarrow \sigma C)$ =($\Sigma_\Delta \vdash \sigma A_1 \Rightarrow \sigma\Gamma_1 \Rightarrow \sigma C$) 属于 $[\![\Gamma \Rightarrow C]\!]_\phi = [\![A_1]\!]_\phi \hat{\Rightarrow} [\![\Gamma_1 \Rightarrow C]\!]_\phi$。

令 Σ_{A_1} 使得 $\Sigma_{A_1} \vdash \sigma A_1 \in [\![A_1]\!]_\phi$。 Σ_{A_1} 是 A_1-适配的，并且根据命题 7 Σ_Δ， Σ_{A_1} 是 Δ、A_1-适配的。因此， Σ_Δ， $\Sigma_{A_1} \vdash \sigma\Gamma_1 \Rightarrow \sigma A \in [\![\Gamma_1 \Rightarrow C]\!]_\phi$。这恰好意味着，根据 $\hat{\Rightarrow}$的定义 13， $\Sigma_\Delta \in [\![A_1]\!]_\phi \hat{\Rightarrow} [\![\Gamma_1 \Rightarrow C]\!]_\phi$。因此，根据定义 16本身， $\Delta \in [A_1 \Rightarrow \Gamma_1 \Rightarrow C]$。

因此， $[\Gamma \Rightarrow C]$ 是 D 的上界，并且根据 (1)，也是 a的上界。根据关于 Γ的假设，$\Gamma \in a \cap b \subseteq a \subseteq [\Gamma \Rightarrow C]$。

我们将 Γ_i 称为上下文 A_{i+1}、...、 A_n。 Γ_i 是 Γ 的后缀，我们通过对 $i \leq n$进行归纳来证明 $\Gamma \in [\Gamma_i \Rightarrow C]$。基础情形刚刚已经在上面证明了。

对于归纳步骤，我们假设 $\Gamma \in [\Gamma_i \Rightarrow C] = [A_{i+1} \Rightarrow \Gamma_{i+1} \Rightarrow C]$。令 ϕ 为一个赋值， σ 为一个代换， Δ_Γ 为一个适配于 Γ 的上下文。

我们证明 $(\Delta_\Gamma \vdash \sigma\Gamma_{i+1} \Rightarrow \sigma C) \in [\![\Gamma_{i+1} \Rightarrow C]\!]_\phi$。由此可以得出 $\Gamma \in [\Gamma_{i+1} \Rightarrow C]$。

$(\Delta_\Gamma \vdash \sigma A_{i+1} \Rightarrow \sigma\Gamma_{i+1} \Rightarrow \sigma C) \in [\![A_{i+1} \Rightarrow \Gamma_{i+1} \Rightarrow C]\!]_\phi$ 根据归纳假设，因此

$$(\Delta_\Gamma \vdash \sigma A_{i+1} \Rightarrow \sigma\Gamma_{i+1} \Rightarrow \sigma C) \in [\![A_{i+1}]\!]_\phi \dot{\Rightarrow} [\![\Gamma_{i+1} \Rightarrow C]\!]_\phi$$

如果序列式 $\Delta_\Gamma \vdash \sigma A_{i+1} \Rightarrow \sigma\Gamma_{i+1} \Rightarrow \sigma C$ 有一个中性无割证明，我们就添加一个消去规则，其证明 $\Delta_\Gamma \vdash \sigma A_{i+1}$ 是无切证明（由命题 5 得出，因为 $(\Delta_\Gamma \vdash \sigma A_{i+1}) \in [\![A_{i+1}]\!]_\phi$）。这样便得到序列式 $\Delta_\Gamma \vdash \sigma\Gamma_{i+1} \Rightarrow \sigma C$ 的一个中性无割证明，因此根据定义 13，该序列式属于 $[\![\Gamma_{i+1} \Rightarrow C]\!]_\phi$。

否则，根据 $\dot{\Rightarrow}$ 的定义 13，由于 $\Delta_\Gamma \vdash \sigma A_{i+1} \in [\![A_{i+1}]\!]_\phi$，我们可以直接得出 $\Delta_\Gamma \vdash \sigma\Gamma_{i+1} \Rightarrow \sigma C \in [\![\Gamma_{i+1} \Rightarrow C]\!]_\phi$。

现在考虑前述陈述的第 n 种情况。它表明 $\Gamma \in [C]$，这正是需要证明的内容。对于满足 $c = \bigcap_{i\in\Lambda_c}[C_i]$ 的任意 C_i，该结论都成立，因此 Γ 属于它们的交集 c，最终 $a \cap b \subseteq c$ 得证。

a 和 b 的二元最小上界 $a \check{\vee} b$，是 Ω 中所有包含 $a \cup b$ 的元素的交集。根据定义 17

$$a \check{\vee} b = \bigcap_{(a\cup b)\subseteq c} c = \bigcap_{(a\cup b)\subseteq \bigcap [A_i]} (\bigcap [A_i]) = \bigcap_{(a\cup b)\subseteq [A]} [A]$$

$\check{}$ 集合 E 中各元素的无穷元最小上界 $\check{\exists}\, E$，是 Ω 中所有包含 E 的各元素之并的元素的交集。基于与上述相同的理由

$$\check{\exists}\, E = \bigcap_{(\bigcup E) \subseteq c} c = \bigcap_{(\bigcup E) \subseteq [A]} [A] \tag{2}$$

注意，零元最小上界 $\check{}\bot$ 对任意 $d \in \emptyset\}$ 都是 $\bigcap\{a \mid d \leq a,$，即 Ω 中所有元素的交集。此外，零元最大下界 $\check{}\top$ 是所有上下文的集合；我们将在下面的命题 10 中证明，它等于 $[\top] \in \Omega$，从而该构造是定义良好的。

最后请注意，Ω 可能是一个非平凡的海廷代数，但商海廷代数 $\mathcal{S}/S^+$ 总是平凡的，因为 $S^+ = S$。因此，定义 17 的构造并未归结为这个商，而是产生了信息量更丰富的结构。

下一个命题是我们证明中的关键引理，它表明，复合命题的外层值可以通过海廷代数 Ω 中相应的运算，由其组成部分的外层值求得。请注意，与大多数语义消割证明不同，[12, 3, 10], 我们在这个引理中直接证明等式，而不只是证明包含关系，尽管割消去证明尚未完成。

命题 10（关键引理）对于所有命题 A 和 B

- $[\top] = \check{\top}$,
- $[\bot] = \check{\bot}$,
- $[A \wedge B] = [A] \check{\wedge} [B]$,
- $[A \vee B] = [A] \check{\vee} [B]$,
- $[A \Rightarrow B] = [A] \check{\Rightarrow} [B]$,
- $[\forall x A] = \check{\forall} \{[(t/x)A] \mid t \in \mathcal{T}\}$, $\check{}$
- $[\exists x A] = \exists \{[(t/x)A] \mid t \in \mathcal{T}\}$。

其中， $\mathcal{T}$ 是该理论语言中的开放项集合。

证明。

- 设 Γ 为一个上下文，且 Δ 为一个适配上下文。根据定义 13，$(\Delta \vdash \top) \in \tilde{\top} = [\![\top]\!]$。因此 $\Gamma \in [\top]$，且 $[\top] = \check{\top}$。
- 集合 $\check{\bot}$ 是所有 $[C]$ 的交集。特别地，$\check{\bot} \subseteq [\bot]$。反过来，设 $\Gamma \in [\bot]$，设 ϕ 是一个赋值，σ 是一个代换，且 Δ 是 Γ 适配的。考虑任意一个 C。根据定义 13，$\Delta \vdash \bot$ 有一个中性无割证明。$\Delta \vdash \sigma C$ 也是如此，并且这个序列式属于 $[\![C]\!]_\phi$，因此 $\Gamma \in [C]$。所以 Γ 是所有 $[C]$ 中的一个元素，因而也属于它们的交集 $\check{\bot}$。
- 设 $\Gamma \in [A] \check{\wedge} [B] = [A] \cap [B]$。设 ϕ 为赋值，σ 为代换，且 Δ 为 Γ-适配的。我们有 $\Gamma \in [A]$ 和 $\Gamma \in [B]$，因此 $(\Delta \vdash \sigma A) \in [\![A]\!]_\phi$ $\Delta \vdash \sigma B \in [\![B]\!]_\phi$ 13, $\Delta \vdash \sigma\ A \wedge B \in [\![A \wedge B]\!]_\phi$ 且 $\Gamma \in [A \wedge B]$ 由定义 13 得到 (( )) 。于是 。反过来，设 $\Gamma \in [A \wedge B]$，设 ϕ 为赋值，σ 为代换，并考虑一个 Γ-适配上下文 Δ。我们有 $(\Delta \vdash \sigma(A \wedge B)) \in ([\![A]\!]_\phi \tilde{\wedge} [\![B]\!]_\phi)$。若 $\Delta \vdash \sigma(A \wedge B)$ 有一个中性无切证明，则由 $\wedge$-消去规则，$\Delta \vdash \sigma A$ 和 $\Delta \vdash \sigma B$ 也有中性无切证明，这表明 $(\Delta \vdash \sigma A) \in [\![A]\!]_\phi$ 且 $(\Delta \vdash \sigma B) \in [\![B]\!]_\phi$。否则，后两个结论直接由定义 13 得出。我们得出 $\Gamma \in [A]$ 和 $\Gamma \in [B]$，因此 $\Gamma \in [A] \cap [B] = \Gamma \in [A] \check{\wedge} [B]$。
- 为证明 $[A] \check{\vee} [B] \subseteq [A \vee B]$，只需证明 $[A \vee B]$ 是 $[A]$ 和 $[B]$的上界。令 $\Gamma \in [A]$，令 ϕ 为赋值，σ 为代换，并令 Δ 为 Γ-适配的。根据假设，$(\Delta \vdash \sigma A) \in [\![A]\!]_\phi$，根据定义 13，这意味着 $(\Delta \vdash \sigma(A \vee B)) \in ([\![A]\!]_\phi \tilde{\vee} [\![B]\!]_\phi) = [\![A \vee B]\!]_\phi$。因此 $\Gamma \in [A \vee B]$。类似地，$[B] \subseteq [A \vee B]$。反之，令 $\Gamma \in [A \vee B]$。令 C 使得 $[A] \cup [B] \subseteq [C]$，令 ϕ 为赋值，σ 为代换，并令 Δ 为 Γ-适配的。根据假设，$(\Delta \vdash \sigma(A \vee B)) \in ([\![A]\!]_\phi \tilde{\vee} [\![B]\!]_\phi)$。让我们考虑定义 13 中关于 $\tilde{\vee}$的三种情形。首先，如果 $\Delta \vdash \sigma(A \vee B)$具有中性无割证明。$\sigma A$

根据命题 7的第一点，is A-adaptedfor ϕ, σ，因此根据命题7，$(\Delta, \sigma A)$ 是 (Γ, A)-适配的。由于 $(\Gamma, A) \in [A] \subseteq [C]$ 根据命题8，序列式 $\Delta, \sigma A \vdash \sigma C$ 根据命题 8有一个无切证明。通过类似的论证，序列式 $\Delta, \sigma B \vdash \sigma C$ 有一个无切证明。因此，我们可以对这三个前提应用 $\vee$-elim 规则，并得到序列式 $\Delta \vdash \sigma C$ 的中性无割证明，该序列式属于 $[\![C]\!]_\phi$。其次，如果 $(\Delta \vdash \sigma A) \in [\![A]\!]_\phi$。根据定义15，$\Delta$ 是 A-适配的，并且由于根据命题 8，$A \in [A] \subseteq [C]$，我们必有 $\Delta \vdash \sigma C \in [\![C]\!]_\phi$。第三种也是最后一种情况 $(\Delta \vdash \sigma B) \in [\![B]\!]_\phi$ 是类似的。在这三种情况下，我们都有 $\Delta \vdash \sigma C \in [\![C]\!]_\phi$。因此，对于 $[A], [B]$ 的任意 $[C]$ 上界，$\Gamma \subseteq [C]$，并且它是它们的交集，即 $[A] \check{\vee} [B]$ 的元素。

- 让我们证明 $[A \Rightarrow B] \subseteq [A] \check{\Rightarrow} [B]$，根据定义，这等价于 $[A] \cap [A \Rightarrow B] \subseteq [B]$。设 $\Gamma \in [A] \cap [A \Rightarrow B]$，并令 Δ 为 Γ-适配的。于是 $(\Delta \vdash \sigma A) \in [\![A]\!]_\phi$，且 $(\Delta \vdash \sigma A \Rightarrow \sigma B) \in [\![A \Rightarrow B]\!]_\phi = [\![A]\!]_\phi \Rightarrow [\![B]\!]_\phi$。如果 $\Delta \vdash \sigma A \Rightarrow \sigma B$ 具有中性无割证明，由于 $\Delta \vdash \sigma A$ 具有无切证明，$\Delta \vdash \sigma B$ 具有中性无割证明，并且它属于 $[\![B]\!]_\phi$。否则，$(\Delta \vdash \sigma A) \in [\![A]\!]_\phi$，我们对 $\Rightarrow$ 应用定义 13，并取空上下文 Σ，得到 $(\Delta \vdash \sigma B) \in [\![B]\!]_\phi$。因此，$\Gamma \in [B]$。

反过来，我们来证明 $[A] \check{\Rightarrow} [B] \subseteq [A \Rightarrow B]$。我们必须证明，$[A \Rightarrow B]$ 是所有满足 $c \cap [A] \subseteq [B]$ 的 $c \in \Omega$ 的上界。任取这样的 c，再任取 $\Gamma \in c$，令 ϕ 为一个赋值，σ 为一个代换，Δ为一个 Γ $\Delta \vdash \sigma A \Rightarrow \sigma B \in [\![A \Rightarrow B]\!]_\phi = [\![A]\!]_\phi \Rightarrow [\![B]\!]_\phi$ 适配上下文。我们必须证明 ( )。

为此，任取 Σ，使得 $(\Delta, \Sigma \vdash \sigma A) \in [\![A]\!]_\phi$。根据定义 15，$(\Delta, \Sigma)$ 是 A-适配的；根据命题 7，(Δ, Σ) 是 (Γ, A)-适配的。由命题 8 可知，$[A]$ 和 c（按定义等于某个 $\bigcap_{i \in \Lambda_c} [C_i]$）都允许弱化，因此 Γ，$A \in c \cap [A] \subseteq [B]$。于是，根据关于 $[B]$ 的定义 16，Δ，$\Sigma \vdash \sigma B \in [\![B]\!]_\phi$；由关于 $\Rightarrow$ 的定义 13 可直接得出所要证明的结论。

- 令 $\Gamma \in \bigcap\{[(t/x)A], t \in \mathcal{T}\}$。令 ϕ 为一个赋值，σ 为一个替换。设 Δ 是 Γ-适配的，我们证明 $\Delta \vdash \sigma \forall x A \in [\![\forall x A]\!]_\phi$。不失一般性，假设 x 既不出现在 Δ中，也不出现在 Γ中或 σ中。令 $t \in \mathcal{T}$且 $d \in M$。由 x的新鲜性可知，对于 $\phi +(d/x)$,$\sigma +(t/x)$，Δ 也是 Γ-适配的。此外，我们有 $(t/x)\sigma A = (\sigma + (t/x))A$，并且根据假设，$\Gamma \in [(x/x)A] = [A]$。这意味着 $(\Delta \vdash (\sigma +(t/x))A) \in [\![(x/x)^A]\!]_{\phi +(d/x)}$。˜因此，根据定义 13，$(\Delta \vdash \forall x(\sigma A)) \in \forall\{[\![A]\!]_{\phi +(d/x)} \mid d \in M\}$。

反之，设 $\Gamma \in [\forall x A]$。设 $t \in \mathcal{T}$、ϕ 为赋值，σ 为替换，并设 Δ 是 Γ-适配的。不妨设 x不出现在 Δ中，也不出现在 Γ、ϕ和 σ中。

根据假设（$\Delta \vdash \sigma \forall x A$），$\in [\![\forall x A]\!]_\phi$。如果 $\Delta \vdash \sigma \forall x A$ 有一个无中性切割的证明，那么序列式 $\Delta \vdash (\sigma t/x)\sigma A)$也有这样的证明。由于 $\sigma(t/x)A =$

$(\sigma t/x)\sigma A$，我们有 $(\Delta \vdash \sigma((t/x)A)) \in [\![A]\!]_{\phi+([\![t]\!]_\phi/x)}$，根据命题6，它等于 $[\![(t/x)A]\!]_\phi$ 。

否则，定义 13 d $[\![t]\!]_\phi$ $\Delta \vdash$ 保证，σ A $\Delta \vdash \sigma$ A $\Gamma \in$ 对于任意，包括，$(((t/x))) \in [\![A]\!]_{\phi+(d/x)}$。因此，$(((t/x))) \in [\![(t/x)A]\!]_\phi$。所以，对于任意 t，$[(t/x)A]$，于是它是交集中的一个元素。

- 我们首先证明，$[\exists xA]$ 是集合 $\{[(t/x)A] \mid t \in \mathcal{T}\}$的上界。取一个项 t以及一个上下文 $\Gamma \in [(t/x)A]$。令 ϕ 为一个赋值，σ 为一个代换，并令 Δ 为一个 Γ-适配上下文。不妨设 x 既不出现在 Δ 中，也不出现在 σ 中。由于 $\sigma(t/x)A = (\sigma t/x)\sigma A$，根据假设，我们有 $(\Delta \vdash (\sigma t/x)(\sigma A)) \in [\![(t/x)A]\!]_\phi$，根据命题6，这等于 $[\![A]\!]_{\phi+([\![t]\!]_\phi/x)}$。这表明˜根据定义 13，$(\Delta \vdash \sigma\exists xA) \in \exists\{[\![A]\!]_{\phi+(d/x)}\ d \in M\}$。因此$\Gamma \in [\exists xA]$。所以ˇ $\exists\{[(t/x)A] \mid t \in \mathcal{T}\} \subseteq [\exists xA]$。

反过来，令 $\Gamma \in [\exists xA]$。令 $c = \bigcap[C_i]$ 为 $\{[(t/x)A] \mid t \in \mathcal{T}\}$ 的一个上界。我们可以选择 $c = [C]$，因为我们需要上界的交集。

令 ϕ 为一个赋值，σ 为一个代换，令 Δ 为 Γ-适配的，并且不失一般性地假设 x 不出现在 C 中，也不出现在 Δ 或 σ 中。最后，注意到 $A \in [(x/x)A] \subseteq [C]$，并且根据关于 Γ 的假设，$(\Delta \vdash \sigma\exists xA) \in [\![\exists xA]\!]_\phi$。

假设 $\Delta \vdash \sigma\exists xA$ 有一个中性无割证明。那么，由于 σA 是 A-适配的，我们有 $(\sigma A \vdash \sigma C) \in [\![C]\!]_\phi$。特别地，根据命题 5，这个序列式有一个无切证明。由于 x 不出现在 C 或 σ 中，我们可以在这个序列式的一个证明与 $\Delta \vdash \exists x\sigma A$ 的中性无割证明之间应用一条 $\exists$-消去规则，从而得到 $\Delta \vdash \sigma C$ 的一个中性无割证明。因此，$(\Delta \vdash \sigma C) \in [\![C]\!]_\phi$。

否则，根据定义 13，$\Delta \vdash \exists x\sigma A$ 满足：对于某个项 t 和元素 d，有 $(\Delta \vdash \sigma' A) \in [\![A]\!]_{\phi'}$，记作 $\sigma' = \sigma + (t/x)$ 和 $\phi' = \phi + (d/x)$。因此，Δ 是针对 ϕ', σ' 的 A-适配项。由于 $A \in [C]$，这意味着 $(\Delta \vdash \sigma' C) \in [\![C]\!]_{\phi'}$；但由于 x 不出现在 C中，这与 $(\Delta \vdash \sigma C) \in [\![C]\!]_\phi$相同。

因此，$\Gamma \in [C]$。这对 $\{[\ t/x\ A] \mid t \in (\ )\mathcal{T}\}$ 的任意上界 $[C]$ 都成立。因此，Γ 属于它们的交集，即 $\exists\{[(t/x)A], t \in \mathcal{T}\}$。

命题 **11** $\Gamma \in [\Gamma]$

证明。令 $\Gamma = A_1$，……，A_n。根据定义 8 和命题 10，$[\Gamma] = [A_1 \wedge \ldots \wedge A_n] = [A_1]$ ˇ $\wedge \ldots$ ˇ$\wedge [A_n]$。利用命题 8，我们有 $\Gamma \in [A_1]$，……，$\Gamma \in [A_n]$，因此 $\Gamma \in$ （$[A_1]$ ˇ $\wedge \ldots$ ˇ$\wedge [A_n]$）。

定义 18（模型 $\mathcal{D}$）令 $\mathcal{T}$为开放项模 $\equiv$ 的等价类集合。令 φ 为一个值取自 $\mathcal{T}$ 的代换。对于语言中的每个函数符号 f_i和每个谓词符号 P_j，我们定义：

- $\hat{f_i} : t_1, \cdots, t_n \mapsto f_i(t_1, \cdots, t_n)$
- $\hat{P_j} : t_1, \cdots, t_n \mapsto [P_j(t_1, \cdots, t_n)]$

^^令 $\mathcal{D} = \langle \mathcal{T}、\Omega\ f_i、\ P_j \rangle$

命题12（模型 $\mathcal{D}$）

- $\mathcal{D}$ 是定义6意义下的一个 Ω-结构。
- 指称 $[\![\ ]\!]^{\mathcal{D}}$ 满足：对于任意赋值（即代换） φ、任意项 t和任意命题 A:

$$[\![t]\!]^{\mathcal{D}}_{\varphi} = \varphi t \ \ and \ [\![A]\!]^{\mathcal{D}}_{\varphi} = [\varphi A]$$

- $\mathcal{D}$ 是定义 9 意义下的一个模型 $\equiv$ 。

证明。第一点由定义6立即得出。 $[\![t]\!]^{\mathcal{D}}_{\varphi} = \varphi t$的证明是对 t进行直接的结构归纳。 $[\![A]\!]^{\mathcal{D}}_{\varphi} = [\varphi A]$的证明也是如此：基础情形由 ^ P_j 的定义得出，归纳情形则由命题 10 得出。以 $\exists$ 情形为例。首先假设 x 不出现在 φ中，否则将其重命名。然后，根据定义 $[\![\exists x A]\!]^{\mathcal{D}}_{\varphi} = \check{\exists}\{[\![A]\!]^{\mathcal{D}}_{\varphi+(t/x)}\ t \in \mathcal{T}\}$。根据归纳假设，这等于 $\check{\exists}\{[(\varphi + (t/x))A], t \in \mathcal{T}\} = \check{\exists}\{[(t/x)(\varphi A)], t \in \mathcal{T}\}$。根据命题 10，这等于 $[\exists x(\varphi A)] = [\varphi(\exists x A)]$。

最后一点是命题 8 和第二点的直接推论：如果 $A \equiv B$ ，那么对于任意代换 φ， $\varphi A \equiv \varphi B$ 和 $[\![A]\!]^{\mathcal{D}}_{\varphi} = [\varphi A] = [\varphi B] = [\![B]\!]^{\mathcal{D}}_{\varphi}$ 。

3.3 消去割

首先，借助模型 $\mathcal{D}$ ，我们可以直接得出无切割演算是完备的结论：

命题13（无割演算的完备性）如果序列式 $\Gamma \vdash \check{} B$ 在模型 $\mathcal{D}$ 中有效（即 $\top \subseteq [\![\Gamma \vdash B]\!]$ 或等价地 $[\![\Gamma]\!] \subseteq [\![B]\!]$），那么它具有一个无切证明。

证明。令 φ 为恒等赋值。根据命题 11 以及假设：

$$\Gamma \in [\Gamma] = [\![\Gamma]\!]_{\varphi} \subseteq [\![B]\!]_{\varphi} = [B]$$

根据命题 8，序列式 $\Gamma \vdash B$ 有一个无切证明。

定理1（割消去）如果序列式 $\Gamma \vdash B$ 可证，那么它有一个无切证明。

证明。根据可靠性定理（命题2）和命题 1，如果 $\Gamma \vdash B$ 可证明，那么它在该同余的所有海廷代数值模型中均有效，尤其是在 $\mathcal{D}$中。因此，根据命题13，它有一个无切证明。

备注。在前面的证明中，归纳是通过可靠性定理进行的，而归纳情形则由命题 10 处理；该命题确保 $[\_]$ 是一个模型解释。因此，我们看到切消定理被分成了两部分。这应与通过正规化进行割消去的证明相比较：给定一个关于 $\Gamma \vdash A$的证明，这类证明会直接证明 $[\Gamma] \subseteq [A]$或类似结论（例如 [8] 的定理 3.1）。这种拆分本质上得益于定义 16。

4 简单类型理论的应用

作为一个特例，我们得到了简单类型理论的消割证明。

在这种情况下，让我们更详细地考察模型的构造。基于简单类型理论的语言，我们首先构造定义 13 中序列式 $\mathcal{S}$ 的真值代数。然后，利用简单类型理论的超一致性，我们按照命题 3 构造模型 $\mathcal{M}$。特别地，$M_\iota = \{0\}$、$M_o = S$ 13 $\mathcal{D}$（见定义）以及 $M_{T\to U} = M_U^{M_T}$。接着，我们按照命题 12 构造模型，并令 $D_T = \mathcal{T}_T$，其中 $\mathcal{T}_T$ 是按 $\equiv$ 取模的、属于种类 T的项的等价类集合。特别地，我们有 $D_\iota = \mathcal{T}_\iota$ 和 $D_o = \mathcal{T}_o$。

这种构造不同于 [13, 16, 1, 3, 11, 10] 的 V-复形；后者用于证明高阶逻辑中的切割可容许性。让我们进一步分析这一点。

4.1 使用 V-复形的证明原理

这里我们以经典逻辑这一较简单的情形为例，概述一种使用 V-复形的证明方法，例如 [1] 中给出的方法，或者其现代直觉主义版本 [3]。请注意，与定义 1 中的表述不同，ε 符号在此处并未出现，因此逻辑连接词与其对应的“点状”常量合并在一起。例如，在本节中，我们将认为 $\dot{\wedge}$ 与 $\wedge$ 相同。

设 $\Gamma \vdash \Delta$ 是一个在无 cut 序列式演算中无法证明的序列式。我们假设给定了一个与该序列式相容的半赋值 V [14]，即一个从命题到 $\{0,1\}$ 的部分解释函数，使得$V(\Gamma) = 1$ 且 $V(\Delta) = 0$。这种半赋值可以通过（无限）表程序获得，也可以作为一种抽象的一致性性质得到，参见 [1, 3]。它比模型解释更弱，因为它是部分的，因此一致性条件也更弱：如果我们知道某个命题A的真值，那么关于其直接子命题的真值必须有足够的信息。例如，$V(A \wedge B) = 0$ 意味着 $V(A) = 0$ 或 $V(B) = 0$，而另一个值可以保持未定义。

目标以及简单类型理论情形（或高阶逻辑情形）中的困难，正如 Sch¨utte [14], 所指出的，在于将 V 扩展为模型解释。Takahashi [16] 和 Prawitz[13], 各自独立提出的解决方案，是构造一个新的解释域，称为 V-复合体，具体如下。

首先，对于每一种类型 T，模型的解释域都是通过将语法部分与语义部分粘合在一起而构建的：

$$V_T = \mathcal{T}_T \times \mathcal{M}_T$$

其中， $\mathcal{T}_T$ 是类型为 T 且处于正规形的项的集合， $\mathcal{M}_\iota = \{\iota\}$、$\mathcal{M}_o = \{0,1\}$，而 $\mathcal{M}_{A\to B}$ 是函数空间 $V_B^{V_A}$，即它由满足以下标准的 $\mathcal{T}_A \times \mathcal{M}_A \to \mathcal{T}_B \times \mathcal{M}_B$ 的函数组成。一对 $\langle t、\ f\rangle$ 属于 V_T，当且仅当 t 处于正规形且类型为 T，并且：

- 当 T 为 ι 时， f 等于 ι

  当 T 为 o 且定义了 $V(t)$ 时， f 等于 $V(t)$（通过这种方式，我们确保了与半赋值 V 的恰当性）。否则， f 可以是 0 或 1；事实上， V-复形 $\langle t、\ 0\rangle$ 以及 $\langle t、\ 1\rangle$ 都属于论域 V_o。

- 当 T 是函数类型 $A \to B$时， $f \in \mathcal{M}_{A\to B}$ 可以分解为一个从 $\mathcal{T}_A \times \mathcal{M}_A$到 $\mathcal{T}_B$的函数 f_1，以及一个从 $\mathcal{T}_A \times \mathcal{M}_A$到 $\mathcal{M}_B$的函数 f_2。给定任意 V-复形 $\langle t',\ a\rangle \in \mathcal{M}_A$，我们要求 $f_1(\langle t', a\rangle) = nf(t\ t')$，并且 $\langle nf(t\ t')\ f_2(\langle t', a\rangle)\rangle \in V_B$，其中 $nf(t\ t')$是 $t\ t'$的正规形。

V-复形的引入旨在解决高阶逻辑的两个主要问题：非谓述性和内涵性。Tait 方法 [15] 通过对类型进行归纳来解决第一个问题，从而避免了对项的大小进行不可能的归纳。为了处理内涵性问题，还需要进一步改进：从逻辑角度而言， $\top$ 和 $\top\top$ 必须具有相同的指称，但与此同时，我们仍必须能够在 $P(\top)$ 和 $P(\top \wedge \top)$ 的指称之间进行语义区分，因为前一组命题是等价可证的，而后一组则不是。此外， P的解释 $\langle P, f\rangle$ 必须满足这样一个条件： $P(\top)$ 和 $P(\top \wedge \top)$ 的逻辑指称（即解释的第二个分量）彼此不同。只有当 f_2 同时使用其参数的两侧时，这才有可能实现。特别是，我们必须满足：

$$f_2(\langle \top\wedge\top, [\![\top\wedge\top]\!]\rangle) \neq f_2(\langle \top, [\![\top]\!]\rangle)$$

尽管 $[\![\top\wedge\top]\!] = [\![\top]\!] = 1$。

这是通过将一个句法成分引入项的语义指称中实现的。这样一来，不同的值和行为便可取决于这个句法成分。函数 f_2 的行为体现了这一点：它在关键上取决于这两个成分。

因此，我们将项的逻辑指称（它在任意布尔代数或海廷代数中都会使$\top$ 和 $\top \wedge \top$ 相等）与其在模型中的解释区分开来（后者不会这样做，而且与

命题的意义而非其指称更为相关），后者处于更低的层次，即 V-复形的层次。

基于 V-复形，我们通过对项 t 的结构进行归纳，为其定义一种解释。下面来看几个关键情形：

- 若 t 不是逻辑符号，我们就用与 t相关联的默认 V-复形来解释它，其形式为 $\langle t, d\rangle$ （当然，有一个引理证明该复形存在）。.
- 若 t是逻辑符号 $\forall_T$，我们构造 V-复形 $\langle \forall_T, f\rangle$，其中 f是如下函数：它将任意 V-复形 $\langle t, g\rangle$ （类型为 $T \to o$）映射为类型为 o $\langle \forall_T\ t$的 V-复形 $v\rangle$；当且仅当对任意类型为 T的 V-复形 d，(d) 是一个第二分量为 1 的 V-复形时，v 才等于 1。这样，我们就对所有类型为 T的 V-复形进行量化。
- 应用符号 α的解释将一个 V-复形 $\langle t, f\rangle$作用于另一个 $\langle u, g\rangle$，得到 $f(\langle u, g\rangle)$。注意，根据关于 f的条件，它的第一个分量是 $(t\ u)$ 的正规形。

验证这一构造确实产生V-复形，属于技术性问题。最后一步是考虑广义模型概念，因为现在类型为 o 的项在 $\mathcal{T} \times \{0, 1\}$ 中的指称并非布尔代数。于是我们可以说明，所构造的解释与V兼容；Γ 中的命题解释为 1（作为第二个分量），而 Δ 中的命题解释为 0。因此，如果序列式 $\Gamma \vdash \Delta$ 没有无切证明，那么它就无效。这给出了完备性定理强版本的证明，我们由此推出切消定理。

4.2 比较

相比之下，在我们的构造中，我们有两个独立的模型：项模型$\mathcal{D}$，它对应于 V-复形的左侧，以及模型 $\mathcal{M}$，它对应于右侧部分。

新颖之处在于，$\mathcal{M}_{A\to B}$只是 $\mathcal{M}_A \to \mathcal{M}_B$，而不是 $\mathcal{T}_A \times \mathcal{M}_A \to \mathcal{M}_B$。这是可行的，因为在构造 $\mathcal{M}$时，我们没有取 $\mathcal{M}_o = \{0, 1\}$，而是取了 $\mathcal{M}_o = S$；它是真值代数，但不是海廷代数。因此，$[\![\dot{\top} \dot{\wedge} \dot{\top}]\!]^{\mathcal{M}}$ 和 $[\![\dot{\top}]\!]^{\mathcal{M}}$ 不必相等，真值包含了更多信息，我们也不需要额外拼接一个句法论证 $\dot{\top} \dot{\wedge} \dot{\top}$ 或. . . $\top$ 来得到 $f_2([\![\top \dot{\wedge} \top]\!]) \neq f_2([\![\top]\!])$。

由于我们选择了一个句法模型，$\mathcal{D}$ 中也会出现同样的现象：根据命题 12 $[\![\dot{\top} \dot{\wedge} \dot{\top}]\!]^{\mathcal{M}}$，$[\![\dot{\top}]\!]^{\mathcal{M}}$ 分别等于 $\dot{\top} \dot{\wedge} \dot{\top}$ 和 $\dot{\top}$。类似地，$[\![P(\dot{\top})]\!]^{\mathcal{D}} = [\![P(\dot{\top})]\!]^{\mathcal{M}} \lhd P(\dot{\top}) = [P(\dot{\top})],$；根据命题8 $[\![P(\dot{\top})]\!]^{\mathcal{D}}$ 包含 $P(\dot{\top})$，而 $[\![P(\dot{\top} \dot{\wedge} \dot{\top})]\!]^{\mathcal{D}}$ 包含 $P(\dot{\top} \dot{\wedge} \dot{\top})$。一般情况下，这些解释都不包含另一个命题，因此它们并不相等，正如所要求的那样。

也有人可能会想知道，在我们的证明中，逻辑指称 1 of
. .$\top$ 与其在 $\mathcal{D}$ 中的解释之间的区分体现在哪里。表达式 $\top$ 只在项的层面上存在，因为在命题层面上，它被. . $\varepsilon(\top)$取代。 $\mathcal{D}$ 中 $\top$ 和 $\varepsilon(\top)$ 的解释，分别对应于先前证明中 V_o 中的解释，以及 $\top$ 在海廷代数中的指称。

在早期采用 V-复形的工作中，指称与解释之间的区别必须“手动”定义，并为模型引入一个新的定义；而 ε 这一简单的句法装置则自动捕捉到了这种区别。

4.3 结论

因此，我们的模型构造与 V-复形的构造之间的主要区别在于：我们打破了通过将 $\langle t, f\rangle$ 应用于 $\langle u, g\rangle$ 而得到的有序对的右分量对 u 的依赖。这引出了一个两阶段构造，其中 V-复形这一概念本身已不复存在，第二个模型则是句法的。之所以能够做到这一点，是因为从序列式 S 的底层模型出发，我们的语义对象 $[A]$ 更为精确，无需额外构造。此外，符号 ε 的存在简化了语义对句法的依赖，并使项层级上的纯句法模型成为可能。

需要注意的是，超一致性允许我们在更常见的海廷代数上构造模型，例如林登鲍姆海廷代数，或用于割消去的基于上下文的海廷代数 [10, 12], ，其中 $[A]$ 被定义为满足 $\Gamma \vdash A$ 具有无切证明的上下文 Γ 的集合。它为我们提供了该代数上的一种解释，满足同余 $\equiv$。问题在于，如果我们以通常的方式构造这样的模型，就无法证明 $[\![A]\!] = [A]$。为了实现这一目标，我们必须先以无类型的方式定义序列演算代数，然后提取所需的上下文，从而迫使$[\![A]\!]$ 等于 $[A]$。因此，在使用超一致性证明割规则的可容许性时，分两个阶段进行构造似乎是不可避免的。

尚待了解的是，这样的构造是否也能用于规范化证明。

参考文献

[1] Peter B Andrews。《类型理论中的归结》。《符号逻辑杂志》36(3)：414–432，1971年9月。

[2] A. Church。《简单类型理论的一种表述》。《符号逻辑杂志》，5:56–68，1940年。

[3] Mary De Marco 和 James Lipton。《Church 直觉类型论中的完备性与割消去》。《逻辑与计算杂志》，15:821–854，2005年12月。[4] Gilles Dowek。《真值代数与证明规范化》。载于 TYPES，收入《计算机科学讲义》第4502卷，第110–124页。Springer，2006年。[5] Gilles Dowek、Th´er`ese Hardin 和 Claude Kirchner。《Hol-lambda-sigma：高阶逻辑的一种意向性一阶表达》。《计算机科学中的数学结构》，11:1–25，2001年。[6] Gilles Dowek、Th´er`ese Hardin 和 Claude Kirchner。《模理论证明》。《自动推理杂志》，31:33–72，2003年。[7] Gilles Dowek 和 Olivier Hermant。《超一致性蕴含割消去的一个简单证明》。载于 RTA，收入《计算机科学讲义》第4533卷，第93–106页。Springer，2007年。[8] Gilles Dowek 和 Benjamin Werner。《模证明规范化》。《符号逻辑杂志》，68(4):1289–1316，2003年。[9] Jean-Yves Girard。《将 G´odel 的解释扩展到分析，并将其应用于分析中的割消去及类型论》。载于《第二届斯堪的纳维亚逻辑研讨会论文集》（奥斯陆大学，奥斯陆，1970年），收入《逻辑与数学基础研究》第63卷，第63–92页。North-Holland，阿姆斯特丹，1971年。[10] Olivier Hermant 和 James Lipton。《带公理的类型论中割消去的构造性语义方法》。载于 CSL，收入《计算机科学讲义》第5213卷，第169–183页。Springer，2008年。[11] Olivier Hermant 和 James Lipton。《直觉类型论中的完备性与割消去——第二部分》。《逻辑与计算杂志》，20(2):597–602，2010年。[12] Mitsuhiro Okada。《各种一阶与高阶逻辑的割消去和完备性的统一语义证明》。《理论计算机科学》，281:471–498，2002年。[13] Dag Prawitz。《高阶逻辑的主定理》。《符号逻辑杂志》，33(3):452–457，1968年9月。[14] Kurt Sch¨utte。《简单类型理论的句法与语义性质》。《符号逻辑杂志》，25(4):305–326，1960年12月。[15] William W. Tait。《二阶谓词逻辑 Gentzen 主定理的一个非构造性证明》。《美国数学学会通报》，72:980–983，1966年。

[16] Moto-o Takahashi。简单类型理论中的切消定理证明。日本数学会杂志，19(4)：399–410，1967。[17] A S Troelstra 和 Dirk van Dalen。《数学中的构造主义：导论》。North-Holland，1988。