arXiv:2304.11001v1 [hep-th] 21 Apr 2023

编织张量范畴的三维镜像对称

Andrew Ballin[1],Thomas Creutzig[2],Tudor Dimofte[3],和 Wenjun Niu[1]

[1]数学系与量子数学和物理中心，加州大学戴维斯分校，One Shields Ave.，Davis，CA95616，美国[2]数学与统计科学系，632 CAB，阿尔伯塔大学，埃德蒙顿，阿尔伯塔省 T6G 2G1，加拿大[3]数学学院，爱丁堡大学，James Clerk Maxwell Building，Peter Guthrie Tait Rd.，爱丁堡 EH9 3FD，英国

2023年4月24日

摘要

我们研究阿贝尔三维 $\mathcal{N}=4$ 规范理论的拓扑 A 扭结与 B 扭结中线算子的编织张量结构，并通过边界顶点算子代数（VOA）来考察这一结构。我们只关注阿贝尔理论。首先，我们为 B 扭结中的边界顶点算子代数构造非微扰完备化；这些代数最初是某些仿射李超代数。我们还构造 A 扭结与 B-扭结顶点算子代数的自由场实现，并发现它们与体理论的对称性分数化群之间存在有趣的相互作用。借助自由场实现，我们证明了由三维镜像对称联系起来的 A 扭结与 B 扭结顶点算子代数同构。接下来，我们转向线算子，将先前对线算子的物理分类扩展到新的单值化缺陷和束缚态。我们还概述了一种机制：物理理论中的连续全局对称性如何在拓扑扭曲中提升为高阶对称性。在我们的情形中，这些是与边界谱流相关的无限一形式对称性，它们为线范畴赋予结构，并控制阿贝尔规范化。最后，我们证明线算子范畴上存在编织张量结构，并将这些范畴视为边界顶点算子代数的模所构成的非半单范畴。在 A 扭结中，我们通过扩张辛玻色子顶点算子的模来得到这些范畴，这对应于对自由超多重态进行规范化；在 B 扭结中，我们则扩张仿射李超代数的 Kazhdan-Lusztig范畴。我们证明了三维镜像理论各自范畴之间存在编织张量等价。关于顶点算子代数及其模范畴的所有结果都具有严格的数学证明；这些结果高度依赖近期开发的、用于处理非半单扩张的技术。

目录

1 引言 **4**

1.1 边界顶点算子代数 .6 1.2 无限高阶对称性 .11 1.3 模与线算子 .12 1.4 体与边界范畴的比较 .15 1.5 致谢 .16

2 设置与符号 16

2.1 简单阿贝尔三维规范理论 . 16

2.1.1 荷格 .16 2.1.2 整体对称性 .18 2.1.3 三维镜像对称 .19 2.1.4 简单理论的真空结构 .20 2.1.5 例 .21

2.2 阿贝尔理论的不变量 . 22

2.3 自由场顶点 代数. 27

2.3.1 海森堡顶点算子代数与福克模 .27 2.3.2 自由费米子 .28 2.3.3 辛费米子与单态顶点算子代数 .29 2.3.4 辛玻色子 .31 2.3.5 BRST上同调 .33 2.3.6 仿射 $\mathfrak{gl}(1|1)$ .35

2.4 谱 flow 35

3 边界 y 顶点算子代数（VOA），对应 $\mathcal{T}_\rho^A$ **37**

3.1 诺伊曼边界条件及其对称性 .37 3.2 边界上的顶点算子代数 .39 3.2.1 $\mathcal{V}_\rho^A$.41 3.3 通过自由场实现构造BRST上同调 .42 3.3.1 分解电荷格 .43 3.3.2 BRST上同调 .45 3.3.3 一些例子 .48 3.3.4 自由场实现中的对称性 .49

4 $\mathcal{T}_\rho^B$ 51的边界顶点算子代数

4.1 狄利克雷边界条件及其对称性 .52 4.1.1 三维镜像对称 .53 4.1.2 边界单极算子 .53

4.2 微扰与非微扰边界顶点算子代数 .54

4.2.1 顶点算子代数的对称性 .56 4.2.2 非微扰完备化 .57

4.3 自由场实现 .60 4.3.1 自由场对称性.63 4.3.2 命题 4.2 的证明 .63 4.4 边界顶点算子代数的镜像对称.65

5 Morita 等价的 顶点算子代数的规范化与去规范化

5.1 $\widetilde{\mathcal{V}}_\rho^A$通过扩张 $\mathcal{V}_{\beta\gamma}^{T^*V}$.715.2 $\widetilde{\mathcal{V}}_\rho^B$作为轨形.73 5.3 Morita 等价的顶点算子代数.74

6 插曲 e：拓扑一形式对称性 77

6.1 拓扑作用量的起源.78 6.2 一形式对称性与线算子范畴.79 6.3 规范化.81 6.4 与谱流的关系.82

7 范 畴中的线算符：体理论考量 85

7.1 B 扭曲.87

7.1.1 威尔逊线 .87 7.1.2 单值化缺陷 .88 7.1.3 态射与 DG 范畴 .91 7.1.4 基本张量积与编织 .93

7.2 A twist 95

7.2.1 A 扭曲中的线算符回顾.95 7.2.2 味涡旋 .97 7.2.3 味缺陷 .98 7.2.4 态射、融合、编织与范畴.100

8 来自边界顶点算子代数的线算子范畴 102

8.1 单流扩张与交织算子 .103 8.2 线算子与阿贝尔镜像对称：第一个例子 .106

8.2.1 的模范畴 $\mathcal{V}_{\beta\gamma}$ .107 8.2.2 仿射的 Kazhdan-Lusztig 范畴 $\mathfrak{gl}(1|1)$ .111 8.3 A 扭曲的线算子范畴 .8.3.1 范畴的定义 .8.3.2 局域性要求 .8.3.3 作为简单对象的线算子 .119 8.4 B 扭曲的线算子范畴 .123 8.4.1 的 Kazhdan-Lusztig 范畴 $\widehat{\mathfrak{g}}_\rho$ .8.4.2 韦尔玛模 .8.4.3 简单对象与物理线算子 .130 8.5 线算子的镜像对称 .132 8.6 线算子范畴中导出自同态的计算 . . . 135

A 共形元与反常 139

B 半指标恒等式 143

B.1 A 扭曲 .144 B.2 B 扭曲.145

1 引言

自 20 世纪 90 年代以来，三维 $\mathcal{N}=4$ 规范理论与几何和表示论之间一直存在丰富的交互，尤其受到三维镜像对称 [IS96, dBHOO96]这一发现的推动。近年来，随着新的非微扰物理和数学方法的出现，人们得以研究三维 $\mathcal{N}=4$ 规范理论中的代数结构，这种交互也因此进一步加强。这里只列举一小部分并不完整的例子：[GW08, CHZ13, BFN16, BDG15, BDGH16, DFPY17, Web16, AO21, BZ21, DN21, Gai16, CG18, CCG18, AG15, DGGH19, GHN+20, BFK21, CDGG21, HR21, GHMG22, BBFSN23, NSWZ23]。反过来，这些新方法中的许多也可以从全纯或拓扑扭曲的视角来理解——也就是说，所计算的非微扰结构位于全纯或拓扑超荷的上同调中。

一个基础但重要的例子是三维 $\mathcal{N}=4$ 规范理论的真空模空间。真空空间中希格斯分支和库仑分支上的函数，由某些半 BPS 局部算子的期望值给出；这些算子是所谓希格斯手征环和库仑手征环的元素，参见 [CHZ13、BDG15]。这些局部算子分别出现在三维规范理论的 B 拓扑扭曲和 A 拓扑扭曲中。B 扭曲（有时称为 C 扭曲 [Gai16]）由 Blau 和 Thompson 提出 [BT96], ，并推广到

超K¨ahler σ 模型中的扭曲由 Rozansky 和 Witten 提出 [RW96]。它的三维镜像，即 A 扭曲（也称为 H 扭曲 [Gai16]），是 Witten 对四维规范理论所作 Donaldson 扭曲的降维 $\mathcal{N}=2$ Wit [。概括而言，

$$\text{A-twist local operators} \simeq \mathbb{C}[\mathcal{M}_{\text{Coul}}]\,, \qquad \text{B-twist local operators} \simeq \mathbb{C}[\mathcal{M}_{\text{Higgs}}]\,. \tag{1.1}$$

著名的 Braverman-Finkelberg-Nakajima 构造 [Nak15，BFN16], 开启了对库仑分支和三维 $\mathcal{N}=4$ 镜像对称的广泛数学研究，是利用拓扑态-算符对应对 A 扭曲中局域算子代数进行的精细计算。

在本文中，我们进一步发展线算符和边界顶点算子代数（顶点算子代数）在两种三维拓扑扭曲 $\mathcal{N}=4$规范理论下所保留的物理与数学。这两个对象具有内在联系，因为线算符对应于边界顶点算子代数的模 [CG18、CCG18]。我们将专门关注最简单的一类三维 $\mathcal{N}=4$ 理论：阿贝尔规范理论，其中连续规范群忠实地作用在线性超多重态物质上。（我们将这些理论称为“简单”阿贝尔理论。）这一类理论特别好，因为它在三维 $\mathcal{N}=4$ 镜像对称下是封闭的。正如我们将看到的，它也足够非平凡，从而使本文的分析颇具意义。

我们的主要结果包括：

- 对边界顶点算子代数在 B 扭曲中的非微扰定义，将其原始构造 [CG18] 推广至包含边界单极算子的贡献。

- A 扭曲和 B 扭曲中的边界顶点算子代数的自由场实现，结果表明，它们以一种内在方式涉及体三维理论的有限“对称性分数化群”。

- 证明镜像阿贝尔理论在 A 扭曲和 B 扭曲下的边界顶点算子代数满足三维镜像对称。

- 对 A 扭曲和 B 扭曲中的线算子的扩展物理分类，其中包括此前未研究过的单值化缺陷，以及威尔逊线的束缚态和涡旋线的束缚态。

•对具有编织张量结构、并包含一组作为简单模的基本体理论线算符的边界顶点算子代数，严格地构造其阿贝尔模范畴。我们分别采用 A 扭曲和 B 扭曲中的独立方法进行构造，并证明三维镜像对称诱导出一个同构

的范畴。我们预计，完整的体理论线算符物理范畴是阿贝尔顶点算子代数模范畴的导出范畴。

自由场实现、模的编织张量范畴及其三维镜像对称方面的结果，推广了第一位和最后一位作者的工作 [BN22a]，他们研究了最简单的阿贝尔镜像对：自由超多重态的 A 扭曲和 SQED 的 B 扭曲。

在此过程中，我们引入了一些可能具有独立研究价值的新构造：

- 我们建立了计算阿贝尔规范理论的对称性分数化群的一种高效方法，并证明该群的阶等于有质量真空的数量。因此，这个群刻画了阿贝尔理论的非平凡性。

  在数学上，这一结果归结为一个计算 hypertoricvarieties 不动点数量的简单新公式。

- 我们在三维 $\mathcal{N}=4$理论的拓扑扭曲中发现了新的无限一形式全局对称性；它自然地源自那些在扭曲中变得上同调平凡的零形式对称性。物理零形式对称性的规范化，在拓扑扭曲中提升为对这种一形式对称性的规范化——而这又对应于边界顶点算子代数的无限简单流扩张。

我们将在引言的其余部分进一步阐述我们的结果。

本文准备期间，我们了解到 C. Beem 和 A. Ferrari 关于边界顶点算子代数自由场实现的相关工作；我们已协调预印本，安排同时发表。关于一类特殊阿贝尔边界顶点算子代数（对应于含多个超多重态的 SQED 的 A 扭曲）与 W 代数之间关系的结果也于近期发表 [Yos23]。

其他近期与三维 $\mathcal{N}=4$ 理论相关的线算子编织张量范畴研究包括：[Mik15、GY22、GN23]，研究阿贝尔超群切伦–西蒙斯理论中的线算子；自由超多重态和 SQED 的 B 扭曲就是其中的例子；[DGN+18、GKL+21]，研究与有质量三维$\mathcal{N}=4$ 理论相关的线算子半单范畴；以及 [CG17、FG18、CDGG21]，研究非阿贝尔理论中若干特别有趣的边界顶点算子代数及其模范畴，这些研究与几何朗兰兹和量子群有关。与三维 $\mathcal{N}=2$ 理论相关的模张量范畴和顶点算子代数特征标也已有研究，例如见 [CCF+18、CCF+22]。

非阿贝尔三维 $\mathcal{N}=4$ 规范理论的一般情况很遗憾仍远未完整。

1.1 边界顶点算子代数

我们论文的前半部分致力于探讨阿贝尔三维 $\mathcal{N}=4$ 规范理论在 A 扭曲和 B 扭曲下边界顶点算子代数的结构。

这些边界顶点算子代数最初由 [CG18]提出。它们的存在多少有些出人意料。人们或许会天真地认为，物理三维 $\mathcal{N}=4$ 理论中与体拓扑超荷 Q 相容的边界条件，在经过拓扑扭曲后也会变成拓扑的。 [CG18]发现了一个例外：他们构造出一些边界条件，在体经过拓扑扭曲后仍保持全纯——因而支撑着一个完整的顶点算子代数。

我们所研究的顶点算子代数非常非有理，原因在于它们拥有无穷多个互不同构的简单模，同时还具有可约但不可分解的模，即它们是对数型顶点算子代数的例子。目前，表示论得到全面掌控的此类对数型顶点算子代数还很少。对数理论中一些理解得最为透彻且最为相关的成员包括 $\beta\gamma$-顶点算子代数，也称为辛玻色子，我们将其记为 $\mathcal{V}_{\beta\gamma}$ 顶点算子代数 [AW20], 的仿射顶点算子代数 $\mathfrak{gl}(1|1)$在任意非零层[CMY22b], 辛费米子 [TW12] 以及单态顶点代数 [CMY20b、CMY22a]。关于这些例子以及一般对数型顶点算子代数的引言，参见 [CR13a]。

<escape>这些顶点算子代数之间存在着丰富多样的关系，例如，辛费米子是 $\mathcal{V}_{\beta\gamma}\otimes\mathcal{V}_{bc}$-顶点算子代数的 BRST 上同调，与（1.2）非常相似，而 $\mathfrak{gl}$（1|1）的仿射顶点算子代数则是 $\mathbb{C}^*$ 的一个 $\mathcal{V}_{\beta\gamma}\otimes\mathcal{V}_{bc}$-轨形。反过来说，这意味着 $\mathcal{V}_{\beta\gamma}\otimes\mathcal{V}_{bc}$ 是 $\mathfrak{gl}$（1|1）的仿射顶点算子代数的一个简单流扩张。我们将在第 2.3 节介绍一些顶点算子代数形式主义，同时回顾其中的部分关系。</escape>

值得注意的是， $\mathfrak{gl}$（1|1）、 $\beta\gamma$ 顶点算子代数以及辛费米子之间的关系，是迄今为止已证明的 Gaiotto-Rapcak “角”顶点算子代数三重性 [GR17], 的最简单例子，见 [CL20, CL21]。建立角顶点算子代数之间的关系涉及取余集/轨形，随后进行 VOA扩张；这两个操作可以通过涉及 [CLNS22] 中所述的核顶点算子代数的 BRST上同调 [CG17、FG18]一步完成。式（1）的核顶点算子代数不过是整数格的格点顶点算子代数，即 由一对自由费米子构成的 $\mathcal{V}_{bc}$格点顶点算子代数，再乘以一个海森堡顶点算子代数。

我们的顶点算子代数 $\mathcal{V}_\rho^A$和 $\mathcal{V}_\rho^B$正是以这种方式构造的；不过事实证明，我们能够给出更加明确的描述。其原因在于，所涉及的所有顶点算子代数都是若干单态代数与一些海森堡顶点算子代数的扩张。此外，单态代数本身是海森堡顶点算子代数的一个子代数，其特征为某个筛选荷的核。这意味着，我们的所有顶点算子代数 $\mathcal{V}_\rho^A$和 $\mathcal{V}_\rho^B$都允许在较大的格点顶点算子代数与海森堡顶点算子代数的乘积中实现自由场实现。这些自由场实现最终极大地帮助我们对模进行显式分析。

对于规范群为 G 、超多重态物质表示为T^*V的三维 $\mathcal{N}=4$ 理论，其 A 扭曲中的边界顶点算子代数具有如下形式

$$\mathcal{V}^A_{G,V}=H^\bullet_{\mathrm{BRST}}\left(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},\mathcal{V}^{T^*V}_{\beta\gamma}\otimes\mathcal{V}^W_{bc}\right), \tag{1.2}$$

若干份 β-γ顶点算子代数（对应体中的超多重态）的 BRST 约化（亦称半无限上同调），以及一些额外的自由费米子（bc）顶点算子代数，以吸收边界规范反常。也就是说，必须选择一个表示 W，使二次卡西米尔元满足 $T_V - T_{\mathfrak{g}} = T_W$。当边界规范反常本身消失（即 $T_V = T_{\mathfrak{g}}$）时，三维 $\mathcal{N} = 4$ 理论实际上是一个超共形四维 $\mathcal{N} = 2$ 理论的降维结果，而边界顶点算子代数（1.2）与 $\mathcal{N} = 2$的四维顶点算子代数 [BLL+13]相一致。对于我们的阿贝尔规范理论，边界反常绝不会自行消失，但有一种规范的抵消方式：选择 $W = V$。

VOA（1.2）对任意阿贝尔理论都有定义，但很难分析。在第3节中，我们引入（1.2）的自由场实现，从而可以显式地取 BRST上同调。一个直接的结果是，BRST上同调集中在零次。

为了进一步描述我们发现的结构，还需要为阿贝尔理论引入一些额外的记号，我们将在第 2 节中介绍这些记号，并在整篇论文中使用。一个 $G = U(1)^r$忠实作用于 $T^*V = T^*\mathbb{C}^n$ 上的理论由一个 $n \times r$ 电荷矩阵 ρ刻画。我们将该理论记为 $\mathcal{T}_\rho$,

$$\mathcal{T}_\rho : \qquad G = U(1)^r\,, \quad V = \mathbb{C}^n\,, \quad \text{charge matrix } \rho \tag{1.3}$$

电荷矩阵属于一个正合列

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}^r \underset{\sigma^{\vee,T}}{\overset{\rho}{\rightleftarrows}} \mathbb{Z}^n \underset{\sigma}{\overset{\rho^{\vee,T}}{\rightleftarrows}} \mathbb{Z}^{n-r} \longrightarrow 0 \tag{1.4}$$

该正合列的一个分裂 σ 决定了 $T_F = U(1)^{n-r}$ 在超多重态上的味对称性电荷，而一个余分裂 $\sigma^\vee$ 决定了 $T_{\text{top}} = U(1)^r$ 在单极算子上的拓扑味对称性电荷。三维镜像对称性通过转置整个正合列（1.4） [dBHO+96],

$$\mathcal{T}_\rho \overset{\text{3d mirror}}{\leftrightarrow} \mathcal{T}_{\rho^\vee}\,. \tag{1.5}$$

$\mathcal{T}_\rho$ 的“对称性分数化群”是有限群

$$H = \mathbb{Z}^r/\rho^T\rho(\mathbb{Z}^r)\,. \tag{1.6}$$

我们证明 在第 2.2 节（命题 2.2 和物理定理 2.3）中 $|H|$ 计数有质量真空 .

回到阿贝尔理论的 A 扭曲顶点算子代数，我们将在第 3.3.2节确立一种示意性地具有如下形式的分解

命题 3.2. 存在一个同构

$$\mathcal{V}_\rho^A = H_{\text{BRST}}\left(\mathfrak{gl}(1)^r, \mathcal{V}_{\beta\gamma}^{T^*V} \otimes \mathcal{V}_{bc}^V\right) \cong \bigoplus_{h\in H} \mathcal{M}_{\rho,h} \otimes \mathcal{V}_{\rho,h} \tag{1.7}$$

其中，右端是两个顶点算子代数乘积的 H 简单流扩张：$\mathcal{M}_{\rho,0}$ （单态顶点算子代数乘积的一个特定扩张）和$\mathcal{V}_{\rho,0}$ （一个双线性型为 $\rho^T\rho$的格点顶点算子代数）。

我们注意到，在 $\mathcal{N}=2$ BMR19、KN20、BM21 和 BN22b 中]构造了与此非常接近的四维顶点算子代数的自由场实现；这些实现具有不同的特征，其基础本质上是希格斯分支的几何。将它们与诸如（1.7）这样的表达式联系起来，将会很有意思。另一个有趣的方向是研究体理论中的消解/变形参数对边界顶点算子代数及其模范畴的影响，但本文不作探讨。在开启 FI 参数以消解某个三维 $\mathcal{N}=4$ 理论的希格斯分支后，A 扭曲边界顶点算子代数预计将成为希格斯分支上的 β-γ 系统层。Kuwabara [Kuw13]专门针对阿贝尔理论构造了后者。

三维 $\mathcal{N}=4$ 规范理论在 B 扭曲下的边界顶点算子代数还有另一类复杂性。在 [CG18]（另见 [Gar22]）中，研究表明，微扰边界顶点算子代数等价于与某个李超代数相关联的仿射顶点算子代数 $\widehat{\mathfrak{g}_G}$，V

$$\mathfrak{g}_{G,V} := \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^* \oplus \Pi V \oplus \Pi V^* \,, \tag{1.8}$$

其偶部是 $T^*\mathfrak{g}$，奇部是 T^*V。非微扰边界顶点算子代数还包括边界单极算子带来的贡献。在非阿贝尔理论中，我们目前仍不知道如何描述这一贡献；边界单极算子具有非零的上同调次数 [BDGH16、DGP17]，而它们的存在很可能会诱导出 $\widehat{\mathfrak{g}_G}$，V 的某个特定商。

这一设置的一个相近类比或许值得记住：紧致规范群在整数能级 [Wit89b、EMSS89]下的切恩-西蒙斯理论。在那里，手性边界条件在微扰层面支持一个 Kac–Moody 顶点算子代数，而在非微扰层面则修正为 WZW 顶点算子代数（一个极大简单商）。体的三维 $\mathcal{N}=4$ 规范理论的 B 扭曲似乎是李超代数（1.8）对应的切恩-西蒙斯理论版本；但其边界上的 WZW 顶点算子代数类比物一般而言尚未知晓。

对于阿贝尔三维 $\mathcal{N}=4$ 理论，我们发现（应用 [DGP17]的方法），边界单极子都具有零次上同调次数。我们将它们识别为微扰顶点算子代数的特定单流，并记作 $\widehat{\mathfrak{g}_\rho}$ （对于阿贝尔理论）；我们提出，应通过取一个简单流扩张（第4.1 节的定义4.2）来对其进行计入：

$$\mathcal{V}^B_\rho := \mathbb{Z}^r \text{ simple current extension of the affine VOA } \widehat{\mathfrak{g}_\rho} \,. \tag{1.9}$$

然后我们介绍 介绍自由场实现 $\mathcal{V}^B_\rho$（第4.3节），并用它证明三维镜像

阿贝尔边界顶点算子代数的对称性：

定理 4. **4.** 对于三维镜像阿贝尔理论，边界顶点算子代数之间存在一个同构

$$\mathcal{V}_{\rho}^{A} \cong \mathcal{V}_{\rho^{\vee}}^{B}, \tag{1.10}$$

这与两侧的共形分级、上同调分次以及全局（味）对称性相容。

该定理的一个重要特例是自由超多重态的 A 扭曲（其边界顶点算子代数为 $\mathcal{V}_{\beta\gamma} \otimes \mathcal{V}_{bc}$）与含有一个超多重态的 SQED 的 B 扭曲⏜（其边界顶点算子代数是仿射顶点算子代数 $\mathbb{Z}$ 的扩张 $\mathfrak{gl}(1|1)$ 之间的镜像对称。这些顶点算子代数的等价性已在 [CR08、CR11a、CR11b], 中得到确立，这一结果促成了[BN22a] 以及本文所采用的更一般的自由场实现。

我们加入最后一节（第 5 节），分析 A 扭曲和 B 扭曲中的顶点算子代数结构，为描述其模范畴做准备。目前最重要的结果看起来似乎只是技术性的。我们定义边界顶点算子代数的“替代”版本，示意如下（定义 5.1和5.2）

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{V}}_{\rho}^{A} &:= \mathbb{Z}^{r} \text{ simple current extension of } \mathcal{V}_{\beta\gamma}^{T^{*}V} \\ \widetilde{\mathcal{V}}_{\rho}^{B} &:= (\mathbb{C}^{*})^{r} \text{ orbifold of } T^{*}V \text{ symplectic fermions times a self-dual lattice}. \end{aligned} \tag{1.11}$$

然后我们证明

定理 5.6. 存在等价关系

$$\mathcal{V}_{\rho}^{A} \cong \widetilde{\mathcal{V}}_{\rho}^{A} \cong \widetilde{\mathcal{V}}_{\rho^{\vee}}^{B} \cong \mathcal{V}_{\rho^{\vee}}^{B} \tag{1.12}$$

至多相差张量积上（或移除）自对偶格点顶点算子代数。特别地，这些都是 *Morita* 等价的顶点算子代数，其模范畴严格相同。

该结果的重要性在第 6 节和第 8节中变得更加清晰。（1.11）右端的运算大致对应于从自由超多重态（在 A 扭曲或 B 扭曲中）开始，并规范化其部分味对称性，以得到秩为$-r$ 的阿贝尔规范理论 $\mathcal{T}_{\rho}$。它们并不严格等同于体规范化在边界顶点算子代数上诱导的运算，因为后者会导出通常的 $\mathcal{V}_{\rho}^{A}$，$\mathcal{V}_{\rho}^{B}$。相反，它们在顶点算子代数层面上模仿了模范畴规范化的最简单表现。归根结底，定理 5.6表明，对顶点算子代数进行简单而朴素的规范化运算，就足以分析其模范畴。

1.2 无限高阶对称性

论文余下部分致力于研究阿贝尔三维 $\mathcal{N}=4$规范理论在 A 和 B 拓扑扭曲中的线算符。无论在概念上还是实践中，我们的主要工具之一都是在体和边界上进行规范化与去规范化操作。为此，我们在第6 节稍作迂回，解释拓扑扭曲中全局对称性的一个相当有趣的特征。

我们研究的物理三维 $\mathcal{N}=4$ 理论 $\mathcal{T}_\rho$ 以这样的方式定义：它们没有一形式高阶/广义对称性，具体含义见 [GKSW14]。它们的普通零形式对称性包括味对称性 $T_F=U(1)^{n-r}$，后者作用于超多重态；以及$T_{\text{top}}=U(1)^r$，后者作用于单极算符。通过对 T_F 的一个子群进行规范化，可以扩张规范群；通过对 T_{top} [Wit03]的一个子群进行规范化，则可以有效地缩小规范群（解除规范化）。从物理角度看，这些操作地位相同。

在拓扑A扭结与B扭结中，这两种味对称性的表现截然不同。在A扭结中，T_{top} 会自然地复化，使理论能够耦合到背景复平坦联络；这一方式已由 [CDGG21]研究。然而，T_F 在局部算子上的作用是平凡的，因为它的流变成了 Q-恰当的。从数学上说，这种设置预期会导出 T_F 的一个可能非平凡的“拓扑作用”——该作用通过 T_F [Tel14]的同伦类型分解。在我们的情形中，扭曲理论 $\mathcal{T}_\rho^A$获得了一种新的无限一形式对称性 $\pi_1(T_F)$，取代了 $\simeq\mathbb{Z}^r$ （物理定理 T_F 6.1）。在B扭结中，对称性的作用互换，因此总的来说

	零形式	一形式
$\mathcal{T}_\rho$	$T_F\times T_{\text{top}}\simeq U(1)^{n-r}\times U(1)^r$	none
$\mathcal{T}_\rho^A$	$T_{\text{top},\ \mathbb{C}}\simeq(\mathbb{C}^*)^r$	$\pi_1(T_F)\ \simeq\mathbb{Z}^{n-r}$
$\mathcal{T}_\rho^B$	$T_{F,\mathbb{C}}\simeq(\mathbb{C}^*)^{n-r}$	$\pi_1(T_{\text{top}})\simeq\mathbb{Z}^r$

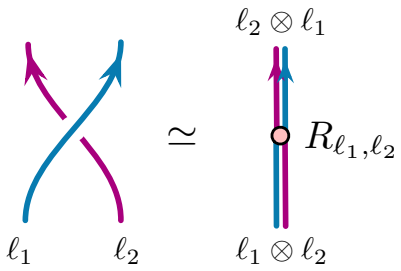
(1.13)

一形式对称性的生成元在 A 扭曲中是味涡旋线，在 B 扭曲中是威尔逊线。二者都以内在方式与边界顶点算子代数中的谱流模相关，其形式类似于切恩-西蒙斯理论中的经典构造 [MS89]。

式（1.13）的一个重要推论是，虽然对 T_F （例如）的一部分进行规范化，会在 $\mathcal{T}_\rho^B$中的线算子范畴上诱导出 $\mathbb{C}^*$轨形，但也会在 $\mathcal{T}_\rho^A$中的线算子范畴上诱导出 $\mathbb{Z}$ 扩张（一形式对称性的规范化）。这些正是替代顶点算子代数（1.11）所模拟的操作。这些操作与物理（非拓扑扭曲的）三维规范理论中有限对称性的规范化和解除规范化非常相似；相关研究见例如 [HLS18、BBFSN22、BBFSN23、NSWZ23]。进一步研究物理理论中的拓扑一形式对称性与高阶对称性之间的相互作用将很有意义，相关讨论见例如 [EKSNW19、GHP20] 及前述参考文献。

1.3 模与线算子

在三维 $\mathcal{N}=4$ 理论的拓扑扭曲中，预期线算子具有$\widehat{}$DG 编织张量范畴 $\mathcal{C}$的结构。此类范畴最早的例子，是针对三维$\mathcal{N}=4$ σ 模型的 B 扭曲，在 [KRS08、KR09、RW10]中发展的。范畴的对象$\mathcal{L}$就是线算子本身；一对对象之间的态射空间 Hom$\hat{\mathcal{C}}(\ell_1,\ \ell_2)$ 是它们交汇点处局部算子的空间；张量积（亦称融合）由平行线的碰撞诱导；而编织同构 $R_{\ell_1,\ \ell_2}\in$Hom$\hat{\mathcal{C}}(\ell_1\otimes\ell_2,\ \ell_2\otimes\ell_1)$ 则由线的拓扑编织构型诱导：



(1.14)

其中许多内容在任意三维拓扑量子场论中都是标准的。对于我们现在所考虑的超对称理论的扭曲而言，一个特殊之处在于范畴具有微分分次结构。这反映为：态射空间被定义为更大的物理局部算子空间相对于拓扑超荷的上同调 Q。$\widehat{}$相关地，人们几乎总是预期线算符会形成非平凡的束缚态。如果 $\mathcal{C}$可以建模为某个阿贝尔范畴的导出范畴 $\mathcal{C}$，那么 $\mathcal{C}$ 几乎总是非半单的。这些思想还从物理角度在（例如） [KRS08、CCG18、CDGG21]中作了进一步回顾；模张量中的相关导出结构则由 [SW21]从数学上进行了研究。

另一个特征是，扭曲的三维 $\mathcal{N}=4$ 理论可能产生 Spin 或 Spin^{c}拓扑量子场论，具体取决于规范群和物质含量，参见 [CGP21、GHN$^+$20]。这为线算符范畴增添了额外的扭曲扇区和额外结构。不过，在本文中，我们将只考虑平凡的自旋结构——“线算符范畴”指的是未扭曲扇区。

关于三维$\mathcal{N}=4$ 理论中 A 扭曲和 B 扭曲的线算符范畴，一个重要的预期是，它们能够再现库仑分支和希格斯分支上的函数环。也就是说，平凡线算符 $\mathbb{1}$ 同时属于 A 扭曲范畴和 B 扭曲范畴。它是张量积的单位元。$\mathbb{1}$ 与 $\mathbb{1}$ 之间的交汇点仅承载体局域算符，因此

$$\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}_A}(\mathbb{1},\mathbb{1})=\mathbb{C}[\mathcal{M}_{\mathrm{Coulomb}}]\,,\qquad \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}_B}(\mathbb{1},\mathbb{1})=\mathbb{C}[\mathcal{M}_{\mathrm{Higgs}}]\,. \tag{1.15}$$

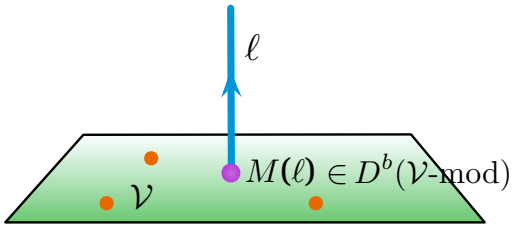
$\widehat{\ }$11 存在非平凡自同态这一事实，再次表明 $\mathcal{C}$ 不可能是半单范畴。

关于三维 $\mathcal{N}$ =4 规范理论中线算子范畴的若干分类和几何模型已为人所知。Assel 和 Gomis 给出了半 BPS 线算子的膜构造 [AG15], ，并改编了此前用于分析四维规范理论中曲面算子的技术 [HH97、GW06、AGG$^+$09、DGH10]。文献[DGGH19], 扩展了物理分类，并进一步计算了态射空间。文献 [CG18、CCG18]将线算子与边界顶点算子代数模联系起来，随后利用预期关系（1.15）给出了希格斯手征环和库仑手征环的新计算方法。

Hilburn 和 Yoo 基于运用导出几何技术对 A 扭曲和 B 扭曲进行的数学分析，提出了线算子范畴的几何模型——粗略而言，他们预测，在 G, T^*V规范理论的 A 扭曲中，线算子类似于代数环空间上的 D-模 $V/G_{\mathbb{C}}$；而在 B 扭曲中，线算子类似于 $V/G_{\mathbb{C}}$上的导出（局部常值）环空间上的相干层，参见 [BF18、HR21]。这些模型的若干版本已出现在关于库仑分支的数学研究中[BFN21、Web16、Web19]。Hilburn 和 Raskin 证明了自由超多重态 A 扭曲中的范畴与 SQED 的 B 扭曲中的范畴之间存在三维镜像等价。关于 B 扭曲中线算子的另一种描述，本质上是对 [KRS08], 进行等变化；Oblomkov-Rozansky 在关于结同调的工作中提出了这一描述 [OR18]。最近，文献 [GH22]从边界条件的 DG 2-范畴重构了线算子。

然而，现有关于（无质量）三维 $\mathcal{N}$ = 4 规范理论的拓扑扭曲中线算符范畴的模型，都无法刻画编织张量结构。我们最终通过边界顶点算子代数获得了这一结构。（ [CP20]提出的通过 Koszul 对偶研究线算符的视角，或许能提供另一条途径，直接从体物理中确定其编织张量结构。这值得进一步研究。）

拓扑扭曲中的体理论线算符与边界顶点算子代数模之间的关系在 [CCG18]中有所概述；它推广了切恩-西蒙斯理论中威尔逊线与边界 WZW 模之间广为人知的关系 [Wit89b、EMSS89]。对于每个线$\widehat{\ }$算符 $\ell \in \mathcal{C}$，都有一个与之关联的模 $M(\ell)$，它由交汇点处的局部算子给出，
ℓ 以及边界：



(1.16)

这定义了一个函子

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathcal{C}} & \to & D^b(\mathcal{V}\text{-mod}) \\ \ell & \mapsto & M(\ell) \end{array} \tag{1.17}$$

人们预期这将是体DG范畴与 VOA 模的 导出范畴之间的一个导出等价。

在第 8 节中，我们将定义边界顶点算子代数 $\mathcal{C}_\rho^A$、 $\mathcal{C}_\rho^B$的模的阿贝尔范畴 $\mathcal{V}_\rho^A$、 $\mathcal{V}_\rho^B$。这两个范畴都具有编织张量结构，并且在三维镜像对称下等价。与以往文献相比，这是本文以及 [BN22a] 的一项重大创新。对这些范畴及其编织张量结构进行精确识别并非完全 straightforward。Huang、Lepowsky 和 Zhang [HLZ10a, HLZ10b, HLZ10c, HLZ10d, HLZ10e, HLZ10f, HLZ11a, HLZ11b] 已发展出一套关于 VOA 模的编织张量范畴——又称顶点张量范畴——的一般理论。通常很难证明该理论适用，而其顶点张量范畴已被完全理解的为数极少的对数理论之一，就是单态顶点算子代数范畴 [CMY20b, CMY22a]。VOA $\mathcal{V}_\rho^A$ 和 $\mathcal{V}_\rho^B$ 是许多单态顶点算子代数与若干海森堡顶点算子代数之积的扩张。随后，顶点代数扩张理论 [CKM17, CMY20a] 使我们也能够理解 $\mathcal{V}_\rho^A$和 $\mathcal{V}_\rho^B$的模的编织张量范畴。

更准确地说，我们首先回顾 [BN22a], 的工作，该工作为基本镜像对实现了这一计划，即自由超多重态的 A 扭曲与 SQED 的 B 扭曲（第8.2节）。然后，我们利用这一思路：在 $\mathcal{T}_\rho^A$ 中，规范化应通过 $\mathbb{Z}$ 简单流扩张来实现，从而（示意性地）定义

$$\mathcal{C}_\rho^A := \mathcal{C}_{\beta\gamma}^{T^*V}/\mathbb{Z}^r\,, \tag{1.18}$$

并以 [BN22a] 的结果为基础，证明它具有编织张量结构。在第8.4 节中，我们独立定义

$$\mathcal{C}_\rho^B := KL_\rho/\mathbb{Z}^r\,, \tag{1.19}$$

其中， KL_ρ 表示仿射超代数 $\widehat{\mathfrak{g}_\rho}$ 的 Kazhdan-Lusztig 范畴（由有限长度的分次受限模组成——见定义8.18），而此处 $\mathbb{Z}^r$ 的简单流扩张则源于边界单极算子。我们证明（定理8.25） $\mathcal{C}_\rho^B$也具有编织张量结构。最后，我们确立

定理 8.32： 存在阿贝尔编织张量范畴的等价

$$\mathcal{C}_\rho^A \simeq \mathcal{C}_{\rho^\vee}^B\,. \tag{1.20}$$

1.4 体范畴与边界范畴的比较

第 8 节中颇为技术性的 VOA 分析，通过与线算符的比较得到了补充；这些线算符完全在第7节的体三维理论中构造。在第 7节中，我们按照无限一形式对称性（1.13）组织体线范畴。在 B 扭曲中，一形式对称性的生成元是半 BPS 威尔逊线 $\mathbb{Z}^r$，这类对象已因 $\{\mathbb{W}_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ 而广为人知 [AG15、DGGH19]。“带电对象”包括单值化缺陷与威尔逊线的混合体 $\mathbb{W}_m^{(\upsilon)}$，由一个额外参数标记 $\upsilon\in(\mathbb{C}/\mathbb{Z})^r$（$\mathbb{Z}^r$的一个特征）。此前尚未研究过这些对象。它们是四维规范理论中威尔逊-'t Hooft 线的类似物

我们定义包含 $\mathbb{W}_m^{(\upsilon)}$ 的最小 DG 范畴，该范畴具有分块分解

$$\widehat{\mathcal{C}}_\rho^B=\bigoplus_{\upsilon\in(\mathbb{C}/\mathbb{Z})^r}\widehat{\mathcal{C}}_{\rho,\upsilon}^B\,, \tag{1.21}$$

以及每个由 $\widehat{\mathcal{C}}_{\rho,\,\upsilon}^B$ 生成的 $\{\mathbb{W}_m^{(\upsilon)}\}_{m\in\mathbb{Z}^r}$。我们将在第 8 节中论证（特别是通过比较第8.6节中的导出态射），即 $\widehat{\mathcal{C}}_\rho^B$是我们 VOA 模范畴的导出范畴，

$$\widehat{\mathcal{C}}_\rho^B\simeq D^b\mathcal{C}_\rho^B\,, \tag{1.22}$$

使得 $\widehat{\mathcal{C}}_\rho^B$ 的生成元 $\mathbb{W}_m^{(\upsilon)}$ 映射到 $\mathcal{C}_\rho^B$ 的简单对象。

类似地，在 A 扭曲中，我们回顾体理论具有“味涡旋”线 $\{\mathbb{V}_m\}_{m\in\mathbb{Z}^{n-r}}$，它们现在生成 $\mathbb{Z}^{n-r}$ 一形式对称性。此外，还存在此前尚未研究过的 BPS 缺陷 $\mathbb{V}_m^{(\upsilon)}$，它们由 $m\in\mathbb{Z}^{n-r}$ 和 $\upsilon\in(\mathbb{C}/\mathbb{Z})^{n-r}$ 标记。总而言之，这些生成一个 DG 范畴，我们认为它是我们的 VOA 模范畴的导出范畴，

$$\widehat{\mathcal{C}}_\rho^A=\bigoplus_{\upsilon\in(\mathbb{C}/\mathbb{Z})^{n-r}}\widehat{\mathcal{C}}_{\rho,\upsilon}^A\simeq D^b\mathcal{C}_\rho^A\,. \tag{1.23}$$

结果　第8 节的结果立即推出体范畴的三维镜像等价

$$\widehat{\mathcal{C}}_\rho^A\simeq\widehat{\mathcal{C}}_{\rho^\vee}^B\,. \tag{1.24}$$

我们还预期，$\mathcal{C}_\rho^A$的编织张量结构$\mathcal{C}_\rho^B$将提升到导出范畴。特别地，根据 [CMY22b]关于仿射 $\mathfrak{gl}(1|1)$的一个结果，以及我们用于构造 $\mathcal{C}_\rho^A$的提升函子的性质$\mathcal{C}_\rho^B$，阿贝尔范畴中的张量积是正合的。在某些温和条件下，它随后应当能够提升为导出范畴上的张量积。我们在此不对其进行严格分析。

我们预期，导出范畴 $\widehat{\mathcal{C}}_\rho^A$，$\widehat{\mathcal{C}}_\rho^B$也与“Betti”几何——

模型中所研究的 B 扭曲下线算子的几何模型 [OR18、GH22]密切相关。这似乎是 Koszul 对偶的一个实例，我们将在别处进一步探讨。

1.5 致谢

我们感谢许多人对本研究提出的真知灼见和建议，尤其感谢 Mathew Bullimore、Niklas Garner、Jusin Hilburn、Eugene Gorsky、Pavel Safronov 和 Daniel Zhang。我们也感谢 Andrea Ferrari 和 Christopher Beem 与我们协调论文投稿事宜。TC 的研究由 NSERC Grant RES0048511 资助。TD 的研究由 EPSRC Open Fellowship EP/W020939/1 资助。WN 的研究由加州大学戴维斯分校的博士论文写作年度奖学金资助。AB、TD 和 WN 还获得了 NSF CAREER Award DMS-1753077 的资助。

2 设置与记号

2.1 简单阿贝尔三维规范理论

如引言中所述，本文研究阿贝尔三维 $\mathcal{N}=4$ 理论，并施加若干进一步限制：

1. 规范群 G 是连续的（没有离散因子），因此同构于 $U(1)^r$（对于某个 $r\geq 0$）。

2. 规范群在形如 $T^*V\simeq V^*\oplus V$ 的物质表示上忠实作用，其中 V 是 V 的复线性表示，而 V^* 是其对偶。我们令 $V=\mathbb{C}^n$，并可假设该作用已被对角化，也就是说，作用映射 $G\to U(V)$ 可分解为经过同态 $\varphi\colon G\to U(1)^n$，即

$$\varphi : U(1)^r \to U(1)^n\,. \tag{2.1}$$

作用的忠实性意味着 φ 是单射。

我们将这类理论称为“简单”理论。它们简单之处之一在于三维镜像对称的作用。我们稍后会回顾这一点；首先，我们将上述要求转化为关于电荷格的陈述。

2.1.1 荷格

我们首先将忠实性转化为一个关于荷格的陈述。利用指数映射 $\theta\mapsto e^{2\pi i\theta}$ 将 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 与 $U(1)$ 对应起来，我们看到同态（2.1）由

一个线性映射诱导

$$\rho : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^n \tag{2.2}$$

它保持整数子格， $\rho(\mathbb{Z}^r) \subseteq \mathbb{Z}^n$。（这一限制确保 $\varphi = e^{2\pi i\rho}$ 定义良好。）通常会将整数矩阵 ρ称为该理论的电荷矩阵。我们将其分量记为

$$\rho = \rho^i{}_a\,, \qquad i = 1, ..., n\,, \quad a = 1, ..., r \tag{2.3}$$

使得$\rho^i{}_a$ 是第 i个超多重态在规范群的第 a个因子下的电荷。

我们还定义

$$\Lambda := \rho(\mathbb{Z}^r) \tag{2.4}$$

为电荷格本身。它是 $\mathbb{Z}^n$的一个子格，其基向量为 ρ_a （即ρ的各列），双线性型为

$$(\rho^{\mathsf{T}}\rho)_{ab},$$

其中 ρ^{T} 表示转置矩阵。记 $\Lambda_{\mathbb{R}} := \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ 为 Λ的 $\mathbb{R}$-张成。

于是有:

引理 2.1。 忠实性条件 *(2)* 等价于受限映射 $\rho :\ \mathbb{Z}^r \to \mathbb{Z}^n$ 的余核秩为 $n - r$ 且无挠。换言之，当且仅当存在一个正合列时，规范群的作用才是忠实的

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}^r \xrightarrow{\ \rho\ } \mathbb{Z}^n \xrightarrow{\ \tau\ } \mathbb{Z}^{n-r} \longrightarrow 0\,. \tag{2.5}$$

或者，用格的术语来说，条件 *(2)* 等价于 Λ 是一个完备子格，即

$$\Lambda_{\mathbb{R}} \cap \mathbb{Z}^n = \Lambda\,. \tag{2.6}$$

证明。 在 $\mathbb{Z}^r$ 和 $\mathbb{Z}^n$中分别进行整数值基变换后，我们可以将 ρ 变为一个对角映射 $\hat{}\rho$: $\mathbb{Z}^r \to \mathbb{Z}^n$ ，其核和余核分别与 ρ的核和余核同构。（这有时称为史密斯标准形。所谓对角，是指除非 $i = a$，否则 $\hat{}\rho^i{}_a = 0$ 。） φ 的单射性蕴含 ρ， $\hat{}\rho$的单射性，而这又要求 $n \geq r$。于是我们得到一个直和分解

$$\hat{\rho} = \hat{\rho}^{diag} \oplus 0 \ :\ \mathbb{Z}^r \to \mathbb{Z}^r \oplus \mathbb{Z}^{n-r}\,, \tag{2.7}$$

具有非退化的 $r \times r$ 对角矩阵 $\hat{}\rho^{diag}$。 φ 的单射性还导出了一个更微妙的条件。即使 ρ 是单射的， φ 仍可能具有由非整数值点组成的核

的 $\mathbb{R}^r$，这些点经 ρ 映射到 $\mathbb{R}^n$的整数值点。也就是说，记 $(\hat{}\rho^{diag})^{-1}(\mathbb{Z}^r)$ 为 $\mathbb{R}^r$ 中（2.7）中第一项的原像，则有

$$\ker\varphi \simeq (\hat{\rho}^{diag})^{-1}(\mathbb{Z}^r)\,\big/\,\mathbb{Z}^r \simeq \mathbb{Z}^r/\hat{\rho}^{diag}(\mathbb{Z}^r) = \operatorname{coker}\hat{\rho}^{diag}\,. \tag{2.8}$$

这是一个有限群。此外，由于余核 $\rho \simeq$ 余核 $\hat{}\rho =$ 余核 $\hat{}\rho^{diag} \oplus \mathbb{Z}^{n-r}$，我们得出结论，ker φ 是平凡的，当且仅当 ρ 在整数点上的限制可以补全为一个正合列 (2.5)。

关于完备格的陈述可通过进一步观察得出： $\Lambda_{\mathbb{R}} \cap \mathbb{Z}^n$ 恰好包含由 ρ 映射到 $\mathbb{Z}^n$的整数点的 $\mathbb{R}^r$ 中的点，因此

$$\ker\varphi \simeq \big(\Lambda_{\mathbb{R}} \cap \mathbb{Z}^n\big)/\Lambda\,, \tag{2.9}$$

由此，忠实性等价于 Λ 是完备的。 □

2.1.2 整体对称性

我们总结一下一个具有电荷矩阵 ρ、即规范群 $U(1)^r$ 忠实作用于 n 超多重态上的三维 $\mathcal{N}=4$ 理论 $\mathcal{T}_\rho$的整体对称性，以供今后参考。通常的（零形式）对称性结构众所周知，参见例如 [IS96]。具体如下：

- 一个作用于超多重态标量（以及矢量多重态费米子）的 $SU(2)_H$ R 对称性，诱导希格斯分支的超凯勒旋转。
- 一个 $SU(2)_C$ R 对称性作用于向量多重态标量（以及超多重态和向量多重态费米子），并诱导库仑分支的超凯勒旋转。
- 一种味对称性，其极大环面为 $T_F = U(1)^{n-r}$，作用于超多重态，因而也作用于希格斯分支。
- 一种拓扑味对称性，其极大环面为 $T_{top} = U(1)^r$，作用于单极算子，因而也作用于库仑分支。

这两种味对称性在某些特殊情况下可能会增强为非阿贝尔对称性，但这与本文无关。

超多重态在味对称性下的荷 $T_H \simeq U(1)^{n-r}$ 仅定义到规范荷的模。可以通过选择正合列的一个分裂来固定这一歧义（2.5），

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}^r \xrightarrow{\rho} \mathbb{Z}^n \underset{\sigma}{\overset{\tau}{\rightleftarrows}} \mathbb{Z}^{n-r} \longrightarrow 0 \tag{2.10}$$

(回忆一下，分裂是一个映射 σ，满足 $\tau\sigma = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}^{n-r}}$。（到史密斯标准形的基变换（2.7）表明分裂总是存在。）然后，分量 $\sigma^i{}_\alpha$ 编码了第 i 个超多重态在味群中第 α 个因子下的电荷。相应地，味对称性嵌入到 $U(1)^n$ 对称性中，具体通过 $V = \mathbb{C}^n$ 实现

$$e^{2\pi i\sigma} : U(1)^{n-r} \to U(1)^n \,. \tag{2.11}$$

一般而言，三维 $\mathcal{N} = 4$理论也可以具有一形式对称性 [GKSW14，HLS18]。它们可以源自规范群中的离散因子，从而产生作用于威尔逊线的一形式对称性；也可以源自规范群中一个平凡作用的离散子群，从而产生作用于涡旋线的一形式对称性。这些现象及其与零形式对称性的相互作用可能相当丰富，最近也在三维 $\mathcal{N} = 4$ 背景下的 [BBFSN22]中得到了研究。然而，一形式对称性的这两种起源，恰恰是我们在定义简单阿贝尔规范理论时排除的情况。因此，我们预期简单阿贝尔三维 $\mathcal{N} = 4$ 理论恰好是具有平凡一形式对称性的理论。

未来将当前论文中的分析扩展到简单理论之外，应该会相当有趣。

2.1.3 三维镜像对称

对于具有正合列（2.5）的简单理论，由电荷矩阵 ρ 定义的理论 $\mathcal{T}_\rho$ 具有一个三维镜像 [dBHO+96、KS99], 记作 $\mathcal{T}_{\rho^\vee}$，其规范群为 $G = U(1)^{n-r}$，n 超多重态$V = \mathbb{C}^n$，镜像电荷矩阵为

$$\rho^\vee := \tau^{\mathsf{T}} \,, \tag{2.12}$$

嵌入对偶正合序列

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}^{n-r} \xrightarrow{\rho^\vee} \mathbb{Z}^n \xrightarrow{\tau^\vee = \rho^{\mathsf{T}}} \mathbb{Z}^r \longrightarrow 0 \,. \tag{2.13}$$

请注意，这里的对偶性使用 $\mathbb{Z}^r$，$\mathbb{Z}^n$，$\mathbb{Z}^{n-r}$ 上的标准欧几里得内积，而 M^{T}表示矩阵 M 的通常转置。

用格的术语来说，镜像对称交换 Λ和正交格

$$\Lambda^\perp := \{\mu \in \mathbb{Z}^n \,|\, \mu \cdot \lambda = 0 \;\forall\, \lambda \in \Lambda\} = \rho^\vee(\mathbb{Z}^{n-r}) \,. \tag{2.14}$$

Λ 为完备格的要求保证了 $(\Lambda^\perp)^\perp = \Lambda$。

三维镜像对称有时也用规范和味荷来表述。选定一个分裂 σ 如（2.10）中所示后，可以构造一个 $n \times n$ 矩阵（ρ σ），该矩阵是幺模的。

三维镜像对称的作用是取该矩阵的逆转置:

$$(\rho^\vee, \sigma^\vee) := (\rho, \sigma)^{-1,\mathsf{T}} \tag{2.15}$$

其中， $\rho^\vee$ 是镜像电荷矩阵，满足 $\rho^{\vee\mathsf{T}}\rho = 0$；而 $\sigma^\vee$编码镜像味荷，是对偶正合序列的一个分裂，并选取为满足 $\sigma^{\vee\mathsf{T}}\sigma = 0$。

从物理上说，三维镜像对称交换了 T_F 味对称性（作用于超多重态）与 T_{top} 拓扑味对称性（作用于单极算子，因而作用于库仑分支）的作用。它还交换了两种 R 对称性:

$$\begin{array}{lccc} \text{三维镜像对称:} & SU(2)_H & \leftrightarrow & SU(2)_C \\ & T_F & \leftrightarrow & T_{\text{top}} \\ & \text{vortex lines} & \leftrightarrow & \text{Wilson lines} \\ & \text{A twist} & \leftrightarrow & \text{B twist} \end{array} \tag{2.16}$$

因此，若追踪 R 对称性的作用，在镜像理论中，超多重态会被扭曲超多重态取代（按定义，扭曲超多重态是指 $SU(2)_H$和 $SU(2)_C$的作用互换的超多重态），而矢量多重态也会相应地被扭曲矢量多重态取代。R 对称性的互换也解释了为何镜像理论中的 A 型和 B 型拓扑扭曲会互换。

2.1.4 简单理论的真空结构

简单阿贝尔规范理论的希格斯分支和库仑分支是超环面簇，其几何性质可以通过超平面排列的组合学进行分析。本文从数学角度回顾了相关内容，参见 [Pro08、BLPW10] ，并从物理学的三维 $\mathcal{N} = 4$ 视角进行了讨论，参见[BDGH16]。我们在此汇集一些相关结果。

开启一般实质量和实 FI 参数（分别对应于 T_F 和 T_{top} 个味对称性）后，希格斯分支和库仑分支都会变成有质量的。它们支持有限个真空，这些真空位于部分解析后的希格斯分支或部分解析后的库仑分支上的点处（两者上出现的是同一组真空）。更准确地说，这些真空与大小为 r 的子集 $I \subset \{1, ..., n\}$ 一一对应，并且相应的电荷矩阵子式满足

$$\det(\rho^I) \neq 0\,, \quad \text{where} \quad \rho^I := (\rho^i{}_a)^{i\in I}_{a\in\{1,\ldots,r\}}. \tag{2.17}$$

补集 I^c 包含由于质量参数而在真空中取零值的超多重态。集合 I 本身包含取非零值以满足实矩映射约束、随后由秩为 r 的规范

群 G。约束（2.17）保证 G 的李代数 G 自由作用。然而，当 $\det(\rho^I) \neq \pm 1$时， G 的一个有限子群可能仍未破缺。此时，真空的局部邻域具有阶数为 $|\det(\rho^I)|$ 的轨形奇点结构，该结构同时出现在希格斯分支和库仑分支上，因此该理论并非完全有质量。

这种真空分析与镜像对称完美契合，这要归功于一个将矩阵及其逆矩阵的子式联系起来的简单单位元。在当前情形下，逆关系（2.15）保证，对于每个大小为 I 的子集 r 及其补集 I^c，都有

$$\det \rho^I \;=\; \det\left(\rho^\vee\right)^{I^c}. \tag{2.18}$$

这提供了另一种理解方式：希格斯分支和库仑分支上的真空态以及轨形奇点的阶都必须匹配。

简单阿贝尔理论非平凡程度的一个粗略度量（我们将在第 2.2 节中进一步完善），是计数真空（在一般质量和 FI 变形下），并以其轨形阶数的平方加权——或者等价地，以其希格斯支和库仑支轨形阶数的乘积加权。我们将此量记为 $N_{\text{vac}}(\rho)$。它由对电荷矩阵的所有子式求和得到，

$$N_{\text{vac}}(\rho) := \sum_{I\subset\{1,\dots,n\}} \left(\det \rho^I\right)\left(\det\left(\rho^\vee\right)^{I^c}\right) = \sum_{I\subset\{1,\dots,n\}} \left|\det\, \rho^I\right|^2. \tag{2.19}$$

2.1.5 例示

理论 $\mathcal{T}_{(1)}$ with $\rho = (1)$ 是三维 $\mathcal{N} = 4$ SQED。它具有 $G = U(1)$ 作用于单个超多重态，其电荷为 1。其正合列为

$$\text{SQED}_1: \quad 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\rho=1} \mathbb{Z} \xrightarrow{\tau=0} 0 \longrightarrow 0\,. \tag{2.20}$$

其三维镜像 $\mathcal{T}_0$ 是一个自由超多重态。（更准确地说，SQED_1 的镜像是一个扭曲超多重态，因为 $SU(2)_H$ 和 $SU(2)_C$ R 对称性的作用互换了。）它有 $G = 1$ 平凡地作用于 $V = \mathbb{C}$。其正合列为

$$\text{hyper}: \quad 0 \longrightarrow 0 \xrightarrow{\rho^\vee=0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\tau^\vee=(1)} \mathbb{Z} \longrightarrow 0\,. \tag{2.21}$$

这两个理论都有 $N_{\text{vac}} = 1$。

更深入的 有趣的理论是带有 n 个电荷为 1 的超多重态的 SQED，即 $G = U(1)$ ，

$V=\mathbb{C}^n$，以及 $\rho=(1,\ 1,\ \ldots\ldots,\ 1)^{\mathsf{T}}$，

$$\mathrm{SQED}_n:\quad 0\longrightarrow\mathbb{Z}\xrightarrow{\rho=\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}}\mathbb{Z}^n\xrightarrow{\tau}\mathbb{Z}^{n-1}\longrightarrow 0\,. \tag{2.22}$$

正合列中的分裂由 $(n-1)\times n$ 矩阵给出

$$\tau=\begin{pmatrix}1&-1&0&\cdots&0\\ 0&1&-1&\cdots&0\\ &&&\ddots&\\ 0&0&0&&-1\end{pmatrix}\,. \tag{2.23}$$

该理论有 $N_{\mathrm{vac}}(\rho)=n$ 个光滑的有质量真空，从ρ的子式可以最容易地看出这一点。其希格斯分支解析化为 $T^*\mathbb{CP}^{n-1}$，而有质量真空是其上一般$U(1)$作用的不动点。

最后，一个具有轨形真空的理论的简单例子，是对 SQED_2,的修正，其中包含一个电荷为一的超多重态和一个电荷为二的超多重态。

$$\widetilde{\mathrm{SQED}}_2:\quad 0\longrightarrow\mathbb{Z}\xrightarrow{\rho=\binom{1}{2}}\mathbb{Z}^2\xrightarrow{\tau=(2\ -1)}\mathbb{Z}\longrightarrow 0 \tag{2.24}$$

它承认一个分裂 $\sigma=\binom{0}{-1}$。考察 ρ的 1×1 子式，可以清楚地看出，该理论有两个真空，一个是光滑的，另一个在希格斯分支和库仑分支上都是一个 $\mathbb{Z}_2$ 轨形。现在我们有 $N_{\mathrm{vac}}(\rho)=1+2^2=5$。

2.2 阿贝尔理论的不变量

一个自然的问题是，如何通过场重定义和对偶性来简化阿贝尔三维 $\mathcal{N}=4$ 理论。这里我们将给出一个部分答案，以及一个理论在红外自由的充要判据——也就是说，它是自由超多重态（2.21）与 SQED_1的2.20）（它们在红外流向自由扭曲超多重态）的乘积[1]。

给定一个简单的（按第2节的意义而言）阿贝尔理论，其电荷矩阵为 ρ，我们可以通过以下方式得到一个等价理论

- 置换超多重态，和/或将其电荷取反。抽象地说，这是完整对称性 $USp(n)$ 的 Weyl 群对 n 个超多重态的作用；该群是环面 $U(1)^n$ 的稳定子，而我们要求规范群通过该环面作用。换句话说，这是保持权空间不变的置换群。这样的

[1]这一流动只是换一种说法来表达 SQED_1 与一个自由扭曲超多重态互为镜像这一结论。谨此提醒读者，三维镜像对称将这样一对规范理论联系起来：它们流向相同的 $in\ \ the infrared$。

置换作用于 ρ 的方式是

$$\rho \mapsto P\rho \tag{2.25}$$

其中 $P \in GL(n,\ \mathbb{Z})$ 的每一行和每一列都恰有一个 ± 1 元素。（请回想，整数矩阵 P满足这一条件等价于 $P^TP = I$，即 $P \in O(n,\ \mathbb{Z})$。）

从几何上看，这些置换是欧几里得格 $\mathbb{Z}^n$ 的自同构，并作用于电荷格 $\Lambda \subseteq \mathbb{Z}^n$ 的嵌入。

- 对矢量多重态重新定义，所用变换在整数上可逆。这相当于重新定义规范荷。电荷矩阵变换为

$$\rho \mapsto \rho M \tag{2.26}$$

对于任意 $M \in GL(r,\ \mathbb{Z})$。它们是电荷格 Λ 本身的自同构。

总而言之，场重定义对应于电荷格 Λ 及其在 $\mathbb{Z}^n$ 中嵌入的同构。因此，简单阿贝尔理论的同构类至多由 $\mathbb{Z}^n$ 中嵌入子格的同构类分类。

然而，对偶性还可能进一步关联这类格同构类。例如，三维镜像对称会将一个格与其正交补互换，如式（2.14）所示。因此，我们要定义阿贝尔理论的一个更粗略的不变量。它未必是完备不变量，但可以保证在任何量子对偶下保持不变。

我们考虑群

$$H := \operatorname{coker}(\rho^{\mathsf{T}}\rho) = \mathbb{Z}^r/\operatorname{im}(\rho^{\mathsf{T}}\rho)\,, \tag{2.27}$$

注意到 $\rho^T\rho$ 是电荷格 Λ 上的内禀双线性型（与其在 $\mathbb{Z}^n$ 中的嵌入无关）。阿贝尔群 H 是有限群（因为 ρ 满秩 r，因此 $\rho^{\mathsf{T}}\rho$ 非退化）。其阶就是 $|H| = \det(\rho^{\mathsf{T}}\rho)$。它具有若干优美的数学和物理性质：

命题 2.2。

（*i*）场重定义 $\rho \mapsto P\rho M$ 诱导出 H 的一个同构。

（*ii*）回忆定义 $\rho^\vee = \tau^{\mathsf{T}}$ 见 （2.13），存在同构

$$H = \mathbb{Z}^r/im(\rho^{\mathsf{T}}\rho) \simeq \mathbb{Z}^{n-r}/im(\rho^{\vee\mathsf{T}}\rho^\vee) \simeq \mathbb{Z}^n/(\Lambda \oplus \Lambda^\perp) \tag{2.28}$$

特别是，H 在三维镜像对称下保持不变。

(*iii*) H 是（2.19）中引入的有质量真空的加权计数：

$$|H| = N_{\text{vac}}(\rho)\,. \tag{2.29}$$

(iv) H 是威尔逊线的"对称性分数化群"（或者根据 *(ii)* 和三维镜像对称性，是涡旋线的对称性分数化群）。也就是说，

$$H \simeq \frac{\textit{possible flavor charges of local operators at junctions of Wilson lines}}{\textit{possible flavor charges of bulk local operators}}\,. \tag{2.30}$$

（这里我们忽略 R 对称性，只考虑全局味对称性。）对（2.30）的重新表述是，如果 F 表示存在威尔逊线时的超多重态味对称性，那么忠实作用于体局域算符的对称性是 F/H。

证明。(i) 显然：对于任意 N，$M \in GL(r,\ \mathbb{Z})$，阿贝尔群 $\mathbb{Z}^r/\rho^{\mathsf{T}}\rho$和$\mathbb{Z}^r/N\rho^{\mathsf{T}}\rho M$同构，并且我们注意到，场重定义 $\rho \mapsto P\rho M$诱导出$\rho^{\mathsf{T}}\rho \mapsto M^{\mathsf{T}}(\rho^{\mathsf{T}}\rho)M$。

对于 (ii)，只需证明 $H \simeq \mathbb{Z}^n/(\Lambda \oplus \Lambda^{\perp}) = \mathbb{Z}^n/(\text{im}(\rho) \oplus \text{im}(\rho^{\vee}))$, 因为这样一来，(2.28) 中间的同构便可由 ρ 与 $\rho^{\vee}$之间的对称性推出。注意，由对偶正合序列 (2.13) 可得 $\text{im}(\rho^{\vee}) = \ker(\rho^{\mathsf{T}})$. 于是，由群的第三同构定理可得

$$\frac{\mathbb{Z}^n}{\text{im}(\rho) \oplus \text{im}(\rho^{\vee})} = \frac{\mathbb{Z}^n}{\text{im}(\rho) \oplus \ker(\rho^{\mathsf{T}})} \xrightarrow{\sim} \frac{\rho^{\mathsf{T}}(\mathbb{Z}^n)}{\rho^{T}\left(\text{im}(\rho) \oplus \ker(\rho^{\mathsf{T}})\right)} = \frac{\mathbb{Z}^r}{\text{im}(\rho^{\mathsf{T}}\rho)}\,. \tag{2.31}$$

(iii) 是柯西-比内公式的直接结果，该公式将长方矩阵乘积的行列式表示为相应子式之和：

$$|H| = \det(\rho^T\rho) \overset{C.B.}{=} \sum_{I\in\{1,\ldots,n\}} (\det \rho^I)(\det \rho_I^{\mathsf{T}}) = \sum_{I\in\{1,\ldots,n\}} |\det \rho^I|^2\,, \tag{2.32}$$

其中，求和遍历所有大小为r的 $\{1, ..., n\}$子集。这就重现了（2.19）的右端。

(iv) 即揭示了对称性分数化的物理定义。这一概念由凝聚态物理文献提出，近年来在高阶/广义对称性的研究中发挥了关键作用，参见 [BCH18、BBFSN22]。威尔逊线分析是微扰性的，且只涉及超多重态场。我们考虑由超多重态标量、费米子及其导数组成的微扰局域算符单项式。每个单项式都可以用一个向量 $m \in \mathbb{Z}^n$标记，对应于它在超多重态的阿贝尔 $U(1)^n$ 对称性下的电荷 n 。施加规范不变性条件之前，所有荷都是可能的。例如，将手征超多重态标量记为（X_i，Y_i）$_{i=1}^{n}$，

每个电荷 $m \in \mathbb{Z}^n$ 都有一个算子 $\mathcal{O}_m$，由下式给出。

$$\mathcal{O}_m = \prod_{i=1}^{n} \begin{cases} (X_i)^{m_i} & m_i \geq 0 \\ (Y_i)^{-m_i} & m_i < 0 \end{cases} . \tag{2.33}$$

在（适当的）威尔逊线的交汇处，任意这样的单项式都可能出现。如果它不是规范不变的，则可以通过威尔逊线的电荷来补偿其缺乏规范不变性。于是，威尔逊线的所有可能交汇处的所有可能局部算子的味荷由正合列（ τ（$\mathbb{Z}^n$） $= \mathbb{Z}^{n-r}$ 中的第二个映射的像给出2.5）。

相比之下，在体中，规范不变性要求局部算子具有 $m \in \mathbb{Z}^n$ ，即与子格 $\mathrm{im}(\rho) \subset \mathbb{Z}^n$ 正交（因为单项式在第 a 个规范群下的电荷为 $m \cdot \rho^a$）。因此，规范不变算子具有 $m \in (\mathrm{im}\,\rho)^\perp$。由对偶正合列（2.13），$(\mathrm{im}\ \rho)^\perp = \ker\ \rho^{\mathsf{T}} = \mathrm{im}\ \tau^{\mathsf{T}}$。因此，体局域算子的可能味荷为 $\tau(\mathrm{im}\ \tau\mathsf{T}) = \mathrm{im}(\tau\tau\mathsf{T}) \subset \mathbb{Z}^{n-r}$。于是，对称性分数化群为$\mathbb{Z}^{n-r}/\mathrm{im}(\tau\tau\mathsf{T})$，根据命题的第（ii）部分，它与 H同构。□

请注意，对称性分数化是一种拓扑物理可观测量。它在重整化群流下保持不变，并且在所有量子对偶下也保持不变，无论是精确对偶，还是仅在红外成立的对偶（如三维镜像对称）。因此，该命题第 (iv) 部分的推论是：

物理学定理 2.3。 H 群是简单阿贝尔三维 $\mathcal{N} = 4$ 规范理论的红外同构类的不变量。

例。 考虑 *SQED*$_n$，即规范群为 $U(1)$ 且具有 n 个电荷为 1的超多重态的理论，其电荷矩阵为 $\rho = (1、1、\ldots\ldots、1)^{\mathsf{T}}$。我们有 $\rho^{\mathsf{T}}\rho = (n)$，因此

$$H = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\,. \tag{2.34}$$

相应地，该理论在一般的实质量和 *FI* 变形下具有 $|H| = n$ 个有质量真空。它们在第 *2.1.5*节中已有描述，其中还说明了它们是彼此独立的光滑真空，而不是轨形点。

我们也来考察对称性分数化。我们从 *M. Bullimore* 和 *A. Ferrari* 那里了解到这个对称性分数化的例子 *[BF22]*（现已发表于 *[BBFSN23]*）。体局域算符必须包含数量相等的正电荷场和负电荷场，才能保持规范不变。（例如，单项式 X_iY_j 均为规范不变。）它们由与 $m \in \mathbb{Z}^n$ 正交的向量标记 $(1，1，\ldots\ldots，1)$；对 $(1，1，\ldots\ldots，1)$取商后，这些向量可与 $SU(n)$的根格上的点对应。相比之下，威尔逊线交汇处的局部算子可以由任意 $m \in \mathbb{Z}^n$ 标记（例如，单个 X_i 或 Y_i可出现在威尔逊线电荷变化 $+1$ 或 -1的交汇处，分别对应两种变化）。在经过

对 (1，1，.....，1)取商后，交汇处算子的味荷可与 $SU(n)$的权格上的点对应。对称性分数化群为

$$\frac{SU(n)\ weight\ lattice}{SU(n)\ root\ lattice} \simeq \mathbb{Z}_n \tag{2.35}$$

群 $SU(n)$ 在此例中自然出现，这是由于非阿贝尔对称性的增强。体理论的整体对称性为 $PSU(n)$，而存在威尔逊线时的整体对称性为 $SU(n)$，其中 $PSU(n) \simeq SU(n)/H$。

值得探讨的是， H 是否构成简单阿贝尔规范理论的完整红外（IR）不变量。鉴于定定整数格分类的丰富性，答案很可能是否定的。特别是，对于给定的秩和行列式（由 r 和 $|H|$ 给定），通常存在的格同构类型远多于固定阶数的阿贝尔群。即使对于 $|H| = 1$ ，当 $r \geq 8$ 时，也存在非平凡的格同构类型，第一个例子（在 $r = 8$处）就是 E_8 格。这些格对应于平凡的三维 $\mathcal{N} = 4$ 理论的可能性似乎微乎其微。

尽管如此，我们仍可给出一个更强的判据，来判断一个理论是否在红外自由：

命题2.4。 若一个简单理论 $\mathcal{T}_\rho$ 的电荷格（内在地）同构于平凡格，也就是说，存在 $M \in GL(n,\mathbb{Z})$ 使得 $M^{\mathsf{T}}(\rho^{\mathsf{T}}\rho)M = I_{r\times r}$，那么 $\mathcal{T}_\rho$ 同构于一个红外自由理论。

特别地，根据定定幺模格的分类，任何具有 $r < 8$ 和 $|H| = 1$ 的理论都是红外自由的。

证明。 直观上，这一点很清楚，因为格及其在 $\mathbb{Z}^n$ 中的嵌入能够对简单阿贝尔理论进行分类，而改变嵌入的置换相当无害。不过，我们给出一个简短且自足的证明。

若 $M^{\mathsf{T}}(\rho^{\mathsf{T}}\rho)M = I_{r\times r}$，则 ρM 的 r 列向量是标准正交的。一个范数为一的整数向量必定只有一个 ± 1，其余各项均为0。列向量的正交性意味着每个 ± 1 都出现在不同的行中。因此，我们可以找到一个置换$P \in O(n,\mathbb{Z})$，使得

$$P\rho M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.36}$$

这意味着，经过对应于 P （作用于超多重态）和 M（作用于规范场）的场重定义后，我们的理论变为 r 个 SQED_1 与 $n-r$ 个超多重态的张量积。□

2.3 自由场顶点代数

本节介绍本文中出现的基本顶点代数及其模。自由场代数是一种由场强生成的顶点代数，这些场具有这样的性质：在它们的算符乘积代数中只出现单位元。具有 Virasoro 结构（应力张量）的自由场代数分为四类：自由玻色子／海森堡顶点算子代数、自由费米子、辛费米子和辛玻色子。这些代数之间存在多种联系，下面我们将回顾这些联系。

2.3.1 海森堡顶点算子代数与福克模

基本的海森堡顶点算子代数 H_J 由一个单独的偶（玻色）场 $J(z) = \sum J_n z^{-n-1}{}_{n\in\mathbb{Z}}$生成，其算子乘积展开为

$$J(z)J(w) \sim \frac{1}{(z-w)^2}\,. \tag{2.37}$$

其简单模为最高权为 $\lambda \in \mathbb{C}$的福克模 $\mathcal{F}_\lambda$ 。这些模由一个最高权向量 $|\,\lambda\,\rangle$ 生成，在该向量上， J_0 通过乘以 λ起作用，正 n的 J_n 湮灭 $|\,\lambda\,\rangle$，而负模自由地作用。我们将使用通常的符号 $\otimes$表示向量空间张量积；而融合积，即 作为顶点算子代数 $\mathcal{V}$的模的张量积，将用符号 $\otimes_{\mathcal{V}}$表示。海森堡顶点算子代数的福克模满足以下融合规则

$$\mathcal{F}_\lambda \otimes_{H_J} \mathcal{F}_\mu = \mathcal{F}_{\lambda+\mu}\,. \tag{2.38}$$

与最高权向量 $|\,\lambda\,\rangle$ 相关联的顶点算子记为 $Y(|\,\lambda\,\rangle, z)$，福克模的融合规则体现在以下算子乘积展开公式中

$$Y(|\,\lambda\,\rangle, z)Y(|\,\mu\,\rangle, w) \sim (z-w)^{\lambda\mu}Y(|\,\lambda+\mu\,\rangle, w) + \ldots \tag{2.39}$$

更一般地，设 V 是一个有限维复向量空间，其维数为 n，带有对称双线性型 B：$V \times V \to \mathbb{C}$，并固定 V 的一组基 $\{v^1, \ldots, v^n\}$。那么，与 $(V,\ B)$ 相关联的海森堡顶点算子代数，简记为 $H_{\{v^i\}}$，由场 J^i 强且自由地生成，其中 $i = 1,$ ....., n，其算子乘积展开为

$$H_{\{v^i\}}: \quad J^i(z)J^j(w) \sim \frac{B(v^i, v^j)}{(z-w)^2}\,. \tag{2.40}$$

我们还 引入形式场 $v^i(z)$，满足 $J^i(z) = \partial v^i(z)$，并具有非解析算符乘积展开

$$v^i(z)v^j(w) \sim B(v^i, v^j)\log(z-w)\,, \tag{2.41}$$

这意味着（2.40）。这些 $v^i(z)$ 本身并不属于海森堡顶点算子代数，但它们为描述模提供了一种有用的方式。

广义海森堡顶点算子代数的福克模（又称 Verma 模）与线性映射 $V \to \mathbb{C}$ 一一对应。在本文的所有应用中，双线性型 B 都是非退化的，因此可以用来建立线性映射 $V \to \mathbb{C}$ 与其自身元素 V 之间的同构。我们主要使用后者来描述福克模。

给定一个元素 $\lambda \in V$，以及与之关联的映射 $B(\lambda, -): V \to \mathbb{C}$，存在唯一一个福克模，记为

$$\mathcal{F}_\lambda \qquad \text{or (for clarity)} \quad \mathcal{F}_\lambda^{v^1,\dots,v^n}\,, \tag{2.42}$$

由满足以下条件的最高权态 $|\lambda\rangle$ 生成

$$J_0^i|\lambda\rangle = B(\lambda, v^i)|\lambda\rangle\,, \qquad J_{n>0}^i|\lambda\rangle = 0\,, \tag{2.43}$$

且 $J_{n<0}^i$ 可以自由作用于其上。海森堡顶点算子代数的真空模就是 $\mathcal{F}_0$。若展开 $\lambda = \sum_i \lambda_i v^i$，并相应地令 $\lambda(z) := \sum_i \lambda_i v^i(z)$，则可以形式地将与最高权态 $|\lambda\rangle$ 对应的顶点算子表示为

$$Y(|\,\lambda\,\rangle, z) = :e^{\lambda(z)}:\,. \tag{2.44}$$

顶点算子之间的算子乘积展开由（2.41）推出。特别地，

$$:e^{\lambda(z)}::e^{\eta(w)}: \sim (z-w)^{B(\lambda,\eta)}\,:e^{\lambda(w)+\eta(w)}: + \dots\,. \tag{2.45}$$

因此融合规则为 $\mathcal{F}_\lambda \otimes_{H_{v^i}} \mathcal{F}_\eta = \mathcal{F}_{\lambda+\eta}$。

最后注意，固定 V 的一个正交基 v^1，……，v^n 后，有如下分解

$$H_{v^1,\dots,v^n} \cong \bigotimes_i H_{v^i}\,. \tag{2.46}$$

相应地，令 $\lambda = \sum_i \lambda_i v^i$，福克模有如下分解

$$\mathcal{F}_\lambda^{v^1,\dots,v^n} \cong \bigotimes_i \mathcal{F}_{\lambda_i v^i}^{v^i}\,. \tag{2.47}$$

2.3.2 自由费米子

我们选取基 $v^1, \dots, v^n$，使得 $B(v^i, v^j)$ 对所有配对 (v^i, v^j) 都是实数，并考虑由具有如下性质的福克模 $\mathcal{F}_\lambda$ 构成的子范畴：所有 λ_i 均为实数。这个范畴是一个编织张量范畴 [CKLR16]。设 $L \subset V$ 是一个格，即一个 $\mathbb{Z}$-

的子模，且满足 B 在 L 上的限制是整数值。那么

$$\mathcal{V}_L := \bigoplus_{\lambda\in L} \mathcal{F}_\lambda \tag{2.48}$$

其本身是一个顶点超代数，即格 L 的格点顶点算子代数；如果 L 是偶的，那么它实际上是一个顶点代数。

特别地，在秩一情形下，由一个满足 $B(v,v) = 1$ 的向量生成的 $V = \mathbb{C}\langle v\rangle$，选择 $L = \mathbb{Z}\langle v\rangle \simeq \mathbb{Z}$ 会产生一个顶点代数

$$\mathcal{V}_{\mathbb{Z}} \simeq \mathcal{V}_{bc} \tag{2.49}$$

由一对自由费米子强生成。这就是经典的玻色-费米对应。这两个费米子生成元可以选为

$$b(z) = Y(|1\rangle, z) =: e^{v(z)} :, \qquad c(z) = Y(|-1\rangle, z) =: e^{-v(z)} :, \tag{2.50}$$

与算子乘积展开搭配

$$b(z)c(w) \sim \frac{1}{(z-w)}\,. \tag{2.51}$$

自由费子 $\mathcal{V}_{bc}$ 是一种全纯顶点算子代数，其含义是该顶点算子代数本身是唯一的简单模，并且每个模都是完全可约的。因此，$\mathcal{V}_{bc}$ 的模范畴与向量空间的“平凡”范畴同构。（“全纯顶点算子代数”这一术语有时也称为“全纯共形场论”，其名称源于所有共形块空间都自动是一维的这一事实。这意味着该顶点算子代数本身在任意亏格下都有定义良好的配分函数，并具有完整共形场论的结构。例如，自由费子顶点算子代数 $\mathcal{V}_{bc}$ 等价于一个定义良好的物理共形场论，该理论包含一个自由的复值二维手征费子。）

2.3.3 辛费米子与单态顶点算子代数

辛费米子顶点代数 $\mathcal{V}_{SF}$ 可定义为由两个费米子场 $\chi^{\pm}(z)$ 强生成的顶点代数，其算子乘积展开为

$$\mathcal{V}_{SF}: \quad \chi^+(z)\chi^-(w) \sim \frac{1}{(z-w)^2} \tag{2.52}$$

更一般地，给定任意带有非退化反对称双线性型 $\Omega: W\times W\to\mathbb{C}$（辛形式）的复向量空间 W，就有一个相应的辛费米子

顶点算子代数 $\mathcal{V}_{SF}^{W}$。给定 W 的一组基 $\{\chi^i\}$，该顶点算子代数由费米子场 $\{\chi^i(z)\}$ 生成，其中

$$\mathcal{V}_{SF}^{W}: \quad \chi^i(z)\chi^j(w) \sim \frac{\Omega(\chi^i,\chi^j)}{(z-w)^2}. \tag{2.53}$$

辛费米子可以嵌入自由费米子（因而也嵌入格点顶点算子代数）中，作为某些筛选荷的核。定义筛选算子 $S(z): \mathcal{V}_{bc} \to \mathcal{V}_{bc}((z))$ 如下

$$S(z) := b(z), \tag{2.54}$$

并将"筛选荷" $S_0 : \mathcal{V}_{bc} \to \mathcal{V}_{bc}$ 定义为

$$S_0 := \frac{1}{2\pi i}\oint S(z)dz = b_0. \tag{2.55}$$

在这种情况下，这只是费米子场 $b(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n z^{-n-1}$ 的零模。

其核 S_0 恰好是由 $b(z)$ 和 $\partial c(z)$ 生成的子代数，因为 b_0 与 $c(z)$ 的所有模都对易，唯独其零模除外。令 $\chi^+(z) = b(z)$ 和 $\chi^-(z) = \partial c(z)$，可得 $\chi^{\pm}$ 满足辛费米子算子乘积展开（2.52）。因此

$$\mathcal{V}_{SF} \cong \ker(S_0 : \mathcal{V}_{bc} \to \mathcal{V}_{bc}). \tag{2.56}$$

在自由费米子和辛费米子上都有 $\mathbb{C}^*$ 的作用，使得 b, χ^+ 的权为 $+1$，而 c, χ^- 的权为 -1。因此，$\mathcal{V}_{bc}$ 和 $\mathcal{V}_{SF}$ $\mathbb{Z}$ 成为分次顶点代数。将辛费米子（作为向量空间）分解为分次分量

$$\mathcal{V}_{SF} = \bigoplus_{\mu\in\mathbb{Z}} M_\mu, \tag{2.57}$$

我们发现，零次子空间 $M := M_0$（即 $\mathcal{V}_{SF}$ 的 $\mathbb{C}^*$ 轨形）本身是一个顶点代数，而其他分量 M_n 则是 M 的模。反过来，$\mathcal{V}_{SF}$ 是由模 $\{M_\mu\}_{\mu\in\mathbb{Z}}$对 M 进行的扩张。

顶点代数 $M = M_0$ 称为 $p = 2$ 单态代数。它包含 χ^+和 χ^-数量相等的场，例如：$\chi^+\chi^-$:、:$\chi^+\partial^a\chi^-$:、::$\chi^+\partial^a\chi^+\chi^-\partial^b\chi^-$ 等。出现在辛费米子分解中的模 M_μ 是具有融合规则的简单流。

$$M_\mu \otimes_M M_\nu = M_{\mu+\nu}. \tag{2.58}$$

单态代数还有许多其他模；不过，其完整表示论相当复杂，直到去年才得到全面理解 [CMY20b，CMY22a]。

后来在 在论文中，我们将遇到辛费米子和单态代数的多个副本

代数/模。我们总结一些记号和关系。结合自由费米子之间的关系（2.56）与玻色-费米对应（2.49），我们发现 n 辛费米子嵌入到秩为n 格点顶点算子代数

$$\mathcal{V}_{SF}^{\otimes n} \hookrightarrow \mathcal{V}_{\mathbb{Z}^n}\,, \qquad \chi_+^i \mapsto :e^{v^i}:, \quad \chi_-^i \mapsto -:\partial v^i\, e^{-v^i}:, \tag{2.59}$$

其中 $\mathcal{V}_{\mathbb{Z}^n}$ 是海森堡代数 $H_{v^1,\ldots,v^n}$ 通过对所有 $\mu \in \mathbb{Z}^n$ 的福克模 $\mathcal{F}_{\mu\cdot v}$ 进行扩张得到的，其中 $B(v^i, v^j) = \delta^{ij}$ 。该嵌入是筛算子核

$$\mathcal{V}_{SF}^{\otimes n} = \bigcap_{i=1}^{n} \ker S_0^i\big|_{\mathcal{V}_{\mathbb{Z}^n}}\,, \qquad S^i(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint :e:^{v^i(z)}\,. \tag{2.60}$$

此外， $\mathcal{V}_{SF}^{\otimes n}$ 上存在一个 $(\mathbb{C}^*)^n$ 作用，它由 $\mathcal{V}_{\mathbb{Z}^n}$ 上的 $(\mathbb{C}^*)^n$ 作用诱导，在此作用下，$:e:^{\mu\cdot v}$的电荷为 $\mu \in \mathbb{Z}^n$。（因此，特别地， $\chi_\pm^i$的荷为 $(0,\ldots,0,\underset{i}{\pm 1},0,\ldots,0)$。）我们将此作用的权空间记为 $M_{\mu\cdot v}^{\{v^i\}}$，或简记为 $M_{\mu\cdot v}$，其中

$$\mathcal{V}_{SF}^{\otimes n} = \bigoplus_{\mu\in\mathbb{Z}^n} M_\mu\,, \qquad M_{\mu\cdot v} = \bigcap_{i=1}^{n} \ker S_0^i\big|_{\mathcal{F}_{\mu\cdot v}}\,. \tag{2.61}$$

这里 $M_0^{\{v^i\}} \cong \bigoplus_{i=1}^n M_0^{v^i}$ 是单态顶点算子代数的 n 个副本，而各个 $M_{\mu\cdot v}$ 都是其中的简单流。

2.3.4 辛玻色子

基本的辛玻色子顶点算子代数 $\mathcal{V}_{\beta\gamma}$又称β-γ 系统，由两个玻色子场 $\beta(z)$、 $\gamma(z)$ 强生成，其算子乘积展开为

$$\mathcal{V}_{\beta\gamma}: \quad \beta(z)\gamma(w) \sim \frac{-1}{z-w}\,. \tag{2.62}$$

更一般地，给定一个辛向量空间（W，Ω），存在一个与之对应的辛玻色子顶点算子代数 $\mathcal{V}_{\beta\gamma}^W$。给定 W 的一组基 $\{\beta^i\}$，该顶点算子代数由场 $\{\beta^i(z)\}$ 生成，其算子乘积展开为

$$\mathcal{V}_{\beta\gamma[W]}: \quad \beta^i(z)\beta^j(w) \sim \frac{\Omega(\beta^i,\beta^j)}{z-w}\,. \tag{2.63}$$

辛玻色子与上述其他自由场顶点算子代数以多种有趣的方式密切相关。

首先，令 $V = \mathbb{C}\langle\eta\rangle$ 为带有负内积$B(\eta,\ \eta) = -1$的一维向量空间，并令其中的整数格记为 $\sqrt{-1}\mathbb{Z} := \mathbb{Z}\langle\eta\rangle$。相应地，我们

有一个海森堡顶点算子代数 $\mathcal{H}_\eta$ 及其格扩张

$$\mathcal{V}_{\sqrt{-1}\mathbb{Z}} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}_n \,, \tag{2.64}$$

其中每个福克模 $\mathcal{F}_n$ 由以下内容生成：$e^{n\eta}$。现在考虑 $\mathbb{C}^*$ 在 $\mathcal{V}_{\sqrt{-1}\mathbb{Z}}$上的作用，在该作用下子空间 $\mathcal{F}_n$ 具有权 $-n$。还要回顾 $\mathbb{C}^*$ 在（2.57）中对辛费米子的作用。张量积顶点算子代数 $\mathcal{V}_{SF}\otimes\mathcal{V}_{\sqrt{-1}\mathbb{Z}}$ 在对角 $\mathbb{C}^*$作用下的不变部分是

$$(\mathcal{V}_{SF}\otimes\mathcal{V}_{\sqrt{-1}\mathbb{Z}})^{\mathbb{C}^*} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} M_n\otimes\mathcal{F}_n \,, \tag{2.65}$$

且它由场生成

$$\beta = \chi^+\otimes :e^{\eta}: \quad \text{and} \quad \gamma = -\chi^-\otimes :e^{-\eta}: \tag{2.66}$$

恰好满足辛玻色子算子乘积展开 2.62。因此

$$(\mathcal{V}_{SF}\otimes\mathcal{V}_{\sqrt{-1}\mathbb{Z}})^{\mathbb{C}^*} \simeq \mathcal{V}_{\beta\gamma} \,. \tag{2.67}$$

或者，将格点顶点算子代数中辛费米子的嵌入（2.56）与（2.67）结合起来，我们得到辛玻色子的一个众所周知的自由场实现，参见 [AW20]。令$H_{\phi,\eta}$ 为与一个具有基 $\{\phi,\eta\}$ 且内积为 $B(\phi,\phi) = 1$, $B(\eta,\eta) = -1$, $B(\phi,\eta) = 0$的二维向量空间相对应的秩二海森堡代数。考虑一维格 $L = \mathbb{Z}\langle\phi+\eta\rangle$ 及相应的格点顶点算子代数

$$\mathcal{V}_L = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}_{n(\phi+\eta)} \,. \tag{2.68}$$

存在一个嵌入 $\mathcal{V}_{\beta\gamma}\hookrightarrow\mathcal{V}_L$ ，其定义为

$$\beta \mapsto e^{\phi+\eta} \,, \quad \gamma \mapsto :\partial\phi\, e^{-\phi-\eta}: \,. \tag{2.69}$$

为了将其刻画为筛选算子的核，我们注意到，格点顶点算子代数 $\mathcal{V}_L$具有模$\mathcal{V}_{L,\ k\phi}$ 这些模是通过将海森堡顶点算子代数的福克模 $\mathcal{F}_{k\phi}$ 提升到格 $\mathcal{V}_L$上定义的。具体而言，

$$\mathcal{V}_{L,k\phi} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}_{(k+n)\phi+n\eta} \,. \tag{2.70}$$

考虑由下式定义的交织算子 $S(z):\mathcal{V}_{L,k\phi}\to\mathcal{V}_{L,(k+1)\phi}((z))$

$$S(z) = :e^{\phi(z)}: \tag{2.71}$$

以及相应的筛选荷 $S_0 = \frac{1}{2\pi i}\oint S(z)\,dz : \mathcal{V}_{L,k\phi} \to \mathcal{V}_{L,(k+1)\phi}$。那么，辛玻色子在 $\mathcal{V}_L$ 中的嵌入与核相同

$$\mathcal{V}_{\beta\gamma} = \ker(S_0 : \mathcal{V}_L \to \mathcal{V}_{L,\phi})\,. \tag{2.72}$$

这可由将 $\mathcal{F}_{n(\phi+\eta)} = \mathcal{F}_{n\phi} \otimes \mathcal{F}_{n\eta}$ 在（2.68）中分解为两个海森堡顶点算子代数 $H_\phi \otimes H_\eta$的模，并将该分解与（2.56）和（2.65）结合得出。

2.3.5 BRST上同调

反过来，我们可以利用 BRST 上同调从辛玻色子回到辛费米子。这里所说的 BRST 上同调，是指 [FGZ86]中所述的相对半无限李代数上同调；我们在此所需的版本，正是 [CGNS21]中使用的版本。

设 $\mathcal{V}$ 是一个带有层为零的内部 $\mathbb{C}^*$ Kac-Moody 作用的顶点代数。换言之， $\mathcal{V}$ 含有一个场 $J(z)$（即 Kac-Moody 流），该场与自身的算子乘积展开无奇异项，并通过以下映射在 $\mathcal{V}$ 上生成环群 $\mathbb{C}((z))^*$ 的作用：

$$\text{for } \alpha(z) \in \mathbb{C}((z)),\quad v \mapsto \frac{1}{2\pi i}\oint \alpha(z)J(z)\cdot v\,. \tag{2.73}$$

直观地说，BRST上同调以导出方式对 $\mathcal{V}$ 取关于 $\mathbb{C}^*((z))$作用的辛约化——令流 $J(z)$为零，并取 $\mathbb{C}((z))^*$ 不变量；也就是说，即 将这个商表示为某个复形的零阶上同调。具体而言，设 $\mathcal{V}_{bc}$ 为一个自由费米子顶点算子代数，按 Z分次，使得 c 的次数为 1，而 b 的次数为 -1。张量积$\mathcal{V}\otimes\mathcal{V}_{bc}$ 继承了这一分次，并带有一个次数为

$$Q_{\mathrm{BRST}} := \frac{1}{2\pi i}\oint c(z)\,J(z)\,dz \tag{2.74}$$

$+1$的微分。设相对复形 $(\mathcal{V}\otimes\mathcal{V}_{bc})^{\mathrm{rel}}$ 为 $\mathcal{V}\otimes\mathcal{V}_{bc}$ 中被零模 b_0 和 J_0湮灭的子空间。于是，将相对复形的 Q_{BRST}-上同调定义为BRST上同调，记作

$$H_{\mathrm{BRST}}(\mathcal{V}) := H^\bullet\big((\mathcal{V}\otimes\mathcal{V}_{bc})^{\mathrm{rel}}, Q_{\mathrm{BRST}}\big)\,. \tag{2.75}$$

注意， Q_{BRST}将 $b(z)$ 发送到 $\mapsto J(z)$（因此在上同调中， $J(z)$ 实际上被置为零）；它还将 $\mathcal{V}$ 中的任意元素发送到其在 $GL\big(1,\mathbb{C}((z))\big)$ 作用下的像，其中生成元为 $c(z)$（因此上同调也会取该作用的不变量）。

类似地，如果 M 是 $\mathcal{V}$ 的任意模，其 BRST上同调定义为

$$H_{\mathrm{BRST}}(M) := H^{\bullet}\left((M \otimes \mathcal{V}_{bc})^{\mathrm{rel}}, Q_{\mathrm{BRST}}\right), \tag{2.76}$$

其中，$(M \otimes \mathcal{V}_{bc})^{\mathrm{rel}}$ 再次表示被 b_0 和 J_0湮灭的 $M \otimes \mathcal{V}_{bc}$ 子空间。

从辛玻色子过渡到辛费米子，使用的是一种性质尤为良好的 BRST上同调。设 $H_{\phi,\eta}$ 为与向量 ϕ, η相关联的秩二海森堡代数，它们的范数分别为 $+1, -1$。场 $J(z) = \partial(\phi + \eta)$ 是一个零层 $\mathbb{C}^*$ Kac-Moody 流。考虑福克模 $\mathcal{F}_{\lambda\phi+\mu\eta}$ (这里 $\lambda, \eta \in \mathbb{C}$)。其 BRST上同调具有以下性质:

$$H^i_{\mathrm{BRST}}(\mathcal{F}_{\lambda\phi+\eta\mu}) = \delta_{i,0}\delta_{\lambda-\mu,0}\mathbb{C}[|\lambda\phi + \mu\eta\rangle]\,. \tag{2.77}$$

换言之，除非 $\lambda - \mu = 0$，否则上同调均为零；在这种情况下，上同调是一维的，由最高权向量的类给出。

现在，辛玻色子顶点算子代数 $\mathcal{V}_{\beta\gamma}$具有一个流 $J_{\beta\gamma} = -:\beta\gamma:$ 其层为 -1（$J_{\beta\gamma}$生成一个海森堡子代数 H_η，其内积为 -1）。自由费米子顶点算子代数 $\mathcal{V}_{bc}$具有一个流 $J_{bc} =: bc:$ 其层为 1（生成一个海森堡子代数 H_ϕ，其范数为 $+1$）。因此，它们的张量积 $\mathcal{V}_{bc} \otimes \mathcal{V}_{\beta\gamma}$ 具有一个 $J = J_{\beta\gamma} + J_{bc}$ 层为零的对角流。利用玻色-费米对应和（2.65），我们知道作为 H_{ϕ}的模，$_{\eta} = H_\phi \otimes H_\eta$我们有

$$\mathcal{V}_{bc} \otimes \mathcal{V}_{\beta\gamma} = \bigoplus_{m,n\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}^{\phi}_{n\phi} \otimes \mathcal{F}^{\eta}_{m\eta} \otimes M_m\,. \tag{2.78}$$

对角 $\mathbb{C}^*$ 作用取 BRST上同调，得到

$$\begin{aligned} H_{\mathrm{BRST}}(\mathcal{V}_{bc} \otimes \mathcal{V}_{\beta\gamma}) &= \bigoplus_{n,m\in\mathbb{Z}} H_{\mathrm{BRST}}\left(\mathcal{F}^{\phi}_{n\phi} \otimes \mathcal{F}^{\eta}_{m\eta}\right) \otimes M_m \\ &= \bigoplus_{n,m\in\mathbb{Z}} \delta_{n-m,0}\mathbb{C} \otimes M_m \\ &= \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} M_m \\ &= \mathcal{V}_{SF}. \end{aligned} \tag{2.79}$$

2.3.6 仿射 $\mathfrak{gl}(1|1)$

事实上，我们还可以引入另一个对象，即 $\mathfrak{gl}(1|1)$的仿射顶点算子代数。它是 $\mathcal{V}_{bc}\otimes\mathcal{V}_{\beta\gamma}$的对角 $\mathbb{C}^*$ 轨形，即

$$\widehat{\mathfrak{gl}(1|1)} \cong (\mathcal{V}_{bc}\otimes\mathcal{V}_{\beta\gamma})^{\mathbb{C}^*} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}^{\phi}_{n\phi}\otimes\mathcal{F}^{\eta}_{n\eta}\otimes M_n \tag{2.80}$$

这里的层 k 可以是任意非零数，特别是总可以将其设为 1。它由以下场生成： $N =: bc :$ $\psi^+ =: \beta b : \psi^- = - : \gamma c :$和 $E =: bc : - : \beta\gamma :$.

以上各自由场代数之间的所有关系都已在以下文献中得到详细研究： [CR08、CR11a]。关于 $\mathcal{V}_{\beta\gamma}$ 的表示论见 [AW20]；关于 $\widehat{\mathfrak{gl}(1|1)}$ 的表示论见 [CMY22b]，，关于单态的表示论见 [CMY20b、CMY22a]。所有模范畴都是非有限、非半单的带状（超）范畴。轨形、简单流扩张和 BRST上同调为表示范畴之间提供了良好的函子，详见 [CGNS21、CMY22c]。

2.4 谱流

在本节最后的引言部分中，我们将回顾顶点算子代数的谱流自同构和谱流模这一概念，它们将在我们的许多构造中发挥核心作用。谱流与顶点算子代数的阿贝尔 Kac-Moody 对称性相关；宽泛地说，它将 Kac-Moody 对称性与共形对称性混合在一起。这一基本思想于 20 世纪 80 年代出现在物理学中，尤其是在世界面超弦理论的背景下。在顶点算子代数的数学理论中，谱流通过 Haisheng Li 的 Δ-算子[Li97]。

设 $\mathcal{V}$为一个具有海森堡子顶点算子代数的顶点算子代数，假设其秩为 n，并具有与之关联的双线性型B，如（2.40）所示。（海森堡子顶点算子代数是阿贝尔流代数或阿贝尔 Kac-Moody 对称的另一种称谓。）海森堡顶点算子代数具有一个庞大的自同构群。特别地，对于任意向量 $\ell=(\ell_1,\dots,\ell_n)\in\mathbb{C}^n$，都存在一个谱自同构 σ^ℓ，其对海森堡顶点算子代数的各个模的作用如下：

$$\sigma^\ell(J^i_n) = J^i_n + \delta_{n,0}\ell_i\,, \tag{2.81}$$

只进行将零模平移一个标量的操作。并非所有这些自同构都能从海森堡子顶点算子代数提升为完整顶点算子代数的模代数自同构；这取决于 $\mathcal{V}$ 如何按 J^i_0分级。确实能够提升的自同构称为 $\mathcal{V}$的谱流自同构。

例如　　例如，若 $\mathcal{V}$ 是格点顶点算子代数 $\mathcal{V}_L$，那么只要 ℓ，就存在谱流自同构

属于与 L' 对偶的格 L。若 $\mathcal{V}$ 是仿射顶点算子代数，那么谱流自同构对应于余权。关于 $\mathfrak{sl}(2)$ 的例子颇具启发性； [CR13b]第 2 节对此作了详细讨论。

如果 σ^ℓ 是 $\mathcal{V}$的模代数的一个自同构，那么对于任意 $\mathcal{V}$-模 M ，可以如下定义其谱流模 $\sigma^\ell(M)$。 $\sigma^\ell(M)$的底层向量空间与 M同构，该同构将 $m \in M$映射为 $\sigma^\ell(m) \in \sigma^\ell(M)$；但是，模代数 $\mathcal{V}$ 中的一个元素 x作用为

$$x \cdot \sigma^\ell(m) = \sigma^\ell(\sigma^{-\ell}(x) \cdot m)\,. \tag{2.82}$$

Haisheng Li 的 Δ-算子 [Li97], 在数学背景下实现谱流，具有若干良好的性质。根据 [Li97] 中的命题 2.11，结合交织算子的斜对称性，谱流保持融合：

$$\sigma^\ell(M) \otimes_{\mathcal{V}} \sigma^{\ell'}(M') \cong \sigma^{\ell+\ell'}(M \otimes_{\mathcal{V}} M'). \tag{2.83}$$

特别地，VOA 本身在谱流下的像 $\sigma^\ell(\mathcal{V})$ 总是一个单流，并具有融合规则

$$\sigma^\ell(\mathcal{V}) \otimes_{\mathcal{V}} \sigma^{\ell'}(\mathcal{V}) \cong \sigma^{\ell+\ell'}(\mathcal{V}), \qquad \sigma^\ell(\mathcal{V}) \otimes_{\mathcal{V}} M \cong \sigma^\ell(M). \tag{2.84}$$

另一个性质是谱流是正合的，即它将简单对象映射为简单对象，将非分裂短正合列映射为非分裂短正合列，将Loewy图表映射为Loewy图表，等等——参见 [CKLR16]。

例。 当 $\mathcal{V}$ 本身是海森堡顶点算子代数时，谱流作用于其自身的福克模。由此可得 $\sigma^{-\lambda}(\mathcal{F}_\mu) \cong \mathcal{F}_{\lambda+\mu}$ ，特别是 $\sigma^{-\lambda}(H_{v^i}) \cong \mathcal{F}_\lambda$ ，以及众所周知的融合规则

$$\mathcal{F}_\lambda \otimes_{H_{v^i}} \mathcal{F}_\mu \cong \sigma^{-\lambda}(H_{v^i}) \otimes_{H_{v^i}} \sigma^{-\mu}(H_{v^i}) \cong \sigma^{-\lambda-\mu}(H_{v^i}) \cong \mathcal{F}_{\lambda+\mu}$$

立即得出。

例。 仿射顶点算子代数的例子 $\mathfrak{gl}(1|1)$ 见 *[CR08]*第 *3.2* 节。谱流自同构对模的作用为

$$\sigma^\ell(N_r) = N_r, \qquad \sigma^\ell(E_r) = E_r - \ell k \delta_{r,0}, \qquad \sigma^\ell(\Psi_r^\pm) = \psi^\pm_{r\mp\ell}.$$

这说明谱流会改变模标签，也就是说，它不会保持 $\mathfrak{gl}(1|1)$ 的水平子代数不变。

备注。 在本文中，我们将用 σ 或 Σ 表示谱流自同构，以区分它们在不同语境中的用法。

3 $\mathcal{T}_\rho^A$的边界顶点算子代数

在本节中，我们将构建拓扑 A 扭曲下阿贝尔三维 $\mathcal{N}=4$ 理论的边界顶点算子代数结构。我们首先回顾全纯边界条件的物理定义，遵循 [CG18], ，并描述其连续全局对称性。接着，我们考察全纯边界条件上支撑的顶点算子代数；在 [CG18]中，这些代数是通过阿贝尔 BRST 上同调定义的。我们利用自由场实现证明 BRST 上同调支撑于零次，并明确地将其与辛费米子、辛玻色子及单态代数的乘积之扩张联系起来。

我们采用第 2.1 节的约定：考虑阿贝尔理论 $\mathcal{T}_\rho$，其规范群为 $G=U(1)^r$，并忠实地作用于超多重态表示 $T^*V=T^*\mathbb{C}^n$；其权由 $n\times r$ 电荷矩阵 ρ编码，该矩阵属于分裂正合序列（2.10）。记 $\rho^\vee:=\tau^T$。我们还选择如（2.15）中的余分裂，即一个映射 $\sigma^\vee\colon \mathbb{Z}^r\to\mathbb{Z}^n$，使得 $\rho^T\circ\sigma^\vee=\mathrm{id}_{\mathbb{Z}^r}$，并满足附加条件 $\sigma^{\vee,T}\sigma=0$。综上，我们有

$$0\longrightarrow \mathbb{Z}^r \underset{\sigma^{\vee,T}}{\overset{\rho}{\rightleftarrows}} \mathbb{Z}^n \underset{\sigma}{\overset{\rho^{\vee,T}}{\rightleftarrows}} \mathbb{Z}^{n-r}\longrightarrow 0 \tag{3.1}$$

3.1 Neumann边界条件及其对称性

物理的三维 $\mathcal{N}=4$ 规范理论 $\mathcal{T}_\rho$ 具有一种半 BPS 边界条件，它保留二维 $\mathcal{N}=(0,4)$ 超对称性，且类似 Neumann 条件，因为它对规范场和超多重态标量施加 Neumann边界条件 [CG18]。该边界条件本质上具有手征性；它保留“右手”超多重态费米子（变换于表示 T^*V）以及“左手”矢量多重态费米子（变换于伴随表示 $\mathfrak{g}$；当然，由于 G 是阿贝尔的，因此该表示是平凡的）。这会导致边界规范反常，必须通过引入额外的边界物质来抵消 [DGP17] （另见 [GGP13、CO16]）。边界物质有一种规范的选择：表示 V中的左手复费米子。

为了分析反常抵消，以及更一般地分析边界处的对称结构，我们引入一些记号。我们用示意性的方式表示

- λ_-,λ'_-：$2r$ 在边界处留存的体向量超多重态费米子（表示 $T^*\mathfrak{g}_\mathbb{C}\simeq\mathbb{C}^r\oplus\mathbb{C}^r$ 中的胶子伴侣）；它们具有负的（左手性）边界手征性

- X, Y：$2n$ 满足 Neumann边界条件、因而在边界处留存的体超多重态标量（属于表示 V, V^*）
- ψ_+^X，ψ_+^Y：$2n$ 在边界处存留的体区超多重态费米子（属于表示 V，V^*）；它们具有正（右手）边界手性
- Γ_-: 在边界处添加的 n 2d 个右手费米子（属于表示 V）；它们具有负边界手性

除 $G = U(1)^r$ 体规范对称性外，还存在体 $SU(2)_H \times SU(2)_C$R- 对称性（我们追踪一个极大环面 $U(1)_H \times U(1)_C$），以及体 $T_F = U(1)^{n-r}$和 $T_{\text{top}} = U(1)^r$ 味对称性。此外，边界费米子 Γ_+ 拥有其自身的$T_B = U(1)^{n-r}$ 味对称性，且独立于体味对称性。上述场在这些不同对称性下的荷为：

对称性	f.s.	λ_-, λ'_-	X, Y	ψ_+^X, ψ_+^Y	Γ_-
$G = U(1)^r$	$\mathbf{G}$	$0, 0$	$\rho, \ -\rho$	$\rho, \ -\rho$	ρ
$T_F = U(1)^{n-r}$	$\mathbf{F}$	$0, 0$	$\sigma, \ -\sigma$	$\sigma, \ -\sigma$	σ
$T_{\text{top}} = U(1)^r$	$\mathbf{T}$	$0, 0$	$0, 0$	$0, 0$	$\sigma^\vee$
$T_B = U(1)^{n-r}$	$\mathbf{B}$	$0, 0$	$0, 0$	$0, 0$	$\rho^\vee$
$U(1)_H$	$\mathbf{H}$	$1, 1$	$1, 1$	$0, 0$	0
$U(1)_C$	$\mathbf{C}$	$1, \ -1$	$0, 0$	$-1, \ -1$	0

(3.2)

请注意，这里涉及一些选择。T_F 体场的荷取决于对（2.10）所作的分裂选择，而 T_{top} 边界费米子的荷取决于余分裂的选择 $\sigma^\vee$。所有其他荷（尤其是边界费米子 Γ_+ 在所有其他对称性下的荷）都由边界反常的抵消完全确定。

边界反常多项式是各种规范对称性和全局对称性的场强的二次函数，可通过以下示意公式根据 UV 数据计算：[DGP17]

$$\mathcal{I}_\partial \ = (\text{bulk CS level}) \ - \sum_{\text{fermions } \chi \text{ at the bdy}} d_\chi \epsilon_\chi [\text{charge}(\chi) \cdot (\text{field strengths})]^2 \,, \tag{3.3}$$

对于 $d_\chi = 1$ 纯二维费米子，以及 $d_\chi = \frac{1}{2}$ 在边界处存留的三维费米子；而 $\epsilon_\chi \in \pm 1$ 表示边界手征性。我们采用式（3.2）中的记号表示场强，其中$\mathbf{G} = (\mathbf{G}_1, \ ..., \ \mathbf{G}_r)$、$\mathbf{F} = (\mathbf{F}_1, \ ..., \ \mathbf{F}_r)$等在对称性秩为$> 1$时表示向量。式（3.3）中的体 Chern-Simons（CS）贡献为 $-2\mathbf{G} \cdot \mathbf{T}$（这定义了体拓扑对称性，并决定了体单极算符的拓扑荷）。于是

$\mathcal{T}_\rho$ 的Neumann边界条件的反常多项式为

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_\partial &= -2\,\mathbf{G}\cdot\mathbf{T} + \frac{r}{2}(\mathbf{H}+\mathbf{C})^2 + \frac{r}{2}(\mathbf{H}-\mathbf{C})^2 - \frac{1}{2}|\rho\mathbf{G}+\sigma\mathbf{F}-\mathbf{C}|^2 - \frac{1}{2}|-\rho\mathbf{G}-\sigma\mathbf{F}-\mathbf{C}|^2 \\ &\quad + |\rho\mathbf{G}+\sigma\mathbf{F}+\sigma^\vee\mathbf{T}+\rho^\vee\mathbf{B}|^2 \\ &= r\mathbf{H}^2 - (n-r)\mathbf{C}^2 + 2\,\mathbf{F}\cdot\mathbf{B} + |\sigma^\vee\mathbf{T}+\rho^\vee\mathbf{B}|^2 \end{aligned} \tag{3.4}$$

关键的是，反常多项式中关于 $\mathbf{G}$ 的二次项和一次项会相互抵消。这分别确保不存在规范反常或混合规范-全局反常。反常多项式中剩余的项则编码了全局对称性的边界 't Hooft 反常。

3.2 边界上的顶点算子代数

三维体的拓扑A扭曲与上述 Neu- mann 边界条件的全纯扭曲相容，并导出 [CG18]的边界顶点算子代数。我们在此回顾该顶点算子代数的定义；进一步讨论另见 [Gar22]。

我们将边界置于复平面 z，$\bar{z}$，位于欧几里得时间 $t=0$。边界顶点算子代数由以下内容生成。

- n β-γ 系统 $\mathcal{V}_{\beta\gamma}^{T^*V} = \mathcal{V}_{\beta\gamma}^{\otimes n}$，其场来自体超多重态标量 X，Y 在边界上的限制

$$\gamma^i(z) := X^i(z,t=0)\,, \qquad \beta^i(z) := Y^i(z,t=0)\,, \qquad i=1,...,n \tag{3.5}$$

- n 自由费米子 $\mathcal{V}_{bc}^{V} = \mathcal{V}_{bc}^{\otimes n}$ 其场来自用于抵消边界规范反常的额外二维费米子，

$$b^i(z) = \Gamma^i_-(z)\,, \qquad c^i(z) = \overline{\Gamma}^i_-(z)\,, \qquad i=1,...,n\,. \tag{3.6}$$

- r 自由费米子 $\mathcal{V}_{bc}^{\mathfrak{g}} = \mathcal{V}_{bc}^{\otimes r}$，其场来自限制到边界上的体区规范微子，

$$\partial c^a(z) = \lambda^a_-(z,t=0)\,, \qquad b_a(z) = \lambda'_-(z,t=0)\,, \qquad a=1,...,r\,. \tag{3.7}$$

A 扭曲量子场论具有一个上同调 $\mathbb{Z}$ 分次，由 $U(1)_C$ 电荷给出。与（3.2）比较可知，生成元的次数为 $|c^a|=1$, $|b_a|=-1$, $|\beta|=|\gamma|=|c^i|=|b^i|=0$。

此外，还存在一个由 A扭曲超荷在 $\mathcal{V}_{\beta\gamma}^{T^*V}\otimes\mathcal{V}_{bc}^{V}\otimes\mathcal{V}_{bc}^{\mathfrak{g}}$ 上诱导出的非平凡微分 Q。它与 $\mathcal{V}_{\beta\gamma}^{T^*V}\otimes\mathcal{V}_{bc}^{V}$ 上 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{gl}(1)^r$ 作用对应的 BRST 微分一致。

生成该作用的流为

$$J_a = \sum_i \rho_{ia}(-:\beta^i\gamma^i: + :b^ic^i:)\,, \tag{3.8}$$

并且它们生成一个层为零的仿射 $\mathfrak{gl}(1)^r$ Kac–Moody 代数。微分为

$$Q = \frac{1}{2\pi i}\oint dz \sum_a c^a J_a\,. \tag{3.9}$$

特别地,

$$\begin{gathered} Q(c^a) = 0\,, \quad Q(b_a) = J_a\,, \\ \end{gathered} \qquad \begin{gathered} Q(\beta^i) = -\textstyle\sum_a \rho_{ia}c^a\beta^i\,, \quad Q(\gamma^i) = \sum_a \rho_{ia}c^a\gamma^i\,, \\ Q(b^i) = \textstyle\sum_a \rho_{ia}c^ab^i\,, \quad Q(c^i) = -\sum_a \rho_{ia}c^ac^i\,. \end{gathered} \tag{3.10}$$

综上，我们得到

定义 3.1. *A* 扭曲理论中诺伊曼边界条件上的边界顶点算子代数 $\mathcal{T}_\rho^A$由相对 *BRST* 上同调给出

$$\mathcal{V}_\rho^A := H_{\mathrm{BRST}}\left(\mathfrak{gl}(1)^r, \mathcal{V}_{\beta\gamma}^{T^*V}\otimes\mathcal{V}_{bc}^V\right) = H^\bullet\left(\left(\mathcal{V}_{\beta\gamma}^{T^*V}\otimes\mathcal{V}_{bc}^V\otimes\mathcal{V}_{bc}^{\mathfrak{g}}\right)^{\mathrm{rel}}, Q\right)\,. \tag{3.11}$$

相对上同调的出现（其定义见第2.3.5节）在物理上是由于缺少 c^a 的零模，参见（3.7）。有关这一现象的进一步解释，见[CDG20，第 6.2 节。1]。

注。 上述 $\mathfrak{gl}(1)^r$ *Kac–Moody* 代数的层为零，这是边界规范反常相消的结果。仅作用于 *β-γ* 系统（体超多重态的边界值）的流 $J_a^{\beta\gamma} = -\sum_i \rho_{ia}{:}\,\beta^i\gamma^i\,{:}$生成一个层为 $-\rho^T\rho$ 的 *Kac–Moody* 代数，这意味着

$$J_a^{\beta\gamma}(z)J_b^{\beta\gamma}(w) \sim \frac{-\sum_i \rho_{ia}\rho^i{}_b}{(z-w)^2}\,. \tag{3.12}$$

层 $\rho^T\rho$ 只是体超多重态对边界反常的贡献，参见 $-|\rho\mathbf{G}|^2$项，见(3.4)。作用于二维边界费米子的流$J_a^{bc} = \sum_i \rho_{ai}{:}\;b^ic^i\,{:}$ 生成层为 $+\rho^T\rho$的 *Kac-Moody* 代数，这与 $+|\rho\mathbf{G}|^2$ 在(3.4)最后一项中的贡献一致。

3.2.1 $\mathcal{V}_\rho^A$的对称性

诺伊曼边界条件的所有全局对称性都会诱导边界顶点算子代数 $\mathcal{V}_\rho^A$ 的对称性。然而，这些对称性的具体作用方式取决于拓扑 A 扭曲的其他性质。

我们已经看到，R 对称性 $U(1)_C$ 赋予 A-扭曲边界顶点算子代数一个上同调分 $\mathbb{Z}$ 级，在此分级下 $|c^a| = -|b_a| = |Q| = 1$。稍后我们将证明，BRST上同调（3.11）完全支撑在零次上同调次数，因此最终 $U(1)_C$在上平凡地作用 $\mathcal{V}_\rho^A$。

R 对称性 $U(1)_H \subset SU(2)_H$ 用于定义拓扑 A 扭曲的扭曲同态。它在扭曲后不再保留。然而，边界旋转与 $U(1)_H$(扭曲自旋) 的对角组合，为边界顶点算子代数定义了一个 $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ 值的共形分级，其荷

$$|Q| = 0\,, \quad |\partial| = |z^{-1}| = 1\,, \qquad |\beta| = |\gamma| = |c^i| = |b^i| = \tfrac{1}{2}\,, \quad |c^a| = 0\,, \quad |b_a| = 1\,. \tag{3.13}$$

此外，由于在拓扑 A 扭曲中体应力张量被平凡化（Q-恰当），因此可以存在一个守恒的边界应力张量 $L(z)$，其模 L_0 作用时带有荷（3.13）。边界应力张量定义为

$$L(z) = \frac{1}{2}\sum_i :\partial\beta_i\gamma^i: - :\beta_i\partial\gamma^i: + :\partial b_i c^i: + :\partial c_i b^i: + \sum_a :\partial c_a b^a: \tag{3.14}$$

它与 BRST 算子 Q 对易，并在 $\mathcal{V}_\rho^A$ 上诱导出一个应力张量。

其余的味对称性 $T_F \times T_{\rm top} \times T_B$ all 也作用于 $\mathcal{V}_\rho^A$。由于 T_B 仅作用于二维边界物质，因此它应当增强为 Kac-Moody作用。事实上，很容易识别出 T_B 流。

$$J_\alpha^B = \sum_i (\rho^\vee)_{\alpha i}\, :b^i c^i:\,, \qquad \alpha = 1, ..., n-r \tag{3.15}$$

与所有规范流对易（具有平凡的算子乘积展开） J_a，因此可下降为 BRST 商中的流 $\mathcal{V}_\rho^A$。类似地，在 A扭曲中， T_F 的体流是 Q-恰当的，从而可以存在一个守恒的边界流，该边界流应在$\mathcal{T}_\rho^A$上生成 Kac–Moody作用。（这一机制将在第6.4节中更详细地回顾。）边界 T_F Kac-Moody 对称性的流是

$$J_\alpha^F = \sum_i \sigma_{\alpha i}(- :\beta^i\gamma^i: + :b^i c^i:)\,, \tag{3.16}$$

并且它再次与规范流 J_a 对易。

相反， T_{top} 的体流在 A 扭曲中并非恰当的。事实上，A 扭曲具有在 T_{top} 下带有非平凡电荷的体单极算符。因此，我们并不预期作用于 $\mathcal{V}_\rho^A$ 的有限对称性 T_{top} 会出现 Kac-Moody 增强。增强的缺失可如下看出。在 BRST 约化之前，顶点算子代数具有 T_{top} 个流

$$J_a^{\text{top}} = \sum_i (\sigma^\vee)_{ai} :b^i c^i: \ . \tag{3.17}$$

然而，这些流与 BRST 算子不对易，因为

$$J_a^{\text{top}}(z) J_b(w) \sim \frac{\delta_{ab}}{(z-w)^2} \, . \tag{3.18}$$

（此计算对应于 $+2\,\mathbf{G}\cdot\mathbf{T}$ 来自（3.4）中最后一项的贡献，而该贡献被体 Chern-Simons 层 $-2\mathbf{G}\cdot\mathbf{T}$所抵消。）因此，尽管有限 T_{top} 作用（由 J_0^{top} 生成）确实保留下来，但 Kac–Moody 作用在 BRST 商中并未保留下来。

总之，顶点算子代数 $\mathcal{V}_\rho^A$具有以下对称性:

	∂	Q	c^a	b_a	β^i	γ_i	b^i	c_i
cohomological $U(1)_H$	0	1	1	-1	0	0	0	0
Virasoro $\ni L_0$	1	0	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
Kac-Moody $\supset T_F$	0	0	0	0	$-\sigma$	σ	σ	$-\sigma$
Kac-Moody $\supset T_B$	0	0	0	0	0	0	$\rho^\vee$	$-\rho^\vee$
finite T_{top}	0	0	0	0	0	0	$\sigma^\vee$	$-\sigma^\vee$

(3.19)

3.3 通过自由场实现的 BRST 上同调

<escape>为了更明确地描述顶点算子代数 $\mathcal{V}_\rho^A$，我们将采用第 $\mathcal{V}_{\beta\gamma}$ 2.3.4 节中的自由场实现，即将其视为由其 Fock 模扩张得到的海森堡顶点算子代数，并结合第 2.3.5 节中回顾的 BRST 上同调的特殊情形。</escape>

令 H_ϕ， H_η 为由向量空间 $\mathbb{C}^n$ 定义的海森堡代数，其基分别为 $\{\phi^i\}_{i=1}^n$和 $\{\eta^i\}_{i=1}^n$，配对 $B(\phi^i,\ \phi^j) = -B(\eta^i,\ \eta^j) = \delta^{ij}$ 互为相反数。对于 $\mu \in \mathbb{Z}^n$，回想一下， $\mathcal{F}_{\mu\cdot\phi}^\phi$ 表示由最高权向量 $:e^{\mu\cdot\phi}:$ 生成的 H_ϕ 的福克模，并令 $M_{\mu\cdot\eta}^\phi \subset \mathcal{F}_{\mu\cdot\eta}^\phi$ 为由下式定义的子空间”】【

$$M_{\mu\cdot\phi}^\phi = \bigcap_{i=1}^n \ker S_0^i\big|_{\mathcal{F}_{\mu\cdot\phi}^\phi} \, , \qquad S^i(z) =: e^{\phi^i(z)} : \ . \tag{3.20}$$

回顾 S】【。节 2.3.3即 M_0^ϕ是 n个单态顶点算子代数的复制，而 $M_{\mu\cdot\phi}^\phi$是简单的

模。（或者， $M^{\phi}_{\mu\cdot\phi}$ 是 n 辛费米子的电荷-μ 子空间。）那么， n 个β-γ顶点算子代数具有如下分解

$$\mathcal{V}^{T^*V}_{\beta\gamma} \cong \bigoplus_{\mu\in\mathbb{Z}^n} M^{\phi}_{\mu\cdot\phi}\otimes\mathcal{F}^{\eta}_{\mu\cdot\eta}\,. \tag{3.21}$$

具体而言，β-γ顶点算子代数的生成元被识别为

$$\beta^i(z) =: e^{\phi^i(z)+\eta^i(z)}:, \qquad \gamma^i(z) = -:\partial\phi^i(z)e^{-\phi^i(z)-\eta^i(z)}:\,. \tag{3.22}$$

我们还通过引入第三个海森堡代数 H_θ 来对 n 边界费米子 $\mathcal{V}^V_{bc}=\mathcal{V}^V_{bc}$ 进行玻色化，该代数的向量空间由 $\{\theta^i\}_{i=1}^n$ 张成，并具有正定内积 $B(\theta^i,\theta^j)=\delta^{ij}$。$\mathcal{V}^{\otimes n}_{bc}\cong\bigoplus_{\lambda\in\mathbb{Z}^n}\mathcal{F}^{\theta}_{\lambda\cdot\theta}$ 和

$$\mathcal{V}^{T^*V}_{\beta\gamma}\otimes\mathcal{V}^V_{bc} \cong \bigoplus_{\mu,\lambda\in\mathbb{Z}^n} M^{\phi}_{\mu\cdot\phi}\otimes\mathcal{F}^{\eta}_{\mu\cdot\eta}\otimes\mathcal{F}^{\theta}_{\lambda\cdot\theta}\,. \tag{3.23}$$

3.3.1 分解电荷格

我们希望求出 $\mathfrak{gl}(1)^r$ 在该空间上的作用所对应的 BRST 上同调，如（3.11）中所示。为此，我们将向量空间 $V=\mathbb{C}^n$ 分解为由规范荷张成的子空间及其正交补：

$$V = \rho(\mathbb{C}^r)\oplus\rho^\vee(\mathbb{C}^{n-r})\,. \tag{3.24}$$

这两个子空间在标准欧几里得内积下相互正交，这是正合列（3.1）的直接结果。令 $\pi: V\to\rho(\mathbb{C}^r)$ 和 $\pi^\perp: V\to\rho^\vee(\mathbb{C}^{n-r})$ 分别表示正交投影。这些正交投影可以利用矩阵ρ和$\rho^\vee$表示为： $\pi=\rho(\rho^\intercal\rho)^{-1}\rho^\intercal$和 $\pi^\perp=\tau\intercal(\tau\tau\intercal)^{-1}\tau$。作为投影，这些算子满足$\pi^2=\pi$、$(\pi^\perp)^2=\pi^\perp$，此外还有 $\pi+\pi^\perp=\mathrm{Id}$ 和 $\pi^\perp\cdot\pi=0$。

如果我们也能类似地将整格分解为 $\mathbb{Z}^n$ 形式 $\rho(\mathbb{Z}^r)\oplus\rho(\mathbb{Z}^{n-r}$，那么 BRST 上同调将很容易求出。然而，根据第2.2 节中的命题2.2 ，我们知道：

$$\frac{\mathbb{Z}^n}{\rho(\mathbb{Z}^r)\oplus\rho^\vee(\mathbb{Z}^{n-r})} = H \tag{3.25}$$

可能是一个非平凡的有限群，即理论 $\mathcal{T}_\rho$ 的对称性分数化群，其元素标记有质量真空。

为处理非平凡的 H，我们考察 $\mathbb{Z}^n$ 在正交投影 π 和 $\pi^\perp$ 下的像。由于 $\pi(\mathbb{Z}^n)$ 是 $\rho(\mathbb{C}^r)$ 内的一个格，我们可以取其在 ρ 下的逆像来

得到 $\mathbb{C}^r$ 中的一个格 N。对正交投影 $\pi^\perp$ 也进行同样的操作，我们得到

$$N := \rho^{-1}(\pi(\mathbb{Z}^n)) \subset \mathbb{C}^r\,, \qquad N^\vee := \rho^{\vee,-1}(\pi^\perp(\mathbb{Z}^n)) \subset \mathbb{C}^{n-r}\,. \tag{3.26}$$

由命题2.2 可知，存在自然同构

$$N/\mathbb{Z}^r \simeq \mathbb{Z}^n/\big(\rho(\mathbb{Z}^r) \oplus \rho^\vee(\mathbb{Z}^{n-r})\big) \simeq N^\vee/\mathbb{Z}^{n-r} \simeq H\,. \tag{3.27}$$

对于 $\lambda \in N$和 $\lambda^\vee \in N^\vee$，记 $[\lambda], [\lambda^\vee] \in H$为它们在 H中的对应等价类。于是有正交分解

$$\mathbb{Z}^n = \bigsqcup_{\substack{\lambda \in N,\, \lambda^\vee \in N^\vee \\ \text{s.t. } [\lambda] = [\lambda^\vee]}} \rho(\lambda) + \rho^\vee(\lambda^\vee) \qquad \text{with} \quad \rho(\lambda) \cdot \rho^\vee(\lambda^\vee) = 0\,. \tag{3.28a}$$

等价地，如果对每个 $h \in H$，我们为其等价类选取代表元 $h_N \in N$ 和 $h_{N^\vee} \in N^\vee$，则有

$$\mathbb{Z}^n = \bigsqcup_{\substack{\lambda \in \mathbb{Z}^r,\, \lambda^\vee \in \mathbb{Z}^{n-r} \\ h \in H}} \rho(\lambda + h_N) + \rho^\vee(\lambda^\vee + h_{N^\vee})\,. \tag{3.28b}$$

例。 考虑如下情形：

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{3.29}$$

也就是说，规范群为 $U(1)$，表示为 $V = \mathbb{C}^2$，其权为 1、1。在这种情况下，$\rho^\vee$ 由 $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ 给出，而 $H \simeq \mathbb{Z}_2$ 如 (2.34) 所示。$\mathbb{Z}^2$ 中的像 $\rho(\mathbb{Z})$ 和 $\rho^\vee(\mathbb{Z})$ 如图 1 左侧所示。投影 $\pi(\mathbb{Z}^2)$ 如右侧所示，其逆像为 $N = \rho^{-1}(\pi(\mathbb{Z}^2)) = \frac{1}{2}\mathbb{Z}$。类似地，$N^\vee = \rho^{\vee,-1}(\pi^\perp(\mathbb{Z}^2)) = \frac{1}{2}\mathbb{Z}$。我们可以将每个元素 $v = \left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{Z}^2$ 唯一地写成

$$v = \rho(n) + \rho^\vee(m) \tag{3.30}$$

其中 n、m 要么都是整数（对应于类 $0 \in H$），要么都是半整数（对应于类 $1 \in H$）。明确地，$n = \frac{1}{2}(a+b)$ 以及 $m = \frac{1}{2}(a-b)$。

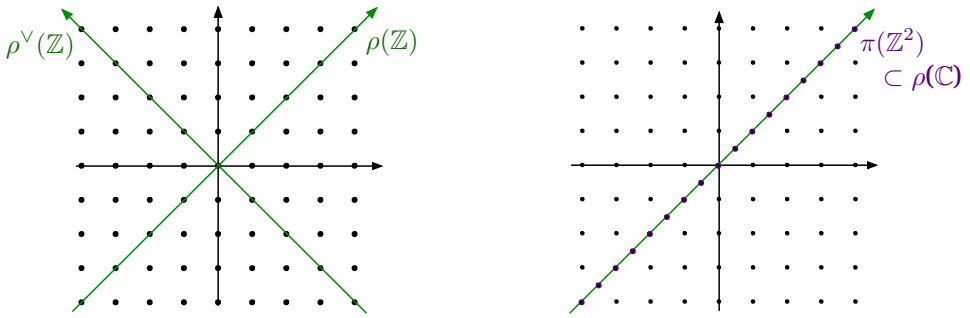


图 1：规范理论中所有超多重态荷构成的 $\mathbb{Z}^2$ 格，其中规范群为 $G = U(1)$、$V = \mathbb{C}^2$ 和 $\rho = \binom{1}{1}$。左：规范荷格 $\rho(\mathbb{Z})$ 的像及其正交补$\rho^\vee(\mathbb{Z})$。右：将完整电荷格投影到由 $\operatorname{im}\rho$ 张成的空间上的投影 $\pi(\mathbb{Z}^2)$。

3.3.2 BRST上同调

我们将利用上述 $\mathbb{C}^n$ 的正交分解（及其整格）来分解自由场实现中出现的海森堡代数（及其福克模）。

例如，给定一个基 $\{\phi^i\}_{i=1}^n$，它属于 $\mathbb{C}^n$，且内积为 $B(\phi^i,\ \phi^j) = \delta^{ij}$，则分解 $\mathbb{C}^n = \rho(\mathbb{C}^r) \oplus \rho^\vee(\mathbb{C}^{n-r})$ 对应于选择一个新基

$$\left\{\phi_0^a\right\}_{a=1}^r \cup \left\{\phi_\perp^\alpha\right\}_{\alpha=1}^{n-r}, \qquad \phi_0^a := (\rho^T\phi)^a, \quad \phi_\perp^\alpha := (\rho^{\vee T}\phi)^\alpha, \tag{3.31}$$

其中，$\{\phi_0^a\}$ 是 $\mathbb{C}^r$ 的一组基，$\{\phi_\perp^\alpha\}$ 是 $\mathbb{C}^{n-r}$的一组基，它们诱导的内积分别为 $\rho^T\rho$ 和 $\rho^{\vee T}\rho^\vee$:

$$B(\phi_0^a, \phi_0^b) = (\rho^T\rho)_{ab}, \qquad B(\phi_0^\alpha, \phi_0^\beta) = (\rho^{\vee T}\rho^\vee)_{\alpha\beta}. \tag{3.32}$$

此外，由于正交性 （3.1），$B(\phi_0^a,\ \phi_\perp^\alpha) = 0$。因此，海森堡代数分解为

$$H_\phi \cong H_{\phi_0} \otimes H_{\phi_\perp}. \tag{3.33}$$

对于标记为 $\lambda \in \mathbb{Z}^n$ 的福克模，我们现在可以写成

$$\lambda = \rho(\lambda_0) + \rho^\vee(\lambda^\vee), \qquad \lambda_0 \in N, \quad \lambda^\vee \in N^\vee, \quad [\lambda_0] = [\lambda^\vee] \in H, \tag{3.34}$$

因此，福克模分解为

$$\mathcal{F}^\phi_{\lambda\cdot\phi} \cong \mathcal{F}^{\phi_0}_{\lambda_0\cdot\phi_0} \otimes \mathcal{F}^{\phi_\perp}_{\lambda^\vee\cdot\phi_\perp} \tag{3.35}$$

完全同理，我们将海森堡代数分解为

$$H_\eta \cong H_{\eta_0} \otimes H_{\eta_\perp}\,, \qquad H_\theta \cong H_{\theta_0} \otimes H_{\theta_\perp}\,, \tag{3.36}$$

以及它们的福克模，唯一的区别是，在 η 代数中，基向量的内积符号全都相反。总而言之，（3.23）中的 β-γ 和 bc 顶点算子代数的自由场实现变为

$$\mathcal{V}^{T^*V}_{\beta\gamma} \otimes \mathcal{V}^{V}_{bc} \cong \bigoplus_{\substack{\mu,\lambda\in N;\ \mu^\vee,\lambda^\vee\in N^\vee \\ \text{s.t. } [\mu]=[\mu^\vee],\,[\lambda]=[\lambda^\vee]}} M^{\phi}_{(\rho(\mu)+\rho^\vee(\mu^\vee))\cdot\phi} \otimes \mathcal{F}^{\eta_0}_{\mu\cdot\eta_0} \otimes \mathcal{F}^{\eta_\perp}_{\mu^\vee\cdot\eta_\perp} \otimes \mathcal{F}^{\theta_0}_{\lambda\cdot\theta_0} \otimes \mathcal{F}^{\theta_\perp}_{\lambda^\vee\cdot\theta_\perp} \tag{3.37}$$

在此 对于自由场实现，用于 BRST 约化的 $\mathfrak{gl}(1)^r$ 规范流由 b 给出。 y

$$\begin{aligned} J_a &= \sum_i \rho_{ia}\left(-:\beta^i\gamma^i: + :b^ic^i:\right) = \sum_i \rho_{ia}\partial\eta^i(z) + \sum_i \rho_{ia}\partial\theta^i(z) \\ &= \partial\eta_0^a(z) + \partial\theta_0^a(z)\,. \end{aligned} \tag{3.38}$$

这些项与 $M^{\phi}{}_{(\rho(\mu)+\rho^\vee(\mu^\vee))\cdot\phi}$对易，因为它们完全不涉及 ϕ；此外，由于我们的正交分解，它们也与 $\mathcal{F}^{\eta_\perp}_{\mu^\vee\cdot\eta_\perp}$和 $\mathcal{F}^{\theta_\perp}_{\lambda^\vee\cdot\theta_\perp}$对易。在该分解中，流作用非平凡的唯一项是

$$\mathcal{F}^{\eta_0}_{\mu\cdot\eta_0} \otimes \mathcal{F}^{\theta_0}_{\lambda\cdot\theta_0}\,. \tag{3.39}$$

回顾第2.77节（2.3.5 中的内容可知

$$H_{\mathrm{BRST}}\left(\mathfrak{gl}(1)^r, \mathcal{F}^{\eta_0}_{\mu\cdot\eta_0} \otimes \mathcal{F}^{\theta_0}_{\lambda\cdot\theta_0}\right) = \delta_{\lambda,\mu}\mathbb{C}, \tag{3.40}$$

$\mathcal{V}^{T^*V}_{\beta\gamma} \otimes \mathcal{V}^{V}_{bc}$ 的 BRST上同调计算结果为

$$H_{\mathrm{BRST}}\left(\mathfrak{gl}(1)^r, \mathcal{V}^{T^*V}_{\beta\gamma} \otimes \mathcal{V}^{V}_{bc}\right) \cong \bigoplus_{\substack{\mu\in N;\ \mu^\vee,\lambda^\vee\in N^\vee \\ \text{s.t. } [\mu]=[\mu^\vee]=[\lambda^\vee]}} M^{\phi}_{(\rho(\mu)+\rho^\vee(\mu^\vee))\cdot\phi} \otimes \mathcal{F}^{\eta_\perp}_{\mu^\vee\cdot\eta_\perp} \otimes \mathcal{F}^{\theta_\perp}_{\lambda^\vee\cdot\theta_\perp}\,. \tag{3.41}$$

有一种实用的方法可以重新整理这一点。注意，

$$\mathcal{V}_{\rho^\vee,0} := \bigoplus_{\lambda^\vee\in\mathbb{Z}^{n-r}} \mathcal{F}^{\theta_\perp}_{\lambda^\vee\cdot\theta_\perp} \tag{3.42}$$

这只不过是 与满秩格 $\mathbb{Z}^{n-r} \in \mathbb{C}^{n-r}$ 对应的格点顶点算子代数，其内积

为 $\rho^{\vee T}\rho^{\vee}$。其模范畴是半单的，由简单流生成

$$\mathcal{V}_{\rho^\vee,h} := \bigoplus_{\lambda^\vee \in \mathbb{Z}^{n-r}+h_{N^\vee}} \mathcal{F}^{\theta_\perp}_{\lambda^\vee\cdot\theta_\perp}\,, \tag{3.43}$$

对于每个 $h \in H$，其中 $h_{N^\vee}$ 表示 $h \in N^\vee/\mathbb{Z}^{n-r}$的等价类，如（3.28）所示。这些满足 $\mathcal{V}_{\rho^\vee,\,h}\times\mathcal{V}_{\rho^\vee,\,h'} = \mathcal{V}_{\rho^\vee,\,h+h'}$。

类似地，顶点算子代数

$$\mathcal{M}_{\rho,0} := \bigoplus_{\substack{\lambda\in\mathbb{Z}^r\\ \lambda^\vee\in\mathbb{Z}^{n-r}}} M^{\phi}_{(\rho(\lambda)+\rho^\vee(\lambda^\vee))\cdot\phi}\otimes\mathcal{F}^{\eta_\perp}_{\lambda^\vee\cdot\eta_\perp} \tag{3.44}$$

其模由 $h\in H$ 标记，给出为

$$\mathcal{M}_{\rho,h} := \bigoplus_{\substack{\lambda\in\mathbb{Z}^r+h_N\\ \lambda^\vee\in\mathbb{Z}^{n-r}+h_{N^\vee}}} M^{\phi}_{(\rho(\lambda)+\rho^\vee(\lambda^\vee))\cdot\phi}\otimes\mathcal{F}^{\eta_\perp}_{\lambda^\vee\cdot\eta_\perp}\,. \tag{3.45}$$

从单态代数与辛费米子之间的关系（2.61）可知，$\mathcal{M}_{\rho,0}$也可以理解为一个不变子代数（又称轨形）

$$\mathcal{M}_{\rho,0} \;\cong\; \left(\mathcal{V}_{SF}^{T^*V}\otimes\mathcal{V}^{-}_{\rho^\vee,0}\right)^{(\mathbb{C}^*)^{n-r}} \tag{3.46}$$

的 n 辛费米子与格点顶点算子代数 $\mathcal{V}^{-}_{\rho^\vee,\,0} = \bigoplus_{\lambda^\vee\in\mathbb{Z}^{n-r}}\mathcal{F}^{\eta_\perp}_{\lambda^\vee\cdot\eta_\perp}$ 对应于具有负双线性形式的格 $\mathbb{Z}^{n-r}$。$-\rho^{\vee T}\rho^{\vee}$ 群 $(\mathbb{C}^*)^{n-r}$ 以反对角方式作用，因此取不变量将两个因子中的权空间联系起来，从而重现 (3.44)。现在，$\mathcal{M}_{\rho\text{的完整模范畴}0}$ 则更为复杂，但根据 [McR20] 等人的工作，$\mathcal{M}_{\rho,\,h}$ 仍然是简单的 H 流，满足 $\mathcal{M}_{\rho,\,h}\times\mathcal{M}_{\rho,\,h'} = \mathcal{M}_{\rho,\,h+h'}$。

综合以上各点，我们得到：

命题 3.2. 存在一个同构

$$\begin{aligned}\mathcal{V}^A_\rho = H_{\mathrm{BRST}}\left(\mathfrak{gl}(1)^r, \mathcal{V}^{T^*V}_{\beta\gamma}\otimes\mathcal{V}^V_{bc}\right)&\\ \cong \bigoplus_{\substack{\mu\in N;\ \mu^\vee,\lambda^\vee\in N^\vee\\ s.t.\,[\mu]=[\mu^\vee]=[\lambda^\vee]}} & M^{\phi}_{(\rho(\mu)+\rho^\vee(\mu^\vee))\cdot\phi}\otimes\mathcal{F}^{\eta_\perp}_{\mu^\vee\cdot\eta_\perp}\otimes\mathcal{F}^{\theta_\perp}_{\lambda^\vee\cdot\theta_\perp}\\ \cong \bigoplus_{h\in H} & \mathcal{M}_{\rho,h}\otimes\mathcal{V}_{\rho,h}\end{aligned} \tag{3.47}$$

将 $\mathcal{V}^A_\rho$表示为 *VOA* 的乘积 $\mathcal{M}_{\rho、\,0}\otimes\mathcal{V}_{\rho^\vee、\,0}$ 通过 H 在 (3.43)–(3.45)中定义的单流进行扩张尤其是，原始定义中的 *BRST*上同调 $\mathcal{V}^A_\rho$

集中在零次上同调次数。

可以利用 $\mathcal{V}_\rho^A$是 $\mathcal{M}_{\rho,\,0}\otimes\mathcal{V}_{\rho^\vee,\,0}$ 的简单流扩张这一事实，应用 [CKM17]的工作来联系它们的模范畴。这与 [CMY22c]以及 [ACPV22]非常类似。稍后我们将以其他方式描述 $\mathcal{V}_\rho^A$的模。

3.3.3 一些例子

例。 考虑以下情形 $\rho=(1)$，即 $U(1)$ 规范理论，其中 $V=\mathbb{C}$ 的权为 *1*。那么$\Lambda^\perp=0$ 并根据 (2.57) 可得

$$\mathcal{V}_\rho^A=\bigoplus_{\lambda\in\mathbb{Z}}M^{\varphi}_{\lambda\varphi}\;\cong\;\mathcal{V}_{SF}\,. \tag{3.48}$$

因此，边界顶点算子代数就是辛费米子。 $\mathcal{V}_{\beta\gamma}\otimes\mathcal{V}_{bc}$与辛费米子 $\chi^\pm$ 之间的显式关系为

$$\beta(z)b(z)\mapsto\chi^+(z),\quad -\gamma(z)c(z)\mapsto\chi^-(z). \tag{3.49}$$

例。作为一个略微推广的情形，考虑任意一个简单阿贝尔理论，其电荷格同构于平凡格，也就是说，带有双线性型 $\rho^T\rho$ 的秩为r 的格同构于标准欧几里得格 $\mathbb{Z}^r$ ，如命题*2.4*所述。特别地， $H=\{0\}$。那么 $\mathbb{Z}^n=\rho(\mathbb{Z}^r)\oplus\rho^\vee(\mathbb{Z}^{n-r})$，并且格 $\rho(\mathbb{Z}^r)$和 $\rho^\vee(\mathbb{Z}^{n-r})$均同构于标准的 $\mathbb{Z}^r$和 $\mathbb{Z}^{n-r}$。我们可以将 $M^{\phi}{}_{(\rho(\lambda)+\rho^\vee(\lambda^\vee))\cdot\phi}\cong M^{\phi_0}_{\lambda\cdot\phi_0}\otimes M^{\phi_\perp}_{\lambda^\vee\cdot\phi_\perp}$分解，由辛费米子（*2.61*）和辛玻色子（*2.65*）的自由场实现可知

$$\mathcal{M}_{\rho,0}\;\cong\;\left(\bigoplus_{\lambda\in\mathbb{Z}^r}M^{\phi_0}_{\lambda\cdot\phi_0}\right)\otimes\left(\bigoplus_{\lambda^\vee\in\mathbb{Z}^{n-r}}M^{\phi_\perp}_{\lambda^\vee\cdot\phi_\perp}\otimes\mathcal{F}^{\eta_\perp}_{\lambda^\vee\cdot\eta_\perp}\right)\;\cong\;\mathcal{V}_{SF}^{\otimes r}\otimes\mathcal{V}_{\beta\gamma}^{\otimes n-r}\,. \tag{3.50}$$

类似地，通过玻色化，

$$\mathcal{V}_{\rho^\vee,0}\;\cong\;\bigoplus_{\lambda^\vee\in\mathbb{Z}^{n-r}}\mathcal{F}^{\theta_\perp}_{\lambda^\vee\cdot\theta_\perp}\;\cong\;\mathcal{V}_{bc}^{\otimes n-r}\,, \tag{3.51}$$

由此

$$\mathcal{V}_\rho^A=\mathcal{M}_{\rho,0}\otimes\mathcal{V}_{\rho^\vee,0}\;\cong\;\mathcal{V}_{SF}^{\otimes r}\otimes\mathcal{V}_{\beta\gamma}^{\otimes n-r}\otimes\mathcal{V}_{bc}^{\otimes n-r}\,. \tag{3.52}$$

这与命题 *2.4*一致，该命题指出，底层物理理论 $\mathcal{T}_\rho$分解为 r 个 *SQED*（边界顶点算子代数为 $\mathcal{V}_{SF}$，如前例所示）以及 $n-r$ 个自由超多重态（边界顶点算子代数为 $\mathcal{V}_{\beta\gamma}\otimes\mathcal{V}_{bc}$）。

我们还注意到，当 H 平凡时，整个顶点算子代数 $\mathcal{V}_\rho^A$可以表示为辛费米子与格点顶点算子代数的一个轨形。事实上，由（3.46）结合 $H=\{0\}$ 可得

$$\mathcal{V}_\rho^A \cong \left(\mathcal{V}_{SF}^{T^*V}\otimes\mathcal{V}_{\rho^\vee,0}^-\right)^{(\mathbb{C}^*)^{n-r}}\otimes\mathcal{V}_{\rho^\vee,0}^+ . \tag{3.53}$$

稍后在第 5.1 节中，我们将推广这一思路。我们将证明，对于任意 ρ， $\mathcal{V}_\rho^A$ 同构于辛费米子的一个轨形，再模去一个莫里塔平凡顶点代数。

例。 考虑 $\rho=(1,\ 1)^\mathsf{T}$ 的情形，即 $G=U(1)$ 以及 $V=\mathbb{C}^2$，权均为 *1*。于是 $\rho^\vee=(1,\ -1)^\mathsf{T}$，并且回想一下 $H\simeq\mathbb{Z}_2$。命题 $\mathcal{V}_\rho^A$*3.2* 中 自由场实现所对应的海森堡顶点算子代数，基于一个向量空间，其基为 $\{\phi^1,\phi^2,\eta_\perp,\theta_\perp\}$，且非零配对为

$$B(\phi^i,\phi^j)=\delta^{ij}\,,\quad B(\eta_\perp,\eta_\perp)=-2\,,\quad B(\theta_\perp,\theta_\perp)=2\,. \tag{3.54}$$

于是边界顶点算子代数具有如下形式

$$\mathcal{V}_\rho^A \cong \bigoplus_{\substack{a,b,c\in\mathbb{Z}\\ s.t.\ a+b+c\ is\ even}} M^\phi_{a\phi^1+b\phi^2}\otimes\mathcal{F}^{\eta_\perp}_{\frac{1}{2}(a-b)\eta_\perp}\otimes\mathcal{F}^{\theta_\perp}_{\frac{1}{2}c\theta_\perp} \tag{3.55}$$

对于较小的 a、b、c，我们可以给出直和项的生成元与 $\mathcal{V}_{\beta\gamma}^{\otimes 2}\otimes\mathcal{V}_{bc}^{\otimes 2}$ 中场之间的如下对应关系（在取 *BRST*上同调之前）：

$$\begin{aligned}
\beta^1b^1,\,\beta^1b^2 &\leftrightarrow M_{\phi^1}\otimes\mathcal{F}_{\frac{1}{2}\eta_\perp}\otimes\mathcal{F}_{\pm\frac{1}{2}\theta_\perp}\\
\beta^2b^1,\,\beta^2b^2 &\leftrightarrow M_{\phi^2}\otimes\mathcal{F}_{-\frac{1}{2}\eta_\perp}\otimes\mathcal{F}_{\pm\frac{1}{2}\theta_\perp}\\
\gamma^1c^1,\,\gamma^1c^2 &\leftrightarrow M_{-\phi^1}\otimes\mathcal{F}_{-\frac{1}{2}\eta_\perp}\otimes\mathcal{F}_{\pm\frac{1}{2}\theta_\perp}\\
\gamma^2c^1,\,\gamma^2c^2 &\leftrightarrow M_{-\phi^2}\otimes\mathcal{F}_{\frac{1}{2}\eta_\perp}\otimes\mathcal{F}_{\pm\frac{1}{2}\theta_\perp}\\
b^1c^2,\,b^2c^1 &\leftrightarrow M_0\otimes\mathcal{F}_0\otimes\mathcal{F}_{\pm\theta_\perp}
\end{aligned} \tag{3.56}$$

3.3.4 自由场实现中的对称性

在第3.2.1节中，我们看到 $\mathcal{V}_\rho^A$ 应具有上同调 $U(1)_H$ 对称性，以及$T_F\times T_B\times T_{\text{top}}\simeq U(1)^{n-r}\times U(1)^{n-r}\times U(1)^r$味对称性。在命题3.2中，我们证明了上同调对称性 $U(1)_H$ 的作用是平凡的。剩余的对称性以下述方式出现在自由场实现中。

在 BRST 约化之前，在 $\mathcal{V}_\beta^{T^*V}\otimes\mathcal{V}_{bc}^V$ 自由场实现（3.23）中，边界T_B对称性具有流 $J^B=\rho^{\vee T}\partial\theta$（意为 $n-r$流 $J_\alpha^B=\rho^\vee_{\alpha i}\partial\theta^i$）。将海森堡顶点算子代数分解后，它们就变为 $J_\alpha^B=\partial\theta_\perp$，与 BRST 约化对易，并定义了 T_B 中的流 $\mathcal{V}_\rho^A$，且仅作用于格点顶点算子代数

模 $\mathcal{V}_{\rho^\vee,\ h_\circ}$ 在 J^B 的零模作用下，其中的福克模具有权

$$T_B: \qquad J^B = \partial\theta_\perp\,, \qquad \text{weight}(\mathcal{F}^{\theta_\perp}_{\lambda^\vee\cdot\theta_\perp}) = \rho^{\vee T}\rho^\vee\lambda^\vee \in \mathbb{Z}^{n-r}\,. \tag{3.57}$$

在 BRST 约化之前，体味对称性 T_F通过流 $J^F = \sigma^T(\partial\eta + \partial\theta)$ 起作用。规范作用的 BRST 流为 $J^G = \rho^T(\partial\eta + \partial\theta)$，我们可以将$J^F$平移若干个 J^G（它在 BRST 上同调中是恰当的），以确保它们只依赖于 $\eta_\perp$ 和 $\theta_\perp$。换言之，我们投影到与规范荷格正交的子空间上。修改后的味流变为 $J^F = (\sigma^T - \sigma^T\rho(\rho^T\rho)^{-1}\rho^T)(\partial\eta + \partial\theta)$。经过一些线性代数运算，可将其写成关于 $\eta_\perp$，$\theta_\perp$ 的形式：

$$T_F: \qquad J^F = (\rho^{\vee T}\rho^\vee)^{-1}(\partial\eta_\perp + \partial\theta_\perp)\,. \tag{3.58}$$

U在 J^F 的零模作用下，格分解中的模具有权重 ts

$$\text{weight}\big(M^\phi_{(\rho(\mu)+\rho^\vee(\mu^\vee))\cdot\phi} \otimes \mathcal{F}^{\eta_\perp}_{\mu^\vee\cdot\eta_\perp} \otimes \mathcal{F}^{\theta_\perp}_{\lambda^\vee\cdot\theta_\perp}\big) = \lambda^\vee - \mu^\vee \in \mathbb{Z}^{n-r} \tag{3.59}$$

（注意，$\mu^\vee$ 和 $\lambda^\vee$ 可能都是分数，但它们的差为整数，恰恰因为$[\mu^\vee] = [\lambda^\vee] \in H_\circ$。）

拓扑对称性 T_{top} 并未增强为 Kac-Moody。在 BRST 商之前，它在自由场实现中的模 $M^\phi_{\mu\cdot\phi} \otimes \mathcal{F}^\eta_{\mu\cdot\eta} \otimes \mathcal{F}^\theta_{\lambda\cdot\theta}$上作用（3.23），其权为$\sigma^{\vee T}\lambda \in \mathbb{Z}^r$。经过 BRST 商后，这与之相同

$$T_{\text{top}}: \qquad \text{weight}\big(M^\phi_{(\rho(\mu)+\rho^\vee(\mu^\vee))\cdot\phi} \otimes \mathcal{F}^{\eta_\perp}_{\mu^\vee\cdot\eta_\perp} \otimes \mathcal{F}^{\theta_\perp}_{\lambda^\vee\cdot\theta_\perp}\big) = \mu + \sigma^{\vee T}\rho^\vee\lambda^\vee \in \mathbb{Z}^r\,. \tag{3.60}$$

这仍然是整数值，这是由于 $[\mu] = [\lambda^\vee] \in H_\circ$。Kac-Moody 增强的缺失反映在这样一个事实中：用于测量 μ 权的假定流 $\partial\phi$ 不包含在 M^ϕ_0 中，因为它们不属于筛选荷的核。

要写出自由场实现中的应力张量，我们先用自由场实现写出取上同调之前 BRST复形的应力张量：

$$L(z) = \frac{1}{2}\sum_i \big(:\partial\phi^i\partial\phi_i: - \partial^2\phi^i - :\partial\eta^i\partial\eta_i: + :\partial\theta^i\partial\theta_i:\big) + \sum_a :\partial c^a b_a:\,. \tag{3.61}$$

我们可以使用投影 π和 $\pi^\perp$来写出 $\partial\eta^i = \sum \pi_{ij}\partial\eta^j + \pi^\perp_{ij}\partial\eta^j$。项 $\sum \pi_{ij}\partial\eta^j$等于：

$$\sum \pi_{ij}\partial\eta^j = \sum_j \Big(\rho(\rho^\mathsf{T}\rho)^{-1}\rho^\mathsf{T}\Big)_{ij}\partial\eta^j = \sum_{a,j}\Big(\rho(\rho^\mathsf{T}\rho)^{-1}\Big)_i{}^a J^{\beta\gamma}_a. \tag{3.62}$$

这里，项 $J_a^{\beta\gamma}$是 $\mathcal{V}_{\beta\gamma}^{\otimes n}$中的 $U(1)^r$ Kac-Moody 对称性的生成元。我们将项$\sum \tau^\alpha{}_j \partial\eta^j$记为 $\partial\eta_\alpha$。利用这些，我们可以重写第二项：

$$\sum \pi_{ij}^{\perp} \partial\eta^j = \sum_j \left(\tau^{\mathsf{T}}(\tau\tau^{\mathsf{T}})^{-1}\tau\right)_{ij} \partial\eta^j = \sum_\alpha \left(\tau^{\mathsf{T}}(\tau\tau^{\mathsf{T}})^{-1}\right)_{i\alpha} \partial\theta^\alpha. \tag{3.63}$$

为方便起见，记矩阵 $\rho(\rho^{\mathsf{T}}\rho)^{-1}$ 为 Π，记矩阵 $\tau\mathsf{T}(\tau\tau\mathsf{T})^{-1}$ 为 $\Pi^{\perp}$。我们有：

$$\sum_i :\partial\eta^i\partial\eta_i: = \sum_{i,a,b} \Pi_i{}^a \Pi^{ib} :J_a^{\beta\gamma} J_b^{\beta\gamma}: + \sum_{i,\alpha,\beta} \Pi_i^{\perp\alpha}\Pi^{\perp,i\beta} :\partial\eta_\alpha\partial\eta_\beta: . \tag{3.64}$$

这里我们用到了以下事实： $\pi\cdot\pi^{\perp} = 0$。类似地，我们有关于 $\sum_i :\partial\theta^i\partial\theta_i$ 的如下分解：

$$\sum_i :\partial\theta^i\partial\theta_i: = \sum_{i,a,b} \Pi_i{}^a \Pi^{ib} :J_a^{bc} J_b^{bc}: + \sum_{i,\alpha,\beta} \Pi_i^{\perp\alpha}\Pi^{\perp,i\beta} :\partial\theta_\alpha\partial\theta_\beta: . \tag{3.65}$$

这里 J_a^{bc}是 $\mathcal{V}_{bc}^{\otimes n}$ 和 $\partial\theta_\alpha = \sum \tau^\alpha{}_j \partial\theta^j$ 中 $U(1)^r$对称性的生成元。在上同调中，该项：

$$\sum_{i,a,b} \Pi_i{}^a \Pi^{ib} :J_a^{\beta\gamma} J_b^{\beta\gamma}: + \sum_{i,a,b} \Pi_i{}^a \Pi^{ib} :J_a^{bc} J_b^{bc}: + \sum_a :\partial c^a b_a: \tag{3.66}$$

是正合的，因此我们得到如下共形元表达式：

$$\frac{1}{2}\sum_i \left(:\partial\phi^i\partial\phi_i: -\partial^2\phi^i - \sum_{\alpha,\beta} \Pi_i^{\perp\alpha}\Pi^{\perp,i\beta} :\partial\eta_\alpha\partial\eta_\beta: + \sum_{\alpha,\beta} \Pi_i^{\perp\alpha}\Pi^{\perp,i\beta} :\partial\theta_\alpha\partial\theta_\beta: \right). \tag{3.67}$$

4 $\mathcal{T}_\rho^B$ 的边界顶点算子代数

在本节中，我们定义 B 扭曲的边界顶点算子代数 $\mathcal{V}_\rho^B$ $\mathcal{T}_\rho^B$。文献 [CG18] 已经讨论过，边界顶点算子代数是仿射李超代数 $\widehat{\mathfrak{g}}_\rho$ 的非微扰完备化。在本节中，我们将边界单极算子识别为 $\widehat{\mathfrak{g}}_\rho$ 的简单流的生成元，并定义非微扰完备化 $\mathcal{V}_\rho^B$。我们通过给出 $\mathcal{V}_\rho^B$ 的自由场实现，并进一步证明定理 4.4 中关于边界顶点算子代数的镜像对称性陈述，来论证这一识别。

本节的结构如下：

- 在第 4.1 节中，我们回顾 $\mathcal{T}_\rho^B$根据 [CG18] 的狄利克雷边界条件。
- 在第4.2节中，我们回顾 $\widehat{\mathfrak{g}}_\rho$ 的定义，并引入单极算符和完备化 $\mathcal{V}_\rho^B$。

- 在第4.3节中，我们利用海森堡顶点算子代数的格扩张，构造 $\widehat{\mathfrak{g}_\rho}$ 和 $\mathcal{V}_\rho^B$的自由场实现。

- 在第 4.4 节中，我们根据定理 4.4 证明了关于边界顶点算子代数的镜像对称命题。

4.1 狄利克雷边界条件及其对称性

与体的 B 扭曲相容的全纯边界条件，源自一种保持二维 $\mathcal{N} = (0, 4)$ 超对称性的物理边界条件，且属于狄利克雷型 [CG18]。具体而言，它固定超多重态标量的所有取值，并固定规范丛的一个平凡化，从而将规范对称性破缺为整体对称性。

由于规范对称性被显式破缺，因此无需消除边界规范反常。不过，分析整体对称性的边界 't Hooft 反常仍然有用，因为它们控制边界顶点算子代数中的算子乘积展开系数。

狄利克雷边界条件下保留下来的边界场，粗略地说，是第 3.1 节 Neumann边界条件下场的补集。它们包括：

- $N := F_{zt} + i\partial_z\sigma$： r 边界曲率分量，由实规范标量 σ修正；扭曲后，这些特定组合成为边界顶点算子代数的 Q闭元

- φ： r 复矢量多重态标量

- λ_+， λ'_+： $2r$ 体区规范微子，属于表示 $T^*\mathfrak{g}_\mathbb{C} \simeq \mathbb{C}^r \oplus \mathbb{C}^r$，具有正（右手）边界手征性；它们是 N 和 φ的超伴侣

- ψ_-^X， ψ_-^Y：$2n$ 体区超多重态费米子，属于表示 V， V^*，具有负（左手）边界手征性。

超多重态标量 X， Y 被设为零。

在边界处，体 $G = U(1)^r$ 规范对称性变为全局味对称性。此外，还存在体 $SU(2)_R \times SU(2)_C$R 对称性，以及体 $T_F = U(1)^{n-r}$和$T_{\text{top}} = U(1)^{n-r}$ 味对称性。上述场具有以下荷

symmetry	f.s.	N, φ	λ_+, λ'_+	ψ_-^X, ψ_-^Y
$G = U(1)^r$	**G**	$0, 0$	$0, 0$	$\rho, -\rho$
$T_F = U(1)^{n-r}$	**F**	$0, 0$	$0, 0$	$\sigma, -\sigma$
$T_{\text{top}} = U(1)^r$	**T**	$0, 0$	$0, 0$	$0, 0$
$U(1)_H$	**H**	$0, 0$	$1, 1$	$0, 0$
$U(1)_C$	**C**	$0, 2$	$1, -1$	$-1, -1$

(4.1)

边界反常多项式使用公式（3.3）计算，结果简单地为

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_\partial &= +2\mathbf{G}\cdot\mathbf{T} - \frac{r}{2}(\mathbf{H}+\mathbf{C})^2 - \frac{r}{2}(\mathbf{H}-\mathbf{C})^2 + \frac{1}{2}|\rho\mathbf{G}+\sigma\mathbf{F}-\mathbf{C}|^2 + \frac{1}{2}|-\rho\mathbf{G}-\sigma\mathbf{F}-\mathbf{C}|^2 \\ &= -r\mathbf{H}^2 + (n-r)\mathbf{C}^2 + 2\mathbf{T}\cdot\mathbf{G} + |\sigma\mathbf{F}+\rho\mathbf{G}|^2 \end{aligned} \tag{4.2}$$

请注意，由于手征性相反，费米子的贡献恰好与第 3.1 节的 Neumann 边界条件下的贡献相反。我们还选择体的 Chern-Simons 层为 $2\mathbf{G}\cdot\mathbf{T}$；这定义了拓扑对称性对单极算符的作用方式。

4.1.1 三维镜像对称

容易看出，Neumann 边界反常（3.4）与狄利克雷边界反常（4.2）在交换……后完全相同

$$\begin{array}{ccc} r & \leftrightarrow & n-r \\ \rho,\rho^\vee & \leftrightarrow & \rho^\vee,\rho \\ \sigma,\sigma^\vee & \leftrightarrow & \sigma^\vee,\sigma \\ \mathbf{C},\mathbf{H} & \leftrightarrow & \mathbf{H},\mathbf{C} \\ \mathbf{T},\mathbf{F} & \leftrightarrow & \mathbf{F},\mathbf{T} \\ \mathbf{B} & \leftrightarrow & \mathbf{G} \end{array} \tag{4.3}$$

这表明，在对相应的整体对称性进行重新定义后，这两种边界条件可能互为镜像。这种对应关系的一个非平凡之处（它并非体镜像对称字典中的标准内容）是：Neumann边界条件下额外二维物质所携带的边界$U(1)_B$ 对称性，对应于狄利克雷边界条件下的全局边界 G 对称性。

4.1.2 边界单极算符

狄利克雷边界条件支持边界单极算子。对 [BDGH16、DGP17] 中边界单极算子的分析表明，存在由规范群的所有余特征 U_μ 标记的“裸”BPS 边界单极算子 μ，这意味着

$$\mu \in \mathbb{Z}^r\,. \tag{4.4}$$

通过对反常多项式关于 $\mathbf{G}$ 求导，可以计算它们在各种全局对称性下的荷。单极算符还会获得边界自旋，其大小正比于它们的“磁”荷 μ 与其在 G 下的“电”荷之积。

总之，我们得到

	G	$U(1)_F$	$U(1)_{\text{top}}$	$U(1)_H$	$U(1)_C$	Spin(2)
charges of U_μ	$(\rho^T\rho)\mu$	$(\sigma^T\rho)\mu$	μ	0	0	$\frac{1}{2}\mu\cdot(\rho^T\rho)\mu=\frac{1}{2}\lvert\rho\mu\rvert^2$

(4.5)

4.2 微扰与非微扰边界顶点算子代数

对体进行拓扑 B 扭转后，上一节的边界条件（更准确地说，是对其进行轻微变形后的边界条件）变为纯全纯，并支持一个顶点算子代数 [CG18]。在微扰意义下，该顶点算子代数由在边界处存留下来的体场生成。其算子乘积展开由一圈体-边界费曼图计算得出，详见 [CDG20，Gar22]。

微扰边界顶点算子代数呈现为 Kac-Moody 李超代数 $\widehat{\mathfrak{g}_\rho}$。它基于一个有限维李超代数 $\mathfrak{g}_\rho$，定义如下

$$\mathfrak{g}_\rho := T^*(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}\oplus\Pi V) \;=\; \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}\oplus\Pi V\oplus\Pi V^*\oplus\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^* \qquad (4.6)$$
$$\text{with basis}\;\; (N_a,\;\; \psi^{i,+},\;\; \psi^{i,-},\;\; E^a)\,.$$

对于 $a=1,\ldots\ldots,\ r$ 以及 $i=1,\ldots\ldots,\ n$。这是一个 $\mathbb{Z}$-分次李代数。其偶部/玻色部分是 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}=\mathbb{C}^r$ 的一个副本和 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^*=\mathbb{C}^r$ 的一个副本（基元为 N_a，E^a）。其奇部/费米部分以奇偶平移 'Π' 表示，为 $V\oplus V^*=\mathbb{C}^{2n}$（基为 $\psi^{i,\,\pm}$）。非零李括号如下给出

$$[N_a,\psi^{i,\pm}]=\pm\rho^i{}_a\psi^{i,\pm}\,,\qquad \{\psi^{i,+},\psi^{j,-}\}=\delta^{ij}\sum_a\rho^i{}_aE^a. \qquad (4.7)$$

注。 出现这个李代数的原因是，三维 $\mathcal{N}=4$规范理论的拓扑 *B*-扭曲在微扰意义下等价于一个切恩-西蒙斯理论，其对应对象为 $\mathfrak{g}_\rho$。超多重态费米子和矢量多重态玻色子可以重新诠释为一个 $\mathfrak{g}_\rho$ 超联络的分量。该陈述可推广到一般的群 G 和辛表示 T^*V，其中使用由 $\mathfrak{g}_{G,\,V}:=(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}\oplus\Pi V)$ 给出的李超代数。（4.7）的推广指出，$[N,-]$ 编码了对所有其他元素的作用，$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 是中心元，而 E 是 $\{\psi,\psi\}$ 作用的复矩映射 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 在 T^*V 上的作用。

Kac-Moody 顶点算子代数之所以出现，是因为上述狄利克雷边界条件推广了经典切恩-西蒙斯理论分析中所采用的类狄利克雷边界条件，参见*[Wit89b*、*EMSS89]*,后者在微扰意义下支持 *Kac–Moody* 顶点算子代数。

要定义 Kac-Moody 李超代数，我们需要选择一个不变的、偶的、非退化双线性配对 $\kappa:\mathfrak{g}_\rho\times\mathfrak{g}_\rho\to\mathfrak{g}_\rho$，也称为层。这样的选择有很多

上的配对 $\mathfrak{g}_\rho$。B 扭曲体作用量中编码的配对由 $T^*(\mathfrak{g}\oplus\Pi V)$ 上的辛配对诱导而来，并经过单圈边界修正，参见 [CDG20、Gar22]；其形式为

$$\kappa(N_a, N_b) = (\rho^T\rho)_{ab} = \sum_i \rho^i{}_a\rho_{ib}\,, \qquad \kappa(N_a, E^b) = \delta_a{}^b\,, \qquad \kappa(\psi^{i,+}, \psi^{j,-}) = \delta^{ij}\,. \tag{4.8}$$

（$\rho^T\rho$ 项是单圈修正。）

相应的 Kac-Moody 顶点算子代数 $\widehat{\mathfrak{g}_\rho}$ 由场 $N_a(z)$ $\psi^{i,\pm}(z)$ $E^a(z)$ 强生成，任意两个生成元 x，y 的算子乘积展开由 $x(z)y(w) \sim \frac{\kappa(x,\,y)}{(z-w)_2} + \frac{[x,y](w)}{z-w}$ 统一给出。具体而言，这意味着

$$\begin{aligned}
N_a(z)E^b(w) &\sim \frac{\delta_a{}^b}{(z-w)^2}\,, & N_a(z)N_b(w) &\sim \frac{(\rho^T\rho)_{ab}}{(z-w)^2}\,,\\
N_a(z)\psi^{i,+}(w) &\sim \frac{\rho^i{}_a\psi^{i,+}(w)}{(z-w)}\,, & N_a(z)\psi^{i,-}(w) &\sim \frac{-\rho^i{}_a\psi^{i,-}(w)}{(z-w)}\,,\\
\psi^{i,+}(z)\psi^{j,-}(w) &\sim \frac{\delta^{ij}}{(z-w)^2} + \frac{\delta^{ij}\sum_a \rho^i{}_a E^a(w)}{z-w}\,.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

这些顶点算子代数生成元对应于第4.1节狄利克雷边界条件上的场，如下所示：

- N_a 是修正后的边界场强 $F_{zt} + i\partial_z\sigma$
- E 是复矢量多重态标量 φ，利用规范群中每个 $\mathfrak{gl}(1)$因子上的 Killing 型（按物理规范耦合归一化），将其对偶化为 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^*$ 的元素，而非 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 的元素
- $\psi^{i,+}$，$\psi^{i,-}$是超多重态费米子 $\psi^+ = \psi^X_-$和 $\psi^- = \psi^Y_-$ 的共轭场。

例。当 $\rho = (1)$，$\widehat{\mathfrak{g}_\rho}$ 是 $\mathfrak{gl}(1|1)$（例如，参见[*CMY22b*] 和第 *2.3.6*节）。我们在此使用的记号 $(N,\ \psi^+,\ \psi^-,\ E)$ 是 $\mathfrak{gl}(1|1)$相关文献中的标准记法。

例。当规范群 G 是平凡的$(r=0)$时，*B*-扭曲的顶点算子代数仅由n 份辛费米子 $\psi^{i,\pm}(z)$组成。这就是完整的非微扰结果，因为当不存在规范群时，也就不存在单极算子。

更一般地，任意 $\widehat{\mathfrak{g}_\rho}$（及其非微扰完备化 $\mathcal{V}^B_\rho$，定义如下）都可通过 n 辛费米子 $\mathcal{V}^{T^*V}_{SF}$实现自由场实现，其中 $\psi^{i,\pm}(z)$ 由将辛费米子生成元 $\chi^{i,\pm}(z)$ 与简并玻色子的顶点算子耦合得到，见第*5.3*节。

4.2.1 顶点算子代数的对称性

（4.1）中总结的各种边界全局对称性都应诱导出边界顶点算子代数的对称性。

全局 $G = U(1)^r$ 对称性仅存在于边界上，因为它在体内被规范化。因此，它应当成为顶点算子代数的增强型 $\mathfrak{gl}(1)^r$ Kac-Moody 对称性。很容易看出，其流由场 $N^a(z)$给出。根据（$\rho^T\rho$），其层显然是（4.9）；这也与边界 't Hooft 反常（4.2）中的 $|\rho\mathbf{G}|^2$ 项一致。

拓扑 $T_{\text{top}} = U(1)^r$ 对称性具有一个在 B 扭曲下为恰当形式的体流；因此，它也应当下降为边界顶点算子代数的 Kac-Moody $\mathfrak{gl}(1)^r$ 对称性。此外，边界 't Hooft 反常（4.2）不包含 $\mathbf{T}^2$ 项，这意味着该 $\mathfrak{gl}(1)^r$Kac-Moody 代数的层为零，即完全可交换。在 $\widehat{\mathfrak{g}}_\rho$中存在一个显然的零层阿贝尔 Kac-Moody 代数，由流 $E^a(z)$ 生成，我们将论证这些确实就是 T_{top} 流。它们不作用于 $\widehat{\mathfrak{g}}_\rho$中的任何其他场。事实上，$T_{\text{top}}$ 应当测量边界单极算子的电荷，而边界单极算子是一种非微扰特征。

超多重态味对称性 $T_F = U(1)^{n-r}$ 具有非平凡的体流（它作用于体超多重态算子 X，Y 这些算子处于 B-扭曲中），因此会产生边界顶点算子的有限 T_F 对称性，但不会出现 Kac-Moody 增强。这是作用于带有电荷 $\pm\sigma$ 的 T^*V 值费米子 $\psi^\pm$ 上的显然对称性。

$U(1)_H$ R 对称性在 B 扭曲中变为同调次数。然而，所有生成边界顶点算子的场都具有 $U(1)_H$ 零电荷。加入边界单极算子也不会改变这一事实；因此，*B*扭曲边界顶点算子代数显然只支撑在零次同调次数上。

$U(1)_C$ R 对称性与边界 Spin(2) 自旋混合，定义边界顶点算子代数上的共形分级L_0。具体而言，电荷之间的关系为 $L_0 = \frac{1}{2}C + J$（其中 J表示边界自旋）。事实证明，Kac–Moody 顶点算子的所有生成元的共形权均为一。也就是说，$N \sim F_{zt} + i\partial_z\sigma$ 具有 $C = 0$ 和 $J = 1$；$\psi^\pm$ 具有 $C = 1$ 和 $J = \frac{1}{2}$；而 E具有 $C = 2$ 和 $J = 0$。由于体应力张量是 Q-恰当的，因此可能存在守恒的边界应力张量。它表示为

$$L(z) = \frac{1}{2}\Big(\sum_a :N_aE^a: + :E^aN_a: - \sum_i :\psi^{i,+}\psi^{i,-}: + \sum_i :\psi^{i,-}\psi^{i,+}:\Big). \tag{4.10}$$

这个表达式直接源自 [Gar22]中的体边界物理。

总而言之， $\widehat{\mathfrak{g}_\rho}$ 及其荷为

对称性	流 N		E	ψ^+	ψ^-
$G = U(1)^r$	$N(z)$	0	0	ρ	$-\rho$
$T_{\text{top}} = U(1)^r$	$E(z)$	0	0	0	0
$T_F = U(1)^{n-r}$	n.a.	0	0	σ	$-\sigma$
同调的 $U(1)_C$	n.a.	0	0	0	0
共形的	$L(z)$	1	1	1	1

(4.11)

注。 对于单李代数 $\mathfrak{k}$，如何构造 *Kac–Moody* 顶点算子代数 $\mathfrak{k}_\kappa$，众所周知。层 $\kappa : \mathfrak{k} \times \mathfrak{k} \to \mathbb{C}$ 是一个不变、非退化的对称双线性型，因此通过固定嘉当–基林形式的某个倍数即可唯一确定。随后，利用层的逆（将其解释为二次卡西米尔元），通过 *Segal-Sugawara* 构造确定共形元（应力张量）。具体而言，若 J^a 是 $\mathfrak{k}$的生成元，且 $\kappa(J^a, J^b) = \kappa^{ab}$，则应力张量（相差一个整体归一化因子）为$L(z) = (\kappa^{-1})_{ab} : J^a(z)J^b(z) :$。归一化的改变可以理解为在求逆之前对层进行平移（加上对偶考克斯特数）。

对于我们的 *Kac-Moody* 顶点算子代数 $\widehat{\mathfrak{g}_\rho}$，层 (4.8) 与应力张量 (4.10) 中出现的二次卡西米尔元之间的关系也类似。也就是说，在取逆以构造卡西米尔元之前，我们必须先去掉 $\rho^T\rho$ 在 (4.8) 中的那一项——它正是由边界 *'t Hooft* 反常编码的单圈层移位。然而，由于双线性型空间（等价地，二次卡西米尔元空间）并非只有一维，这种移位的影响远不止改变整体归一化。

在附录 *A*中，我们讨论了 *Segal-Sugawara* 构造的推广形式，该形式适用于具有一般规范群 $\mathcal{N} = 4$ 的三维 G理论，其边界 *Kac–Moody* 代数对应于辛物质表示 T^*V（甚至是非阿贝尔的）。

4.2.2 非微扰完备化

通常认为，B 扭曲边界顶点算子代数会受到边界单极算子的非微扰修正。当 G 为非阿贝尔时，单极算子具有非零的上同调次数，因此预期这种修正会涉及非平凡的商代数，这类似于从 Kac-Moody 代数构造 WZW 代数的经典过程中出现的简单商。这些商代数尚未得到充分理解。相比之下，当 G为阿贝尔时，从边界反常多项式（4.2）可以很容易地看出，单极算子具有零上同调次数——这是因为不存在混合 $\mathbf{H}\cdot\mathbf{G}$ 项，将 $U(1)_H$ R 对称性与边界 G 对称性联系起来。因此，我们或许可以期待，在阿贝尔情形下，单极算子能够简单地扩张 Kac-Moody 代数 $\widehat{\mathfrak{g}_\rho}$。这里我们提出一种关于适当扩张的方案。

回顾第 4.1.2 节，边界单极算子 U_μ 由规范余特征标记 $\mu \in \mathbb{Z}^r$。对于每个 $\mu \in \mathbb{Z}^r$，我们预计单极算子具有如下形式：

$$\mathcal{U}_\mu(z) = :e^{\mu \cdot \int N(z)}: =: e^{\sum_a \mu^a \int N_a(z)}: \tag{4.12}$$

其中右侧是由以下对象的形式积分给出的顶点算子 N。（相同的形式积分也出现在海森堡代数的构造中，参见 $v = \int J$ 第2.3.1节。这里 N_a 生成一个双线性型为 $\rho^T\rho$ 的海森堡子代数。）该顶点算子满足

$$\begin{gathered} N_a(z)\mathcal{U}_\mu(w) \sim \frac{(\rho^T\rho\mu)_a}{z-w}\mathcal{U}_\mu(w)\,, \qquad E^a(z)\mathcal{U}_\mu(w) \sim \frac{\mu^a}{z-w}\mathcal{U}_\mu(w) \\ \psi^{i,\pm}(z)\mathcal{U}_\mu(w) \sim (z-w)^{\pm(\rho\mu)^i} :\psi^{i,\pm}(z)\mathcal{U}_\mu(w):\,, \end{gathered} \tag{4.13}$$

其中 $:\psi^{i,\pm}(z)\mathcal{U}_\mu(w):$ 表示 $:\psi^{i,\pm}\mathcal{U}_\mu:(w)+(z-w):\partial\psi^{i,\pm}\mathcal{U}_\mu:(w)+\frac{1}{2}(z-w)^2:\partial^2\psi^{i,\pm}\mathcal{U}_\mu:(w)$ $+\ldots$，其中对奇异算子乘积展开有贡献的项数取决于 $(\mu\rho)^i$。非微扰顶点算子代数应由 $\widehat{\mathfrak{g}}_\rho$ 连同所有 $\mu \in \mathbb{Z}^r$ 的 $\mathcal{U}_\mu$ 生成。

为给出精确的数学定义，我们引入 $\widehat{\mathfrak{g}}_\rho$ 的如下谱流自同构。对于满足 $\rho(\nu) \in \mathbb{Z}^n$ 的每个 μ，$\nu \in \mathbb{C}^r$，顶点算子代数 $\widehat{\mathfrak{g}}_\rho$ 具有如下自同构：

$$\sigma_{\mu,\nu}N_a(z) = N_a(z) - \frac{\mu_a}{z}, \qquad \sigma_{\mu,\nu}E_a(z) = E_a(z) - \frac{\nu_a}{z}, \qquad \sigma_{\mu,\nu}\psi^{i,\pm}(z) = z^{\mp\rho(\nu)_i}\psi^{i,\pm}. \tag{4.14}$$

不难看出，谱流自同构 $\sigma_{\mu,\,\nu}$ 与 $\mathfrak{gl}(1)$ Kac-Moody 对称性作用 $(\mu - \rho^\mathsf{T}\rho\nu)\cdot E(z) + \nu \cdot N(z)$ 相关（见第 2.4 节）。方程 (4.13) 中 $\widehat{\mathfrak{g}}_\rho$ 与 $\mathcal{U}_\mu$ 的算子乘积展开，体现为 $\widehat{\mathfrak{g}}_\rho$ 对 $\sigma_{\rho^\mathsf{T}\rho\mu,\,\mu}|0\rangle$ 的作用，其中 $|0\rangle$ 是真空模 $\widehat{\mathfrak{g}}_\rho$ 的真空向量：

$$\begin{gathered} N_a(z)\sigma_{\rho^\mathsf{T}\rho\mu,\mu}|0\rangle \sim \tfrac{(\rho^\mathsf{T}\rho\mu)_a}{z}\sigma_{\rho^\mathsf{T}\rho\mu,\mu}|0\rangle, \qquad E_a(z)\sigma_{\rho^\mathsf{T}\rho\mu,\mu}|0\rangle \sim \tfrac{\mu_a}{z}\sigma_{\rho^\mathsf{T}\rho\mu,\mu}|0\rangle \\ \psi^{i,\pm}(z)\sigma_{\rho^\mathsf{T}\rho\mu,\mu}|0\rangle = z^{\pm\rho(\mu)_i}\sigma_{\rho^\mathsf{T}\rho\mu,\mu}\psi^{i,\pm}(z)|0\rangle. \end{gathered} \tag{4.15}$$

这表明，对于每个 $\mu \in \mathbb{Z}^r$，我们应将 $\mathcal{U}_\mu$ 与真空向量的谱流相对应：

$$\mathcal{U}_\mu \leftrightarrow \sigma_{\rho^\mathsf{T}\rho\mu,\mu}|0\rangle. \tag{4.16}$$

这一谱流与 Kac-Moody 对称性相关联 $\mu \cdot N(z)$，正如方程（4.12）所示。

定义 $\mathbb{U}_\mu$ 为由 $\sigma_{\rho^\mathsf{T}\rho\mu,\,\mu}|0\rangle$ 生成的 $\widehat{\mathfrak{g}}_\rho$ 模，换句话说，the

真空模的谱流：

$$\mathbb{U}_\mu := \sigma_{\rho^\intercal \rho\mu,\mu}\mathbb{U}_0 = \sigma_{\rho^\intercal \rho\mu,\mu}\widehat{\mathfrak{g}}_\rho. \tag{4.17}$$

我们将在第 8 节的引理 8.22中证明，真空模 $\mathbb{U}_0$ 作为其自身的模是单的，[2] 因此所有的 $\mathbb{U}_\mu$ 都是单的。它们是第 2.4 节意义下的简单流，而 [Li97]的工作给出了以下融合规则：

$$\mathbb{U}_\mu \otimes_{\widehat{\mathfrak{g}}_\rho} \mathbb{U}_{\mu'} \cong \mathbb{U}_{\mu+\mu'}, \tag{4.18}$$

该规则由以下算子乘积展开实现：

$$\mathcal{U}_\mu(z)\mathcal{U}_{\mu'}(w) \sim (z-w)^{\mu\cdot\rho^T\rho\mu'}\mathcal{U}_{\mu+\mu'}(w) \tag{4.19}$$

在此表达式中，与 $\sigma_{\rho^\intercal \rho\mu,\mu}|0\rangle$ 关联的顶点算子恰好是 $\mathcal{U}_\mu$。若我们限制到 $\mu,\mu' \in \mathbb{Z}^r$，则上述算子乘积展开是局域的。因此，直和：

$$\bigoplus_{\mu\in\mathbb{Z}^r} \mathbb{U}_\mu \tag{4.20}$$

具有顶点算子代数的结构，且与 $\sigma_{\rho^\intercal \rho\mu,\mu}|0\rangle$ 关联的顶点算子就是 $\mathcal{U}_\mu$。我们提出，非微扰边界顶点算子代数由以下扩张给出：

定义 4.1。令 $\mathcal{V}_\rho^B := \bigoplus_{\mu\in\mathbb{Z}^r}\mathbb{U}_\mu$ 表示由所有模 $\mathbb{U}_\mu$ 扩张 $\widehat{\mathfrak{g}}_\rho$ 所得的代数。

对 $\mathcal{V}_\rho^B$在 B 扭曲下作为正确边界顶点算子代数的最有力论证将在第（4.4）节给出，我们将在那里证明镜像理论的边界顶点算子代数之间存在等价 $\mathcal{V}_\rho^B \cong \mathcal{V}_{\rho^\vee}^A$。不过，我们也可以给出一种更直观的物理解释。

回顾一下，在一种无物质场的三维 $\mathcal{N}=4$ $U(1)$ 阿贝尔规范理论中，半 BPS 单极算符可以用对偶光子场 γ 和矢量多重态标量 σ [SW96，IS96]，

$$U_\mu = e^{i\mu(\gamma+i\sigma)} \qquad (\mu\in\mathbb{Z})\,. \tag{4.21}$$

对偶光子满足 $d\gamma = *dF$，而 ∂_z 的导数 $\gamma+i\sigma$ 恰好是组合$F_{zt}+i\partial_z\sigma$，其边界值定义了场 $N(z)$。这表明，至少在没有物质场的情况下，（4.12）定义了边界顶点算子代数中的单极算符。

我们还可以考察整体对称性的作用。由（4.11）和（4.13）可知

[2]这也是第 4.3 节自由场实现的推论，尤其是命题 4.2。

顶点算子 $\mathcal{U}_\mu$ 在（假定的） T_{top} 拓扑对称性下的荷为 μ ，其流为 E；在边界 G 对称性下的荷为 $\rho^T\rho\mu$ 。此外，利用（4.10）可得，其共形权为 $\frac{1}{2}|\rho\mu|^2$。这一切都与（4.5）中单极算子的预期荷完全吻合。 –

4.3 自由场实现

接下来，我们介绍 Kac-Moody 代数 $\widehat{\mathfrak{g}_\rho}$ 及其扩张 $\mathcal{V}_\rho^B$的自由场实现。自由场实现将使我们更容易分析该扩张，因为其中会涉及更标准的福克模。此外，这也将使我们能够在下一节证明边界顶点算子代数的三维镜像对称。

令 $H_{X,\ Y,\ Z}$表示与 $2r+n$维向量空间相关联的海森堡顶点算子代数，该空间以 $\{X_a, Y^a, Z^i\}$为基，其中 $a=1,\ \ldots\ldots,\ r$以及 $i=1,\ \ldots\ldots,\ n$，其双线性型为

$$B(X_a, Y^b) = \delta^b{}_a\,, \qquad B(Z^i, Z^j) = \delta^{ij}\,. \tag{4.22}$$

Let

$$\mathcal{V}_Z = \bigoplus_{\lambda\in\mathbb{Z}^n} \mathcal{F}^{X,Y,Z}_{\lambda\cdot Z} \tag{4.23}$$

表示通过添加由 $:e^{\lambda Z}:$ 生成的福克模（对所有 $\lambda\in\mathbb{Z}^r$）对 $H_{X,\ Y,\ Z}$进行扩张后得到的格点顶点算子代数。以下赋值：

$$\begin{aligned}
&N_a \mapsto \partial X_a + \sum_i \rho_{ia}\partial Z^i\,,\\
&E^a \mapsto \partial Y^a\,,\\
&\psi^{i,+}(z) \mapsto :e^{Z^i}:\,,\\
&\psi^{i,-} \mapsto :\sum_i \rho^i{}_a \partial Y^a e^{-Z^i}: + :\partial e^{-Z^i}:
\end{aligned} \tag{4.24}$$

定义了从 Kac-Moody 顶点算子代数 $\widehat{\mathfrak{g}_\rho}$ 到格点顶点算子代数 $\mathcal{V}_Z$的一个嵌入。

为了用自由场代数来表示共形元，我们先从涉及 N 和 E的项开始：

$$\frac{1}{2}\left(\sum :N_aE^a: + :E^aN_a:\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_a :\partial X_a\partial Y^a: + :\partial Y^a\partial X_a:\right) + \sum_{ia}\rho_{ia}\partial Z^i\partial Y^a. \tag{4.25}$$

现在对于 $\psi^{i,\ \pm}$，我们首先有：

$$\frac{1}{2}\sum_i\left(:e^{Z^i}\partial e^{-Z^i}: - :\partial e^{-Z^i}e^{Z^i}:\right) = -\frac{1}{2}\left(\sum_i :\partial Z_i\partial Z^i: - :\partial^2 Z_i:\right) \tag{4.26}$$

这由算子乘积展开推出：

$$e^{Z(z)}e^{-Z(w)} = \frac{1}{z-w} + \partial Z(w) + (z-w)(\frac{1}{2}\partial^2 Z(w) + \frac{1}{2} :\partial Z(w)\partial Z(w):) + \cdots . \tag{4.27}$$

使用相同的算子乘积展开，我们可以计算：

$$\frac{1}{2}\sum_{i,a}\Big(:e^{Z^i}\rho_{ia}\partial Y^a e^{-Z^i}: - :\rho_{ia}\partial Y^a e^{-Z^i}e^{Z^i}:\Big) = \sum_{ia}\rho_{ia}\partial Z^i\partial Y^a - \sum_{i,a}\rho_{ia}\partial^2 Y^a. \tag{4.28}$$

Comb综合所有这些结果，可以发现 $\widehat{\mathfrak{g}}_\rho$ 的应力张量具有以下形式：

$$\frac{1}{2}\Big(:\sum_a(\partial X_a\partial Y^a + \partial Y^a\partial X_a) + \sum_i(\partial Z^i)(\partial Z_i):\Big) + \frac{1}{2}\sum_i\Big(\sum_a\rho_{ia}\partial^2 Y^a - \partial^2 Z_i\Big). \tag{4.29}$$

例。 当 $\rho = (1)$ 时，我们得到自由场实现：

$$\begin{aligned} &N \mapsto \partial X + \partial Z\,, \qquad E \mapsto \partial Y \\ &\psi^+ \mapsto :e^Z:\,, \qquad \psi^- \mapsto :\partial Y e^{-Z}: + :\partial e^{-Z}:\,. \end{aligned} \tag{4.30}$$

这正是仿射 $\mathfrak{gl}(1|1)$ 的自由场实现，用于 *[CGN20]*, ，若我们将 N 平移 $-E/2$。

我们希望将这个嵌入识别为筛算子的核。回顾一下，格点顶点算子代数 $\mathcal{V}_Z$ 具有福克模。

$$\mathcal{V}_{Z,\mu X+\nu Y} = \bigoplus_{\lambda\in\mathbb{Z}^n}\mathcal{F}^{X,Y,Z}_{\mu\cdot X+\nu\cdot Y+\lambda\cdot Z} \tag{4.31}$$

由 μ、$\nu \in \mathbb{C}^r$ 标记，从海森堡顶点算子代数 $H_{X、Y、Z}$ 的福克模提升而来。当$\rho(\mu) \in \mathbb{Z}^n$ 时，定义交织算子 $S^i(z)$：$\mathcal{V}_{Z、\mu X+\nu Y} \to \mathcal{V}_{Z、\mu X+\nu Y-(\rho Y)^i}((z))$，其定义为

$$S^i(z) =: e^{Z^i(z) - \sum_a \rho^i{}_a Y^a(z)}:\,, \tag{4.32}$$

对应的筛选荷为 $S^i_0 = \frac{1}{2\pi i}\oint S^i(z)\,dz$。注意，只有当 $\rho(\mu) \in \mathbb{Z}^n$ 时，这一定义才是良好的，因为这确保了 S^i 具有整数模。我们声称

命题 4.2。 嵌入 $\widehat{\mathfrak{g}}_\rho \hookrightarrow \mathcal{V}_Z$ 的像是筛选荷的核：

$$\widehat{\mathfrak{g}}_\rho \cong \bigcap_{i=1}^n \ker S^i_0\big|_{\mathcal{V}_Z}\,. \tag{4.33}$$

假设这一结果成立（我们马上就会证明），进一步确定与非微扰边界顶点算子代数对应的扩张就很容易了。 N 的形式积分

在（4.12）中出现的量现在被确定为 $X+\rho Z$，其对应的顶点算子为

$$\mathcal{U}_\mu^{\text{free}} = :e^{\mu\cdot(X+\rho^T Z)}: . \tag{4.34}$$

可以验证，这确实满足方程（4.13）和（4.19）中的算子乘积展开。筛选算子 $S^i(z)$ 与 $\mathcal{U}_\mu^{\text{free}}$ 对易，因为内积 $B(X_a+(\rho^T Z)_a,\ Z^i-(\rho Y)^i) = -\rho_{ia}+\rho_{ia}=0$。因此，$\mathcal{U}_\mu^{\text{free}}$属于筛选荷的核，并且用 $\mathcal{U}_\mu^{\text{free}}$生成的模扩张$\mathcal{V}_Z$ 在取核后仍然成立：

$$\begin{aligned}\widehat{\mathfrak{g}_\rho} \text{ extended by } \mathcal{U}_\mu\text{'s} &= (\text{kernel of } S\text{'s on } \mathcal{V}_Z) \text{ extended by } \mathcal{U}_\mu\text{'s} \\ &\cong \text{kernel of } S\text{'s on } (\mathcal{V}_Z \text{ extended by } \mathcal{U}_\mu^{\text{free}}\text{'s}) .\end{aligned} \tag{4.35}$$

具体而言，令

$$\mathcal{V}_{Z,\mu\cdot(X+\rho^T Z)} = \bigoplus_{\lambda\in\mathbb{Z}^n} \mathcal{F}^{X,Y,Z}_{\mu\cdot(X+\rho^T Z)+\lambda\cdot Z} \tag{4.36}$$

为由 $\mathcal{U}_{\text{自由}\mu}$ 生成的 $\mathcal{V}_Z$模。由于 $\bigoplus_{\lambda\in\mathbb{Z}^n}\mathcal{F}^{X,\ Y,\ Z(\mu\cdot(X+\rho^T Z)+\lambda\cdot Z} \cong \bigoplus_{\lambda\in\mathbb{Z}^n}\mathcal{F}^{X,\ YZ,\ \mu\cdot X+\lambda\cdot Z}$，，我们有 $\mathcal{V}_{Z,\ \mu\cdot(X+\rho^T Z)} \cong \mathcal{V}_{Z,\ \mu\cdot X}$。记

$$\mathcal{V}_{X,Z} := \bigoplus_{\mu\in\mathbb{Z}^r} \mathcal{V}_{Z,\mu\cdot X} \cong \bigoplus_{\substack{\mu\in\mathbb{Z}^r\\ \lambda\in\mathbb{Z}^n}} \mathcal{F}^{X,Y,Z}_{\mu\cdot X+\lambda\cdot Z} \tag{4.37}$$

由 X 格和 Z 格对$H_{X,\ Y,\ Z}$ 作出的完整整数值格扩张。我们得到

推论 4.3。 定义 *4.1* 中的非微扰边界顶点算子代数具有自由场实现

$$\mathcal{V}_\rho^B \cong \bigcap_{i=1}^n \ker S_0^i\big|_{\mathcal{V}_{X,Z}} \tag{4.38}$$

证明。 如上所示，通过将 $\mathcal{U}_\mu$ 映射到 $\mathcal{U}_\mu^{\text{free}}$，我们得到一个从 $\mathcal{V}_\rho^B$到 $\mathcal{V}_{X\text{的映射},\ Z}$其像包含于所有 S_0^i的核中。由于所有 $\mathbb{U}_\mu$ 作为 $\widehat{\mathfrak{g}_\rho}$ 模都是单的，该映射是单射；根据 [Ada03、CRW13]，，该映射是满射：

$$\bigcap_i \mathrm{Ker} S_0^i\big|_{\mathcal{V}_{Z,\mu\cdot(X+\rho^{\mathsf{T}} Z)}} \tag{4.39}$$

也是$\bigcap_i \mathrm{Ker} S_0^i\big|_{\mathcal{V}_Z} = \widehat{\mathfrak{g}_\rho}$ 的一个简单模。证毕。

□

4.3.1 自由场对称性

将 $\mathcal{V}_\rho^B$的对称性/流转换为自由场实现是直接的。 G流当然是 $N = \partial X + \rho^T \partial Z$；而（所提出的） T_{top}流是 $E = \partial Y$。应力张量已在（4.29）中确定。 G、 T_{top}和 T_F 在每个福克模 $\mathcal{F}_{\mu\cdot X+\lambda\cdot Z}$ 上的电荷为

$$G: \ \rho^T\lambda\,, \qquad T_{\text{top}}: \ \mu\,, \qquad T_F: \ \sigma^T\lambda\,. \tag{4.40}$$

特别地，边界单极算子的荷 $\mathcal{U}_\mu^{\text{free}}$为 $\rho^T\rho\mu$， μ和 $\sigma^T\rho\mu$，与（4.5）一致。

4.3.2 命题4.2的证明

首先，容易验证映射 $\widehat{\mathfrak{g}_\rho} \to \mathcal{V}_Z$ 属于 S_0^i 的核，对所有 i均成立。该映射是一个嵌入，这是因为 $\widehat{\mathfrak{g}_\rho}$ 作为自身的模是单的；这一点将在第 8 节引理 8.22 中证明。为了证明它是同构，我们将比较特征。

对于任意表示 R of $G = U(1)^r$ （其权为 $N_{a,\,0} \in \mathbb{Z}$）以及 Spin(2)（其共形权重为 $L_0 \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$），令

$$\chi(R) := \mathrm{Tr}_R\, s^{N_0} q^{L_0} = \mathrm{Tr}_R\, s_1^{N_{1,0}} s_2^{N_{2,0}} \cdots s_r^{N_{r,0}} q^{L_0} \tag{4.41}$$

其中 s_a和 $q^{\frac{1}{2}}$是形式变量。显然，当 $R = \widehat{\mathfrak{g}_\rho}$或 $R = \mathcal{V}_Z$时，L_0 的权有下界，且每个 L_0 权空间都是有限维的，因此 $\chi(R) \in \mathbb{Z}((q^{\frac{1}{2}}))[s, s^{-1}]$。这个特征显然是正的，因此，如果 R和 R'满足有界性和有限性假设，且 $\chi(R) = \chi(R')$，那么 $R \simeq R'$ 作为向量空间同构。因此，若存在嵌入 $R \hookrightarrow R'$，则它是向量空间同构。

因此，为完成证明，我们只需证明这些特征相同：

$$\chi(\widehat{\mathfrak{g}_\rho}) = \chi(\mathrm{Ker} \bigcap_i S_0^i\big|_{\mathcal{V}_Z}). \tag{4.42}$$

定义 Pochhammer 符号

$$(\alpha; q)_\infty := \prod_{n=0}^{\infty}(1 - q^n\alpha)\,, \qquad (\alpha_1, ..., \alpha_k; q)_\infty := \prod_{i=1}^{k}(\alpha_i; q)_\infty\,. \tag{4.43}$$

那么， $\widehat{\mathfrak{g}}_\rho$ 的特征就是

$$\chi(\widehat{\mathfrak{g}_\rho}) \;=\; \frac{1}{(q;q)_\infty^{2r}} \prod_{i=1}^{n} \Big(-q \prod_a s_a^{\rho^i{}_a}, -q \prod_a s_a^{-\rho^i{}_a}; q \Big)_\infty . \tag{4.44}$$

接下来，我们想计算 S_0^i 在 $\mathcal{V}_Z$上的核的特征。我们将通过引入一种滤过来（示意性地）完成此计算；该滤过的关联分次使 X 和 Y 变为交换的，同时保持特征不变。

令 $U(\mathcal{V}_Z)$ 表示 $\mathcal{V}_Z$的模代数。根据玻色-费米对应，它具有如下形式

$$U(\mathcal{V}_Z) = \mathbb{C}[x_{a,k}, y_k^a]_{1\le a\le n}^{k\in\mathbb{Z}} \otimes U(\mathcal{V}_{bc}^{\otimes n}) , \tag{4.45}$$

其中 $x_{a,\ k}$ 和 y_k^a 分别是 $\partial X(z)$和 $\partial Y(z)$的模，它们是非交换的；而 H_Z 的完整格扩张已对偶化为 n 个自由费米子。定义滤过

$$U(\mathcal{V}_Z) = \bigcup_{d=0}^{\infty} F_d U(\mathcal{V}_Z) \tag{4.46}$$

其中

$$F_d U(\mathcal{V}_Z) = \bigcup_{f\le d} \mathrm{Span}\{x_{a_1,k_1}\cdots x_{a_f,k_f} y_*^*\} U(\mathcal{V}_{bc}^{\otimes n}) . \tag{4.47}$$

换言之， $F_dU(\mathcal{V}_Z)$由这样的字生成：其中至多包含 d个 X的模，后面跟着任意（可能为零个）Y的模。其关联分次为

$$\mathrm{Gr}_* FU(\mathcal{V}_Z) = \mathbb{C}[x_{a,k}, y_k^a] \otimes U(\mathcal{V}_{bc}^{\otimes n}) . \tag{4.48}$$

其中所有的 x和 y现在都交换。对于每个 $\mu\in\mathbb{Z}^r$，作为 $U(\mathcal{V}_Z)$模的模$\mathcal{V}_{Z,\ \mu\cdot Y}$也带有相应的滤过。在关联分次中，我们有

$$\mathrm{Gr}_* F\mathcal{V}_{Z,\mu\cdot Y} \cong \mathrm{Gr}_* F\mathcal{V}_{Z,0} = \mathbb{C}[x_{a,k}, y_k^a]_{k<0} \otimes \mathcal{V}_{bc}^{\otimes n} , \tag{4.49}$$

并且显然　　自然映射 $\mathcal{V}_{Z,\ \mu\cdot Y} \to \mathrm{Gr}_* F\mathcal{V}_{Z,\ \mu\cdot Y}$是向量空间的同构　　.

此外，由于 S_0^i 不包含 X 场，它们的作用保持模代数和模上的滤过。因此，该图表

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V}_Z & \xrightarrow{\ S^i\ } & V_{\mathcal{Z},-(\rho Y)^i} \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \mathrm{Gr}_* F\mathcal{V}_Z & & \mathrm{Gr}_* F\mathcal{V}_Z \end{array} \tag{4.50}$$

可以补全为一个图表

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V}_Z & \xrightarrow{S^i} & V_{\mathcal{Z},-(\rho Y)^i} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Gr}_* F\mathcal{V}_Z & \xrightarrow{\overline{S}^i} & \mathrm{Gr}_* F\mathcal{V}_Z \end{array} \tag{4.51}$$

容易验证， S^i 可表示为:

$$\overline{S}^i = \frac{1}{2\pi i}\oint \mathrm{d}z\, e^{-\sum_i \rho^i{}_a Y^a} :e^{Z^i}: \tag{4.52}$$

此时， Y 的模与 X的模交换。由蛇引理，诱导映射:

$$\bigcap_i \mathrm{Ker}(S^i) \to \bigcap_i \mathrm{Ker}(\overline{S}^i) \tag{4.53}$$

是一个向量空间同构。

取关联分次的过程还保留了共形分级和G 分级（由$N_{a,\ 0}$），因为嵌入$F_d V_{\mathcal{Z},\ \mu} \subseteq F_{d+1}V_{\mathcal{Z},\ \mu}$ 是向量空间的分次嵌入。核 $\bigcap_i \mathrm{Ker}(S^i)$可以很容易地确定：

$$\mathbb{C}[x_{a,k}, y^a_k]_{k<0} \otimes \mathcal{V}_{SF}^{\otimes n}\,, \tag{4.54}$$

因为 S^i 的核可以很容易地与 $\oint \mathrm{d}z :e^{Z^i}:$的核等同。定义中的部分$e^{-\sum_i \rho^i{}_a Y^a}$ 与关联分次中的所有元素都交换。 $\mathbb{C}[x_{a,k}, y^a_k]_{k<0}$的特征为（$q$； q）$^{-2r}_{\infty}$，因为 x和 y是共形权为 $-k$ 且在 G 下不带电荷的自由交换变量。 n 辛费米子$\mathcal{V}_{SF}^{\otimes n}$ 在 G的表示 T^*V下变换，其特征为 $\prod_{i=1}^{n}\left(-q\prod_a s_a^{\rho^i{}_a}, -q\prod_a s_a^{-\rho^i{}_a};\ q\right)_\infty$。因此，（4.54）的特征与方程（4.44）一致。证毕。

4.4 边界顶点算子代数的镜像对称性

现在我们可以利用自由场实现来证明论文的第一个主要结果。

定理 4.4. 给定一对简单的阿贝尔 $\mathcal{N}=4$ 规范理论 $\mathcal{T}_\rho$、 $\mathcal{T}_{\rho^\vee}$， 它们互为三维镜像，则 $\mathcal{T}_\rho$ 的 A 扭曲边界顶点算子代数与 $\mathcal{T}_{\rho^\vee}$的 B扭曲边界顶点算子代数同构，

$$\mathcal{V}^A_\rho \cong \mathcal{V}^B_{\rho^\vee}\,. \tag{4.55}$$

此外，这个同构保留应力张量（共形元），将 (3.14)映射到 (4.10)；将 $T_F \times T_B = U(1)^{2(n-r)}$ 的 *Kac-Moody* 流映射到 $\mathcal{V}^A_\rho$ 的 $T_{\mathrm{top}} \times G$ *Kac-*

Moody 流映射到 $\mathcal{V}^B_{\rho^\vee}$；并将 $\mathcal{T}^A_\rho$ 的有限 $T_{\rm top}=U(1)^r$ 对称性映射到 $\mathcal{T}^B_{\rho^\vee}$ 的有限 T_F 对称性。

证明。考虑第 $\mathcal{T}^B_{\rho^\vee}$ 节中的自由场实现 4.3，将 ρ 替换为$\rho^\vee$。自由场实现从海森堡代数 H_X、$_Y$、$_Z$ 开始，其基向量为$\{X_\alpha, Y^\alpha, Z^i\}$，对应于 $1\le\alpha\le n-r$，$1\le i\le n$配备双线性型

$$B(X_\alpha, Y^\beta)=\delta_\alpha{}^\beta\,,\qquad (Z^i,Z^j)=\delta^{ij}\,. \tag{4.56}$$

注意到，该海森堡代数与 H_ϕ、$_\eta$、$_\theta$ 同构，其基向量为 $\{\phi^i,\eta^\alpha,\theta^\alpha\}$，对应于$1\le\alpha\le n-r$，$1\le i\le n$，并配备双线性型

$$B(\phi^i,\phi^j)=\delta^{ij}\,,\qquad B(\theta^\alpha,\theta^\beta)=-B(\eta^\alpha,\eta^\beta)=(\rho^{\vee\mathsf{T}}\rho^\vee)^{\alpha\beta}\,, \tag{4.57}$$

在以下基变换下

$$\phi=Z-\rho^\vee Y\,,\qquad \theta=X+\rho^{\vee\mathsf{T}}Z\,,\qquad \eta=-X+\rho^{\vee\mathsf{T}}\rho^\vee Y-\rho^{\vee\mathsf{T}}Z\,, \tag{4.58}$$

其逆变换为

$$X=-\eta-\rho^{\vee\mathsf{T}}\phi\,,\qquad Y=(\rho^{\vee\mathsf{T}}\rho^\vee)^{-1}(\theta+\eta)\,,\qquad Z=\phi+\rho^\vee(\rho^{\vee\mathsf{T}}\rho^\vee)^{-1}(\theta+\eta)\,. \tag{4.59}$$

现在我们的计划是，将用于构造 $\mathcal{T}^B_{\rho^\vee}$ 的自由场实现的步骤应用于 H_ϕ、$_\eta$、$_\theta$，而不是应用于 H_X、$_Y$、$_Z$，从而显然地恢复 $\mathcal{T}^A_\rho$的自由场实现。

B-扭曲自由场实现的下一步是通过福克模 $\mathcal{F}_{\tilde\mu\cdot Z}$扩张 $\tilde\mu\in\mathbb{Z}^n$。正如第 3.3.1 节和 3.3.2节中一样，我们对这个格使用正交分解，将 $\mathbb{Z}^n$ 中的每个元素唯一地写成

$$\tilde\mu=\rho(\mu)+\rho^\vee(\mu^\vee)\in\mathbb{Z}^n\quad\text{for }\mu\in N\,,\quad \mu^\vee\in N^\vee\,,\quad [\mu]=[\mu^\vee]\in H\,, \tag{4.60}$$

回顾 N，$N^\vee$是 $\mathbb{Z}^r$的有理精细化，$\mathbb{Z}^{n-r}$其中 $N/\mathbb{Z}^r\simeq H\simeq N^\vee/\mathbb{Z}^{n-r}$。由（4.59）以及 ρ和 $\rho^\vee$的正交性，可得

$$\tilde\mu\cdot Z=(\rho(\mu)+\rho^\vee(\mu^\vee))\cdot Z=(\rho(\mu)+\rho^\vee(\mu^\vee))\cdot\phi+\mu^\vee\cdot(\theta+\eta)\,. \tag{4.61}$$

因此，

$$\mathcal{V}_Z\bigoplus_{\tilde\mu\in\mathbb{Z}^n}\mathcal{F}^{X,Y,Z}_{\tilde\mu\cdot Z}\cong\bigoplus_{\substack{\mu\in N,\,\mu^\vee\in N^\vee\\ [\mu]=[\mu^\vee]}}\mathcal{F}^{\phi}_{(\rho(\mu)+\rho^\vee(\mu^\vee))\cdot\phi}\otimes\mathcal{F}^{\eta}_{\mu^\vee\cdot\eta}\otimes\mathcal{F}^{\theta}_{\mu^\vee\cdot\theta}\,. \tag{4.62}$$

在新变量下，(4.32) 中的筛选算子简单地为 $S^i=:e^{(Z-\rho^\vee Y)^i}:=:e^{\phi^i}$。

取它们的核并使用命题4.2，我们得到

$$\widehat{\mathfrak{g}_{\rho^\vee}} \cong \bigoplus_{\substack{\mu\in N,\, \mu^\vee\in N^\vee \\ [\mu]=[\mu^\vee]}} M^{\phi}_{(\rho(\mu)+\rho^\vee(\mu^\vee))\cdot\phi} \otimes \mathcal{F}^{\eta}_{\mu^\vee\cdot\eta} \otimes \mathcal{F}^{\theta}_{\mu^\vee\cdot\theta}\,. \tag{4.63}$$

最后，我们通过单极算子进行扩展，它们是福克模 $\mathcal{F}_{m\cdot(X+\rho^{\vee\intercal}Z)} = \mathcal{F}_{m\cdot\theta}$ 对于 $m\in\mathbb{Z}^{n-r}$。根据推论 4.3，我们有

$$\mathcal{V}^B_{\rho^\vee} \cong \bigoplus_{\substack{\mu\in N,\, \mu^\vee\in N^\vee,\, m\in\mathbb{Z}^{n-r} \\ [\mu]=[\mu^\vee]}} M^{\phi}_{(\rho(\mu)+\rho^\vee(\mu^\vee))\cdot\phi} \otimes \mathcal{F}^{\eta}_{\mu^\vee\cdot\eta} \otimes \mathcal{F}^{\theta}_{(m+\mu^\vee)\cdot\theta}\,. \tag{4.64}$$

定义移位后的求和变量 $\lambda^\vee = m+\mu^\vee$，我们可以将其改写为

$$\mathcal{V}^B_{\rho^\vee} \cong \bigoplus_{\substack{\mu\in N,\, \mu^\vee,\lambda^\vee\in N^\vee \\ [\mu]=[\mu^\vee]=[\lambda^\vee]}} M^{\phi}_{(\rho(\mu)+\rho^\vee(\mu^\vee))\cdot\phi} \otimes \mathcal{F}^{\eta}_{\mu^\vee\cdot\eta} \otimes \mathcal{F}^{\theta}_{\lambda^\vee\cdot\theta}\,, \tag{4.65}$$

显然等价于 $\mathcal{V}^A_\rho$命题3.2 中的自由场实现（重标记 η，$\theta\mapsto\eta_\perp$，$\theta_\perp$之后）。

我们还必须论证，A 和 B 顶点算子代数的各种对称性如预期般在三维镜像对称下相匹配。这相对直接，因为我们已经分别描述了 A 的自由场实现（第 3.3.4 节）和 B 的自由场实现（第 4.3.1 节）中的这些对称性。

为了匹配共形元，我们首先使用 X_α，Y_α 和 Z^i 利用 ϕ^i，θ_α 和 η_α，并使用第 Π节中的矩阵 $\Pi^\perp$ （3.3.4）将其改写如下：

$$\begin{aligned} Z_i &= \phi_i + \sum_\alpha \Pi^\perp_{i\alpha}(\theta^\alpha+\eta^\alpha) \\ X_\alpha &= -\eta^\alpha - \sum (\rho^\vee)_{i\alpha}\phi^i \\ Y_\alpha &= \sum_{i,\beta} \Pi^\perp_{i\alpha}\Pi^{\perp,i}{}_\beta(\theta^\beta+\eta^\beta) \end{aligned} \tag{4.66}$$

这与公式（4.59）一致，因为 $\Pi^\perp\Pi^\perp,\intercal$ 是 $\rho^{\vee\intercal}\rho^\vee$的逆元。现在我们可以改写公式（4.29）中的共形元。首先，我们有：

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sum_\alpha (:\partial X_\alpha \partial Y^\alpha: + :\partial Y^\alpha \partial X_\alpha:) = &- \sum_{\alpha,\beta,i} \Pi^\perp_{i\alpha}\Pi^{\perp,i}{}_\beta :\partial\eta^\alpha\partial\eta^\beta: - \sum_{\alpha,\beta,i} \Pi^\perp_{i\alpha}\Pi^{\perp,i}{}_\beta :\partial\eta^\alpha\partial\theta^\beta: \\ &- \sum_{i,\alpha,j,\beta} (\rho^\vee)_i{}^\alpha \Pi^\perp_{j\alpha}\Pi^{\perp,j}{}_\beta :\partial\phi^i(\partial\theta^\beta+\partial\eta^\beta): \end{aligned} \tag{4.67}$$

第二部分为:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sum_i :\partial Z_i \partial Z^i: =& \frac{1}{2}\sum_i :\partial\phi_i\partial\phi^i: + \sum_i \Pi^{\perp}_{i\alpha} :\partial\phi^i(\partial\theta^\alpha+\partial\eta^\alpha): \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{i,\alpha,\beta}\Pi^{\perp}_{i\alpha}\Pi^{\perp,i}{}_{\beta} :(\partial\theta^\alpha+\partial\eta^\alpha)(\partial\theta^\beta+\partial\eta^\beta): .\end{aligned} \tag{4.68}$$

如果将这些项与 $\frac{1}{2}\sum_{i,\alpha}\rho^\vee_{i\alpha}\partial^2 Y^\alpha - \partial^2 Z_i$ 相加，并利用 $\rho^\vee(\Pi^\perp)^{\mathsf{T}}\Pi^\perp = \Pi^\perp$，那么我们就可以消去总和中的许多项，得到以下表达式:

$$\frac{1}{2}\sum_i\left(:\partial\phi^i\partial\phi_i: - \partial^2\phi^i - \sum_{\alpha,\beta}\Pi^{\perp\alpha}_i\Pi^{\perp,i\beta} :\partial\eta_\alpha\partial\eta_\beta: + \sum_{\alpha,\beta}\Pi^{\perp\alpha}_i\Pi^{\perp,i\beta} :\partial\theta_\alpha\partial\theta_\beta:\right). \tag{4.69}$$

这与方程（3.67）完全吻合。因此，上述同构保持了这两个顶点算子代数的应力张量。

A 侧的边界 Kac-Moody 对称性 $T_B = U(1)^{n-r}$ 具有流 $\partial\theta$，来自（3.57）。利用（4.58），这对应于 $\partial X + \rho^{\vee\mathsf{T}}\partial Z$，位于 B 侧，而这正是 T_G 的正确流。

A 侧的 Kac-Moody 对称性 $T_F = U(1)^{n-r}$ 具有流 $(\rho^{\vee\mathsf{T}}\rho^\vee)^{-1}(\partial\eta+\partial\theta)$，由 (3.58) 给出。利用 (4.59)，这变为 B 侧自由场实现中的流 ∂Y，它是 T_{top} 的流。

最后，A 侧的有限对称性 $T_{\text{top}} = U(1)^r$ 为 $\mathbb{Z}^r$ 顶点算子代数赋予了分级$\mathcal{V}^A_\rho$；在 $\mathcal{V}^A_\rho$的自由场实现中，每个加项的 T_{top}权由 $\mu+\sigma^{\vee\mathsf{T}}\rho^\vee\lambda^\vee$给出，如（3.60）所示。在移位求和（4.64）中，取 $\lambda^\vee = m+\mu^\vee$时，这就变为

$$\mu+\sigma^{\vee\mathsf{T}}\rho^\vee(m+\mu^\vee) = \sigma^{\vee\mathsf{T}}(\rho\mu+\rho^\vee\mu^\vee)+\sigma^{\vee\mathsf{T}}\rho^\vee m = \sigma^{\vee\mathsf{T}}\tilde{\mu}+\sigma^{\vee\mathsf{T}}\rho^\vee m\,. \tag{4.70}$$

让我们将其与 B 侧的（4.40）进行比较，该式指出，在 $\mathcal{V}^B_{\rho^\vee}$ 的自由场实现中，福克模 $\mathcal{F}_{a\cdot X+b\cdot Z}$ 的 T_F 权应当就是 $\sigma^{\vee\mathsf{T}}b$。两者完全吻合；注意，（4.64）中的福克模里，“b”这一 Z 权有两个来源： $\mathcal{F}_{\tilde{\mu}\cdot Z}$ 模的初始扩张；以及通过单极算子进行的后续扩张 $\mathcal{F}_{m\cdot(X+\rho^{\vee\mathsf{T}}Z)}$。换言之，第一部分是微扰顶点算子代数中 ψ^i、$^\pm$ 场的权，第二部分则来自具有非平凡味电荷的单极算子。□

例。当 $\rho = 0$ 和 $\rho^\vee = (1)$（一个自由超多重态）时，*A* 扭曲的顶点算子代数 $\mathcal{V}^A_\rho$ 等于 $\mathcal{V}_{\beta\gamma}\otimes\mathcal{V}_{bc}$。镜像理论具有 $\rho = (1)$（含一个超多重态的 *SQED*），其 *B* 扭曲的顶点算子代数 $\mathcal{V}^B_{\rho^\vee}$ 是 $\widehat{\mathfrak{gl}\,1|1}()$的简单流扩张。该扩张恰好是

在 *[CR11b]*中研究的同一个。用 X, Y, Z 第*4.3*节中使用的自由场实现来表示，该扩张对应于福克模 $\mathcal{F}_{nX}$ （对应于 $n \in \mathbb{Z}$）。

例。考虑 $\rho = (1,\ 1)^{\mathsf{T}}$ 和 $\rho^\vee = (1,\ -1)^{\mathsf{T}}$。我们在$\mathcal{V}_\rho^A$ 的(3.56)中描述了其中一些生成元。定理 *4.4* 指出，$\mathcal{V}_\rho^A$ 也可以实现为 ***Kac-Moody*** 超代数 $\widehat{\mathfrak{g}_{\rho^\vee}}$的扩张。我们可以明确写出生成元的映射：

$$\begin{aligned} N &\mapsto :b^1c^1: - :b^2c^2: \\ \psi^{1,+} &\mapsto \beta^1 b^1\,, \quad \psi^{2,+} \mapsto \beta^2 b^2 \\ \psi^{1,-} &\mapsto -\gamma^1 c^1\,, \quad \psi^{2,-} \mapsto -\gamma^2 c^2 \\ E &\mapsto (:b^1c^1: - :\beta^1\gamma^1:) \end{aligned} \tag{4.71}$$

$\widehat{\mathfrak{g}_{\rho^\vee}}$ 中的大多数关系在此映射下都得以保留，只有一个例外。我们预期

$$\psi^{2,+}(z)\psi^{2,-}(w) \sim \frac{1}{(z-w)^2} - \frac{E(w)}{z-w}\,, \tag{4.72}$$

但从(4.71) 的右端得到的却是

$$\psi^{2,+}(z)\psi^{2,-}(w) \sim \frac{1}{(z-w)^2} + \frac{:b^2c^2: - :\beta^2\gamma^2:}{z-w}\,. \tag{4.73}$$

一阶极点的差异只是 ***BRST*** 流 $J = -:\ b^1c^1:\ \ +:\ \beta^1\gamma^1:\ -:\ b^2c^2:\ \ +:\ \beta^2\gamma^2:$，它在 $\mathcal{V}_\rho^A$ 中是 Q-恰当的。我们还注意到，$\mathcal{V}_{\rho^\vee}^B$中电荷为 ± 1 的边界单极算子（它们生成非微扰扩张）对应于 $\mathcal{V}_\rho^A$中的$\beta^1 b^2$ 和 $\gamma^1 c^2$ 。

5 个通过规范化与去规范化得到的 Morita 等价的 VOA

在本文余下部分，我们将把重点从边界顶点算子代数本身转向其模的编织张量范畴。研究编织张量范畴的一种强大方法，源自对作用于这些范畴的各种对称性进行规范化与去规范化——也称为等变化与去等变化。这些思想可追溯至 20 世纪 80 年代末关于共形场论和弦理论的研究：在模融合范畴中对有限对称性进行规范化（轨道化）由 [DVVV89]提出；其逆过程则是 [SY89]中的简单流扩张。后来，这些过程在数学上得到了形式化和推广。例如，对作用于范畴的有限群进行轨道化的过程，汇总于 [EGNO15]（后又由[McR20]推广）；而范畴层面的 VOA 扩张，则由 [CKM17、CMY20a]中的提升函子刻画。

我们希望运用已有的规范化与去规范化操作，研究我们三维 $\mathcal{N}=4$ 边界顶点算子代数的模。例如，通过轨形和简单流扩张，将规范理论 $\mathcal{T}_\rho$ 中的模范畴与 n 自由超多重态理论中的模范畴联系起来会很方便（后者已得到理解）。遗憾的是，直接做到这一点并不显然，因为 $\mathcal{V}_\rho^A$、$\mathcal{V}_\rho^B$与相应的自由超多重态 VOA $\mathcal{V}_{\beta\gamma}^{T^*V}$、$\mathcal{V}_{SF}^{T^*V}$并不通过标准的轨形和扩张相关联。幸运的是，有一种很好的变通方法。

在本节中，我们将介绍两种“替代”顶点算子代数，它们通过标准操作与自由超多重态顶点算子代数直接相关；示意如下：

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{V}}_\rho^A &:= \mathcal{V}_{\beta\gamma}^{T^*V} \text{ extended by } \mathbb{Z}^r \text{ simple currents}\\ \widetilde{\mathcal{V}}_\rho^B &:= (\mathbb{C}^*)^r \text{ orbifold of } \mathcal{V}_{SF}^{T^*V}\otimes\mathcal{V}_{\mathbb{Z}^n}^-\,,\end{aligned} \tag{5.1}$$

其中 $\mathbb{Z}^r$ 流和轨形作用取决于电荷矩阵 ρ，而 $\mathcal{V}_{\mathbb{Z}^n}^-$ 是一个双线性型负定的完备欧几里得格点顶点算子代数。接下来，我们将在定理 5.6中证明，这些替代顶点算子代数与实际的顶点算子代数相差若干额外的自对偶格点顶点算子代数的张量积。结合三维镜像对称（定理 4.4），可得

$$\widetilde{\mathcal{V}}_\rho^A\otimes\mathcal{V}_{bc}^{\otimes n} \;\cong\; \widetilde{\mathcal{V}}_{\rho^\vee}^B\otimes\mathcal{V}_{bc}^{\otimes n} \;\cong\; \mathcal{V}_\rho^A\otimes\mathcal{V}_{\mathbb{Z}^{2r}}^{+-} \;\cong\; \mathcal{V}_{\rho^\vee}^B\otimes\mathcal{V}_{\mathbb{Z}^{2r}}^{+-}\,. \tag{5.2}$$

现在，自对偶格点顶点算子代数的模范畴是平凡的。因此，式（5.2）意味着，$\widetilde{\mathcal{V}}_\rho^A$、$\widetilde{\mathcal{V}}_\rho^B$的模范畴与 $\mathcal{V}_\rho^A$、$\mathcal{V}_\rho^B$的模范畴等价。这称为莫里塔等价。最终，这使我们能够用替代顶点算子代数取代实际的顶点算子代数，以研究模范畴。

$(\mathbb{C}^*)^r$ 轨形没有出现在（5.1）的两条线上，这可能令人惊讶。其物理起源将在第6节中解释。简而言之，$U(1)^n$ 超多重态的味对称性n，其中一部分被我们规范化以得到 $\mathcal{T}_\rho$，其表现会因采用的拓扑扭曲不同而大相径庭。在 B 扭曲中，它被复化为一个 $\mathbb{C}^*$ 对称性，从而产生标准的轨形。在 A 扭曲中，体 $U(1)^n$ 对称性则被提升为一种 $\mathbb{Z}^n$ 一形式对称性。一形式对称性的生成元是“味涡旋”线算子。在 A 扭曲中，将部分 $U(1)^n$ 味对称性规范化，实际上等同于规范化相关的一形式对称性。它通过已变为动力学的味涡旋屏蔽体理论线算符。在边界上，这会诱导出简单流扩张。

我们已经在第 3.2.1 节和 4.3.1 节讨论边界顶点算子代数的对称性时，见过这一现象的一个反映。对于 n B 扭曲中的自由超多重态，$U(1)^n$仍是边界顶点算子代数的有限对称性 $\mathcal{V}_{SF}^{T^V}$（因此可以对其进行轨形化）。对于n A 扭曲中的自由超多重态，$U(1)^n$ 则提升为一个作用于

边界上的 Kac-Moody 对称性。体 $\mathbb{Z}^n$ 的一形式对称性的生成元是“味涡旋”线，它们在边界上的端点会产生 Kac-Moody 对称性的谱流模。我们将在第 5.1 节回顾谱流模的概念。

5.1 $\widetilde{\mathcal{V}}^A_\rho$ 通过扩展 $\mathcal{V}^{T^*V}_{\beta\gamma}$

回顾（3.21）可知， n 份 β-γ顶点算子代数具有自由场实现

$$\mathcal{V}^{T^*V}_{\beta\gamma} \;\cong\; \bigoplus_{\lambda\in\mathbb{Z}^n} M^{\phi}_{\lambda\cdot\phi}\otimes \mathcal{F}^{\eta}_{\lambda\cdot\eta}\,, \tag{5.3}$$

其中， $M^{\phi}_{\lambda\cdot\phi}\subset\mathcal{F}^{\phi}_{\lambda\cdot\phi}$是嵌入到秩为 n 的海森堡代数的福克模中的单态模，且带有 $B(\phi^i,\phi^j)=\delta^{ij}$；而 $\mathcal{F}^{\eta}_{\lambda\cdot\eta}$是秩为 n 的海森堡代数的福克模，带有$B(\eta^i,\eta^j)=-\delta^{ij}$。这是 A 扭曲下自由 T^*V超多重态的边界顶点算子代数——除去自由费米子 $\mathcal{V}^V_{bc}$，它们具有平凡的模范畴。

如第6节将进一步解释，A 扭曲下的自由超多重态具有 $\mathbb{Z}^n$ 一形式对称性，由味涡旋线生成。在边界上，该对称性变为 $\mathbb{Z}^n$ 的谱流自同构， $\mathcal{V}^{T^*V}_{\beta\gamma}$与其 $\mathfrak{gl}(1)^n$ Kac-Moody 对称性相关。特别地，体味涡旋的端点是谱流模

$$\mathbb{V}_m := \Sigma_m(\mathcal{V}^{T^*V}_{\beta\gamma})\,. \tag{5.4}$$

根据第 2.4 节回顾的一般理论（基于 [Li97]），这些 $\mathbb{V}_m$ 是 $\mathcal{V}^{T^*V}_{\beta\gamma}$的单流。特别是，它们的融合规则为

$$\mathbb{V}_m\times\mathbb{V}_{m'}=\mathbb{V}_{m+m'} \tag{5.5}$$

并且它们彼此之间具有平凡单值。在自由场实现中， $\mathfrak{gl}(1)^n$ 流为 $J^i_F=\partial\eta^i$，生成每个谱流模的顶点算子为 $:e^{\mu\cdot\eta(z)}:$。因此，该模为

$$\mathbb{V}_\mu \;\simeq\; \bigoplus_{\lambda\in\mathbb{Z}^n} M^{\phi}_{\lambda\cdot\phi}\otimes\mathcal{F}^{\eta}_{(\lambda+\mu)\cdot\eta}\,. \tag{5.6}$$

现在我们可以分析屏蔽涡旋线的效应。将体对称性的一个带有电荷 ρ 的 $U(1)^r$ 子群规范化，会屏蔽由子格 $m\in\rho(\mathbb{Z}^r)\subseteq\mathbb{Z}^n$ 中元素标记的味涡旋。因此有

定义 5.1。对于电荷矩阵为 ρ 的简单阿贝尔规范理论，另一种

A-扭曲边界顶点算子代数是

$$\widetilde{\mathcal{V}}_\rho^A := \bigoplus_{\mu\in\mathbb{Z}^r} \mathbb{V}_{\rho(\mu)} \qquad (as\ \mathcal{V}_{\beta\gamma}^{T^*V}\ modules) \tag{5.7}$$

$$\cong \bigoplus_{\substack{\lambda\in\mathbb{Z}^n\\ \mu\in\mathbb{Z}^r}} M^\phi_{\lambda\cdot\phi} \otimes \mathcal{F}^\eta{}_{(\lambda+\rho(\mu))\cdot\eta}\,. \tag{5.8}$$

我们可以进一步简化这一点，类似于我们在 $\mathcal{V}_\rho^A$第 3.3.2 节中简化自由场实现的方式。将 $\lambda=\rho(\lambda_0)+\rho^\vee(\lambda^\vee)$ 对 $\lambda_0\in N\supset\mathbb{Z}^r$ 进行分裂， $\lambda^\vee\in N^\vee\supset\mathbb{Z}^{n-r}$ 其中$[\lambda_0]=[\lambda^\vee]\in H$，并将第二个海森堡顶点算子代数分解为

$$\mathcal{H}_\eta \cong \mathcal{H}_{\eta_0}\otimes\mathcal{H}_{\eta^\perp}\,, \qquad \eta_0=\rho^{\mathsf{T}}\eta\,, \quad \eta_\perp=\rho^{\vee\mathsf{T}}\eta\,, \tag{5.9}$$

使得 η_0 场的双线性型为 $\rho^T\rho$，而 $\eta_\perp$ 场的双线性型为 $\rho^{\vee\mathsf{T}}\rho^\vee$，我们得到

$$\widetilde{\mathcal{V}}_\rho^A \cong \bigoplus_{\substack{\lambda_0\in N,\,\lambda^\vee\in N^\vee\\ \mu\in\mathbb{Z}^r\\ [\lambda]=[\lambda^\vee]\in H}} M^\phi_{(\rho(\lambda_0)+\rho^\vee(\lambda^\vee))\cdot\phi}\otimes\mathcal{F}^{\eta_\perp}_{\lambda^\vee\cdot\eta_\perp}\otimes\mathcal{F}^{\eta_0}_{(\lambda+\mu)\cdot\eta_0}\,. \tag{5.10}$$

进一步重新定义 $\mu\mapsto\mu-\lambda$ 后，这变为

$$\widetilde{\mathcal{V}}_\rho^A \cong \bigoplus_{\substack{\lambda_0,\mu\in N,\,\lambda^\vee\in N^\vee\\ [\lambda]=[\lambda^\vee]=[\mu]\in H}} M^\phi_{(\rho(\lambda_0)+\rho^\vee(\lambda^\vee))\cdot\phi}\otimes\mathcal{F}^{\eta_\perp}_{\lambda^\vee\cdot\eta_\perp}\otimes\mathcal{F}^{\eta_0}_{\mu\cdot\eta_0}\,. \tag{5.11}$$

我们在前两个因子中认出顶点算子代数 $\mathcal{M}_{\rho,\,0}$，见（3.44）（及其模 $\mathcal{M}_{\rho,\,h}$，以 $h\in H$ 标记）。第三个因子可以在每个 H 等价类中求和，从而得到格点顶点算子代数（3.42）的负定类比及其简单 H 流（3.43），即

$$\mathcal{V}^-_{\rho^\vee,h} := \bigoplus_{\lambda^\vee\in\mathbb{Z}^{n-r}+h_{N^\vee}} \mathcal{F}^{\eta_\perp}_{\lambda^\vee\cdot\eta_\perp}\,. \tag{5.12}$$

总之， $\widetilde{\mathcal{V}}_\rho^A$可以表示为一个 H 简单流扩张

$$\widetilde{\mathcal{V}}_\rho^A \cong \bigoplus_{h\in H} \mathcal{M}_{\rho,h}\otimes\mathcal{V}^-_{\rho^\vee,h}\,. \tag{5.13}$$

然而，这并非（以任何显而易见的方式）等价于以下表达式中的 $\mathcal{V}_\rho^A$（3.47），这是由于格顶点算子代数具有负范数。

$\widetilde{}$5.2 $\mathcal{V}_\rho^B$ 作为轨形

接下来，考虑 n 辛费米子 $\mathcal{V}_{SF}^{T^*V}$，它是 B 扭曲下自由 T^*V超多重态的边界顶点算子代数。它具有如下自由场实现

$$\mathcal{V}_{SF}^{T^*V} \;\cong\; \bigoplus_{\lambda\in\mathbb{Z}^n} M^{\phi}_{\lambda\cdot\phi}\,, \tag{5.14}$$

其中每个单态模 $M^{\phi}_{\lambda\cdot\phi}\subset\mathcal{F}^{\phi}_{\lambda\cdot\phi}$都嵌入到一个秩为-$n$的海森堡顶点算子代数的福克模中，其参数为 $B(\phi^i,\ \phi^j)=\delta^{ij}$。我们将其与一个完备的负定格顶点算子代数作张量积

$$\mathcal{V}^-_{\mathbb{Z}^n} \;:=\; \bigoplus_{\mu\in\mathbb{Z}^n} \mathcal{F}^{\eta}_{\mu\cdot\eta}\,, \tag{5.15}$$

该代数由一个秩为-n 的海森堡顶点算子代数构造，其参数为 $B(\eta^i,\ \eta^j)=-\delta^{ij}$。

注意，与 $\mathcal{V}^-_{\mathbb{Z}^n}$ 作张量积不会影响模范畴，因为 $\mathcal{V}^-_{\mathbb{Z}^n}$ 的模范畴是平凡的。与 $\mathcal{V}^-_{\mathbb{Z}^n}$ 作张量积的原因如下。

考虑 $\mathcal{V}_{SF}^{T^*V}\otimes\mathcal{V}^-_{\mathbb{Z}^n}\;\cong\;\bigoplus_{\lambda,\ \mu\in\mathbb{Z}^n} M^{\phi}_{\lambda\cdot\phi}\otimes\mathcal{F}^{\eta}_{\mu\cdot\eta}$ 上的对角 $(\mathbb{C}^*)^r$ 作用，在此作用下，子空间 $M^{\phi}_{\lambda\cdot\phi}\otimes\mathcal{F}^{\eta}_{\mu\cdot\eta}$ 的权为 $\rho^{\mathsf{T}}(\lambda-\mu)$。

定义 5.2。令 $\widetilde{\mathcal{V}}^B_\rho$为 $\mathcal{V}_{SF}^{T^*V}\otimes\mathcal{V}^-_{\mathbb{Z}^n}$在上述对角作用下的（$\mathbb{C}^*$）^{r} 轨形（即不变子空间），

$$\widetilde{\mathcal{V}}^B_\rho \;:=\; \big(\mathcal{V}_{SF}^{T^*V}\otimes\mathcal{V}^-_{\mathbb{Z}^n}\big)^{(\mathbb{C}^*)^r}\,. \tag{5.16}$$

则有

引理 5.3。对于任意一组三维镜像对的简单阿贝尔理论，存在同构 $\widetilde{\mathcal{V}}^A_\rho\;\cong\;\widetilde{\mathcal{V}}^B_{\rho^\vee}$ 。

证明。根据定义

$$\mathcal{V}^B_{\rho^\vee} \;\cong\; \Big[\bigoplus_{\lambda,\mu\in\mathbb{Z}^n} M^{\phi}_{\lambda\cdot\phi}\otimes\mathcal{F}^{\eta}_{\mu\cdot\eta}\Big]^{(\mathbb{C}^*)^{n-r}} \tag{5.17}$$

其中 $(\mathbb{C}^*)^{n-r}$ 在 (λ,μ) 子空间上以权 $\rho^{\vee\mathsf{T}}(\lambda-\mu)$ 作用。通常，我们将$\lambda=\rho(\lambda_0)+\rho^\vee(\lambda^\vee)$ 和 $\mu=\rho(\mu_0)+\rho^\vee(\mu^\vee)$ 分解为 $\lambda_0,\mu_0\in N$、$\lambda^\vee,\mu^\vee\in N^\vee$ 以及 $[\lambda_0]=[\lambda^\vee]\in H$, $[\mu_0]=[\mu^\vee]\in H$。$(\mathbb{C}^*)^{n-r}$ 的权变为 $\rho^{\vee\mathsf{T}}\rho^\vee(\lambda^\vee-\mu^\vee)$，而取不变量则令$\lambda^\vee=\mu^\vee$。我们得到

$$\begin{aligned}\mathcal{V}^B_{\rho^\vee} \;&\cong\; \bigoplus_{\substack{\lambda_0,\mu_0\in N,\ \lambda^\vee\in N^\vee\\ [\lambda_0]=[\lambda^\vee]=[\mu_0]\in H}} M^{\phi}_{(\rho(\lambda_0)+\rho^\vee(\lambda^\vee))\cdot\phi}\otimes\mathcal{F}^{\eta}_{(\rho(\mu_0)+\rho^\vee(\lambda^\vee))\cdot\eta} &(5.18)\\ &=\; \bigoplus_{\substack{\lambda_0,\mu_0\in N,\ \lambda^\vee\in N^\vee\\ [\lambda_0]=[\lambda^\vee]=[\mu_0]\in H}} M^{\phi}_{(\rho(\lambda_0)+\rho^\vee(\lambda^\vee))\cdot\phi}\otimes\mathcal{F}^{\eta_\perp}_{\lambda^\vee\cdot\eta^\perp}\otimes\mathcal{F}^{\eta_0}_{\mu_0\cdot\eta_0}\,, &(5.19)\end{aligned}$$

其中在最后一行，我们将 η 海森堡顶点算子代数分解为 $\mathcal{H}_\eta \cong \mathcal{H}_{\eta_0} \otimes \mathcal{H}_{\eta^\perp}$ 其中$\eta_0 = \rho^\mathsf{T}\eta$ 以及 $\eta_\perp = \rho^{\vee\mathsf{T}}\eta$。最终表达式（5.19）与（5.11）完全一致。

□

5.3 Morita 等价的 VOA

为了证明前几节中简化的顶点算子代数与三维 $\mathcal{N}=4$ 理论的实际边界顶点算子代数 Morita 等价，我们现在再定义一个顶点算子代数，并将其与上述所有顶点算子代数联系起来。

考虑第 5.1 节构造的三维镜像。在那里，我们从 A 扭曲中的 n个自由超多重态开始，其边界顶点算子代数为 $\mathcal{V}^{T^*V}_{\beta\gamma}$；随后，我们用与体涡旋线相对应的谱流模扩张该顶点算子代数，而这些体涡旋线在规范化时会被屏蔽。现在我们从三维镜像开始，即 B 扭曲中的 n 个 SQED$_1$ 。其边界顶点算子代数 $\left(\mathcal{V}^B_{(1)}\right)^{\otimes n}$ 是 $\widehat{\mathfrak{gl}\ 1|1}(\ )^{\otimes n}$ 通过边界单极算子作出的扩张。具体地，根据第 4.2 节， $\widehat{\mathfrak{gl}\ 1|1}(\ )^{\otimes n}$ 具有生成元 $N_i(z)$ $\psi^{i,\pm}(z)$ $E^i(z)$，其中

$$\begin{aligned} N_i(z)E^j(z) &\sim \tfrac{\delta_i{}^j}{(z-w)^2}\,, \qquad N_i(z)N_j(w) \sim \tfrac{\delta_{ij}}{(z-w)^2} \\ N_i(z)\psi^{j,\pm}(w) &\sim \pm\tfrac{\delta_i{}^j\psi^{j,\pm}}{z-w}\,, \qquad \psi^{i,+}(z)\psi^{j,-}(w) \sim \tfrac{\delta^{ij}}{(z-w)^2} + \tfrac{\delta^{ij}E^j(w)}{z-w}\,. \end{aligned} \tag{5.20}$$

那么 $\left(\mathcal{V}^B_{(1)}\right)^{\otimes n}$ 是由 $\widehat{\mathfrak{gl}\ 1|1}(\ )^{\otimes n}$ 通过扩展由以下对象生成的模得到：$e^{\nu\cdot\int N}$：对所有 $\nu\in\mathbb{Z}^n$。由定理 4.4 可知

$$\left(\mathcal{V}^B_{(1)}\right)^{\otimes n} \cong \mathcal{V}^{T^*V}_{\beta\gamma}\otimes\mathcal{V}^V_{bc}\,, \tag{5.21}$$

还带有额外的 $\mathcal{V}_{bc}$ 因子，这是由典范 A 扭曲顶点算子代数的定义 3.11 导致的。

为了从定义 $\widetilde{\mathcal{V}}^A_\rho$5.1得到 的镜像，我们还应进一步扩展谱流模，它们与 A 侧 Kac-Moody 流的镜像相关联。流 $\partial\eta^i$ 的镜像就是 E^i。这启发我们

定义 5.4。给定简单阿贝尔理论的电荷矩阵 ρ，定义

$$\begin{aligned} \mathcal{V}^\star_\rho :&= \left(\mathcal{V}^B_{(1)}\right)^{\otimes n} \text{由：}\ e^{\rho(\mu)\cdot\int E}\text{：扩展} \quad \forall\,\mu\in\mathbb{Z}^r \\ &\cong \widehat{\mathfrak{gl}\ 1|1}(\ )^{\otimes n} \text{扩展为：}\ e^{\nu\cdot\int N}\text{：以及：}\ e^{\rho(\mu)\cdot\int E}\text{：}\ \forall\,\nu\in\mathbb{Z}^n,\quad \mu\in\mathbb{Z}^r \end{aligned} \tag{5.22}$$

其中 i n 在这两种情况下，我们指的是由对应于顶点算子的模扩展而成 $s.$
在体物理中，通过 $:e^{\rho(\mu)\cdot\int E}:$进行扩张可以解释为筛除（移除）与（SQED$_1$）$^{\otimes n}$的部分规范对称性相对应的威尔逊线算子，这部分规范对称性应当被解除规范化，以得到 $\mathcal{T}_{\rho^\vee}$。

$\mathcal{V}^\star_\rho$ 与 $\widetilde{\mathcal{V}}^A_\rho$ 之间的关系几乎是由构造直接得到的：

引理 5.5. 存在一个顶点算子代数的同构

$$\mathcal{V}^\star_\rho \cong \widetilde{\mathcal{V}}^A_\rho \otimes \mathcal{V}^V_{bc} \tag{5.23}$$

证明。考虑等价关系 $\left(\mathcal{V}^B_{(1)}\right)^{\otimes n} \cong \mathcal{V}^{T^*V}_{\beta\gamma} \otimes \mathcal{V}^V_{bc}$（5.21）。定理 4.4 将左侧的 $T_{\rm top} = U(1)^n$ Kac-Moody 对称性（流为 E^i）与右侧的 $T_F = U(1)^n$Kac-Moody 对称性（流为：$-\beta^i\gamma^i + b^ic^i$:）对应起来。因此，对左端扩张所有具有子群 $G \subset U(1)^n$ 的电荷 ρ 的谱流模，与对右端扩张相应的谱流模同构。此外，在右端，对谱流模进行扩张与对 $\mathcal{V}^V_{bc}$进行张量积可交换，因为单独对应因子 $\mathcal{V}^V_{bc}$ 的谱流模是平凡的（它们与真空模同构）。因此，在扩张两边之后，$\left(\mathcal{V}^B_{(1)}\right)^{\otimes n} \cong \mathcal{V}^{T^*V}_{\beta\gamma} \otimes \mathcal{V}^V_{bc}$ 蕴含 $\mathcal{V}^\star_\rho \cong \widetilde{\mathcal{V}}^A_\rho \otimes \mathcal{V}^V_{bc}$.

□

由引理 5.3 还可推出 $\mathcal{V}^\star_\rho \cong \widetilde{\mathcal{V}}^B_{\rho^\vee} \otimes \mathcal{V}^V_{bc}$。现在我们希望建立 $\mathcal{V}^\star_\rho$与 $\mathcal{V}^B_{\rho^\vee}$之间的联系。为此，我们按照第 4.3节的做法，使用二者的自由场实现。

对于 $\mathcal{V}^\star_\rho$ 的情况，我们引入一个秩为 $3n$ 的海森堡代数 $\mathcal{H}_{\widetilde{X},\widetilde{Y},\widetilde{Z}}$，其基为 $\{\widetilde{X}_i, \widetilde{Y}^i, \widetilde{Z}^i\}_{i=1}^n$，双线性型为 $B(\widetilde{Z}^i, \widetilde{Z}^j) = B(\widetilde{X}_i, \widetilde{Y}^j) = \delta^{ij}$。然后

$$\widehat{\mathfrak{gl}(1|1)}^{\otimes n} \cong \bigcap_{i=1}^n \ker S^i_0 \Big| \bigoplus_{\lambda\in\mathbb{Z}^n} \mathcal{F}^{\widetilde{X},\widetilde{Y},\widetilde{Z}}_{\lambda\cdot\widetilde{Z}}, \qquad S^i = :e^{\widetilde{Z}^i - \widetilde{Y}^i}:, \tag{5.24}$$

其中 $N \mapsto \partial\widetilde{X} + \partial\widetilde{Z}$、$E \mapsto \partial\widetilde{Y}$、$\psi^+ \mapsto :e^{\widetilde{Z}}:$，相应地，$\psi^- \mapsto :(\partial Y - \partial Z)e^Z:$。

$$\left(\mathcal{V}^B_{(1)}\right)^{\otimes n} \cong \bigcap_{i=1}^n \ker S^i_0 \Big| \bigoplus_{\lambda,\mu\in\mathbb{Z}^n} \mathcal{F}^{\widetilde{X},\widetilde{Y},\widetilde{Z}}_{\lambda\cdot\widetilde{Z}+\mu\cdot\widetilde{X}}, \tag{5.25}$$

$$\mathcal{V}^\star_\rho \cong \bigcap_{i=1}^n \ker S^i_0 \Big| \bigoplus_{\substack{\lambda,\mu\in\mathbb{Z}^n \\ \nu\in\mathbb{Z}^r}} \mathcal{F}^{\widetilde{X},\widetilde{Y},\widetilde{Z}}_{\lambda\cdot\widetilde{Z}+\mu\cdot\widetilde{X}+\rho(\nu)\cdot\widetilde{Y}}. \tag{5.26}$$

现在我们将改变海森堡代数中的基，以便分离出一个完整秩的 $2r$ 格点顶点算子代数。我们选择（如第2.1.2节中所述）一个分裂 $\sigma: \mathbb{Z}^{n-r} \to \mathbb{Z}^n$以及一个余分裂 $\sigma^\vee: \mathbb{Z}^r \to \mathbb{Z}^n$，它们分别作用于与我们的三维理论相关联的正合列中的映射，这些映射满足

$$\rho^{\mathsf{T}}\sigma^\vee = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}^r}, \qquad \rho^{\vee\mathsf{T}}\sigma = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}^{n-r}}, \qquad \rho^{\vee\mathsf{T}}\rho = \sigma^{\vee\mathsf{T}}\sigma = 0, \tag{5.27}$$

或者简单地表示为 $(\rho^\vee, \sigma^\vee) = (\rho, \sigma)^{-1,\mathsf{T}}$。然后我们通过

$1 \le a \le r$、 $1 \le \alpha \le n-r$、 $1 \le i \le n$ 使用变换

$$Z = \widetilde{Z} - \sigma^\vee \rho^{\mathsf{T}} \widetilde{Y}\,, \qquad \begin{aligned} X' &= \sigma^{\vee\mathsf{T}}(\widetilde{X} + \widetilde{Z})\,, \\ X &= \rho^{\vee\mathsf{T}} \widetilde{X}\,, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} Y' &= \rho^{\mathsf{T}} \widetilde{Y}\,, \\ Y &= \sigma^{\mathsf{T}} \widetilde{Y}\,, \end{aligned} \tag{5.28a}$$

其逆为

$$\widetilde{Z} = Z + \sigma^\vee Y'\,, \qquad \widetilde{X} = \rho X' + \sigma X - \rho\sigma^{\vee\mathsf{T}}(Z + \sigma^\vee Y')\,, \qquad \widetilde{Y} = \sigma^\vee Y' + \rho^\vee Y\,. \tag{5.28b}$$

我们得到一个同构的海森堡代数 $\mathcal{H}_{\tilde{X},\ \tilde{Y},\ \tilde{Z}} \cong \mathcal{H}_{X,\ X',\ Y,\ Y',\ Z}$，其双线性型为

$$B(Z^i, Z^j) = \delta^{ij}\,, \qquad B(X_\alpha, Y^\beta) = \delta_\alpha{}^\beta\,, \qquad B(X'_a, Y'^b) = \delta_a{}^b \tag{5.29}$$

（基元素的其他所有配对均为零）。

在这一变换下，筛选算子变为 $S^i =: e^{Z^i - (\rho^\vee Y)^i} :$。将（5.26）中的求和指标替换为 $\sigma^\vee\mu' + \rho^\vee\mu$ 其中 $\mu' \in \mathbb{Z}^r$ 且 $\mu \in \mathbb{Z}^{n-r}$，于是得到

$$\mathcal{V}^\star_\rho \cong \bigcap_{i=1}^n \ker S_0^i \Big| \bigoplus_{\substack{\lambda\in\mathbb{Z}^n,\ \mu\in\mathbb{Z}^{n-r} \\ \mu',\nu\in\mathbb{Z}^r}} \mathcal{F}^{X,X',Y,Y',Z}_{(\lambda-\sigma^\vee(\mu'))\cdot Z + \mu\cdot X + \mu'\cdot X' + (\nu+\sigma^{\vee\mathsf{T}}(\lambda)-\sigma^{\vee\mathsf{T}}\sigma^\vee(\mu'))\cdot Y'} \tag{5.30}$$

$$= \bigcap_{i=1}^n \ker S_0^i \Big| \bigoplus_{\substack{\lambda\in\mathbb{Z}^n,\ \mu\in\mathbb{Z}^{n-r} \\ \mu',\nu\in\mathbb{Z}^r}} \mathcal{F}^{X,X',Y,Y',Z}_{\lambda\cdot Z + \mu\cdot X + \mu'\cdot X' + \nu\cdot Y'}\,, \tag{5.31}$$

其中在第二步中，我们对求和变量 $\lambda \mapsto \lambda + \sigma^\vee(\mu')$ 作了平移，随后又对 $\nu \mapsto \nu - \sigma^{\vee\mathsf{T}}(\lambda)$ 作了平移。于是福克模分解为直积，我们得到

$$\mathcal{V}^\star_\rho \cong \left[\bigcap_{i=1}^n \ker S_0^i \Big| \bigoplus_{\lambda\in\mathbb{Z}^n,\ \mu\in\mathbb{Z}^{n-r}} \mathcal{F}^{X,Y,Z}_{\lambda\cdot Z + \mu\cdot X}\right] \otimes \bigoplus_{\mu',\nu\in\mathbb{Z}^r} \mathcal{F}^{X',Y'}_{\mu'\cdot X' + \nu\cdot Y'}\,, \tag{5.32}$$

其中，筛选算子 $S^i =: e^{Z^i - (\rho^\vee Y)^i} :$ 仅作用于第一个因子。将其与推论4.3中的自由场实现以及（4.32）中的筛算子作比较，我们将（5.32）中的第一个因子识别为 $\mathcal{V}^B_{\rho^\vee\circ}$。第二个因子是一个完备的秩 $2r$ 格点顶点算子代数，其定义在一个具有双线性型 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \sigma^\vee{}^1{}_{()^{\mathsf{T}}\sigma^\vee} \end{pmatrix}$的不定格上。记作 $\mathcal{V}^{+-}_{\mathbb{Z}^{2r}}$。因此我们证明了 $\mathcal{V}^\star_\rho \cong \mathcal{V}^B_{\rho^\vee} \otimes \mathcal{V}^{+-}_{\mathbb{Z}^{2r}}$。结合关于边界顶点算子代数三维镜像对称的定理 4.4 以及上文的引理 5.3和5.5，我们得到

定理 5.6。 对于任意一对三维镜像对偶的简单阿贝尔理论，其电荷矩阵为

ρ、 $\rho^\vee$，存在顶点算子代数的同构

$$\mathcal{V}_\rho^A \otimes \mathcal{V}_{\mathbb{Z}^{2r}}^{+-} \;\cong\; \mathcal{V}_{\rho^\vee}^B \otimes \mathcal{V}_{\mathbb{Z}^{2r}}^{+-} \;\cong\; \mathcal{V}_\rho^\star \;\cong\; \widetilde{\mathcal{V}}_\rho^A \otimes \mathcal{V}_{bc}^V \;\cong\; \widetilde{\mathcal{V}}_{\rho^\vee}^B \otimes \mathcal{V}_{bc}^V\,. \tag{5.33}$$

推论 5.7。 这些顶点算子代数 $\mathcal{V}_\rho^A$,$\mathcal{V}_{\rho^\vee}^B$, $\widetilde{\mathcal{V}}_\rho^A$, $\widetilde{\mathcal{V}}_{\rho^\vee}^B$ 均 *Morita* 等价，也就是说，它们的阿贝尔编织张量模范畴彼此等价。

证明。 一旦证明 $\mathcal{V}_{bc}^V$ 和 $\mathcal{V}_{\mathbb{Z}^{2r}}^{+-}$ 的模范畴都是平凡的，这便可由该定理推出。进一步说，这是因为 $\mathcal{V}_{bc}^V$ 和 $\mathcal{V}_{\mathbb{Z}^{2r}}^{+-}$ 都是对应于自对偶格的格点顶点算子代数，这一点很容易验证。自对偶格点顶点算子代数在 Morita 意义下是平凡的 [DLM97]。

□

6 间奏：拓扑一形式对称性

现在，我们想对体拓扑 A 扭曲和 B 扭曲中的对称性结构作一些一般性说明。特别是，我们想解释高阶一形式对称性 [GKSW14] 为何会出现；它们作用于线算子范畴，并控制规范化与去规范化操作。这些对称性在边界顶点算子代数中表现为谱流，我们已在第4.2 节和第5节见过。

此处讨论的一形式对称性完全是拓扑扭曲的特征。事实上，我们早在第2.1.2 节就指出，简单阿贝尔理论 $\mathcal{T}_\rho$ 不可能（这基本上是由定义决定的）具有物理一形式对称性。在拓扑扭曲中，发生的情况是，部分零形式味对称性（T_F 在 A 扭曲中，以及 T_{top} 在 B 扭曲中）变得上同调平凡，并被提升为无限一形式对称性。我们将在第 6节从一般层面对此进行解释。这一论证是对称性通过其同伦类型在拓扑量子场论中发挥拓扑作用的一种具体体现；关于数理物理背景下的相关讨论，参见 [Tel14] 。

剩余的味对称性（T_{top} 在 A 扭曲中，以及 T_F 在 B 扭曲中）也颇为有趣：它会被复化，并允许体理论与平坦复联络耦合。关于这一结构的初步研究见于 [CDGG21]。

总而言之， $\mathcal{T}_\rho$ 的零形式味对称性在拓扑扭曲中诱导出以下对称性：

	$\mathcal{T}_\rho^A$	$\mathcal{T}_\rho^B$
T_F	$\pi_1(T_F) \simeq \mathbb{Z}^r$ 一形式	$(\mathbb{C}^*)^r$ 零形式
T_{top}	$(\mathbb{C}^*)^{n-r}$ 零形式	$\pi_1(T_{\text{top}}) \simeq \mathbb{Z}^{n-r}$ 一形式

(6.1)

这可能使用 可与第3.2.1节和第4.2.1节边界顶点算子代数中的对称性完全进行比较 :

	$\mathcal{V}_\rho^A$	$\mathcal{V}_\rho^B$
T_F	$\mathfrak{gl}(1)^r$ Kac-Moody $\rightsquigarrow \mathbb{Z}^r$ 谱流	有限（$\mathbb{C}^*$）^{r}
T_{top}	有限（$\mathbb{C}^*$）$^{n-r}$	$\mathfrak{gl}(1)^{n-r}$ Kac-Moody $\rightsquigarrow \mathbb{Z}^{n-r}$ 谱流

(6.2)

在本节余下部分，我们将提出一些一般性的物理论证，而不涉及特定的理论或扭曲。我们将解释拓扑对称性增强的起源，然后重点讨论 $\mathbb{Z}$ 一形式对称性的情形，因为这最终与我们最为相关。我们将讨论它们对线算符范畴的影响，以及它们与边界谱流的关系。

6.1 拓扑作用量的起源

考虑任意一个上同调类型的三维拓扑量子场论 $\mathcal{T}^Q$ ，它由某个底层非拓扑理论 $\mathcal{T}$ 扭曲而得。进一步假设， $\mathcal{T}$具有非反常的整体对称性 G，其中 G 是一个连续连通群，其李代数为 $\mathfrak{g}$；并且假设该对称性的流J 是 Q-恰当的，满足

$$J = Q(S)\,. \tag{6.3}$$

（回顾一下，流是一个取值于 $\mathfrak{g}^*$的时空一形式。）

给定一个元素 $g = e^\alpha \in G$ 和时空中的一个余维一子流形 Σ ，可以通过对流进行积分，构造一个沿 Σ 实现由 g 给出的对称变换的缺陷：

$$\mathcal{O}[\Sigma, g] := e^{\int_\Sigma \langle \alpha, *J\rangle}\,. \tag{6.4}$$

（该指数应采用由 Σ 的余定向确定的点分裂正则化来解释。）即使在物理理论 $\mathcal{T}$ 中，由于流守恒 $d * J = 0$，该缺陷也是拓扑的。

在拓扑扭曲理论 $\mathcal{T}^Q$ 中，我们可以更进一步，考虑具有非恒定 参数的对称性变换。对于任意连续映射 $\hat{}g : \Sigma \to G$，由一个（可能不连续的）映射 $\hat{}\alpha : \Sigma \to \mathfrak{g}$ 表示，考虑算子

$$\mathcal{O}[\Sigma, \hat{g}] := e^{\int_\Sigma \langle \hat{\alpha}, *J\rangle}\,. \tag{6.5}$$

在物理理论中，这通常不再是一个拓扑缺陷。然而，它是 Q-闭的，因此在 $\mathcal{T}^Q$ 中仍然是拓扑的。此外，对映射 $\hat{}g$ 的任何小的连续形变

都是 Q-恰当的：将 $\hat{g}$ 替换为 $\hat{g}e^{\epsilon\beta}$，其中 $\beta:\ \Sigma\to\mathfrak{g}$ 是连续的，而 ϵ 很小，我们有

$$\mathcal{O}[\Sigma,\hat{g}e^{\hat{\beta}}]\approx\mathcal{O}[\Sigma,\hat{g}]\Big(1+\epsilon\int_\Sigma\langle\hat{\beta},*J\rangle\Big)=\mathcal{O}[\Sigma,\hat{g}]+Q\Big(\mathcal{O}[\Sigma,\hat{g}]\int_\Sigma\langle\hat{\beta},*S\rangle\Big)\,. \tag{6.6}$$

因此，在 $\mathcal{T}^Q$ 中，我们预期 $\mathcal{O}[\Sigma,\hat{g}]$ 只依赖于映射 $\hat{g}:\ \Sigma\to G$ 的同伦类。

一个平凡的推论是，任何常值对称变换都应在扭曲理论中平凡作用，

$$\mathcal{O}[\Sigma,g]=1+Q(...)\qquad\text{for } g \text{ constant.} \tag{6.7}$$

特别地，$\mathcal{T}^Q$ 中不可能存在带电局部算子；所有 Q-闭的带电局部算子都自动是 Q-恰当的。一个更有趣的推论是，可能存在与同伦非平凡映射 $\hat{g}:\ \Sigma\to G$ 相对应的新对称性缺陷，又称“大”或“绕行”整体对称变换。相邻曲面 Σ,Σ' 的碰撞所诱导的乘积结构（其中 Σ' 是对 Σ 的轻微形变，由对 Σ 的共定向选择定义）是映射空间 $\mathbf{Maps}(\Sigma,G)$ 中的逐点乘法，

$$\mathcal{O}[\Sigma,\hat{g}]\mathcal{O}[\Sigma',\hat{g}']\simeq\mathcal{O}[\Sigma,\hat{g}\hat{g}']\,,\qquad\text{where}(\hat{g}\hat{g}')(x)=\hat{g}(x)\cdot\hat{g}'(x) \tag{6.8}$$

6.2 一形式对称性与线算子的范畴

现在，我们将前述构造具体化到 $\Sigma=\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}$ 为圆柱且 $G=U(1)$ 的情形。我们预期 $\mathcal{T}^Q$ 具有由以下对象标记的对称性缺陷

$$\text{homotopy classes of maps: } S^1\times\mathbb{R}\to U(1)\quad\simeq\ \pi_1(U(1))=\mathbb{Z}\,. \tag{6.9}$$

来自从 S^1 到映射的逐点乘法的群结构，与 π_1 上的拼接乘积一致。

非平凡绕变换（6.9）直接影响扭曲理论 $\widehat{\mathcal{C}}$ 的线算子范畴 $\mathcal{T}^Q$。

首先，范畴上必须存在一个 $\mathbb{Z}$ 作用，即一组自等价

$$\mathcal{F}_m:\widehat{\mathcal{C}}\to\widehat{\mathcal{C}} \tag{6.10}$$

满足 $\mathcal{F}_m\circ\mathcal{F}_{m'}\simeq\mathcal{F}_{m+m'}$。函子 $\mathcal{F}_m$ 对对象 ℓ 的作用定义为用绕数为 m的曲面 $\Sigma\times\mathbb{R}$ 包裹该对象，并施加味变换（6.9）。ℓ。

其次，　其作用必须是内部的，即该范畴实际上包含一组

$\{\mathbb{L}_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ 线算符的张量代数

$$\mathbb{L}_m \otimes \mathbb{L}_{m'} \simeq \mathbb{L}_{m+m'}\,, \qquad \mathbb{L}_0 \simeq \mathbb{1}\,, \tag{6.11}$$

and

$$\mathcal{F}_m(\ell) \simeq \mathbb{L}_m \otimes \ell \qquad \text{for any } \ell \in \widehat{\mathcal{C}}\,. \tag{6.12}$$

每个对象 $\mathbb{L}_m$ 都通过将绕数为 m 的味变换（6.9）环绕一个空的圆柱来简单定义，也就是说，环绕单位线。换句话说， $\mathbb{L}_m := \mathcal{F}_m(\mathbb{1})$ 。性质（6.12）可由以下观察得出：绕变换可以变形为在 S^1 的一半上为单位元，然后从给定的线算子上移开，如图 2所示。

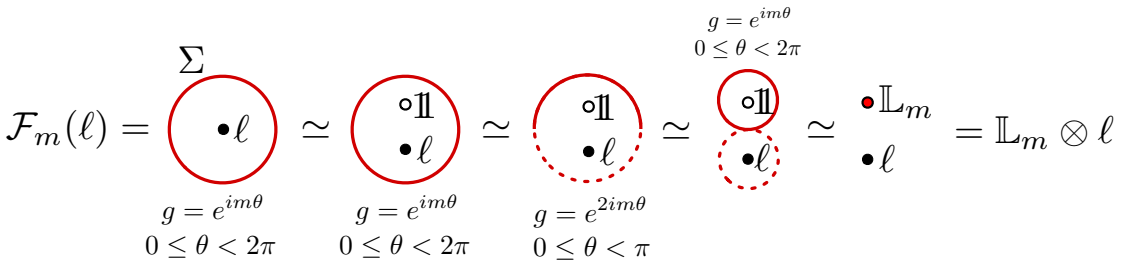


图2： $\mathcal{F}_m(\ell) \simeq \mathbb{L}_m \otimes \ell$ 的图示证明，展示了垂直于线算符和对称性曲面 $\Sigma \simeq S^1 \times \mathbb{R}$ 的平面切片。

此外， $\mathbb{Z}$ 一形式对称性没有异常——这源于原始的$G = U(1)$对称性没有异常。因此，对称性缺陷 $\mathbb{L}_m$ 可以自由地彼此交叉。形式上，这意味着$\mathbb{L}_m$的单值化（或双编织）是平凡的：

$$\mu(\mathbb{L}_m, \mathbb{L}_{m'}) = R_{\mathbb{L}_{m'},\mathbb{L}_m} \circ R_{\mathbb{L}_m,\mathbb{L}_{m'}} = \mathrm{id}\,. \tag{6.13}$$

最后，我们预期线算子范畴会按照一形式对称性的特征，或称“电荷” $\mathbf{char}(\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{C}/\mathbb{Z}$ 进行分解。更具体地说，假设 $\mathbb{L}_m$ 与范畴的其余部分[3], 半单地编织，这意味着 $\mathbb{L}_m$ 与任意不可分解对象 ℓ 的单值化只是恒等自同态的一个常数倍。

$$\mu(\mathbb{L}_m, \ell) = \xi\,\mathrm{id}\,, \qquad \xi \in \mathbb{C}^*\,. \tag{6.14}$$

那么该范畴具有分块分解

$$\widehat{\mathcal{C}} = \bigoplus_{v\in\mathbb{C}/\mathbb{Z}} \widehat{\mathcal{C}}_v\,, \tag{6.15}$$

[3]由于一般而言 $\widehat{\mathcal{C}}$ 并非半单范畴，因此这是否成立并不显然。

其中每个“块” $\widehat{\mathcal{C}}_v$ 都是一个子范畴，满足

- $\mathcal{C}$ 中的每个对象都分解为属于各个独立块的对象的直和。

- 在每个块内，单值化为

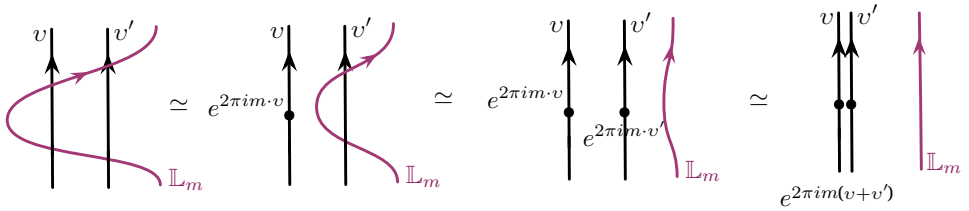
$$\mu(\mathbb{L}_m, \ell) = e^{2\pi i m v}\,\mathrm{id}\,, \qquad \ell \in \widehat{\mathcal{C}}_v\,, \tag{6.16}$$

- 不同块中的对象之间不存在态射。（这相当于 $\mathbb{Z}$ 对称性的荷守恒：标记为不同 $v \in \mathbb{C}/Z$ 的线彼此之间不能有交汇处。）

- 块之间的张量积遵循其电荷的群结构：

$$\otimes : \widehat{\mathcal{C}}_v \boxtimes \widehat{\mathcal{C}}_{v'} \to \widehat{\mathcal{C}}_{v+v'}\,. \tag{6.17}$$

这源于将一形式生成元缠绕在两条线的乘积周围 ：



(6.18)

将所有内容汇总起来，我们得到：

物理定理 6.1. 如果一个上同调三维拓扑量子场论 $\mathcal{T}^Q$ 源自一个具有无反常 $U(1)$ 零形式对称性的量子场论 $\mathcal{T}$，且其流是 Q-恰当的，那么 $\mathcal{T}^Q$ 具有一形式 $\widehat{\mathbb{Z}}$对称性。特别地，线算符的编织张量范畴 $\mathcal{C}$ 包含一组对象 $\{\mathbb{L}_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$，它们满足

$$\mathbb{L}_0 \simeq \mathbb{1}\,, \qquad \mathbb{L}_m \otimes \mathbb{L}_{m'} \simeq \mathbb{L}_{m+m'}\,, \qquad \mu(\mathbb{L}_m, \mathbb{L}_{m'}) = id\,. \tag{6.19}$$

如果与 $\mathbb{L}_m$ 的编织是半单的，那么 $\mathcal{C}$ 可分解为由特征群 $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$标记的块，并且保持其群结构。

6.3 规范化

接下来，假设我们希望对物理理论 $\mathcal{T}$ 的 $G = U(1)$ 对称性进行规范化，其流在拓扑扭曲中是恰当的，正如前面的讨论所述。在拓扑

扭曲理论 $\mathcal{T}^Q$ 中，对 G 进行规范化将引发与 G 的同伦类型相关的所有高阶对称性的规范化。特别是，它将引发对 $\pi_1(G) = \mathbb{Z}$ 一形式对称性的规范化。我们有理由认为，这将是对 $\mathcal{T}^Q$ 进行规范化的唯一后果，因为 $G = U(1)$ 的同伦类型完全由其基本群决定。

对一形式对称性进行规范化，在物理上相当于使一形式生成元成为规范场，并在路径积分中对它们所有可能的插入算子／构型求和[GKSW14]。对于 $\widehat{\mathcal{C}}$ 中线算子的编织张量范畴 $\mathcal{T}^Q$，规范化该 $\mathbb{Z}$ 对称性应通过以下方式实现：

- 将范畴中电荷平凡的对象挑选出来。换言之，$\mathbb{Z}$ 限制到块 $\widehat{\ }$中 $\mathcal{C}_{v=0}$ (6.15)。

- 在所有剩余的范畴对象之间施加等价关系

$$\mathbb{L}_m \otimes \ell \simeq \ell \qquad \forall\, m \in \mathbb{Z} \tag{6.20}$$

  。或者，也可以将所有对象与形式和 $\sum_{m\in\mathbb{Z}} \mathbb{L}_k$ 作张量积。

规范化后的理论 $\mathcal{T}^Q/\mathbb{Z}$ 具有一个新的 $\mathbb{C}^*$ 零形式对称性，参见 [GKSW14、HLS18] 关于有限群规范化的情形。粗略来说，电荷为 q 的局部算子 $\mathbb{C}^*$来自于（$\mathbb{L}_m$，$\mathbb{L}_{m'}$）交汇处，位于 $\mathcal{T}^A_\rho$中，并带有 $m' - m = q$。

我们将在第 $\mathbb{Z}$ 8节中，运用CKM17 [和CMY20a]所提出的提升函子技术，对这种一形式对称性的规范化给出严格的表述。

6.4 与谱流的关系

我们将通过通俗易懂地解释拓扑一形式对称性与边界谱流之间的关系，来完成这一系列思想的探讨。

假设我们的物理理论 $\mathcal{T}$具有非反常的 $U(1)$ 整体对称性，并被置于半空间 $\mathbb{C}_{z,\ \bar{z}} \times \mathbb{R}_{t\geq 0}$，且在 $t = 0$处施加一个保留该 $U(1)$ 对称性的边界条件。这意味着，除了体流之外，还存在一个边界流 J^∂，它们满足体-边界守恒方程

$$d * J = 0\,, \qquad d_\partial *_\partial J^\partial = J_t\,, \tag{6.21}$$

其中 d_∂ 和 $*_\partial$ 分别表示二维外微分算子和霍奇星算子，而 J_t 是体流的法向分量。

使用常数参数 $g = e^\alpha$ 的对称性变换通过选择 $\mathbb{C} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ 的二维子流形 Σ 来实现，该子流形可以终止于边界，并插入

一个缺陷

$$\mathcal{O}[\Sigma, g] = \exp\left(\alpha \int_{\Sigma} *J + \alpha \oint_{\partial\Sigma} *J^{\partial}\right). \tag{6.22}$$

体-边界守恒方程（6.21）确保 $\mathcal{O}[\Sigma, g]$ 在曲面 Σ 及其边界的连续变化下保持不变。

<escape></escape>现在假设体-边界系统具有 BRST 对称性 <escape></escape> Q<escape></escape>，其上同调在体中是拓扑的，而在 <escape></*escape*>边界上是<*escape*></escape>全纯的，因此边界上存在一个顶点算子代数 <escape></escape> $\mathcal{V}$<escape></escape>。此外，假设与前面的讨论一样，体 <escape></escape> U <escape></escape>(1) 对称性在拓扑扭曲中被无穷小地平凡化，<escape></escape> $J = Q$ <escape></escape>(<escape></escape>S<escape></escape>)。那么，(<escape><escape></escape>6.21<escape></escape><escape></escape>) 中的第二个方程变为 <escape></escape> $d_\partial *_\partial J^\partial = Q$<escape></escape>(<escape></escape><escape></*escape*>...<*escape*></escape><escape></escape>)。因此，在拓扑扭曲中，边界流本身就是守恒的。边界理论的全纯性进而意味着流的全纯守恒。<escape></escape>

$$\partial_{\bar{z}} J^{\partial}_{z} = 0\,, \qquad \text{on the boundary of in } \mathcal{T}^{Q}\,, \tag{6.23}$$

因此，边界顶点算子代数必须包含由 J^{∂}_{z} 生成的 $\mathfrak{gl}(1)$ Kac–Moody 代数。

备注。 二维全纯量子场论中有限整体对称性提升为 *Kac-Moody* 对称性的著名现象，与我们在第 *6.1* 节关于拓扑三维体中一形式对称性提升的论证非常相似。这两种情形都涉及一种被部分平凡化的物理对称性——要么变为全纯对称性，要么变为拓扑对称性。

在拓扑扭曲的体-边界系统 $\mathcal{T}^{Q}$ 中，我们现在可以定义与任意曲面 Σ 相关联的非恒定对称性缺陷，即使它们终止于边界上也可以。选取一个光滑映射 $\hat{g} = e^{\hat{\alpha}} : \Sigma \to U(1)$，并考虑

$$\mathcal{O}[\Sigma, \hat{g}] = \exp\left(\int_{\Sigma} \hat{\alpha} * J + \frac{1}{2\pi} \oint_{\partial\Sigma} \hat{\alpha} J_z \, dz\right), \tag{6.24}$$

其中在第二项中，$\hat{\alpha}$ 已经解析延拓为 $\partial\Sigma \subset \mathbb{C}_{z,\bar{z}} \times \{t = 0\}$ 邻域内的全纯函数。此缺陷在拓扑上依赖于曲面 Σ （包括其边界）和映射 $\hat{g}$；当该映射具有非平凡的同伦类型时，这将很有意思。

在第 6.2节中，我们通过将 $\mathcal{L}_m$ 体 $\pi_1(U(1)) = \mathbb{Z}$ 一形式对称性的生成元定义为取 Σ 一个圆柱 $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$，其带有绕数对称变换 $\hat{g} = e^{im\theta}$。线算子 $\mathbb{L}_m$ 通过将圆柱收缩为一条线而得到。现在考虑存在边界时的这一操作，如图 3顶部所示。取 $\Sigma = S^1 \times \mathbb{R}_{t \geq 0}$，我们有一个

缺陷

$$\begin{aligned}\mathcal{O}[\Sigma, e^{im\theta}] &= \exp\Big(im\int_{S^1\times\mathbb{R}_{t\geq 0}} \theta * J + \frac{im}{2\pi}\oint_{S^1\times t=0} \log z\, J_z\, dz\Big)\\ &= \exp\Big(im\int_{S^1\times\mathbb{R}_{t\geq 0}} \theta * J\Big)\cdot \exp\Big(-\frac{m}{2\pi i}\oint_{S^1\times\{t=0\}} \log z\, J_z\, dz\Big)\\ &\simeq \mathbb{L}_m\big|_{t\geq 0}\cdot \exp\Big(\frac{m}{2\pi i}\oint_{S^1\times\{t=0\}} \frac{1}{z}v(z)\, dz\Big)\\ &= \mathbb{L}_m\big|_{t\geq 0}\cdot e^{mv_0}|0\rangle\,. \end{aligned} \tag{6.25}$$

这里我们使用了 $J_z = \partial v$ 阿贝尔流的形式反导数，也就是第2.3.1节中所述的海森堡场。

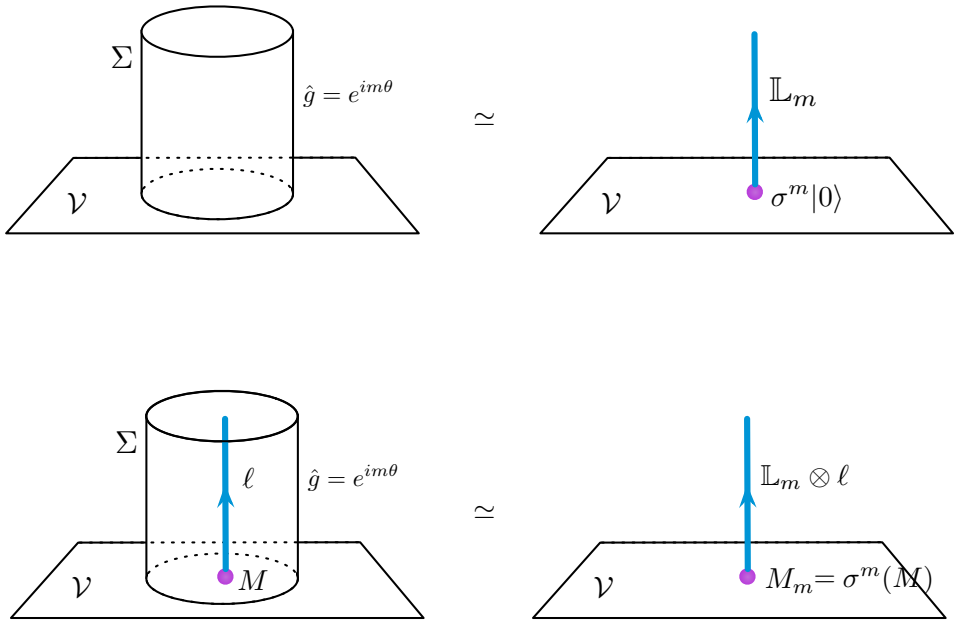


图 3：在扭曲理论中收缩圆柱绕行缺陷 $\mathcal{T}^{\mathcal{Q}}$，以生成边界顶点算子代数的谱流自同构。

式（6.25）中的算子 e^{mv_0} 是边界顶点算子代数$\mathcal{V}$的谱流自同构‘σ^m’，与其 $\mathfrak{gl}(1)$ Kac-Moody 对称性相关。它对流 $J_{z,\,0}$ 的作用恰好是平移其零模

$$e^{mv_0} J_{z,n} = J_{z,n} + \delta_{n,0}\, m\,, \tag{6.26}$$

与第 2.81 式中完全相同（见第 2.4 节）。在（6.25）中，它作用于真空态，因为我们没有在圆柱 Σ 内插入任何插入算子。如果在 $\mathcal{V}$ 中插入其他态，我们就会得到整个真空模的谱流。更一般地，在其他顶点算子代数模中插入态

圆柱中体线端点处的模，如图 3 底部所示，会同时导致体中的 $\mathbb{Z}$ 一形式对称性作用，以及边界上的谱流。总结如下：

物理学命题 6.2。 给定一个具有 $U(1)$ 对称性的三维体理论，该对称性在拓扑扭曲中增强为 $\pi_1(U(1)) = \mathbb{Z}$ 一形式对称性，并且边界条件在扭曲后变为全纯，则一形式对称性缺陷 $\mathbb{L}_m$ 的端点是真空模的谱流。对体中的一形式对称性进行作用（通过与 $\mathbb{L}_m$ 作张量积）时，边界上也会同时发生谱流作用。

鉴于这种对应关系，体的一形式对称性的许多性质以及体理论线算符的结构（见第 6.2 节）都可以改述为具有谱流自同构的顶点算子代数的熟知性质。

7 线算子范畴：体理论考量

现在，我们将全面转向简单阿贝尔三维 $\mathcal{N} = 4$ 理论的拓扑扭曲中的线算子。三维 $\mathcal{N} = 4$ 理论的拓扑扭曲中的线算子构成一个 DG 范畴，预计具有编织张量结构 [RW96、KRS08]。确定线算子范畴的范围时，存在许多微妙的选择。本节将描述简单阿贝尔理论的 A 扭曲和 B 扭曲中的“最小”版本 $\widehat{\mathcal{C}}^A_\rho$， $\widehat{\mathcal{C}}^B_\rho$。讨论将完全从体物理的视角展开。其主要目的是为第 8 节中严谨但较为抽象的顶点算子代数构造提供物理基础。

我们的范畴 $\widehat{\mathcal{C}}^A_\rho$， $\widehat{\mathcal{C}}^B_\rho$ 将定义为由某个最小 BPS 线算子集合生成的范畴；这些线算子与 A 扭曲或 B 扭曲相容，而我们总认为物理理论中应当存在这样的集合。“最小”的概念取决于拓扑一形式对称性所施加的结构，详见第6.1节。这些范畴必须至少包含一形式对称性生成元本身： $\pi_1(T_F) = \mathbb{Z}^{n-r}$ （在 A 扭曲中）以及 $\pi_1(T_{\text{top}}) = \mathbb{Z}^r$ （在 B 扭曲中）。我们还将根据一形式对称性的特征，在预期分解的每个块中识别出“带电对象”，

$$\widehat{\mathcal{C}}^A_\rho = \bigoplus_{\upsilon \in (\mathbb{C}/\mathbb{Z})^{n-r}} \widehat{\mathcal{C}}^A_{\rho,\upsilon}\,, \qquad \widehat{\mathcal{C}}^B_\rho = \bigoplus_{\upsilon \in (\mathbb{C}/\mathbb{Z})^{r}} \widehat{\mathcal{C}}^B_{\rho,\upsilon}\,. \tag{7.1}$$

并在一形式对称性的张量作用下封闭。

在 B 扭 wist，一形式对称性的生成元是威尔逊线 $\{\mathbb{W}_m\}_{m\in\mathbb{Z}^r}$，而

带电对象是混合单值化-威尔逊线

$$\mathbb{W}_m^{(\upsilon)}\,, \qquad m\in\mathbb{Z}^r\,,\ \upsilon\in(\mathbb{C}/\mathbb{Z})^r\,, \tag{7.2}$$

由规范荷 $m\in\text{char}(G)\ =\mathbb{Z}^r$ 以及单值化缺陷标记；绕该缺陷一周时，复化规范联络的整体化为 $e^{2\pi i\upsilon}\in G_{\mathbb{C}}$。要完整定义单值化-威尔逊线，结果发现出乎意料地微妙，因为还需要补充对超多重态的额外约束；我们最终通过构造威尔逊线的某些束缚态来实现这些约束。

在 A 扭曲中，一形式对称性的生成元是味涡旋 $\{\mathbb{V}_m\}_{m\in\mathbb{Z}^{n-r}}$，带电对象则是广义涡旋缺陷，它们指定超多重态标量中的亚纯奇点，其形式大致为

$$\mathbb{V}_m^{(\upsilon)}:\quad \begin{cases} X(z)\in z^{\sigma(m)}\mathbb{C}[\![z]\!] \\ Y(z)\in z^{-\sigma(m)-1}\mathbb{C}[\![z]\!] \end{cases}\quad,\quad \mu_F(X,Y)\in\frac{\upsilon}{z}+\mathbb{C}[\![z]\!]\,,\qquad m\in\mathbb{Z}^{n-r},\,\upsilon\in(\mathbb{C}/\mathbb{Z})^{n-r}\,. \tag{7.3}$$

这里 $\sigma:\mathbb{Z}^{n-r}\to\mathbb{Z}^n$ 是我们通常所用正合列（定义味荷）的一个分裂，而 μ_F 是味对称性的动量映射。我们从物理上论证，$\mathbb{V}_m^{(\upsilon)}$ 是 $\mathbb{W}_m^{(\upsilon)}$ 的三维镜像。

单值化-威尔逊线 $\mathbb{W}_m^{(\upsilon)}$是四维规范理论中 't Hooft-威尔逊线的三维对应物 [Kap05]。这种对线算符的描述，也类似于 Gukov 和 Witten 在四维 $\mathcal{N}=4$杨-米尔斯理论中构造曲面算符的方式 [GW06]。它推广了 Assel-Gomis 对三维 $\mathcal{N}=4$ 线算子的构造[AG15]（他们没有考虑奇点阶数高于一阶的涡旋线），以及 Dimofte-Garner-Geracie-Hilburn 随后的分类 [DGGH19]（其中简要提及了 B 型单值化缺陷或广义涡旋缺陷，但并未加以研究）。Hilburn 和 Raskin 在其关于导出环路空间上层的几何模型的工作中，也研究了单值化-威尔逊线和广义涡旋缺陷 [HR21]。

我们将更详细地描述 $\mathbb{W}_m^{(\upsilon)}$和 $\mathbb{V}_m^{(\upsilon)}$，并构造它们的态射空间，也就是它们交汇处的局部算子空间。原则上，这些信息足以确定它们生成的 DG 范畴 $\widehat{\mathcal{C}}_\rho^B$、$\widehat{\mathcal{C}}_\rho^A$。这些范畴本身包含更多对象，它们是由 $\mathbb{W}_m^{(\upsilon)}$ 和 $\mathbb{V}_m^{(\upsilon)}$ 构成的复形；从物理角度看，它们可以被视为 $\mathbb{W}_m^{(\upsilon)}$，$\mathbb{V}_m^{(\upsilon)}$ 的四分之一 BPS 束缚态。

还需要进一步的物理数据才能确定 $\widehat{\mathcal{C}}_\rho^B$, $\widehat{\mathcal{C}}_\rho^A$ 上的编织张量结构。一些单个 $\mathbb{W}_m^{(\upsilon)}$, $\mathbb{V}_m^{(\upsilon)}$ 的张量积和编织，可直接从一形式对称性考量中得出。

然而，这些线的复形之间的编织极其复杂。我们最终将

通过第8节中的边界顶点算子代数，可以获得完整的编织张量结构。

7.1 B 扭曲

7.1.1 威尔逊线

考虑一个简单的阿贝尔规范理论 $\mathcal{T}_\rho$，其中有 $G = U(1)^r$ 和 $N = \mathbb{C}^n$。在拓扑 B 扭曲中，规范联络自然与三元组的伴随矢量多重态标量（它们经过扭曲后成为时空一形式）结合，形成复化的 $GL(1,\ \mathbb{C})^r$联络 $\mathcal{A}^a, 1 \le a \le r$。B 扭曲中的一类基本线算子是复化的威尔逊线，它们由规范群的特征 m 以及三维时空中的一条曲线 γ 标记

$$\mathbb{W}_m(\gamma) := \exp\, i \int_\gamma m \cdot \mathcal{A}\,, \qquad m \in \mathbb{Z}^r\,. \tag{7.4}$$

威尔逊线是 B 扭曲中拓扑一形式对称性的生成元 $\pi_1(T_{\rm top})$。它们可以按照第6.1节的方法构造为拓扑对称性 $T_{\rm top}$ 的绕行缺陷。由于 $T_{\rm top}$ 与 $U(1)^r$ 规范对称性之间存在混合陈–西蒙斯耦合，拓扑对称性的绕行缺陷等价于威尔逊线。（这一论证的经典版本见 [Wit89a]。）

每个 $\mathbb{W}_m$ 都应定义线算子范畴中的一个对象。对象本身与曲线标签“γ”无关；应将其视为支撑在线段上的线算子的标签，其中线段可以是任意微小的。两个威尔逊线 $\mathbb{W}_m, \mathbb{W}_{m'}$ 之间的态射空间是它们交汇点处规范不变局部算子的向量空间。在 B 扭曲中，这类算子由复超多重态标量的多项式构成。我们预期

$$\mathrm{Hom}^\bullet(\mathbb{W}_m, \mathbb{W}_{m'}) = \Big[\mathbb{C}[X^i, Y^i]_{i=1}^n \big/ \big(\mu^a\big)_{a=1}^r\Big]_{\text{weight } m'-m}\,. \tag{7.5}$$

在这个表达式中，我们首先构造变量 X^i, Y^i 上的多项式环 $\mathbb{C}[X^i, Y^i]_{i=1}^n$，它按以下两种方式分级：1）整数值的上同调次数，来自 $U(1)_H$ 对称性，在该对称性下，所有 X 和 Y 的次数均为 $+1$；2） $U(1)^n$ 对称性的权，在该对称性下， X^i的权为 $(0, ...0, \underset{(i)}{1}, 0, ...,0)^T \in \mathbb{Z}^n$，而 Y^i 的权为 $(0, ...0, \underset{(i)}{-1}, 0, ...,0)^T \in \mathbb{Z}^n$。然后，我们对规范对称性的复矩映射所生成的理想取商，

$$\mu^a = \rho_i{}^a X^i Y^i\,, \tag{7.6}$$

因为这些复矩映射在 B 扭曲中是 Q-恰当的。最后，为了在交汇点保持规范不变性，我们将范围限制在规范荷为 $m' - m$ 的子空间；该子空间是

由权 $\lambda \in \mathbb{Z}^n$ 满足以下条件的单项式生成的子空间

$$\rho^T \lambda = m' - m\,. \tag{7.7}$$

（7.5）右端的局部算子空间仍具有其上同调 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 分次，其中 $|X| = |Y| = 1$。这应对应于左端导出态射空间的上同调分次。

我们将有用地给出态射空间（7.5）的一种等价刻画，用DG代数的语言表述如下。动量映射 μ^a 是某些体区规范微子的像 λ^a （记作 λ^a_- 见（3.2））在B扭曲超荷作用下的像，

$$Q(\lambda^a) = \mu^a\,. \tag{7.8}$$

这些胶子伴侣被扭曲为时空标量，具有奇数费米子数和 $+1$ 上同调次数。将它们纳入态射空间的构造中，我们得到

$$\mathrm{Hom}^\bullet(\mathbb{W}_m, \mathbb{W}_{m'}) = H^\bullet\big(\mathbb{C}[X^i, Y^i, \lambda^a], Q\big)\Big|_{\text{weight } m'-m}\,, \tag{7.9}$$

其中矩映射约束 $\mu^a = 0$ 现以上同调方式施加。

7.1.2 单值化缺陷

B 扭曲还允许无序算子，其由线附近运动方程的奇异解类标记。特别地，复化平坦连接 $\mathcal{A}^a$ 可能对某些 $\upsilon \in (\mathbb{C}/\mathbb{Z})^r$ 具有单值化 $e^{2\pi i \upsilon^a}$ 。在 $\mathbb{C}_{z,\bar z} \times \mathbb{R}_t$ 上的局部坐标中，在 $z = 0$ 处有一个线算子时，连接采取以下形式

$$\mathcal{A} \sim \upsilon\, d\theta = \frac{\upsilon}{2i}\Big(\frac{dz}{z} - \frac{d\bar z}{\bar z}\Big) \qquad \text{near } z = 0, \tag{7.10}$$

模去至多按幂律增长的规范变换（如 $z \to 0$）。注意，带有 $e^{2\pi i m\theta}$ 且满足 $m \in \mathbb{Z}^r$ 的绕圈规范变换确实会平移 $\nu \mapsto \nu + m$，因此参数 υ 具有周期性。

这种单值化缺陷必须伴随着将 $z = 0$附近的部分或全部超多重态标量设为零 $d_{\mathcal{A}} X = d_{\mathcal{A}} Y = 0$。这是因为 B 扭曲中的运动方程也要求标量是协变常数， $e^{2\pi i \upsilon} \in GL(1,\mathbb{C})^r$。这带来了一个重要的微妙之处：要完整地定义一条单值化线，我们必须在（7.10）之外，再对超多重态施加约束，以确保 $e^{2\pi i \rho(\upsilon)} X = X$ 和 $e^{2\pi i \rho(\upsilon)} Y = Y$；但实现这一点并不存在唯一且最简的方式。这里我们将从一个角度解释这一特点。它还会再次出现

在第8.4节。

作为一个简单的例子，考虑 SQED$_1$，即 $G = U(1)$ 和 $V = \mathbb{C}$，其电荷矩阵为$\rho = (1)$。存在一对超多重态标量（X, Y），其规范荷为 $(1, -1)$。我们可以通过沿角向 $z = 0$ 紧化三维理论，来分析 θ 附近的线算子会发生什么，从而在半空间 $\mathbb{R}_{|z|>0} \times \mathbb{R}_t$上得到一个二维拓扑量子场论，线算子位于其边界。有效二维理论是一个靶空间为 $\mathbb{C}^* \times T^*V$、规范群为 $U(1)$ 的 B 模型，其中靶空间中的“$\mathbb{C}^*$”是 $g =$沿紧化圆的三维联络的整体化$i \oint \mathcal{A}$exp() 几何。有效二维 B 模型的超势由（参见BDGH16, 21]CDGG）

$$W_{2d} = (g-1)XY\,, \tag{7.11}$$

其临界轨迹要求在整体化、 $gX = X$ 和 $g^{-1}Y = Y$下保持不变。

奇异联络的存在 $\mathcal{A} \sim \upsilon\, d\theta$ 在三维情形下意味着在二维模型中令 $g = e^{2\pi i\upsilon}$ 处$|z| = 0$ 。当 $\upsilon \notin \mathbb{Z}$ 时，二维模型的边界条件还要求对剩余的超势进行进一步的“矩阵分解”（$e^{2\pi i\upsilon} - 1$）XY [KL02]。这相当于在 $z = 0$ 处耦合一个具有弯曲微分的 Q_{1d}一维量子力学，其微分的平方为（$e^{2\pi i\upsilon} - 1$）XY，而非零。最小矩阵分解（数学上称为 Koszul矩阵分解）采用具有二维希尔伯特空间 $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$的量子力学，其微分 Q_{1d}： $\mathcal{H} \to \mathcal{H}$ 定义为

$$Q_{1d} = \begin{pmatrix} 0 & (e^{2\pi i\upsilon} - 1)X \\ Y & 0 \end{pmatrix}\,, \qquad Q_{1d}^2 = (e^{2\pi i\upsilon} - 1)XY\,\mathrm{id}_{\mathbb{C}^2}\,. \tag{7.12}$$

请注意，在对 $\mathcal{H}$ 中的基向量重新缩放后，这等价于 $Q_{1d} = \begin{pmatrix} 0 & X \\ e^{-2\pi i\upsilon} - 1 & 0 \end{pmatrix}$。由于 X, Y都属于 Q_{1d} 的像，因此在 $z = 0$ 处它们实际上都被设为零，正如我们所希望的那样，以实现 $e^{2\pi i\upsilon}X = X$ 和 $e^{-2\pi i\upsilon}Y = Y$。

重要的微妙之处在于，我们必须记住这是一个规范理论。我们期望单值化线不破坏规范对称性，因此必须为 $\mathcal{H}$ 中的两个态选择规范荷，使其与荷 $|X| = 1$ 和 $|Y| = -1$ 相容。这样做没有规范的方式。最简单的两种选择是为 $\mathcal{H}$ 中的态赋予荷 $(1, 0)$，或赋予荷 $(0, -1)$。更一般地，对于任意 $m \in \mathbb{Z}$，我们可以取荷 $(m, m-1)$。

我们发现的结果可以按以下方式转译回三维体空间。在 SQED 的 B 扭曲中，$_1$并不存在典范单值化缺陷。相反，存在一族单值化缺陷 $\mathbb{W}_m^{(\upsilon)}$，由整数 $m \in \mathbb{Z}$ 标记，它们结合了一个奇异联络

带有两个相邻威尔逊线的束缚态

$$\mathbb{W}_m^{(\upsilon)}: \quad \mathcal{A}\sim \upsilon\, d\theta \quad \text{superposed with} \quad \mathbb{W}_m \overset{\overset{(e^{2\pi i\upsilon}-1)X}{\rightleftarrows}}{\underset{Y}{}} \mathbb{W}_{m+1} \qquad (\upsilon\in(\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z})/\mathbb{Z})\,. \tag{7.13}$$

束缚态使威尔逊线的直和发生形变 $\mathbb{W}_m$ 和 $\mathbb{W}_{m+1}$。（我们将在第 7.1.3 节看到更多束缚态的例子。）不同的单值化缺陷可以通过与纯 Wilson 线进行张量积（碰撞）而相互关联：$\mathbb{W}_{m'}\otimes\mathbb{W}_m^{(\upsilon)}\simeq\mathbb{W}_{m+m'}^{(\upsilon)}$。

现在，我们可以将其推广到任意简单阿贝尔理论 $\mathcal{T}_\rho$ 的 B 扭曲。令 $\upsilon\in(\mathbb{C}/\mathbb{Z})^r$。具有 $\rho(\upsilon)^i\notin\mathbb{Z}$ 的 X^i 和 Y^i 是我们必须（有效地）设为零的场，从而得到 $e^{2\pi i\rho(\upsilon)}X=X$ 和 $e^{-2\pi i\rho(\upsilon)}Y=Y$。为此，我们将单值化缺陷与以下威尔逊线束缚态叠加

$$\mathbb{W}_m^{(\upsilon)}:= \quad \mathcal{A}\sim\upsilon\, d\theta \quad \text{with} \quad \mathbb{W}_m\otimes\bigotimes_{i\text{ s.t. }\rho(\upsilon)^i\notin\mathbb{Z}}\left[\mathbb{W}_0 \overset{\overset{(e^{2\pi i\rho(\upsilon)^i}-1)X^i}{\rightleftarrows}}{\underset{Y^i}{}} \mathbb{W}_{(0,\ldots,\underset{i}{1},\ldots,0)}\right]. \tag{7.14}$$

这里，复形的张量积按照同调代数的通常规则取，并假设所有单独威尔逊线的张量积满足 $\mathbb{W}_m\otimes\mathbb{W}_{m'}=\mathbb{W}_{m+m'}$。（我们将在第 6 节证明这一点。）束缚态中的总弯曲微分 Q_{1d} 满足 $Q_{1d}^2=Y\cdot(e^{2\pi i\rho(\upsilon)}-1)\,X$，正如要得到有效二维超势的矩阵分解所要求的那样。

这些 $\mathbb{W}_m^{(\upsilon)}$ 是 $\mathcal{T}_\rho^B$ 的混合型“单值化-威尔逊线”。它们类似于四维规范理论中的混合型威尔逊-'t Hooft 线 [Kap05]。请注意，$\mathbb{W}_m^{(0)}=\mathbb{W}_m$ 只是纯 Wilson 线。整个单值化-威尔逊线族通过与纯 Wilson 线进行张量积而彼此关联，

$$\mathbb{W}_{m'}\otimes\mathbb{W}_m^{(\upsilon)}\simeq\mathbb{W}_{m+m'}^{(\upsilon)}\,. \tag{7.15}$$

例。 考虑具有 $G=U(1)$、$V=\mathbb{C}^2$ 和 $\rho=(1\,1)$ 的 *SQED*$_2$，。超多重态标量为 (X^1,Y^1) 和 (X^2,Y^2)，二者的规范荷均为 $(+1,-1)$。当 $\upsilon=0$（模 $\mathbb{Z}$）时，我们只需考虑 $\mathbb{W}_m^{(0)}=\mathbb{W}_m$。当 $\upsilon\notin\mathbb{Z}$ 且 $m\in\mathbb{Z}$ 时，单值化威尔逊线 $\mathbb{W}_m^{(\upsilon)}$ 将一个单值化奇点与一个束缚态叠加在一起。

$$\mathbb{W}_m \overset{\overset{\binom{\xi X^1}{\xi X^2}}{\rightleftarrows}}{\underset{(Y^1\ Y^2)}{}} \mathbb{W}_{m+1}\oplus\mathbb{W}_{m+1} \overset{\overset{(\xi X^2\ -\xi X^1)}{\rightleftarrows}}{\underset{\binom{Y^2}{-Y^1}}{}} \mathbb{W}_{m+2}\,, \tag{7.16}$$

其中 $\xi=e^{2\pi i\upsilon}-1$。注意，此处的微分在束缚态的每个威尔逊线直和项上平方为 $W_{2d}=(e^{2\pi i\upsilon}-1)(X^1Y^1+X^2Y^2)$。

7.1.3 态射与 DG 范畴

我们在（7.9）中计算了威尔逊线之间的态射（局部算子），现在可以将其推广到混合单值化-威尔逊线。由于 B 扭曲将理论局域化到平坦复连接，因此单值化 $\upsilon \in (\mathbb{C}/\mathbb{Z})^r$ 不能在线算符的交汇点处发生变化。这意味着

$$\mathrm{Hom}^\bullet(\mathbb{W}_m^\upsilon, \mathbb{W}_{m'}^{\upsilon'}) = 0 \quad \text{unless} \quad \upsilon = \upsilon' \ (\mathrm{mod}\ \mathbb{Z}^r)\,. \tag{7.17}$$

这初步表明，$\mathbb{W}_m^\upsilon$ 属于 B-扭曲范畴中的不同块，正如（7.1）所示。

当 $\upsilon = \upsilon'$ 时，在 $\mathbb{W}_m^\upsilon$ 与 $\mathbb{W}_{m'}^\upsilon$ 之间交汇点处的局部算子，仍会得到来自标量多项式的贡献 X，Y，其规范荷为 $m'-m$，并对规范矩映射约束 $\mu^a = 0$取模。然而，装饰这些线的束缚态实际上施加了条件 $e^{2\pi i\rho(\upsilon)}X = X$ 和 $e^{-2\pi i\rho(\upsilon)}Y = Y$。这会去除部分标量。此外，令 $e^{2\pi i\rho(\upsilon)}X = X$ 和 $e^{-2\pi i\rho(\upsilon)}Y = Y$ 成立，可能会自动使某些规范矩映射 μ^a 消失，从而使式（7.8）中的相应胶子伴侣 λ^a 成为 Q-闭的。这些胶子伴侣也因此对态射空间有所贡献。

态射空间最终的预期答案可简洁地描述如下。令 $L_\upsilon \subseteq T^*V$ 为子空间

$$L_\upsilon := \{e^{2\pi i\rho(\upsilon)}X = X, e^{-2\pi i\rho(\upsilon)}Y = Y\} = \{X_i = Y_i = 0\}_{\rho(\upsilon)^i \notin \mathbb{Z}}\,, \tag{7.18}$$

其中包含非零的 X和 Y。令 $\mathbb{C}[X^i, Y^i, \lambda^a]\big|_{L_\upsilon}$ 为限制在该子空间上的超多重态标量与胶子伴侣构成的多项式代数。它带有一个微分 Q，由体微分 $Q(\lambda^a) = \mu^a$ 在（7.8）中诱导得到。于是

$$\mathrm{Hom}^\bullet(\mathbb{W}_m^{(\upsilon)}, \mathbb{W}_{m'}^{(\upsilon')}) = \delta^{\upsilon\upsilon'} H^\bullet\big(\mathbb{C}[X^i, Y^i, \lambda^a]\big|_{L_\upsilon}, Q\big)\Big|_{\text{weight } m'-m}\,. \tag{7.19}$$

注。 这一答案也可以通过更严格的计算得到：采用带有超势的紧化二维 B 模型，如 (7.11)所示，不过这里不再详述。使 (7.14)中的束缚态看起来相当复杂却仍属“最小”的部分原因在于，它们保证交汇处的局部算子空间不会出现额外贡献，预期的 (7.19)除外。

例。 考虑 $SQED_1$，其带有 $G = U(1)$，以及标量 (X, Y)，规范荷为 $(1, -1)$，上同调次数为 (1,1)。体 *gaugino* λ 的规范荷为 *0*，上同调次数为 *1*，并满足

$$Q(\lambda) = XY\,. \tag{7.20}$$

威尔逊线的电荷由 $m \in \mathbb{Z}$ 标记，可能的单值化缺陷

由 $\upsilon \in \mathbb{C}/\mathbb{Z}$ 标记。子空间 L_υ 由下式给出

$$L_\upsilon = \begin{cases} T^*\mathbb{C} & \upsilon = 0 \ (mod\ \mathbb{Z}) \\ X = Y = 0 & \upsilon \neq 0 \ (mod\ \mathbb{Z}) \end{cases}. \tag{7.21}$$

特别地，当 $\upsilon \neq 0$ *(mod* $\mathbb{Z}$*)* 时，我们有 $Q(\lambda) = 0$，因此 λ 将对态射空间有所贡献。态射空间为

$$Hom^\bullet(\mathbb{W}_m^{(\upsilon)}, \mathbb{W}_{m'}^{(\upsilon')}) = \delta^{\upsilon\upsilon'} \begin{cases} \mathbb{C}\langle X^{m'-m}\rangle & \upsilon = 0, m' > m \\ \mathbb{C}\langle 1\rangle & \upsilon = 0, m' = m \\ \mathbb{C}\langle Y^{m-m'}\rangle & \upsilon = 0, m' < m \\ \mathbb{C}[\lambda] = \mathbb{C}\langle 1, \lambda\rangle & \upsilon \neq 0, m' = m \\ 0 & \upsilon \neq 0, m' \neq m \end{cases} \tag{7.22}$$

这里，$\mathbb{C}\langle v_1, v_2, ...\rangle$ 指由 v_1, v_2... 张成的向量空间。

现在，我们希望在一些自然的物理操作下，对 $\mathbb{W}_m^{(\upsilon)}$线算符集合取“闭包”。我们在此重点讨论的第一种操作，是在任意上同调拓扑量子场论中组合一维缺陷的一种标准方式，它引出由 $\mathbb{W}_m^{(\upsilon)}$生成的 DG 范畴概念。（例如，参见 [Dou00、ABC$^+$09]，其中对二维 A 类和 B 类模型中的边界条件进行了类似描述。）

也就是说，给定一组 ℓ_1、ℓ_2、.....、ℓ_k线算符，可以分别将每个线算符与一个向量空间 V_1、V_2、.....、V_k（其上同调次数可以非平凡）作张量积，然后在直和 $(V_1 \otimes \ell_1) \oplus (V_2 \oplus \ell_2) \oplus \cdots \oplus (V_k \otimes \ell_k)$ 上引入一个非平凡的微分。用更具物理直觉的说法，这对应于在这些线的集合上引入一维量子力学系统（也称为 Chan-Paton 纤维丛），并通过一个非平凡耦合对该集合进行变形。用更数学化的说法，在直和 $V_1 \otimes \ell_1 \oplus V_2 \oplus \ell_2 \oplus \cdots \oplus V_k \otimes \ell_k$上引入微分的结果，也可以表示为一个复形，其各项是若干个 ℓ_i的直和。最终，在这类操作下取闭包，就得到由 $\mathbb{W}_m^{(\upsilon)}$生成的 DG 范畴。这启发了

定义 7.1. 令 $\widehat{\mathcal{C}}_\rho^B$ 为由对象 $\mathbb{W}_m^{(\upsilon)}$生成的 *DG* 范畴，其态射由 (7.19)给出。换言之，$\widehat{\mathcal{C}}_\rho^B$ 的对象是这样的复形：其项是 $\mathbb{W}_m^{(\upsilon)}$及其上同调移位的直和，且其映射是 $\mathbb{W}_m^{(\upsilon)}$之间的态射。若两个复形拟同构，则视为等价；这意味着它们在 *B*-扭曲拓扑量子场论中表示同一个线算子。

就底层的 $\mathcal{N} = 4$ 理论而言，纯 Wilson 线 $\mathbb{W}_m$ 来自与 B 扭曲相容的半 BPS 线算子。单值化-威尔逊线 $\mathbb{W}_m^{(\upsilon)}$似乎

只能是四分之一 BPS，这是由于必须用束缚态对其进行修饰。由 $\mathbb{W}_m$'s 和 $\mathbb{W}_m^{(\upsilon)}$'s 构成的更一般的复形都对应于四分之一 BPS 线算子。

例。 让我们继续讨论上面的 *SQED*$_1$ 例子。我们将介绍 *DG* 范畴 $\widehat{\mathcal{C}}^{B}_{(1)}$中的几个"四分之一 *BPS*"对象。

平凡线算符 $\mathbb{W}_0 = \mathbb{1}$ 和威尔逊线 $\mathbb{W}_{-1}$ 之间有一个态射 $X \in \mathit{Hom}(\mathbb{W}_{-1}, \mathbb{W}_0)$，因此我们可以构造一个复形

$$\mathbb{W}_{-1} \xrightarrow{X} \mathbb{W}_0 \tag{7.23}$$

注意，"X"自然具有 *1* 的上同调次数，这正是微分所要求的。

复形 (7.23) 可以有几种不同的解释。它表示平凡线算符与 $\mathbb{W}_{-1}$ 的束缚态——这是它们之和 $\mathbb{W}_0 \oplus \mathbb{W}_{-1}$ 经微分 $\left(\begin{smallmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ 变形后的结果。这也称为 W_0 被 W_{-1}扩张，或者映射 $X : W_{-1} \to W_0$的锥。

或者，注意到在 (7.23) 中除以微分的像会令 $X = 0$消失，我们可以将 (7.23) 大致看作一个施加 $X = 0$的单一线算子。

威尔逊线的其他束缚态/扩张也可以用类似的方式描述。存在一个束缚态

$$\mathbb{W}_1 \xrightarrow{Y} \mathbb{W}_0\,, \tag{7.24}$$

它实际上将 $Y = 0$设为零。存在一个更高阶束缚态，将(7.23) 与 (7.24)结合起来

$$\mathbb{W}_0 \xrightarrow{\binom{Y}{X}} \mathbb{W}_{-1} \oplus \mathbb{W}_1 \xrightarrow{(-X\ Y)} \mathbb{W}_0\,, \tag{7.25}$$

它（粗略地说）将 $X = 0$ 和 $Y = 0$都设为零，并且包含任意长度的 (7.23) 的迭代自扩张，例如

$$\mathbb{W}_{-1} \xrightarrow{X} \mathbb{W}_0 \xrightarrow{Y} \mathbb{W}_{-1} \xrightarrow{X} \cdots \xrightarrow{Y} \mathbb{W}_{-1} \xrightarrow{X} \mathbb{W}_0\,. \tag{7.26}$$

（注意，每个微分 $X \cdot Y$和 $Y \cdot X$ 的复合都为零，因为矩映射 (7.20) 被设为零。）

对于一般的 $\upsilon \neq 0$ *(*模 $\mathbb{Z}$*)* 单值化缺陷，我们发现存在任意长度的如下形式的自扩张

$$\mathbb{W}^{(\upsilon)} \xrightarrow{\lambda} \mathbb{W}^{(\upsilon)} \xrightarrow{\lambda} \cdots \xrightarrow{\lambda} \mathbb{W}^{(\upsilon)} \xrightarrow{\lambda} \mathbb{W}^{(\upsilon)}\,. \tag{7.27}$$

7.1.4 基本张量积与编织

我们希望范畴 $\widehat{\mathcal{C}}^{B}_{\rho}$对其封闭的第二种运算是张量积，它在物理上由平行线算符的碰撞诱导。最终，我们将通过将 $\widehat{\mathcal{C}}^{B}_{\rho}$ 展示为一个阿贝尔

顶点算子代数模范畴来论证它对张量积封闭，而该范畴本身具有定义良好的精确张量积。在此，我们仅指出，可以猜出 $\mathbb{W}_m^{(v)}$之间的一些（但并非全部）张量积。

例如，考虑纯 Wilson 线 $\mathbb{W}_m$。由于它们生成拓扑一形式对称性，我们必定有一个简单的融合规则。

$$\mathbb{W}_m \otimes \mathbb{W}_{m'} \simeq \mathbb{W}_{m+m'} \,. \tag{7.28}$$

M此外，显然，从定义单值化-威尔逊线的束缚态可知。 t

$$\mathbb{W}_m \otimes \mathbb{W}_{m'}^{(v')} \simeq \mathbb{W}_{m+m'}^{(v')} \,. \tag{7.29}$$

单值化缺陷的碰撞则更加棘手。然而，围绕相邻平行线算子的阿贝尔单值化必须相加，因此一般来说我们必须有

$$\mathbb{W}_m^{(v)} \otimes \mathbb{W}_{m'}^{(v')} = \text{some complex of } \mathbb{W}_{m''}^{(v+v')}, \text{ for various } m'' \,. \tag{7.30}$$

最终我们将通过融合边界顶点算子代数模看到，(7.30) 通常包含若干不同的直和项和/或复形。其具体结构取决于对于单值变换 v、v' 和 $v+v'$，哪些超多重态标量实际上被设为零。

例。考虑 *SQED*$_1$，和单值化线 $\mathbb{W}_0^{(v)}$，$\mathbb{W}^{(v')}{}_0$，其中 v、v' 和 $v+v'$ 均不消失（模 $\mathbb{Z}$）。$\mathbb{W}_0^{(v)}$，$\mathbb{W}^{(v')}{}_0$ 各自都包含一个由纯 *Wilson* 线 $\mathbb{W}_0$ 和 $\mathbb{W}_1$ 构成的束缚态，因此它们的张量积应包含一个束缚态 $(\mathbb{W}_0 \oplus \mathbb{W}_1)^{\otimes 2} = \mathbb{W}_0 \oplus \mathbb{W}_1 \oplus \mathbb{W}_1 \oplus \mathbb{W}_2$。将其重新分组为 $\mathbb{W}^{(v+v')}{}_m$ 线的唯一方式是

$$\mathbb{W}_0^{(v)} \otimes \mathbb{W}_0^{(v')} \simeq \mathbb{W}_0^{(v+v')} \oplus \mathbb{W}_1^{(v+v')} \,. \tag{7.31}$$

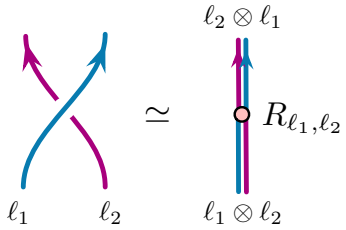
这个例子可以推广到任何简单阿贝尔理论。只要 v，v'，$v+v'$ 都要求同一组超多重态消失，我们就预期

$$\mathbb{W}_m^{v} \otimes \mathbb{W}_{m'}^{v'} \simeq \Big[\bigotimes_{i \text{ s.t. } \rho(v)^i \notin \mathbb{Z}} \big(\mathbb{1} \oplus \mathbb{W}_{(0,\ldots,\underset{i}{1},\ldots,0)} \big) \Big] \otimes \mathbb{W}_{m+m'}^{(v+v')} \,. \tag{7.32}$$

当不同的超多重态消失时，右端可能会更有意思。

我们还可以直接根据体理论考量猜测一些基本的编织态射。回忆一下，线 ℓ_1, ℓ_2 的编织是一个同构 $c_{\ell_1,\ell_2} \in \mathrm{Hom}(\ell_1 \otimes \ell_2, \ell_2 \otimes \ell_1)$，它

cor在物理上对应于由编织构型定义的局部算子



(7.33)

由于规范联络没有体 Chern–Simons 项，我们预期威尔逊线彼此编织时是平凡的，

$$R_{\mathbb{W}_m,\mathbb{W}_{m'}} = \mathrm{id} \in \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}^B_\rho}(\mathbb{W}_m \otimes \mathbb{W}_{m'}, \mathbb{W}_{m'} \otimes \mathbb{W}_m) = \mathrm{End}_{\widehat{\mathcal{C}}^B_\rho}(\mathbb{W}_{m+m'})\,. \tag{7.34}$$

事实证明，这在一个符号差异以内是成立的。此外，将一条威尔逊线绕单值化缺陷一整圈，应该可以测量其单值化。这可表示为

$$\mu(\mathbb{W}_{m'}, \mathbb{W}^{(\upsilon)}_m) = e^{2\pi i m\cdot\upsilon} \cdot \mathrm{id} \in \mathrm{End}_{\widehat{\mathcal{C}}^B_\rho}(\mathbb{W}^{(\upsilon)}_{m+m'})\,, \tag{7.35}$$

一般而言，单值化或双重编织定义为

$$\mu(\ell, \ell') = R_{\ell',\ell} \circ R_{\ell,\ell'} \in \mathrm{End}(\ell \otimes \ell')\,. \tag{7.36}$$

其他单值化-威尔逊线以及更一般的束缚态，其编织关系可能极其复杂!

7.2 A 扭曲

接下来，我们将介绍 B 扭曲中基本线算子的 A 扭曲镜像。为此，回顾半 BPS 线的几何分类会很有帮助，相关分类出自 [DGGH19]。

7.2.1 A 扭曲中的线算子综述

与三维 $\mathcal{N} = 4$规范理论的 A 扭曲相容的半 BPS 线算子由 [DGGH19]，构造，其动机来自对四维超对称规范理论中曲面算子的刻画（始于 [GW06]）以及 Webster 的数学工作[Web19] 和 Hilburn-Yoo 的工作。这些线算子是广义涡旋线，与规范场和物质场中的拉格朗日子流形奇点 相关。

具体而言，将三维时空取为 $\mathbb{C}_{z,\ \bar{z}} \times \mathbb{R}_t$，并在 $z = \bar{z} = 0$ 处放置线算子，一组基本的半 BPS 线算子由以下条件分类:

1）为超多重态标量 $\big(X(z)\ Y(z)\big)\in\mathcal{L}$ 在 $z=0$ 附近的 $z=0$ 附近选择一种亚纯边界条件，该条件由子簇 $\mathcal{L}\subset V((z))\times V^*((z))$ 定义，使得

– $\mathcal{L}$ 相对于全纯辛形式 $\Omega=\oint dz\,\langle\delta Y(z)\wedge\delta X(z)\rangle$ 是全纯拉格朗日子流形——也就是说，它是 Ω 在其上为零的极大簇；并且– $\mathcal{L}$ 与规范对称性的全纯矩映射 $\mu^a=\rho_i{}^aX^i(z)Y^i(z)$ 的消失相容，即 $\{\mu^a=0\}\cap\mathcal{L}\neq\oslash$。

2) 选择 $z=0$ 附近复化亚纯规范变换的子群 $\Gamma\subset G_{\mathbb{C}}((z))$，该子群保持 (1) 中的边界条件。

这一几何描述是在将规范群复化并转到全纯规范后得到的。

这里我们使用记号 $\mathbb{C}[\![z]\!]$ 表示形式幂级数（$z=0$ 的无穷小邻域内的全纯函数），使用 $\mathbb{C}((z))$ 表示形式洛朗级数（$z=0$ 的无穷小邻域内的亚纯函数）。$V((z))\times V^*((z))$ 上的坐标由洛朗级数的系数给出。

$$X^i(z)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}x^i_kz^k\,,\qquad Y^i(z)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}y^i_kz^k\,,\tag{7.37}$$

其中全纯辛形式为 $\Omega=2\pi i\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{i=1}^n\delta y^i_k\wedge\delta x_{-k-1}$。

例。 平凡线／单位线算子具有

$$\mathbb{1}:\quad \mathcal{L}_{\mathbb{1}}=V[\![z]\!]\times V^*[\![z]\!]\,,\qquad \Gamma_{\mathbb{1}}=G_{\mathbb{C}}[\![z]\!]\,,\tag{7.38}$$

这仅仅说明超多重态标量和规范变换在$z=0$附近是正则的。空间 $\mathcal{L}_{\mathbb{1}}$ 由约束 $x_k=y_k=0\ \ \forall k<0$确定；这是一个使 $\Omega\big|_{\mathcal{L}_{\mathbb{1}}}=0$ 的极大子空间。

我们还将对涡旋线施加一个自然的有限性条件，要求其奇点数据（$\mathcal{L}$，Γ）与单位线的奇点数据（7.38）相距有限。具体而言，我们要求（$\mathcal{L}\cup\mathcal{L}_{\mathbb{1}}$）\（$\mathcal{L}\cap\mathcal{L}_{\mathbb{1}}$）和（$\Gamma\cup\Gamma_{\mathbb{1}}$）\（$\Gamma\cap\Gamma_{\mathbb{1}}$）的维数均有界。从物理角度看，若通过将体三维理论与沿线的一维量子力学耦合来定义线算符，那么有限性条件意味着要求该量子力学（在拓扑扭曲下）具有有限维希尔伯特空间。

我们现在将 描述简单阿贝尔规范理论中两类涡旋线，它们具有

$$\Gamma=\Gamma_{\mathbb{1}}=GL(1,\mathbb{C}[\![z]\!])^r\,,\tag{7.39}$$

就像单位线（7.38）。（这里 $U(1)_{\mathbb{C}}[\![z]\!] = GL(1,\ \mathbb{C}[\![z]\!])$ 是可逆幂级数构成的群，也就是说，常数项非零的幂级数。）

7.2.2 味涡旋

由 $\Gamma_{\mathbb{1}}$ 保持的第一类阿贝尔涡旋线，已在 [DGGH19] 中得到详细研究。它们称为味涡旋。（它们也曾出现在 [BDGH16、BFN21]以及更早期关于三维 $\mathcal{N}=2$ 理论中超对称线算符的研究中。更完整的参考文献列表见 [DGGH19] 。）

对于任意 $\lambda \in \mathbb{Z}^n$，考虑如下条件

$$X^i \in z^{\lambda^i}\mathbb{C}[\![z]\!]\,, \quad Y^i \in z^{-\lambda^i}\mathbb{C}[\![z]\!]\,, \tag{7.40}$$

即 $X,\ Y \in \mathcal{L}_\lambda$ 其中 $\mathcal{L}_\lambda = \left\{x^i_{k+\lambda^i}=0,\, y^i_{k-\lambda^i}=0\right\}_{k<0^\circ}$ 这使每个 X^i 可以具有某一阶数的极点，同时迫使 Y^i 具有同阶的零点，反之亦然。极点与零点的配对确保了 $\mathcal{L}_\lambda$ 是拉格朗日子流形。

每个上述 $\mathcal{L}_\lambda$ 都定义一条涡旋线。然而，这些涡旋线并非彼此独立，因为它们可能被动力学涡旋粒子屏蔽。事实上，在一条线算子附近施加 $g(z) = z^m$ （对任意 $m \in \mathbb{Z}^r$）的（复化）规范变换，会将 $(X,Y) \mapsto (z^{\rho(m)}X, z^{-\rho(m)}Y)$。这使得由λ、 $\lambda' \in \mathbb{Z}^n$ 标记的任意两条涡旋线等价，只要 $\lambda - \lambda' \in \rho(\mathbb{Z}^r)$ 。在按（3.1）所示的规范/味荷正合列选定一个分裂 σ 后，我们可以用味对称性 $m \in \mathsf{cochar}(T_F) \simeq \mathbb{Z}^{n-r}$的余特征来标记不等价的线算符，

$$\mathbb{V}_m: \quad X(z) \in z^{\sigma(m)}\mathbb{C}[\![z]\!]\,, \quad Y(z) \in z^{-\sigma(m)}\mathbb{C}[\![z]\!]\,, \qquad m \in \mathbb{Z}^{n-r}\,. \tag{7.41}$$

之所以将 $\mathbb{V}_m$ 称为“味涡旋”，是因为对 T_F 施加非恒定的味对称性变换（通过 z^m），便可在 $z=0$的穿孔邻域中产生它们 $\pi_1(T_F)$。这立即表明它们是 $= \mathbb{Z}^{n-r}$ 的一形式对称性缺陷，这正如第6节所预期的那样。因此，它们也是 $\mathbb{W}_m$ 中威尔逊线 $\mathcal{T}^B_{\rho^\vee}$的三维镜像。

我们注意到，定义7.41的约束 $\mathbb{V}_m$ 保持了上同调 $U(1)_C$ 对称性（A 扭曲下的对称性，其中 $X,\ Y$ 不带电）。它们也保持了 A 扭曲下的扭曲自旋：由 $U(1)_H$ 与 z 平面内旋转构成的对角子群；在边界顶点算子代数中，这成为共形分级，参见(3.13)。回忆一下， X、 Y以及坐标 z 的扭曲自旋为

$$|X| = |Y| = \tfrac{1}{2}\,, \qquad |z| = -1\,. \tag{7.42}$$

7.2.3 味缺陷

还有第二类具有正则规范对称性的涡旋线 $\Gamma_{\mathbb{1}}$，它们也保持$U(1)_C$ 上同调对称性和扭曲自旋。我们预计它们是单值化缺陷的三维镜像。

令 $\upsilon \in \mathbb{C}^{n-r}$。构造单值化缺陷的镜像的第一个设想，是将 T_F 味对称性的复矩映射的留数固定为常数值

$$\mu_F \sim \frac{\upsilon}{z} + \text{regular} \qquad \text{near } z = 0\,, \tag{7.43}$$

其中 $\mu_F = \sigma^T(XY)$，或者写成分量形式

$$\mu_F^\alpha = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i{}^\alpha X^i Y^i\,. \tag{7.44}$$

这基于几个理由是合理的。它为 X 诱导出一个奇异的亚纯剖面，Y在 $z=0$附近，这符合第 7.2.1节对涡旋线的一般几何刻画。此外，它保持了扭曲自旋：由于 μ_F是 X的双线性形式，Y其扭曲自旋为 1，因此其留数无量纲，可以设为非零常数值。

考虑（7.43）的一个更强动机来自三维镜像对称。 mu_F 中的复味矩映射 $\mathcal{T}_\rho$ 是 φ 中的复矢量多重态标量 $\mathcal{T}_{\rho^\vee}$的三维镜像。在 B 扭曲中，后者将 $\mathbb{C}_{z\text{-}\bar{z}}$ 平面中的规范联络复化，形成组合 $\mathcal{A} = A + i\,(\varphi\, dz + \varphi\, d\bar{z})$，该组合在单值化缺陷（7.10）附近出现极点。

就底层的三维 $\mathcal{N} = 4$ 理论而言，单值化的直接镜像$\mathcal{A} = \frac{\upsilon}{2i}\left(\frac{dz}{z} - \frac{d\bar{z}}{\bar{z}}\right)$并不完全是（7.43）。相反，镜像映射令 $\mu_F \sim \mathrm{Im}(\upsilon)/z$同时在 T_F 附近的味流中产生奇点 $z = 0$。为了解这一点，考虑单值化奇点附近复化联络的规范不变曲率，

$$\mathcal{F} = d\mathcal{A} = 2\pi\upsilon\delta^{(2)}(z,\bar{z}) \tag{7.45}$$

实曲率是下列对象的霍奇对偶 T_{top} 味对称性流，在 $\mathcal{T}_{\rho^\vee}$ 因此，复化曲率可写为 $\mathcal{F} = *J_{\text{top}} + id(\varphi\, dz + \varphi\, d\bar{z})$. （7.45）在 $\mathcal{T}_\rho$ 中的三维镜像因此为

$$*\,J_F + i(\partial_{\bar{z}}\mu_F - \partial_z\bar{\mu}_F) = 2\pi\upsilon\delta^{(2)}(z,\bar{z})\,. \tag{7.46}$$

υ 的虚部指定了 μ_F 中的奇点，而实部指定了 $*J_F$ 中的奇点。

身份　　化 (7.46) 解释了为什么单值化线真正的物理镜像应由一个

周期 参数 $\upsilon \in (\mathbb{C}/\mathbb{Z})^{n-r}$ 标记。物理理论 $\mathcal{T}_\rho$ 包含具有所有整数值 T_F 味荷的动力学粒子，这些粒子本身会在味流中产生 δ 函数奇点。存在带味荷的粒子时，只能为等价类 $\mathrm{Re}(\upsilon) \in (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{n-r}$ 确定 $\mathrm{Re}(\upsilon)\delta^{(2)}(z,\bar{z})$。

在 $\mathcal{T}_\rho$的 A 扭曲中，约束（7.43）等价于（7.46），相差 Q-恰当项。（在 A 扭曲中，味流本身是恰当的，也不再有 T_F-带电粒子。）参数 υ 的周期性在线算子范畴中恢复，因为相差整数倍 υ 的线在范畴中都成为等价对象。第8.2–8.3节的顶点算子代数模将清楚地体现这种周期性。在 A 扭曲中，线算子被描述为环空间上的 D-模，这也清楚地体现了这种周期性，参见 [CCG18、HR21], ，不过本文不再进一步探讨这一视角。

要完整定义单值化线的镜像，还必须克服一个重要的额外微妙之处。这与仔细定义 B 扭曲单值化线本身时所需的额外选择如出一辙。从 A 扭曲的视角看，问题在于，约束（7.43）定义了 $V((z)) \times V^*((z))$中的一个子簇，它与单位线对应的拉格朗日子流形 $\mathcal{L}_{\mathbb{1}} = V[\![z]\!] \times V^*[\![z]\!]$ 相距无限远。特别是，（7.43）允许 X 和 Y 场的无穷多个负（极）模自由变化。为满足第7.2.1节的有限性条件，我们必须在 $V((z)) \times V^*((z))$中指定一个与 $\mathcal{L}_{\mathbb{1}}$ 相距有限、同时仍允许留数（7.43）的拉格朗日子流形。对此不存在唯一的最小方案。有多种选择，彼此之间都可通过与味涡旋作张量积联系起来 $\mathbb{V}_m$。

一种最简选择如下。我们可以通过保持所有 X 场正则，并让 μ_F =场

–

$$X^i(z) = x_0^i + x_1^i z + \dots \tag{7.47}$$

具有一阶极点，来“求解”留数约束 Y ()

$$Y^i(z) = \frac{y_{-1}^i}{z} + y_0^i + y_1^i z + \dots \quad \text{such that} \quad y_{-1}^i = \frac{\rho^\vee(\upsilon)^i}{x_0^i}\,. \tag{7.48}$$

这里 $\rho^\vee\colon \ \mathbb{Z}^{n-r} \to \mathbb{Z}^n$ 是正合列中的第二个映射（3.1）；它满足 $\sigma^T\rho^\vee = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}^{n-r}}$，因此（7.48）推出 $\mu_F = \frac{\upsilon}{z} + \dots$。与这些约束相关的 $V((z)) \times V^*((z))$ 子簇为

$$\mathcal{L}^{\upsilon,Y} := \begin{cases} x_k = 0 & k < 0 \\ y_k = 0 & k < -1 \\ y_{-1}^i = 0 & \rho^\vee(\upsilon)^i = 0 \\ y_{-1}^i x_0^i = \rho^\vee(\upsilon)^i & \rho^\vee(\upsilon)^i \neq 0 \end{cases} \tag{7.49}$$

簇 $\mathcal{L}^{\upsilon,\ Y}$ 现在距离 $\mathcal{L}_{\mathbb{1}}$ 仅有限远。还可以直接验证它是拉格朗日子流形。特别地， $\mathcal{L}^{\upsilon,\ Y}$ 可以由 $\mathcal{L}_{\mathbb{1}}$ 构造为生成函数的图像

$$f^{\upsilon}:\mathcal{L}_{\mathbb{1}}\to\mathbb{C}\,,\qquad f^{\upsilon}(\{x_k,y_k\}_{k\geq 0}):=\rho^{\vee}(\upsilon)\cdot\log x_0\,. \tag{7.50}$$

这个生成函数的指数 $\exp(f^{\upsilon})\ =x^{\rho^{\vee}(\upsilon)}\ 0$ 将在边界顶点算子代数模的定义中直接发挥作用，参见(8.20)。

为了求解 $\mu_F=\upsilon/z+\ldots$，选择只让 Y的模出现极点，而不让X和 Y的某种其他组合出现极点，完全是任意的。不过，所有其他选择都可以通过对 X和 Y的模作平移，与*(7.49)* 联系起来，也就是说，将$(X,\ Y)\ \mapsto(z^{\lambda}X,\ \ z^{-\lambda}Y)$，其中 $\lambda\in\mathbb{Z}^n$为某个。回顾第7.2.2节，对规范荷作平移会得到等价的线算子。求解的不同最简方法，只需将(7.49) 与所有可能的味荷平移相结合即可分类。这将产生一个完整的涡旋线族，

$$\mathbb{V}_m^{(\upsilon)}:=\quad\begin{cases}X\in z^{\sigma(m)}\mathbb{C}[\![z]\!]\\ Y\in z^{-\sigma(m)-1}\mathbb{C}[\![z]\!]\end{cases}\qquad\text{and}\quad y^i_{-\sigma(m)^i-1}=\frac{\rho^{\vee}(\upsilon)^i}{x^i_{\sigma(m)^i}}\,. \tag{7.51}$$

我们提出，这些是单值化-威尔逊线的三维镜像（7.14）。我们将整个族称为味缺陷。

当 $\upsilon=0$ 一个味缺陷变为标准味涡旋时， $\mathbb{V}_m^{(0)}\simeq\mathbb{V}_m$。我们还预期存在等价关系

$$\mathbb{V}_m^{(\upsilon)}\simeq\mathbb{V}_m^{(\upsilon')}\quad\text{when}\quad\upsilon-\upsilon'\in\mathbb{Z}^r\,, \tag{7.52}$$

我们最终将在第8.2–8.3节证明这些等价关系。

7.2.4 态射、融合、编织与范畴

在 B 扭曲中，我们计算了单值化-威尔逊线之间的所有态射空间（7.19）$\mathbb{W}_m^{\upsilon}$。如果味缺陷（7.51）确实是单值化-威尔逊线的三维镜像，那么两者应当对应

$$\mathrm{Hom}^{\bullet}(\mathbb{V}_m^{\upsilon},\mathbb{V}_{m'}^{\upsilon'})\ \text{ in }\mathcal{T}_{\rho}^{A}\ \ \simeq\ \ \mathrm{Hom}^{\bullet}(\mathbb{W}_m^{\upsilon},\mathbb{W}_{m'}^{\upsilon'})\ \text{ in }\mathcal{T}_{\rho^{\vee}}^{B} \tag{7.53}$$

对于所有 $m\in\mathbb{Z}^{n-r}$ 和 $\upsilon\in(\mathbb{C}/\mathbb{Z})^{\ n-r}$。

当 $\upsilon=\upsilon'=0$时，A 扭曲中的态射空间由单极算子生成。它们在 [DGGH19] 中通过一种态算符对应方法计算得出，该方法导出了涡旋方程解模空间的上同调。该结果已被证明满足（7.53）。（也可以使用 Braverman-

Finkelberg-Nakajima 为构造库仑分支而引入的方法 [BFN21、Web16、Web19]。）类似方法也应能计算更一般的 υ，υ' 的态射空间，不过这里不再展开。

就像在 B 扭曲中一样，A 扭曲中的线算子还可以进一步组合——相加和/或与一维量子力学耦合，并彼此碰撞。它们应当构成一个 DG 编织张量范畴。包含我们刚刚构造的所有味缺陷的最小范畴是：

定义 7.2。令 $\widehat{\mathcal{C}}_\rho^A$ 为由 *A* 扭曲理论 $\mathcal{T}_\rho^A$中的味缺陷 $\mathbb{V}_m^\upsilon$生成的 *DG* 范畴。换言之，$\widehat{\mathcal{C}}_\rho^A$ 的对象由 $\mathbb{V}_m^\upsilon$的复形及其上同调移位（模去拟同构）表示。

就底层物理三维 $\mathcal{N}=4$ 理论而言，味涡旋 $\mathbb{V}_m$ 表示半 BPS 线算子 [DGGH19]。更一般的味缺陷 $\mathbb{V}_m^{(\upsilon)}$似乎也表示半 BPS 线算子，因为在环空间刻画中，它们对应的是全纯拉格朗日子流形（而非实拉格朗日子流形）。这似乎与单值化威尔逊线 $\mathbb{W}_m^{(\upsilon)}$属于四分之一 BPS 的情况相矛盾，由此留下了一个有待解决的小谜题。和 的一般复形都会是四分之一 BPS。

在第8.3节中，我们将构造一个顶点算子代数模的阿贝尔范畴，其简单对象恰好就是 $\widehat{\mathcal{C}}_\rho^A$，并且其导出态射空间符合三维镜像对称的所有预期（7.53）。将体涡旋缺陷识别为边界顶点算子代数的模是直接明了的，因为边界顶点算子代数显然是由 X和 Y 体场的模构造而成。我们还将进一步在顶点算子代数模的范畴上建立编织张量结构。

这一编织张量结构中很小一部分可以直接从对称性考量中推断出来。具体而言，由于 $\mathbb{V}_m$ 是 $\mathbb{Z}^r$ 一形式生成元，我们预期

$$\mathbb{V}_m \otimes \mathbb{V}_{m'}^{\upsilon'} \simeq \mathbb{V}_{m+m'}^{\upsilon'} \,. \tag{7.54}$$

此外，根据将 $\mathbb{V}_m^{(\upsilon)}$识别为单值化缺陷的镜像这一点，我们预期有一个单值化

$$\mu(\mathbb{V}_{m'}, \mathbb{V}_m^{(\upsilon)}) = e^{2\pi i m'\cdot\upsilon'} \cdot \mathrm{id} \,. \tag{7.55}$$

在A扭曲中直接获取有关张量积和编织的任何进一步信息似乎极其困难。

8 来自边界顶点算子代数的线算子范畴

在本节中，我们使用边界顶点算子代数定义 $\mathcal{T}_\rho^A$和 $\mathcal{T}_\rho^B$的线算子编织张量范畴。

更具体地，对于理论 $\mathcal{T}_\rho^A$，利用同构 $\mathcal{V}_\rho^A \otimes \mathcal{V}_{\mathbb{Z}^{2r}}^{+-} \cong \widetilde{\mathcal{V}}_\rho^A \otimes \mathcal{V}_{bc}^V$，以及 $\mathcal{V}_{\mathbb{Z}^{2r}}^{+-}$ 和 $\mathcal{V}_{bc}^V$ 具有平凡的模范畴，我们在定义 8.10中，将阿贝尔范畴定义为 $\mathcal{C}_\rho^A$ 的广义模的全子范畴 $\widetilde{\mathcal{V}}_\rho^A$。我们将证明，该范畴具有由对数交织算子定义的编织张量范畴结构，并采用简单流扩张的思想；相关内容将在第 8.1节回顾。

对于理论 $\mathcal{T}_\rho^B$，可以直接使用以边界顶点算子代数表述的镜像对称性陈述，即定理4.4和定理5.6，将范畴 $\mathcal{C}_\rho^A$传输到 B 侧。不过，我们将采用另一种途径。我们将在定义 8.21中定义阿贝尔范畴 $\mathcal{C}_\rho^B$，将其作为 $\mathcal{V}_\rho^B$的模的一个全子范畴，并利用 $\mathcal{V}_\rho^B$是 $\widehat{\mathfrak{g}_\rho}$的简单流扩张这一事实，证明它具有编织张量范畴的结构。

我们提出如下数学定义：线算子范畴 $\widehat{\mathcal{C}}_\rho^A$和 $\widehat{\mathcal{C}}_\rho^B$为有界导出范畴：

$$\widehat{\mathcal{C}}_\rho^A \simeq D^b\mathcal{C}_\rho^A, \qquad \widehat{\mathcal{C}}_\rho^B \simeq D^b\mathcal{C}_\rho^B. \tag{8.1}$$

和 的张量结构与编织将由相应阿贝尔范畴的结构诱导而来，因为相关阿贝尔范畴上的张量积是正合的。根据这一提议，第7 节通过物理分析推导出的线算子之间的交汇空间，就是有界导出范畴中对象之间的 Yoneda 扩张群。

我们为这一提议给出以下论据：

1. 我们仔细分析 $\mathcal{C}_\rho^A$和 $\mathcal{C}_\rho^B$的内容，并证明这些范畴中的简单对象与第7节中的基本物理线算子一一对应。

2. 我们分析简单对象之间张量积和单值化的例子，并证明这些结果与第7节的物理分析结果一致。

3. 我们计算简单威尔逊线之间的导出扩张群，并证明这些结果重现了第7节的结果。

4. 更重要的是，我们证明了镜像对称性命题，即编织张量范畴（BTC）之间的等价：

$$\mathcal{C}_\rho^A \simeq \mathcal{C}_{\rho^\vee}^B, \qquad \mathcal{C}_\rho^B \simeq \mathcal{C}_{\rho^\vee}^A. \tag{8.2}$$

我们表明，在这一等价关系下，简单对象如物理学论证所预期的那样完美匹配。

本节的结构如下：

- 在第 8.1 节中，我们回顾 VOA扩张 [CKM17、CMY20a]，，尤其是简单流扩张 [CKL15] 的相关理论；我们将在定义编织张量范畴 $\mathcal{C}_\rho^A$和 $\mathcal{C}_\rho^B$ 时使用这些理论。

- 在第 8.2 节中，我们回顾基于 [BN22a] 的、来自边界顶点算子代数的阿贝尔镜像对称最基本的例子。它将成为本节其余内容的构建模块。

- 在第 8.3 节中，我们定义阿贝尔范畴 $\mathcal{C}_\rho^A$，并证明它具有编织张量范畴的结构。我们还对简单对象进行分类，计算其融合规则，并给出单值化的例子。

- 在第 8.4 节中，我们定义阿贝尔范畴 $\mathcal{C}_\rho^B$，并证明它具有编织张量范畴的结构。我们还对简单对象进行分类，计算其融合规则，并给出单值化的例子。

- 在第 8.5 节中，我们证明编织张量范畴 $\mathcal{C}_\rho^A \simeq \mathcal{C}_{\rho^\vee}^B$ 的等价。我们还说明了在这一等价下，各范畴中的简单对象如何对应。

- 在第 8.6节中，我们计算导出范畴 $D^b\mathcal{C}_\rho^B$中的导出扩张群，并证明它们与第 7节中的物理计算相符。

8.1 简单流扩张与交织算子

在给出 $\mathcal{T}_\rho^A$ 和 $\mathcal{T}_\rho^B$ 的线算子范畴定义之前，我们首先回顾简单流扩张的基本性质，其一般性足以处理我们的 VOA表示编织张量范畴。

设 $\mathcal{V}$ 是一个 VOA，$\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{V}$ 的广义模范畴。$\mathcal{C}$ 中的对象 $\mathcal{M}$ 是 $U(\mathcal{V})$ 的光滑模，其中 $\mathcal{V}$ 是泛包络代数。根据 Huang-Lepowsky-Zhang [HLZ10a、HLZ10b、HLZ10c、HLZ10d、HLZ10e、HLZ10f、HLZ11a、HLZ11b], 的工作，在对 $\mathcal{V}$ 和 $\mathcal{C}$ 施加某些条件后，$\mathcal{C}$ 上存在一种“张量积”结构，其中两个模的张量积被定义为对数交织算子的泛对象。

具体而言，给定三个模 $\mathcal{M}$，$\mathcal{N}$ 和 $\mathcal{P}$，对数交织算子是一个映射：

$$Y : \mathcal{M} \otimes \mathcal{N} \to \mathcal{P}\{z\}[\log z] \tag{8.3}$$

它满足 VOA 的态算子映射需要满足的一组类似性质。花括号表示带有任意可能复指数的形式幂级数，即形如以下的求和

$$\sum_{\substack{y\in\mathbb{C}\\ n\in\mathbb{N}}} P_{y,n}\, z^y\, (\log(z))^n, \qquad P_{y,n}\in\mathcal{P}.$$

完整定义请参见 [CKM17]。令 Int($\mathcal{M}\otimes\mathcal{N},\mathcal{P}$) 表示 $\mathcal{M},\mathcal{N},\mathcal{P}$ 交织算子（8.3）的集合。对于固定的 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$，交织算子空间的一个泛对象是一个记作 $\mathcal{M}\otimes_{\mathcal{V}}\mathcal{N}$ 的模，连同一个交织算子 $Y\colon\ \mathcal{M}\otimes\mathcal{N}\to\mathcal{M}\otimes_{\mathcal{V}}\mathcal{N}\{z\}[\log z]$，它诱导出一个同构

$$\mathrm{Int}(\mathcal{M}\otimes\mathcal{N},P)\cong\mathrm{Hom}(\mathcal{M}\otimes_{\mathcal{V}}\mathcal{N},\mathcal{P}), \tag{8.4}$$

对于任何其他模 $\mathcal{P}$。

通常而言，要验证此类泛对象的存在，尤其是张量范畴的存在，是相当困难的。通常，如果范畴 $\mathcal{C}$ 满足某些有限性条件 [CY21，定理 3.3。4]，则可以证明其存在。最著名的例子首先是与半单李代数相关联的仿射李代数的 Kazhdan-Lusztig 范畴，该范畴在至多某些层上满足必要的有限性条件，并具有编织张量范畴的结构；其次是任意中心荷下的 Virasoro 代数，其模范畴满足所有必要的有限性条件，因此具有编织张量范畴的结构 [CJOH+20]。一般而言，要在顶点算子代数的模范畴上建立编织张量范畴的结构，是一个相当困难的问题。

在实践中，尤其是在本文所研究的顶点算子代数中，范畴 $\mathcal{C}$ 将不直接满足确保顶点张量范畴存在的条件。特别地，范畴 $\mathcal{C}$ 中的对象将不具有有下界的共形次数。文献[CKM17、CMY20a] 针对以下情形解决了这一问题。假设存在一个顶点算子子代数 $\mathcal{W}\hookrightarrow\mathcal{V}$，使得 $\mathcal{V}$ 作为 $\mathcal{W}$ 的模分解为 $\mathcal{V}=\bigoplus_{c\in C}\mathcal{W}_c$，其中 $\mathcal{W}_c$ 是 $\mathcal{W}$的简单模，由一个阿贝尔群 C标记，并且算子乘积展开 $\mathcal{W}_c\otimes\mathcal{W}_{c'}\to\mathcal{W}_{cc'}((z))$。许多例子中，包括本文所考察的例子，都存在另一个阿贝尔群 $C^\vee$ 作用于 $\mathcal{V}$的情形，使得$\mathcal{W}=\mathcal{V}^{C^\vee}$为不变部分，且 $\mathcal{W}_c=\mathcal{V}^{C^\vee,\,c}$，其中 c 表示 $C^\vee$的特征格中的一个元素。在这种情况下，尽管 $\mathcal{V}$ 的模可能不具有有下界的共形次数，但若 $\mathcal{W}$ 的模具有有下界的共形次数，则仍可从 $\mathcal{V}$的交织算子中得到编织张量结构。

更具体地说，假设 $\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{W}$ 的一个模范畴，并且已证明它通过对数交织算子具有编织张量结构；又假设 $\mathcal{V}$ 是 $\mathcal{D}$ 中的一个对象。那么

我们可以将 $\mathcal{V}$ 视为 $\mathcal{D}$ 中的一个交换代数对象 $\mathcal{A}$，使得 $\mathcal{V}$ 的态-算子对应就是乘法映射：$\mathcal{V}\otimes_{\mathcal{W}}\mathcal{V}\to\mathcal{V}$，而局部性就是交换性条件。换言之，$\mathcal{V}$ 被视为一个张量函子，从 Vect_C（按 C 分级的向量空间范畴）映到 $\mathcal{D}$。我们称 $\mathcal{V}$ 为 $\mathcal{D}$ 中 $\mathcal{W}$ 通过 $\{\mathcal{W}_c\}_{c\in C}$ 得到的简单流扩张。设 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{D}$ 中的一个对象，具有左 $\mathcal{A}$-模结构，也就是说，存在一个诱导出该模结构的态射 $\mathcal{A}\otimes_{\mathcal{W}}\mathcal{M}\to\mathcal{M}$。那么，可以将这个态射解释为一个交织算子 $\mathcal{V}\otimes\mathcal{M}\to\mathcal{M}\{z\}[\log z]$。由于交织算子可能具有非局部性，这并不完全是一个 $\mathcal{V}$ 的模。非局部性由单值化度量；当单值化是单位元时，$\mathcal{M}$ 就是一个 $\mathcal{V}$-模。

这里的“单值化”指编织的平方。给定模 $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$以及编织同构

$$R_{\mathcal{M},\mathcal{N}}:\mathcal{M}\otimes_{\mathcal{W}}\mathcal{N}\to\mathcal{N}\otimes_{\mathcal{W}}\mathcal{M}\,,\qquad R_{\mathcal{N},\mathcal{M}}:\mathcal{N}\otimes_{\mathcal{W}}\mathcal{M}\to\mathcal{M}\otimes_{\mathcal{W}}\mathcal{N}\,,\tag{8.5}$$

$\mathcal{M}$ 与 $\mathcal{N}$ 之间的单值化为

$$\mu(\mathcal{M},\mathcal{N}):=R_{\mathcal{N},\mathcal{M}}\circ R_{\mathcal{M},\mathcal{N}}\in\mathrm{End}(\mathcal{M}\otimes_{\mathcal{W}}\mathcal{N})\,.\tag{8.6}$$

上面的局部性条件表明，若 $\mu(\mathcal{A},\mathcal{M})=\mathrm{id}$，则 $\mathcal{M}$是一个 $\mathcal{V}$-模。因此，在 $\mathcal{D}$ 中的 $\mathcal{A}$模对象若与 $\mathcal{A}$ 局部，则恰好是顶点算子代数 $\mathcal{V}$的一个模。我们将$\mathcal{A}$–$\mathrm{Mod}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{D})$记为 $\mathcal{D}$中局部 $\mathcal{A}$模所构成的范畴。它是 $\mathcal{V}$ 模范畴的一个全子范畴，而 [CKM17] 的工作给出了以下结论，这实质上是将对数交织算子的泛对象从 $\mathcal{W}$ 转移到 $\mathcal{V}$。

定理 8.1. $\mathcal{A}-\mathrm{Mod}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{D})$ 具有由对数交织算子的泛性质所定义的编织张量范畴结构。

在接下来的应用中，我们将直接把这个范畴称为 $\mathcal{V}$–$\mathrm{Mod}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{D})$，以强调它是 $\mathcal{V}$的广义模范畴。给定 $\mathcal{D}$中 $\mathcal{W}$的任意一个模 $\mathcal{M}$，可以通过 $\mathcal{A}\otimes_{\mathcal{W}}\mathcal{M}$得到 $\mathcal{A}$ 的一个左模。可以将其视为从<styIe id='10'>1（单位对象，即一个交换代数对象）的模归纳到 $\mathcal{A}$ 模。我们可以询问 $\mathcal{A}\otimes_{\mathcal{W}}\mathcal{M}$ 是否相对于 $\mathcal{A}$局部，也就是说，它是否能导出 $\mathcal{V}$的一个局部模。与上述局部性类似，这当且仅当单值化平凡时成立：

$$R_{\mathcal{M},\mathcal{A}}\circ R_{\mathcal{A},\mathcal{M}}=\mathrm{Id}.\tag{8.7}$$

因此，如果我们令 $\mathcal{D}^{[0]}$ 为 $\mathcal{D}$ 中对象与 $\mathcal{A}$ 具有平凡单值的全子范畴，那么该对应关系：

$$\mathcal{L}(\mathcal{M}):=\mathcal{A}\otimes_{\mathcal{W}}\mathcal{M}\tag{8.8}$$

给出一个函子：

$$\mathcal{L}: \mathcal{D}^{[0]} \longrightarrow \mathcal{V}-\mathrm{Mod}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{D}) \tag{8.9}$$

定理： [CKM17]态：

定理 8.2. 函子 $\mathcal{L}$ 是一个编织张量函子。如果 $\mathcal{D}$ 中的张量积是正合的，且不存在简单流固定点，那么 $\mathcal{L}$ 是一个满且满射的函子，它将简单对象映射为简单对象，并保持合成列 *[CMY22c，命题 3。2]*。

单流不动点是一个简单模 $\mathcal{M}$，满足 $\mathcal{W}_c \otimes_{\mathcal{W}} \mathcal{M} \cong \mathcal{M}$。本文中的所有范畴均不存在不动点。上述定理意味着，在 $\mathcal{V}$ 和 $\mathcal{W}$ 的假设下，即 $\mathcal{V}$ 是 $\mathcal{D}$ 中 $\mathcal{W}$ 的一个简单流扩张时，我们可以将范畴 $\mathcal{V}-\mathrm{Mod}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{D})$ 视为 $\mathcal{D}^{[0]}$ 关于 $C^{\vee}$ 的去等变化。这也记作 $D^{[0]}_{C^{\vee}}$，见 [EGNO15]。在这种情况下，去等变化的作用很简单：它将 $\mathcal{D}^{[0]}$ 中的对象 $\mathcal{M}$ 与所有 c 对应的对象 $\mathcal{W}_c \otimes_{\mathcal{W}} \mathcal{M}$ 视为同一对象，因此我们也将其启发式地记作 $\mathcal{D}^{[0]}/C$。因此，如果我们希望研究的范畴 $\mathcal{C}$ 恰好是 $\mathcal{D}^{[0]}/C$，那么 $\mathcal{C}$ 将具有编织张量范畴的结构。此外，张量积将是一个正合函子，因为它在 $\mathcal{D}$ 上是一个正合函子，并且 $\mathcal{L}$ 保持合成列。

我们还要指出，在本文的应用中，对象 $\mathcal{A}$ <style id='4}>从技术上讲并不是 $\mathcal{D}$的对象，因为对我们而言， C 将是 无限 循环群的乘积， $C = \mathbb{Z}^{\#}$。这一问题在 [CMY20a]中得到了解决：通过构造适当的完备化 Ind($\mathcal{D}$)，允许无限直和，并且编织张量范畴结构将自然延拓到这一完备化上。于是，上述所有表述都应用于 Ind($\mathcal{D}$)，从而即使 $\mathcal{V}$ 的模不具有有下界的共形次数，也可以得到一个 $\mathcal{V}$ 模的编织张量范畴。这一方法在 [BN22a]中成功应用于辛玻色子顶点算子代数 $\mathcal{V}_{\beta\gamma}$的情形，得到了一个具有编织张量范畴结构的 $\mathcal{V}_{\beta\gamma}$ 模的大范畴。这个范畴大幅扩展了 [AW20], 中研究的范畴，并且在 [BN22a] 中被预言为自由超多重态的 A 扭曲所对应的线算子范畴。

现在我们继续回顾 [BN22a], 的结果，因为它们不仅是一个基本例子，也是我们更一般构造的基础构建块。

8.2 线算子与阿贝尔镜像对称：第一个例子 e

在本节中，我们回顾线算子范畴中三维镜像对称的最简单例子，它对应于自由超多重态的 A 扭曲和 SQED 的 B 扭曲[1]。这一对三维镜像理论早在第 2.1.5 节中就已介绍。

超多重态的边界顶点算子代数 $\mathcal{V}^{A}_{\mathrm{hyper}} = \mathcal{V}_{\beta\gamma} \otimes \mathcal{V}_{bc}$，其中包含仿射顶点算子代数 $\mathfrak{gl}(1|1)$ 作为子顶点算子代数。事实上，根据 [CR11b]， $\mathcal{V}_{\beta\gamma} \otimes \mathcal{V}_{bc}$ 作为 $\mathfrak{gl}(1|1)$ 的一个模，是 $\mathbb{Z}$ 单流的直和。利用这一点， [BN22a] 定义了一个模范畴

$\mathcal{V}_{\beta\gamma} \otimes \mathcal{V}_{bc}$，其记作 $\mathcal{C}_{\beta\gamma}$。利用简单流扩张的技术，可以证明 $\mathcal{C}_{\beta\gamma}$ 是一个编织张量范畴，并且存在一个等价：

$$\mathcal{C}_{\beta\gamma} \simeq KL^{[0]}/\mathbb{Z} \tag{8.10}$$

编织张量范畴的。这是关于线算子范畴的镜像对称性陈述的一个实例。在接下来的两个小节中，我们将回顾范畴 $\mathcal{C}_{\beta\gamma}$ 以及上述等价的具体细节。

注。回想一下，自由费米子顶点算子代数 $\mathcal{V}_{bc}$ 的模范畴是平凡的。在该等价关系下，$\mathcal{V}_{\beta\gamma} \otimes \mathcal{V}_{bc}$ 的任意模范畴都等价于仅由 $\mathcal{V}_{\beta\gamma}$ 所对应的模范畴。

$$M \in \mathcal{V}_{\beta\gamma}\text{-}Mod \;\mapsto\; M \otimes \mathcal{V}_{bc} \in \mathcal{V}_{\beta\gamma} \otimes \mathcal{V}_{bc}\text{-}Mod\,. \tag{8.11}$$

8.2.1 $\mathcal{V}_{\beta\gamma}$ 的模范畴

我们回顾一下顶点算子代数 $\mathcal{V}_{\beta\gamma}$ 及其模范畴中的事实，出自 [BN22a]。回顾第 2.3.4 节，顶点算子代数 $\mathcal{V}_{\beta\gamma}$ 由场 $\beta(z)$ 和 $\gamma(z)$ 生成，其算子乘积展开为：

$$\beta(z)\gamma(w) \sim \frac{-1}{z-w}. \tag{8.12}$$

我们作出如下共形元的选择：

$$L(z) = \frac{1}{2}\left(:\partial\beta\gamma: - :\beta\partial\gamma:\right), \tag{8.13}$$

使共形权重为 $|\beta| = |\gamma| = \frac{1}{2}$，因此我们可以写出模展开：

$$\beta(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \beta_n z^{-n-\frac{1}{2}}, \qquad \gamma(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \gamma_n z^{-n-\frac{1}{2}}. \tag{8.14}$$

算子乘积展开导出了模的以下对易关系：

$$\beta(z)\gamma(w) \sim \frac{-1}{z-w} \rightsquigarrow [\gamma_n, \beta_{-n}] = 1. \tag{8.15}$$

对于所有 n，γ_n 和 β_{-n} 的对易关系与韦尔代数的对易关系相同，其中我们将γ_n 识别为 $\partial_{\beta_{-n}}$。因此，可以（直观地）将泛包络代数 $U(\mathcal{V}_{\beta\gamma})$视为韦尔代数的无限乘积：

$$U(\mathcal{V}_{\beta\gamma}) \sim \quad \cdots \quad \otimes \quad \mathbb{C}[\beta_{-1}, \gamma_1] \quad \otimes \quad \mathbb{C}[\beta_0, \gamma_0] \quad \otimes \quad \mathbb{C}[\beta_1, \gamma_{-1}] \quad \otimes \quad \mathbb{C}[\beta_2, \gamma_{-2}] \quad \cdots \tag{8.16}$$

严格来说，泛包络代数 $U(\mathcal{V}_{\beta\gamma})$是一个拓扑代数，其含义是：顶点算子代数 $\mathcal{V}_{\beta\gamma}$ 的一个模 $\mathcal{M}$ 是泛包络代数的一个模；对于每个 $m \in \mathcal{M}$，存在 $N > 0$ 使得 $\beta_n m = \gamma_n m = 0$ 对于 $n > N$。这些称为 $U(\mathcal{V}_{\beta\gamma})$的光滑模。这种图像在[BN22a], 中称为列图像，有助于直观理解这些模及其扩张。

现在，我们将 $\mathcal{V}_{\beta\gamma}$ 的简单模作为模代数的模引入，并用列图像表示。简单真空模 $\mathcal{V}_0$ 的表示如下：

$$\begin{array}{ccccccccccccc} U(\mathcal{V}_{\beta\gamma}) & \cdots & \otimes & \mathbb{C}[\beta_{-1},\gamma_1] & \otimes & \mathbb{C}[\beta_0,\gamma_0] & \otimes & \mathbb{C}[\beta_1,\gamma_{-1}] & \otimes & \mathbb{C}[\beta_2,\gamma_{-2}] & \cdots \\ \mathcal{V}_0 & \cdots & \otimes & \mathbb{C}[\beta_{-1}] & \otimes & \mathbb{C}[\gamma_0] & \otimes & \mathbb{C}[\gamma_{-1}] & \otimes & \mathbb{C}[\gamma_{-2}] & \cdots \end{array} \tag{8.17}$$

这里，写作 $\mathbb{C}[\beta_n]$时，我们指的是韦尔代数 $\mathbb{C}[\beta_n,\gamma_{-n}]$ 的模，其中 β_n 自由作用，而 γ_{-n} 作用为 ∂_{β_n}。类似地，写作 $\mathbb{C}[\gamma_n]$时，我们指的是韦尔代数 $\mathbb{C}[\gamma_n,\beta_{-n}]$ 的模，其中 γ_n 自由作用，而 β_{-n} 作用为 $-\partial_{\gamma_n}$。注意，正模在 $\mathcal{V}_0$上局部幂零地作用。这些简单模可以通过谱流自同构进行扭曲Σ，该自同构曾在第 5.1 节中用于定义简化的 A 扭曲边界顶点算子代数 $\widetilde{V}^A_\rho$。回顾一下，它在场上的作用如下：

$$\Sigma\beta = z\beta, \qquad \Sigma\gamma = z^{-1}\gamma. \tag{8.18}$$

这可用于扭曲简单模以获得 $\mathcal{V}_n := \Sigma^n\mathcal{V}_0$。我们可以将其写成列图像：

$$\begin{array}{ccccccccccccc} U(\mathcal{V}_{\beta\gamma}) & \cdots & \otimes & \mathbb{C}[\beta_{n-1},\gamma_{-n+1}] & \otimes & \mathbb{C}[\beta_n,\gamma_{-n}] & \otimes & \mathbb{C}[\beta_{n+1},\gamma_{-n-1}] & \otimes & \mathbb{C}[\beta_{n+2},\gamma_{-n-2}] & \cdots \\ \mathcal{V}_n & \cdots & \otimes & \mathbb{C}[\beta_{n-1}] & \otimes & \mathbb{C}[\gamma_{-n}] & \otimes & \mathbb{C}[\gamma_{-n-1}] & \otimes & \mathbb{C}[\gamma_{-n-2}] & \cdots \end{array} \tag{8.19}$$

对于每个 $\upsilon \in \mathbb{C}/\mathbb{Z}$，都有一个模 $\mathcal{W}_\upsilon$，其在列图像中的表示如下：

$$\begin{array}{ccccccccccccc} U(\mathcal{V}_{\beta\gamma}) & \cdots & \otimes & \mathbb{C}[\beta_{-1},\gamma_1] & \otimes & \mathbb{C}[\beta_0,\gamma_0] & \otimes & \mathbb{C}[\beta_1,\gamma_{-1}] & \otimes & \mathbb{C}[\beta_2,\gamma_{-2}] & \cdots \\ \mathcal{W}_\upsilon & \cdots & \otimes & \mathbb{C}[\beta_{-1}] & \otimes & \gamma_0^\upsilon\mathbb{C}[\gamma_0,\gamma_0^{-1}] & \otimes & \mathbb{C}[\gamma_{-1}] & \otimes & \mathbb{C}[\gamma_{-2}] & \cdots \end{array} \tag{8.20}$$

这里我们稍微滥用记号，也将 υ 用作 $\mathbb{C}$中的一个代表元。另一种定义方式是令$\mathcal{W}_\upsilon$ 由一个向量 w_υ 生成，使得 β 和 γ 的正模平凡作用，负模自由作用，并且 $\beta_0\gamma_0 w_\upsilon = -(\upsilon+1)w_\upsilon$。

我们强调， $\mathcal{W}_\upsilon$ 只取决于 $\upsilon \in \mathbb{C}/\mathbb{Z}$的等价类。对于 υ相差一个整数的模，它们之间存在显然的同构，因为 $\gamma_0^\upsilon\mathbb{C}[\gamma_0,\gamma_0^{-1}] = \oplus_{k\in\mathbb{Z}}\mathbb{C}\langle\gamma_0^{\upsilon+k}\rangle$。

当 $\upsilon \neq 0 \in \mathbb{C}/\mathbb{Z}$， $\mathcal{W}_\upsilon$ 是不可约的。否则，它属于以下短正合列

:

$$0 \longrightarrow \mathcal{V}_0 \longrightarrow \mathcal{W}_0 \longrightarrow \mathcal{V}_1 \longrightarrow 0 \tag{8.21}$$

我们将 $\mathcal{W}_0$ 记为 $\mathcal{W}_0^+$，并引入 $\mathcal{W}_0^-$，它是列表示如下的模

$$\begin{array}{ccccccccccccc} U(\mathcal{V}_{\beta\gamma}) & \cdots & \otimes & \mathbb{C}[\beta_{-1},\gamma_1] & \otimes & \mathbb{C}[\beta_0,\gamma_0] & \otimes & \mathbb{C}[\beta_1,\gamma_{-1}] & \otimes & \mathbb{C}[\beta_2,\gamma_{-2}] & \cdots \\ \mathcal{W}_0^- & \cdots & \otimes & \mathbb{C}[\beta_{-1}] & \otimes & \mathbb{C}[\beta_0,\beta_0^{-1}] & \otimes & \mathbb{C}[\gamma_{-1}] & \otimes & \mathbb{C}[\gamma_{-2}] & \cdots \end{array} \tag{8.22}$$

这构成如下短正合列:

$$0 \longrightarrow \mathcal{V}_1 \longrightarrow \mathcal{W}_0^- \longrightarrow \mathcal{V}_0 \longrightarrow 0 \tag{8.23}$$

我们也可以取谱流 $\Sigma^n\mathcal{W}_\upsilon$；当 $\upsilon \neq 0 \in \mathbb{C}/\mathbb{Z}$ 时，它们仍然是单的。总之，我们定义:

定义 8.3。 范畴 $\mathcal{C}_{\beta\gamma}$ 是 $\mathcal{V}_{\beta\gamma}$ 模的最小阿贝尔全子范畴，其中的对象具有有限长度，其合成因子为 $\Sigma^n\mathcal{W}_\upsilon$ 和 $\mathcal{V}_n$，其中 $\upsilon \neq 0$ 模 $\mathbb{Z}$ 且 $n \in \mathbb{Z}$。

这个范畴允许如下分解:

$$\mathcal{C}_{\beta\gamma} = \bigoplus_{\upsilon\in\mathbb{C}/\mathbb{Z}} \mathcal{C}_{\beta\gamma,\upsilon} \tag{8.24}$$

其中 $\mathcal{C}_{\beta\gamma,\ \upsilon}$ 是由 $\Sigma^k\mathcal{W}_\upsilon$生成的子范畴，也可以通过要求 $J_0^{\beta\gamma}$ 的广义特征值包含于 υ来刻画; 回顾一下， $J^{\beta\gamma}(z) =-: \beta(z)\gamma(z):$ 。

将 简单 模与 $\mathcal{C}_{\beta\gamma}$ 第 7.2 节中的物理涡旋线对应起来是直接的。场 β、γ 生成的 $\mathcal{V}_{\beta\gamma}$ 是体超多重态标量场的边界值 Y（z） X（z）。与第 7.2节中对味涡旋和味缺陷的描述进行比较，我们可以对应出

$$\text{bulk } \mathbb{V}_m^{(\upsilon)} \leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{V}_m & \upsilon = 0 \mod \mathbb{Z} \\ \Sigma^m\mathcal{W}_\upsilon & \upsilon \neq 0 \mod \mathbb{Z} \end{cases} \tag{8.25}$$

特别地，真空模的谱流使 X 出现某阶零点，并允许 Y 出现同阶极点（反之亦然），与$\mathbb{V}_m$（7.41）中的味涡旋相匹配。具有 $\upsilon \neq 0$ 的模为边界流确定了一个非零留数，这恰好是体矩映射算子（7.43）的边界值。此外，通过为 Y赋予一个简单极点，以最简方式满足留数约束，如下所示

(7.49)。

以下定理是 [BN22a] 的主要结果。

定理 8.4。 $\mathcal{C}_{\beta\gamma}$ 是一个编织张量范畴，其张量结构由对数交织算子定义。

该结论的证明恰好使用了简单流扩张的思想，以及——与仿射李超代数 $\mathcal{V}_{\beta\gamma}$ 之间的关系 $\mathfrak{gl}(1|1)$。 [CR11b]。不过，在进入这一部分之前，我们先回顾 $\mathcal{C}_{\beta\gamma}$ 中不可分解模及其自由场实现的一些事实。这些事实对于上述定理的证明至关重要，并且将在后续各节中计算单值化时发挥重要作用。

列图像允许我们计算 $\mathcal{C}_{\beta\gamma}$中对象之间的扩张群，进而可用于刻画不可分解对象。BN22a[对此进行了详细研究，我们在此回顾其结果。当 $\upsilon \notin \mathbb{Z}$时，对于每个 $k > 0$，存在唯一的 k-阶自扩张 $\Sigma^n \mathcal{W}_\upsilon$，即一个所有合成因子均为$\Sigma^n \mathcal{W}_\upsilon$的不可分解模。我们将其记为 $\Sigma^n \mathcal{W}_\upsilon^k$。模 $\mathcal{W}_\upsilon^k$ 具有如下表示：

$$\begin{array}{ccccccccccc} U(\mathcal{V}_{\beta\gamma}) & \cdots & \otimes & \mathbb{C}[\beta_{-1},\gamma_1] & \otimes & \mathbb{C}[\beta_0,\gamma_0] & \otimes & \mathbb{C}[\beta_1,\gamma_{-1}] & \otimes & \cdots \\ \mathcal{W}_\upsilon^k & \cdots & \otimes & \mathbb{C}[\beta_{-1}] & \otimes & \gamma_0^\upsilon \log(\gamma_0)^{k-1}\mathbb{C}[\gamma_0,\gamma_0^{-1}] & \otimes & \mathbb{C}[\gamma_{-1}] & \otimes & \cdots \end{array} \tag{8.26}$$

类似地，存在不可分解的自扩张 $\Sigma^n \mathcal{W}^{\pm,\ k}_{\ 0}$ of $\mathcal{W}_0^\pm$。可以证明，这些对象以下述意义张成该范畴：

定理 8.5. $\mathcal{C}_{\beta\gamma}$ 中的任意对象都是 $\Sigma^n \mathcal{W}_\upsilon^k$ 和 $\Sigma^n \mathcal{W}^{-,\ k}_{\ 0}$ 的有限直和的子商。

这使我们能够利用自由场实现来研究范畴 $\mathcal{C}_{\beta\gamma}$，因为 $\Sigma^n \mathcal{W}_0^\pm$和$\Sigma^n \mathcal{W}_\upsilon$ 及其扩张都可以由福克模诱导得到。在第 3.3 节中，我们利用对应于 ϕ 和η的海森堡顶点算子代数，介绍了 $\mathcal{V}_{\beta\gamma}$ 的自由场实现，其配对为 $(\phi,\ \phi) = -(\eta,\ \eta) = 1$。嵌入：

$$\mathcal{V}_{\beta\gamma} \longrightarrow V_L := \bigoplus_n \mathcal{F}_{n\phi+n\eta} \tag{8.27}$$

将自由场顶点算子代数的福克模与 $\mathcal{V}_{\beta\gamma}$ 的模对应起来。对于每个 $\mu = a\phi + b\eta$ for$a - b \in \mathbb{Z}$, 福克模 $\mathcal{F}_{a\phi+b\eta}$ 都可以提升为 V_L 的福克模，其定义如下：

$$V_{L,\mu} = \bigoplus_n \mathcal{F}_{(a+n)\phi+(b+n)\eta}. \tag{8.28}$$

我们有以下命题，其证明见 [Woo18，命题 4。7] 以及 [AP19，命题 4。1]：

命题 8.6。设 $\mu = a\phi + b\eta$。当 $a \notin \mathbb{Z}$ 时，存在一个 $\mathcal{V}_{\beta\gamma}$ 模的同构$V_{L,\ \mu} \cong \Sigma^{b-a-1}\mathcal{W}_{-a}$。当 $a \in \mathbb{Z}$ 时，存在一个 $\mathcal{V}_{\beta\gamma}$ 模的同构 $V_{L,\ \mu} \cong \Sigma^{b-a-1}\mathcal{W}_0^-$。

对于每个 $k > 0$，都有一个由 $(\phi+\eta)^{k-1}|\mu\rangle$ 生成的 $\mathcal{F}_{a\phi+b\eta}$ 的自扩张，并且它可以提升为 V_L 的一个模，因为 $\exp(\phi(z) + \eta(z))$ 的作用不是对数型的。我们用 $V_{L,\ \mu}^k$ 表示这个提升。上述识别可以推广为以下结论：

命题 8.7. 设 $\mu = a\phi + b\eta$。当 $a \notin \mathbb{Z}$ 时，存在 $\mathcal{V}_{\beta\gamma}$ 模的同构 $V_{L,\ \mu}^k \cong \Sigma^{b-a-1}\mathcal{W}_{-a}^k$。当 $a \in \mathbb{Z}$ 时，存在 $\mathcal{V}_{\beta\gamma}$ 模的同构 $V_{L,\ \mu}^k \cong \Sigma^{b-a-1}\mathcal{W}^{-}{}_{,\ 0}^{\ k}$ 。

8.2.2 仿射 $\mathfrak{gl}(1|1)$ 的 Kazhdan-Lusztig 范畴

设 $\mathfrak{gl}(1|1)$ 是与李超代数 $\mathfrak{gl}(1|1)$ 相关联的仿射李超代数。这是 SQED 的 B 扭曲的微扰边界顶点算子代数[1]，理论，其中 $\rho = (1)$。广义 $\widehat{\mathfrak{gl}(1|1)}$ 模 W 称为 有限长度的，如果它有一个有限的不可约 $\widehat{\mathfrak{gl}(1|1)}$ 模合成列。若 W 满足以下条件，则称其为 分次受限的：它按广义共形权重（即 L_0 的广义特征值）分次，权空间均为有限维，且广义共形权重有下界。更多详情请参见 [CKM17]。

定义 8.8。*Kazhdan-Lusztig* 范畴 KL被定义为有限长度分次受限的广义 $\widehat{\mathfrak{gl}(1|1)}$ 模。

范畴 KL 在 [CMY22b], 中得到了详细研究，文中证明它是一个刚性编织张量范畴。此外，它具有如下分解：

$$KL = \bigoplus_{e\in\mathbb{C}} KL_e \tag{8.29}$$

其中，KL_e 是 E_0 的作用具有广义特征值 e 的模的全子范畴。融合积以如下意义保持这一分解：$KL_e \times KL_{e'} \mapsto KL_{e+e'}$。

设 M 为 $\widehat{\mathfrak{gl}(1|1)}$ 的有限维模，则可以通过以下方式得到 $\widehat{\mathfrak{gl}(1|1)}$ 的一个模。令 $\widehat{\mathfrak{gl}(1|1)}_{\geq 0}$ 为由非负模生成的 $\widehat{\mathfrak{gl}(1|1)}$ 的李子代数。通过映射 $\widehat{\mathfrak{gl}(1|1)}_{\geq 0} \to \widehat{\mathfrak{gl}(1|1)}$，可以将 M 视为 $\widehat{\mathfrak{gl}(1|1)}_{\geq 0}$ 的一个模。定义模 M 为归纳：

$$\widehat{M} = U(\widehat{\mathfrak{gl}(1|1)}) \otimes_{U(\widehat{\mathfrak{gl}(1|1)}_{\geq 0})} M. \tag{8.30}$$

那么，M 是 KL 中的一个对象，并且根据 KL的定义，任何简单对象都是某个 M的 M 的商。

李代数 $\mathfrak{gl}(1|1)$ 具有以下简单模集合：

1. $A_{n,\ 0}$，其中 N 以权 n 作用，且所有其他模均作用为零。该模是一维的。

2. $V_{n,e}$ 其中 N 以权 $n \pm \frac{1}{2}$ 作用，而 E 以权 $e \neq 0$ 作用。这个模是二维的。

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$由上文可知，中的任何简单模都是 KL 的商 $V_{n,\ e}$ 或 $A_{n,\ 0}$。以下结论见 [CR11a]：

- $V_{n,\ e}$ 不可约当且仅当 $e \notin \mathbb{Z}$。
- 当 $e \in \mathbb{Z}$ 但 $e \neq 0$ 时，$V_{n,\ e}$ 是可约的，并嵌入以下短正合列：

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \widehat{A}_{n+1,e} \longrightarrow \widehat{V}_{n-e/2,e} \longrightarrow \widehat{A}_{n,e} \longrightarrow 0 \qquad (e>0) \\ 0 \longrightarrow \widehat{A}_{n-1,e} \longrightarrow \widehat{V}_{n-e/2,e} \longrightarrow \widehat{A}_{n,e} \longrightarrow 0 \qquad (e<0) \end{aligned} \tag{8.31}$$

$\widehat{\ }$ A_n模 e 是 $\mathfrak{gl}(1|1)$的简单流，因为它们可以定义为以下谱流自同构的像 σ_{nl}：

$$\sigma_{n,l}(N) = N - \frac{n}{z} \qquad \sigma_{n,l}(E) = E - \frac{l}{z} \qquad \sigma_{n,l}(\psi_\pm) = z^{\mp l}\psi_\pm. \tag{8.32}$$

在 $\mathbb{Z}$ 上引入函数 $\epsilon(l)$，定义如下：

$$\epsilon(l) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & \text{if } l<0, \\ 0 & \text{if } l=0, \\ \frac{1}{2} & \text{if } l>0. \end{cases} \tag{8.33}$$

$\widehat{\ }$定义 $\epsilon(l,\ l') = \epsilon(l) + \epsilon(l') - \epsilon(l+l')$。简单流 $A_{n,\ e}$ 具有以下简单融合规则：

$$\widehat{A}_{n,l} \otimes_{\widehat{\mathfrak{gl}(1|1)}} \widehat{A}_{n',l'} \cong \widehat{A}_{n+n'-\epsilon(l,l'),l+l'}. \tag{8.34}$$

正如我们在第 4.1.2 节所做的那样，完整的边界顶点算子代数是 $\mathfrak{gl}(1|1)$ 的扩张，由$\widehat{\ }$单极算子生成，这些算子可与模 $A_{-m/2+\epsilon(m),m}$ 对应。以下结果是在 [CR11b]，中推导出的，是定理 4.4 的一个例子：

$$\mathcal{V}_{\beta\gamma} \otimes \mathcal{V}_{bc} = \bigoplus_m \widehat{A}_{-m/2+\epsilon(m),m}. \tag{8.35}$$

也就是说， $\mathcal{V}_{\beta\gamma}\otimes\mathcal{V}_{bc}$ 是 $\mathfrak{gl}(1|1)$ 的简单流扩张。对偶地，存在一个作用于 $\mathcal{V}_{\beta\gamma}\otimes\mathcal{V}_{bc}$上的 $\mathbb{C}^*$ 作用，由 E_0的作用诱导，使得 $\mathfrak{gl}(1|1)$ 是 $\mathbb{C}^*$ 不变子空间。简单流扩张的技巧表明，存在一个编织张量范畴：

$$\mathcal{V}_{\beta\gamma}\otimes\mathcal{V}_{bc}-\mathrm{Mod}_{\mathrm{loc}}(\mathrm{Ind}(KL)) \tag{8.36}$$

以及一个满且满射的张量函子：

$$\mathcal{L}:\mathrm{Ind}(KL)^{[0]}\longrightarrow\mathcal{V}_{\beta\gamma}\otimes\mathcal{V}_{bc}-\mathrm{Mod}_{\mathrm{loc}}(\mathrm{Ind}(KL)). \tag{8.37}$$

这里，$\mathrm{Ind}(KL)^{[0]}$ 是 $\mathrm{Ind}(KL)$ 的子范畴，其中的对象与 $\mathcal{V}_{\beta\gamma}\otimes\mathcal{V}_{bc}$具有平凡单值化。
BN22a 的另一个主要结果如下： [BN22a]is the following:

命题 8.9。 $KL^{[0]}$ 在 $\mathcal{L}$ 下的像可识别为 $\mathcal{C}_{\beta\gamma}$，因此 $\mathcal{C}_{\beta\gamma}$ 具有编织张量范畴的结构。

范畴 $KL^{[0]}$ 可识别为范畴 KL^N，它是 KL 的子范畴，由 N_0 的作用呈半单且具有整数特征值的对象组成；提升函子将 $\mathcal{C}_{\beta\gamma}$ 与去等变化 $KL^N_{\mathbb{C}^*}$识别起来。由于去$\widehat{\ }$等变化将对象 $\mathcal{M}$ 与 $A_{-m/2+\epsilon(m),m}\otimes_{\widehat{\mathfrak{gl}(1|1)}}\mathcal{M}$ 识别起来，我们也可以将其启发式地记作 $KL^N/\mathbb{Z}$。对于任意代表元 $e\in\upsilon$，提升函子将 KL_e 中的对象映射到 $\mathcal{C}_{\beta\gamma,\upsilon}$ 中的对象，因此保持了 KL 和 $\mathcal{C}_{\beta\gamma}$ 各自的分解。我们可以按照如下方式，在这一等价下对应顶点算子代数的模。

$\widehat{\ }$1. A_n 的像，0 对于 $n\in\mathbb{Z}$ 在 $\mathcal{L}$ 下被识别为谱流 $\mathcal{V}_n$。从第 7.1 节的体视角来看，这些是威尔逊线 $\mathbb{W}_n$。

2. $\widehat{V}_{n,\ e}$ 的像对于 $n+\frac{1}{2}\in\mathbb{Z}$ 被识别为 $\Sigma^{n-1/2}\mathcal{W}_e$。从体的角度来看，这些是单值化缺陷 $\mathbb{W}^{(e)}_{n-1/2}$。

在接下来的章节中，我们将推广这个小例子，并定义编织张量范畴。具体来说：

- 范畴 $\mathcal{C}^A_\rho$将通过利用$\widetilde{\mathcal{V}}^A_\rho$是 $\mathcal{V}^V_{\beta\gamma}$的简单流扩张这一事实，定义为 $\mathcal{C}^{\boxtimes n}_{\beta\gamma}$, 的去等变化。

- 范畴 $\mathcal{C}^B_\rho$将被定义为 KL_ρ的去等变化，其中 KL_ρ是 $\widehat{\mathfrak{g}_\rho}$的 Kazhdan-Lusztig 范畴，因为 $\mathcal{V}^B_\rho$是 $\widehat{\mathfrak{g}_\rho}$的简单流扩张。

中的对象 $\mathcal{C}^A_\rho$提升自 $\mathcal{C}^{\boxtimes n}_{\beta\gamma}$, ，这使我们能够将这些对象与第7.2节中的 A 扭曲体理论线算符进行比较。中的对象 $\mathcal{C}^B_\rho$ 提升自 KL_ρ，这使我们能够

将这些对象与第7.1节中的 B 扭曲体理论线算符进行比较。主要结果定理8.32的证明也基于这一例5.6。

8.3 A 扭曲的线算子范畴

8.3.1 范畴的定义

在第 3.2 节中，我们定义了顶点算子代数 $\mathcal{V}_\rho^A$，并研究了它的自由场实现。现在我们想构造一个模的阿贝尔范畴 $\mathcal{C}_\rho^A$，使其对应于 $\mathcal{V}_\rho^A$，该范畴具有通过交织算子定义的编织张量结构，其简单对象对应于第 7.2 节中的味涡旋和味缺陷。

回顾一下，在第 5.1 节中，我们构造了一个“替代的”顶点代数 $\widetilde{\mathcal{V}}_\rho^A$，它是 $\mathbb{Z}^r$由以下对象作简单流扩张得到的：n 个 $\mathcal{V}_{\beta\gamma}$。我们在定理 5.6 中证明了 $\widetilde{\mathcal{V}}_\rho^A$与 $\mathcal{V}_\rho^A$Morita 等价，因为我们有一个同构：

$$\widetilde{\mathcal{V}}_\rho^A \otimes \mathcal{V}_{bc}^V \cong \mathcal{V}_\rho^A \otimes \mathcal{V}_{\mathbb{Z}^{2r}}^{+-}, \tag{8.38}$$

其中 $\mathcal{V}_{bc}^V$ 和 $\mathcal{V}_{\mathbb{Z}^{2r}}^{+-}$ 是与自对偶格相关的格点顶点算子代数，因此是 Morita 平凡的。我们将在范畴层面分析简单流扩张（以及 $\widetilde{\mathcal{V}}_\rho^A$的模），而不直接构造 $\mathcal{V}_\rho^A$的模。

从第6节的视角来看，我们的策略是从 n A 扭曲中的自由超多重态的线算子范畴——现在带有编织张量结构——开始，并通过规范化一个 $\mathcal{T}_\rho^A$的 $\mathbb{Z}^r$ 一形式对称性来获得

第 n 个 Deligne 积 $\mathcal{C}_{\beta\gamma}^{\boxtimes n}$ 是顶点算子代数 $\mathcal{V}_{\beta\gamma}^{\otimes n}$ 的模范畴，也可以定义为 $\mathcal{V}_{\beta\gamma}^{\otimes n}$ 模中最小的、由有限长度对象构成的满阿贝尔子范畴，其合成列由 $\Sigma^n\mathcal{W}_v$ 和 $\mathcal{V}_n$ 的张量积构成。正如我们在上一节回顾的，该范畴通过对数交织算子具有编织张量范畴的结构。它还有如下分解：

$$\mathcal{C}_{\beta\gamma}^{\boxtimes n} = \bigoplus_{v\in(\mathbb{C}/\mathbb{Z})^n} \boxtimes_{i=1}^n \mathcal{C}_{\beta\gamma,v_i}. \tag{8.39}$$

$\widetilde{\mathcal{V}}_\rho^A$定义中的每个直和项都是 $\mathcal{V}_{\beta\gamma}^{\otimes n}$ 的单流，因此也是 $\mathcal{C}_{\beta\gamma}^{\boxtimes n}$中的一个对象。事实上，我们可以如下识别这些直和项：

$$\mathbb{V}_{\rho(\mu)} \longleftrightarrow \bigotimes_{1\le i\le n} \mathcal{V}_{\rho(\mu)_i}, \text{ for all } \mu\in\mathbb{Z}^r, \tag{8.40}$$

使得 $\widetilde{\mathcal{V}}_\rho^A$的算子乘积展开导出以下融合规则：

$$\mathbb{V}_{\rho(\mu)} \otimes_{\mathcal{V}_{\beta\gamma}^{\otimes n}} \mathbb{V}_{\rho(\mu')} \cong \mathbb{V}_{\rho(\mu+\mu')}. \tag{8.41}$$

因此，顶点算子代数 $\widetilde{\mathcal{V}}_\rho^A$可以被视为 $\mathbf{Ind}(\mathcal{C}_{\beta\gamma}^{\boxtimes n})$ 中的代数对象。根据第 8.1 节，存在一个编织张量范畴的提升函子：

$$\mathcal{L}_A : \mathcal{C}_{\beta\gamma}^{\boxtimes n,\rho,[0]} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{V}}_\rho^A\text{-Mod}_{\text{loc}}\left(\text{Ind}(\mathcal{C}_{\beta\gamma}^{\boxtimes n})\right). \tag{8.42}$$

这里，$\mathcal{C}_{\beta\gamma}^{\boxtimes n,\rho,[0]}$ 是 $\mathcal{C}_{\beta\gamma}^{\boxtimes n}$ 的子范畴，其对象与 $\widetilde{\mathcal{V}}_\rho^A$ 具有平凡单值。

定义 8.10。我们用 $\mathcal{C}_\rho^A$ 表示 $\mathcal{L}_A$作用于 $\mathcal{C}_{\beta\gamma}^{\boxtimes n,\rho,[0]}$ 得到的像：

$$\mathcal{C}_\rho^A := \mathcal{L}_A\left(\mathcal{C}_{\beta\gamma}^{\boxtimes n,\rho,[0]}\right). \tag{8.43}$$

这是一个通过对数交织算子构成的编织张量范畴。

请注意，如果将 $\mathbb{V}_{\rho(\mu)}$ 的权赋为 μ，那么辛玻色子顶点算子代数 $\mathcal{V}_{\beta\gamma}^{\otimes n}$ 就是 $\widetilde{\mathcal{V}}_\rho^A$ 关于 $(\mathbb{C}^*)^r$ 的轨形。事实上，在这种情况下，$\widetilde{\mathcal{V}}_\rho^A$ 的唯一不变部分就是 $\mathbb{V}_0$，而它恰好就是 $\mathcal{V}_{\beta\gamma}^{\otimes n}$。因此，我们得出结论：$\mathcal{C}_\rho^A$ 是 $\mathcal{C}_{\beta\gamma,\ \mathbb{C}^*\ r()}^{\boxtimes n,\rho,[0]}$ 的去等变化，或者说是 $\mathcal{C}_{\beta\gamma}^{\boxtimes n,\rho,[0]}/\mathbb{Z}^r$。

这个定义的优点是，我们可以立即得到一个辫张量范畴；但缺点是，它涉及一个看似复杂的平凡单值要求。在下一节中，我们将说明，这个单值化条件其实非常明确，其实质是阿贝尔群作用的可积性。

8.3.2 局域性要求

为了对范畴 $\mathcal{C}_\rho^A$中的对象进行分类，我们必须理解范畴 $\mathcal{C}_{\beta\gamma}^{\boxtimes n,\rho,[0]}$,，也就是对象与 $\widetilde{V}_\rho^A$具有平凡单值的子范畴。回顾一下，$\mathcal{V}_{\beta\gamma}^{\otimes n}$ 中的 $\mathfrak{gl}(1)$ 流如下：

$$J^i(z) = -:\beta^i\gamma^i:. \tag{8.44}$$

我们将在下述命题中证明，这个单值化条件是一个可积性条件。更具体地说，我们将证明，模 $\mathcal{M}$ 与 $\widetilde{V}_\rho^A$具有平凡单值，当且仅当 $\sum \rho_{ia}J_0^i$的作用在 $\mathcal{M}$上诱导出一个 $(\mathbb{C}^*)^r$ 作用。

命题 8.11。对象 $\mathcal{M}$ 属于 $\mathcal{C}_{\beta\gamma}^{\boxtimes n,\rho,[0]}$，当且仅当 $\sum \rho_{ia}J_0^i$ 半单地作用且具有整数特征值。

证明使用了自由场实现。回忆嵌入 $\mathcal{V}_{\beta\gamma}^{\otimes n} \to V_L^{\otimes n}$，以及简单模 $\mathbb{V}_\mu \to V_L^{\otimes n}$，$\mu$ 对于 $\mu \in \mathbb{Z}^n$ 的嵌入。设 $\mathcal{M}$ 为顶点算子代数 $V_L^{\otimes n}$ 的任意模，

那么在自由场代数上取融合积可得到一个同构:

$$\mathbb{V}_\mu \otimes_{\mathcal{V}_{\beta\gamma}^{\otimes n}} \mathcal{M} \cong V_{L,\mu}^{\otimes n} \otimes_{V_L^{\otimes n}} \mathcal{M}. \tag{8.45}$$

这是因为辛玻色子和海森堡顶点算子代数的融合积都是正合的。设 $\mathcal{M}$ 是由以下元素生成的 $V_L^{\otimes n}$ 模:

$$(\phi^{i_1} + \eta^{i_1}) \cdots (\phi^{i_k} + \eta^{i_k})|v\rangle, \tag{8.46}$$

其中 $v = \sum_i t_i \phi^i + s_i \eta^i$ 且 $t_i - s_i \in \mathbb{Z}$。定义 ϕ_0^i 的作用满足对易关系 $[\phi_0^i, \phi^i] = 1$，类似地，我们定义 η_0^i的作用。这些都是海森堡顶点算子代数 $\mathcal{H}_{\phi\text{的模}\eta}$，可以提升到 $V_L^{\otimes n}$；根据第 8.2 节，作为 $\mathcal{V}_{\beta\gamma}^{\otimes n}$ 的模，$\mathcal{M}$ 可以识别为 $\Sigma^n W_v^k$ 与 $\Sigma^n W^-$ 的张量积 $_0{}^k$。

引理 8.12. 对于上述每个 $\mathcal{M}$，单值化:

$$\mathbb{V}_\mu \otimes_{\mathcal{V}_{\beta\gamma}^{\otimes n}} \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{V}_\mu \otimes_{\mathcal{V}_{\beta\gamma}^{\otimes n}} \mathcal{M} \tag{8.47}$$

由下式给出

$$\mathrm{Id} \otimes e^{-2\pi i \sum_i \mu_i J_0^i}, \tag{8.48}$$

其中 J_0^i 是 $J^i = -$ 的零模: $\beta^i \gamma^i$: 。

证明。 如上所述，我们可以使用自由场代数$V_L^{\otimes n}$ 中以下模的交织算子:

$$\mathcal{Y} : V_{L,\mu}^{\otimes n} \otimes \mathcal{M} \to V_{L,\mu}^{\otimes n} \otimes_{V_L} \mathcal{M}\{z\}[\log(z)]. \tag{8.49}$$

根据假设， $\mathcal{M}$ 由以下形式的向量生成:

$$w = (\phi^{i_1} + \eta^{i_1}) \cdots (\phi^{i_k} + \eta^{i_k})|\nu\rangle, \tag{8.50}$$

其中 $\nu = \sum t_i \phi^i + s_i \eta^i$，且 $t_i - s_i \in \mathbb{Z}$。融合规则由对数交织算子$\mathcal{Y}_{\mu,\ \nu}$ 给出，其在生成元上的作用由下式定义:

$$\mathcal{Y}_{\mu,\nu}(|\mu\rangle, z)w =: e^{\sum_i \mu_i \phi^i} : w. \tag{8.51}$$

在这个公式中，对数部分来源于:

$$e^{\sum_i \mu_i \phi_0^i \log(z)} (\phi^{i_1} + \eta^{i_1}) \cdots (\phi^{i_k} + \eta^{i_k})|\nu\rangle. \tag{8.52}$$

由于 $[\phi_0^i, \phi^j + \eta^j] = \delta^{ij}$，上述内容为：

$$(\phi^{i_1} + \eta^{i_1} + \mu^{i_1}\log(z)) \cdots (\phi^{i_k} + \eta^{i_k} + \mu^{i_k}\log(z)) e^{\sum_i \mu^i t_i \log(z)} |\nu\rangle. \tag{8.53}$$

为计算单值化，我们将 z 坐标旋转 $z \mapsto e^{2\pi i} z$，从而得到 $\log(z) \mapsto \log(z) + 2\pi i$。上述贡献来自两部分，其中第一部分为：

$$(\phi^{i_1} + \eta^{i_1} + \mu^{i_1}\log(z) + 2\pi i \mu^{i_1}) \cdots (\phi^{i_k} + \eta^{i_k} + \mu^{i_k}\log(z) + 2\pi i \mu^{i_k}), \tag{8.54}$$

第二部分为：

$$e^{\sum_i \mu^i t_i \log(z) + 2\pi i \sum_i \mu^i t_i} |\nu\rangle. \tag{8.55}$$

第一部分的贡献可以简洁地写为：

$$e^{2\pi i \sum_i \mu_i \frac{\partial}{\partial \eta^i}}, \tag{8.56}$$

而第二部分为：

$$e^{2\pi i \sum_i \mu^i t_i} = e^{2\pi i \sum_i \mu^i s_i} = e^{-2\pi i (\sum_i \mu_i \eta^i, \nu)}. \tag{8.57}$$

可以验证，与下式对应的态射：

$$e^{\sum \mu_i \frac{\partial}{\partial \eta^i}} e^{-2\pi i (\sum_i \mu_i \eta^i, \nu)} \tag{8.58}$$

正是：

$$e^{-2\pi i \sum_i \mu_i \eta_0^i} = e^{-2\pi i \sum_i \mu_i J_0^i}. \tag{8.59}$$

综上所述

$$\mathcal{Y}_{\mu,\nu}(|\mu\rangle, e^{2\pi i} z) w = \mathcal{Y}_{\mu,\nu}(|\mu\rangle, z) e^{-2\pi i \sum \mu_i J_0^i} w. \tag{8.60}$$

这意味着单值化由下式给出：

$$\mathrm{Id} \otimes e^{-2\pi i \sum \mu_i J_0^i}. \tag{8.61}$$

□

现在可以利用引理8.11 完成命题8.12的证明。事实上，根据定理8.5， $\mathcal{C}_{\beta\gamma}^{\boxtimes n}$中的任意对象都是这类模 $\mathcal{M}$ 从以下对象限制得到的直和的子商：

自由场代数$V_L^{\otimes n}$。根据引理8.12，对于每个 $\mu \in \mathbb{Z}^r$，单值化的作用为：

$$\mu(\mathbb{V}_{\rho(\mu)}, \mathcal{M}) : \mathbb{V}_{\rho(\mu)} \otimes_{\mathcal{V}_{\beta\gamma}^{\otimes n}} \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{V}_{\rho(\mu)} \otimes_{\mathcal{V}_{\beta\gamma}^{\otimes n}} \mathcal{M} \tag{8.62}$$

由 Id 给出$\otimes e^{-2\pi i \sum \mu^a \rho_{ia} J_0^i}$。由于单值化对于子对象和商对象具有函子性，因此可知，对于 $\mathcal{C}_{\beta\gamma}^{\boxtimes n}$ 中的所有对象，单值化的作用均由相同的表达式给出。为了使其成为单位元，需要 $\sum \mu^a \rho_{ia} J_0^i$ 对所有 $\mu \in \mathbb{Z}^r$ 均以整数作用，这正是命题 8.11 的陈述。因此，我们得到：

推论 8.13. 子范畴 $\boxtimes_i \mathcal{C}_{\beta\gamma,\upsilon_i}$ 中的对象只有在对所有 a 都有 $\sum \rho_{ia}\upsilon^i = 0$ 模 $\mathbb{Z}$ 时，才会产生 $\widetilde{\mathcal{V}}_\rho^A$ 的局部模。对于简单对象，该陈述是充要的，因为 J_0^i 在这些对象上半单地作用。

这使得对范畴 $\mathcal{C}_\rho^A$ 的研究更加明确。该范畴中的简单对象来自 $\sum \rho_{ia}\upsilon^i = 0$ 模 $\mathbb{Z}$下 $\boxtimes_i \mathcal{C}_{\beta\gamma,\upsilon_i}$ 中简单对象的提升，而 $\boxtimes_i \mathcal{C}_{\beta\gamma,\upsilon_i}$ 中的简单对象 $\mathcal{M}$ 与所有 $\mu \in \mathbb{Z}^r$的 $\mathbb{V}_{\rho(\mu)} \otimes_{\mathcal{V}_{\beta\gamma}^{\otimes n}} \mathcal{M} \cong \Sigma^{\rho(\mu)}\mathcal{M}$ 相对应。这也意味着 $\mathcal{C}_\rho^A$存在一个分解：

$$\mathcal{C}_\rho^A = \bigoplus_{\upsilon \in (\mathbb{C}/\mathbb{Z})^n, \rho(\mu)\cdot\upsilon = 0} \mathcal{C}_{\rho,\upsilon}^A. \tag{8.63}$$

为更高效地进行表述，我们使用方程（2.5）中的短正合列。该短正合列（共轭版本）诱导出群的一个短正合列：

$$(\mathbb{C}/\mathbb{Z})^{n-r} \xrightarrow{\rho^\vee} (\mathbb{C}/\mathbb{Z})^n \xrightarrow{\rho^\mathsf{T}} (\mathbb{C}/\mathbb{Z})^r \tag{8.64}$$

并且对所有 μ， $\rho(\mu)\cdot\upsilon = 0$ 模 $\mathbb{Z}$ 当且仅当 $\upsilon \in \mathrm{Ker}(\rho^\mathsf{T}) = \mathrm{Im}(\rho^\vee)$。我们也可以写成：

$$\mathcal{C}_\rho^A = \bigoplus_{\upsilon \in (\mathbb{C}/\mathbb{Z})^{n-r}} \mathcal{C}_{\rho,\upsilon}^A \tag{8.65}$$

使得 $\mathcal{C}_\rho^A$, υ 是 $\mathcal{C}_{\beta\gamma,\rho^\vee\ \upsilon}^{\boxtimes n,\rho,[0]}()$ 在 $\mathcal{L}_A$ 下的像。上述阿贝尔范畴的分解诱导出如下分解：

$$\widehat{\mathcal{C}}_\rho^A = \bigoplus_{\upsilon \in (\mathbb{C}/\mathbb{Z})^{n-r}} \widehat{\mathcal{C}}_{\rho,\upsilon}^A \tag{8.66}$$

的导出范畴。

8.3.3 线算子作为简单对象

在本节中，我们将范畴 $\mathcal{C}_\rho^A$ 中的简单对象与第 7 节中根据体物理预期得到的线算符进行比较。这为我们的定义提供了依据： $\mathcal{C}_\rho^A$ 作为一个顶点算子代数模范畴，其导出范畴捕获了一组最小的体线。我们还将证明，在 $\mathcal{C}_{\beta\gamma}^{\boxtimes n,\rho,[0]}$ 中，提升函子与作用于简单对象上的 BRST函子一致。

要使一个对象属于 $\mathcal{C}_{\beta\gamma}^{\boxtimes n,\rho,[0]}$,， $\sum \rho_{ia} J_a^i$ 的作用必须是半单的，并具有整数特征值。特别是， $\boxtimes_i \mathcal{C}_{\beta\gamma,[0]}$ 中的简单对象都满足这一条件。该范畴这一部分中的简单对象由 $\mathbb{V}_\lambda = \bigotimes \mathcal{V}_{\lambda_i}$ 给出，其中 $\lambda \in \mathbb{Z}^n$是真空i模的谱流。然而，提升后， $\mathcal{L}_A \mathbb{V}_\lambda \cong \mathcal{L}_A \mathbb{V}_\mu$ 当且仅当 $\lambda - \mu \in \mathrm{Im}(\rho)$ 时成立，这正是第 5 节中的等价关系。根据短正合列（2.10）的分裂，我们可以选择该等价类的一个代表元为 $\mathbb{V}_{\sigma(m)}$，其中 $m \in \mathbb{Z}^{n-r}$。这些对应于阿贝尔规范理论中的涡旋线，因为它们按照 β^i 和 γ^i 改变了 σ（m）。

一般的涡旋线算子集合 $J^i(z) \sim \frac{\upsilon^i}{z}$，且它们恰好在 $\sum \rho_{ia}\upsilon^i \in \mathbb{Z}$ 时与规范化兼容。我们将这些一般的涡旋线算子识别为 $\boxtimes_i \mathcal{C}_{\beta\gamma,\upsilon_i}$ 中的简单对象。它们的形式仅为 $\otimes_i \mathcal{M}_i$，满足：当 $\upsilon_i = 0 \bmod \mathbb{Z}$ 时， $\mathcal{M}_i = \mathcal{V}_{n_i}$ ；当 $\upsilon_i \neq 0 \bmod \mathbb{Z}$ 时， $\mathcal{M}_i = \Sigma^{n_i}\mathcal{W}_{\upsilon_i}$。

我们将其总结为以下命题：

命题8.14。 $\mathcal{C}_\rho^A$中的简单对象由 $\mathbb{Z}^{n-r} \times (\mathbb{C}/\mathbb{Z})^{n-r}$标记。对于 $(m,\upsilon) \in \mathbb{Z}^{n-r} \times (\mathbb{C}/\mathbb{Z})^{n-r}$，我们用 $\mathbb{V}_m^\upsilon$ 表示相应的简单对象，与第 7节一致。模 $\mathbb{V}_m^\upsilon$ 是模的提升函子 $\mathcal{L}_A$ 作用于以下形式的 $\mathcal{V}_{\beta\gamma}^{\otimes n}$ 后所得的像： $\otimes_i \mathcal{M}_i$，其中：

$$\mathcal{M}_i = \begin{cases} \mathcal{V}_{\sigma(m)_i} & if\ \rho^\vee(\upsilon)_i = 0\ mod\ \mathbb{Z} \\ \Sigma^{\sigma(m)_i}\mathcal{W}_{[\rho^\vee(\upsilon)_i]} & if\ \rho^\vee(\upsilon)_i \neq 0\ mod\ \mathbb{Z} \end{cases} \tag{8.67}$$

注： 我们指出，范畴 $\mathcal{C}_\rho^A$也可以定义为 $\widetilde{\mathcal{V}}_\rho^A$ 模的全子范畴：这些模具有有限长度，且其合成因子由 $\mathbb{V}_m^\upsilon$ 给出，对于 $(m,\upsilon) \in \mathbb{Z}^{n-r} \times (\mathbb{C}/\mathbb{Z})^{n-r}$。

例： 例如，考虑 $\rho = 1$ 的情形，即 SQED 的 A 扭曲1。在这种情况下， $\widetilde{\mathcal{V}}_\rho^A$ 为：

$$\widetilde{\mathcal{V}}_\rho^A \cong \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \sigma^n \mathcal{V}_{\beta\gamma} \cong \mathcal{V}_{SF} \otimes \mathcal{V}_{\mathbb{Z}}^-. \tag{8.68}$$

这里，$\mathcal{V}_{\mathbb{Z}}^-$ 是一个负号差自对偶格的格点顶点算子代数。满足单值化条件的 $\mathcal{V}_{\beta\gamma}$ 的唯一简单模是真空 $\mathcal{V}_n$的谱流，而

它们在提升后被视为相同。因此， $\mathcal{C}_\rho^A$中只有一个简单模，这与 $\mathcal{V}_{SF}$ 只有一个简单模（即真空模）这一事实相符。

在第 5 节中，我们证明了存在一个顶点算子代数的同构：

$$\mathcal{V}_\rho^A \otimes \mathcal{V}_{\mathbb{Z}^{2r}}^{+-} \cong \widetilde{\mathcal{V}}_\rho^A \otimes \mathcal{V}_{bc}^V \tag{8.69}$$

给定 $\mathcal{V}_{\beta\gamma}^{\otimes n}$ 的一个模 $\mathcal{M}$，我们可以通过 $H_{BRST}^*\left(\mathcal{M} \otimes \mathcal{V}_{bc}^{\otimes n}\right)$ 得到 $\mathcal{V}_\rho^A$ 的一个模，从而得到 $\mathcal{V}_\rho^A \otimes \mathcal{V}_{\mathbb{Z}^{2r}}^{+-}$ 的一个模，如下所示：

$$H_{BRST}^*\left(\mathcal{M} \otimes \mathcal{V}_{bc}^{\otimes n}\right) \otimes \mathcal{V}_{\mathbb{Z}^{2r}}^{+-}. \tag{8.70}$$

另一方面，当 M 与 $\widetilde{\mathcal{V}}_\rho^A$ 的单值化平凡时，我们得到一个 $\widetilde{\mathcal{V}}_\rho^A$ 的模 $\mathcal{L}_A(\mathcal{M})$，从而得到一个由 $\widetilde{\mathcal{V}}_\rho^A \otimes \mathcal{V}_{bc}^V$ 给出的模：

$$\mathcal{L}_A(\mathcal{M}) \otimes \mathcal{V}_{bc}^V. \tag{8.71}$$

我们进一步通过以下内容说明在定义 $\mathcal{C}_\rho^A$ 时使用 $\widetilde{\mathcal{V}}_\rho^A$ 的合理性：

定理 8.15。令 $\mathcal{M}$ 为 $\boxtimes_i \mathcal{C}_{\beta\gamma,\upsilon_i}$ 中的一个简单模。如果对于某个 a，$\sum \rho_{ia}\upsilon^i \neq 0$ 模 $\mathbb{Z}$，那么 $H_{BRST}^*\left(\mathcal{M} \otimes \mathcal{V}_{bc}^{\otimes n}\right)$ 为零。否则，我们有顶点算子代数模的同构：

$$H_{BRST}^*\left(\mathcal{M} \otimes \mathcal{V}_{bc}^{\otimes n}\right) \otimes \mathcal{V}_{\mathbb{Z}^{2r}}^{+-} \cong \mathcal{L}_A(\mathcal{M}) \otimes \mathcal{V}_{bc}^V. \tag{8.72}$$

证明。考虑 $V_L^{\otimes n}{}_{,\, s\phi+t\eta}$，由 $\sum_i s_i\phi^i + t_i\eta^i$生成且具有 $s_i - t_i \in \mathbb{Z}$ 的格点顶点算子代数 $V_L^{\otimes n}$ 的模。对于每个满足 $s_i \in \mathbb{Z}$ 的 s_i，都有一个筛选算子 $S^i = \oint \mathrm{d}z \exp(\phi^i(z))$ 作用于此模，其核为：

$$\mathcal{M} = \bigcap_{i, s_i \in \mathbb{Z}} \mathrm{Ker}(S^i)\Big|V_{L, s\phi+t\eta}^{\otimes n} \tag{8.73}$$

是 $\mathcal{V}_{\beta\gamma}^{\otimes n}$ 的简单模，所有简单模都可由此方式得到。$\mathcal{M} \otimes \mathcal{V}_{bc}^{\otimes n}$ 的自由场实现形式如下：

$$\mathcal{M} \otimes \mathcal{V}_{bc}^{\otimes n} \cong \bigcap_{i, s_i \in \mathbb{Z}} \mathrm{Ker}(S^i)\Big| \bigoplus_{\lambda, \mu \in \mathbb{Z}^n} \mathcal{F}_{(\mu+s)\phi} \otimes \mathcal{F}_{(\mu+t)\eta} \otimes \mathcal{F}_{\lambda\theta}. \tag{8.74}$$

由于 BRST上同调 仅作用于因子 $\mathcal{F}_{(\mu+t)\eta} \otimes \mathcal{F}_{\lambda\theta}$，而筛选算子仅作用于 $\mathcal{F}_{(\mu+s)\phi}$，因此二者彼此对易，我们有：

$$H_{BRST}^*\left(\mathcal{M} \otimes \mathcal{V}_{bc}^{\otimes n}\right) \cong \bigcap_{i, s_i \in \mathbb{Z}} \mathrm{Ker}(S^i)\Big| \bigoplus_{\lambda, \mu \in \mathbb{Z}^n} \mathcal{F}_{(\mu+s)\phi} \otimes H_{BRST}^*\left(\mathcal{F}_{(\mu+t)\eta} \otimes \mathcal{F}_{\lambda\theta}\right). \tag{8.75}$$

将向量 $\mu+s=\rho(\mu_0+s_0)+\rho^\vee(\mu^\vee+s^\vee)$、 $\mu+t=\rho(\mu_0+t_0)+\rho^\vee(\mu^\vee+t^\vee)$ 以及 $\lambda=\rho(\lambda_0)+\rho^\vee(\lambda^\vee)$ 分裂，其中 λ_0， μ_0， s_0， t_0 由 N 和 $\lambda^\vee$， $\mu^\vee$， $s^\vee$， $t^\vee$ 张成，且 $[\lambda_0]=[\lambda^\vee]\in H$ 和 $[\mu_0]=[\mu^\vee]\in H$，则 BRST 上同调 可重写为：

$$\bigcap_{i,s_i\in\mathbb{Z}}\mathrm{Ker}(S^i)\Big|\bigoplus_{\substack{\lambda_0,\mu_0\in N,\ \lambda^\vee,\mu^\vee\in N^\vee\\ [\lambda_0]=[\lambda^\vee]\in H,\ [\mu_0]=[\mu^\vee]\in H}}\mathcal{F}_{(\mu+s)\phi}\otimes\mathcal{F}_{\rho^\vee(\mu^\vee+t^\vee)\eta}\otimes\mathcal{F}_{\rho^\vee\lambda^\vee\theta}\otimes H^*_{BRST}\left(\mathcal{F}_{\rho(\mu_0+t_0)\eta}\otimes\mathcal{F}_{\rho\lambda_0\theta}\right). \tag{8.76}$$

如果 $\sum_i t_i\rho^{ia}\notin\mathbb{Z}$ 对于某个 a成立，那么 t_0 不在 N中，不存在这样的 λ_0， μ_0 使得 $\rho(\mu_0+t_0)=\rho\lambda_0$，并且上述上同调是平凡的。这是该陈述的第一部分。对于第二部分，现假设 $t_0\in N$，那么上述内容变为：

$$\bigcap_{i,s_i\in\mathbb{Z}}\mathrm{Ker}(S^i)\Big|\bigoplus_{\substack{\lambda_0\in N,\ \lambda^\vee,\mu^\vee\in N^\vee\\ [\lambda_0]=[\lambda^\vee]=[\mu^\vee]+[t_0]\in H}}\mathcal{F}_{\rho(\lambda_0+s_0-t_0)\cdot\phi+\rho^\vee(\mu^\vee+s^\vee)\cdot\phi}\otimes\mathcal{F}_{\rho^\vee(\mu^\vee+t^\vee)\eta}\otimes\mathcal{F}_{\rho^\vee\lambda^\vee\theta}. \tag{8.77}$$

现在我们将其与顶点算子代数 $\mathcal{V}^{+-}_{\mathbb{Z}^{2r}}$ 进行张量积，并使用方程（4.58）中的场重新定义，将上述内容改写为：

$$\left[\bigcap_{i,s_i\in\mathbb{Z}}\mathrm{Ker}(S^i_0)\Big|\bigoplus_{\lambda\in\mathbb{Z}^n,\ \mu\in[t_0]+\mathbb{Z}^{n-r}}\mathcal{F}^{X,Y,Z}_{\lambda\cdot Z+(\mu-t^\vee)\cdot X+\tau(t-s)\cdot Y}\right]\otimes\mathcal{V}^{+-}_{\mathbb{Z}^{2r}}. \tag{8.78}$$

然后我们使用方程（5.28）中的重新定义，得到：

$$\bigcap_{i,s_i\in\mathbb{Z}}\mathrm{Ker}(S^i_0)\Big|\bigoplus_{\lambda\in\mathbb{Z}^n,\mu\in\mathbb{Z}^n,\nu\in\mathbb{Z}^r}\mathcal{F}^{\widetilde{X},\widetilde{Y},\widetilde{Z}}_{\lambda\cdot\widetilde{Z}+(\mu-t)\widetilde{X}+(t-s)+\rho(\nu)\cdot\widetilde{Y}}. \tag{8.79}$$

根据 [BN22a，命题 4.8]，这正是 $\mathcal{L}_A(\mathcal{M})\otimes\mathcal{V}^V_{bc}$对应简单模 $\mathcal{M}=\bigcap_{s_i\in\mathbb{Z}}\mathrm{Ker}(S^i)\Big|V_L^{\otimes n}{}_{,\ s\phi+t\eta}$ 的自由场实现。证明完毕。

□

因此，对于满足可积性条件 $\sum\rho_{ia}J^i_0\in\mathbb{Z}$ 的简单模，提升函子与 BRST函子相一致；而 BRST上同调则将不满足该条件的简单模映为平凡模。阿贝尔范畴 $\mathcal{C}^A_\rho$ 也可以定义为 $\mathcal{V}^A_\rho$ 的有限长度模所构成的阿贝尔范畴，其中合成因子由 $\mathcal{M}\otimes\mathcal{V}^{\otimes n}_{bc}$ 中$\mathcal{C}^{\boxtimes n}_{\beta\gamma}$的简单对象 $\mathcal{M}$ 的 BRST上同调给出。这意味着，我们使用提升函子定义范畴 $\mathcal{C}^A_\rho$ 是合理的，也使我们能够借助简单流扩张的思路来定义编织张量结构。

现在，我们可以利用上述识别以及 $\mathbb{V}^v_m$ 的融合规则，推导$\mathcal{V}_{\beta\gamma}$ 的融合规则，这些规则来自 [BN22a中的推论 414]。

推论 8.16。简单模 $\mathbb{V}_m^{\upsilon}$ 满足以下融合规则：

- $\mathbb{V}_m^{[0]} \otimes_{\widetilde{V}_\rho^A} \mathbb{V}_{m'}^{[0]} \cong \mathbb{V}_{m+m'}^{[0]}$，与公式完全一致 (7.28)。
- $\mathbb{V}_m^{[0]} \otimes_{\widetilde{V}_\rho^A} \mathbb{V}_{m'}^{\upsilon} \cong \mathbb{V}_{m+m'}^{\upsilon}$ 完全匹配的方程(7.29)。
- 若对所有 i，$\rho^\vee(\upsilon)_i$、$\rho^\vee(\upsilon')_i$ 和 $\rho^\vee(\upsilon)_i + \rho^\vee(\upsilon')_i \neq 0$ 模 $\mathbb{Z}$，则 $\mathbb{V}_m^{\upsilon} \otimes_{\widetilde{V}_\rho^A} \mathbb{V}_{m'}^{\upsilon'} \cong \bigoplus_{\epsilon\in\{0,1\}^n} \mathbb{V}_{m+m'+\tau(\epsilon)}^{\upsilon+\upsilon'}$，其中 $\tau : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^{n-r}$ 是 $\rho^\vee$ 的转置，与方程 *(7.30)* 相符（并对其进行了推广）。
- 融合积 $\mathbb{V}_m^{\upsilon} \otimes_{\widetilde{V}_\rho^A} \mathbb{V}_{m'}^{-\upsilon}$ 是一个不可分解模，其长度为$4 \cdot \#\{i, \rho^\vee(\upsilon)_i \neq 0 \ mod \ \mathbb{Z}\}$，其简单因子由 $\mathbb{V}_{m+m'\pm\tau(\epsilon)}$ 给出，其中$\epsilon_i = 0$ 或 1，且仅当 $\rho^\vee(\upsilon)_i \neq 0 \ mod \ \mathbb{Z}$ 时，它才可能等于 1。

其他融合规则更为复杂，这里不一一列出。回顾单值化的作用：

$$\mu(\mathcal{M},\mathcal{N}) : \mathcal{M} \otimes_{\widetilde{\mathcal{V}}_\rho^A} \mathcal{N} \xrightarrow{R_{\mathcal{M},\mathcal{N}}} \mathcal{N} \otimes_{\widetilde{\mathcal{V}}_\rho^A} \mathcal{M} \xrightarrow{R_{\mathcal{N},\mathcal{M}}} \mathcal{M} \otimes_{\widetilde{\mathcal{V}}_\rho^A} \mathcal{N}. \tag{8.80}$$

利用自由场融合规则，以类似于引理 8.12 的方法，我们可以推导出单值化对这些简单模的作用。（回顾 (8.6) 中单值化的定义。）

推论 8.17。简单模之间的单值化为：

- 单值化 $\mathbb{V}_m^0 \otimes_{\widetilde{V}_\rho^A} \mathbb{V}_{m'}^{\upsilon} \longrightarrow \mathbb{V}_m^0 \otimes_{\widetilde{V}_\rho^A} \mathbb{V}_{m'}^{\upsilon}$ 等于 $e^{2\pi i m\cdot\upsilon}$。
- 如果 $\rho^\vee(\upsilon)_i, \rho^\vee(\upsilon')_i$ 且 $\rho^\vee(\upsilon)_i + \rho^\vee(\upsilon')_i \neq 0$ 模 $\mathbb{Z}$ 对所有 i 都成立，那么单值化 $\mathbb{V}_m^{\upsilon} \otimes_{\widetilde{V}_\rho^A} \mathbb{V}_{m'}^{\upsilon'} \longrightarrow \mathbb{V}_m^{\upsilon} \otimes_{\widetilde{V}_\rho^A} \mathbb{V}_{m'}^{\upsilon'}$ 由下式给出

$$\sum_{\epsilon\in\{0,1\}^n} e^{2\pi i(\upsilon\cdot m' + \upsilon'\cdot m + \tau(\epsilon)\cdot(\upsilon+\upsilon'))} \mathrm{Id}_{\mathbb{V}_{m+m'+\tau(\epsilon)}^{\upsilon+\upsilon'}}.$$

- 在 $\mathbb{V}_m^{\upsilon} \otimes_{\widetilde{V}_\rho^A} \mathbb{V}_{m'}^{-\upsilon}$ 上的单值化不是一个相位，并且模 $\mathbb{Z}\}$ 有 $\#\{i, \rho^\vee(\upsilon)_i \neq 0$ 个大小为2的 *Jordan* 块。

例。再次考虑自由超多重态的 A 扭曲。在此情况下，范畴 $\mathcal{C}_\rho^A$ 就是 $\mathcal{C}_{\beta\gamma}$，而简单模由 $\mathcal{V}_n$ 和 $\Sigma^n\mathcal{W}_\upsilon$ 给出，其中 $\upsilon \neq 0$ 模 $\mathbb{Z}$。它们的融合规则如下：

- $\mathcal{V}_n \otimes_{\mathcal{V}_{\beta\gamma}} \Sigma^{n'}\mathcal{W}_\upsilon = \Sigma^{n+n'}\mathcal{W}_\upsilon$。
- $\Sigma^n\mathcal{W}_\upsilon \otimes_{\mathcal{V}_{\beta\gamma}} \Sigma^{n'}\mathcal{W}_{\upsilon'} = \Sigma^{n+n'}\mathcal{W}_{\upsilon+\upsilon'} \oplus \Sigma^{n+n'+1}\mathcal{W}_{\upsilon+\upsilon'}$，若 $\upsilon + \upsilon' \neq 0$ 模 $\mathbb{Z}$。

- $\Sigma^n \mathcal{W}_\upsilon \otimes_{\mathcal{V}_{\beta\gamma}} \Sigma^{n'} \mathcal{W}_{-\upsilon} = \Sigma^{m+n+1} \mathcal{P}$，其中 $\mathcal{P}$ 是长度为 4 的不可分解模。

例。 考虑SQED$_1$，的 A 扭曲 $\rho = (1)$。在这种情况下，我们已经看到，范畴 $\mathcal{C}_\rho^A$ 是 $\mathcal{V}_{SF}$的模范畴，并且具有唯一的简单对象。前一个例子中的对象$\mathcal{P}$ 可以提升到 $\mathcal{C}_\rho^A$，并且是 $\mathcal{C}_\rho^A$中的射影对象。其融合规则为：

$$\mathcal{L}_A(\mathcal{P}) \otimes_{\widetilde{\mathcal{V}}_\rho^A} \mathcal{L}_A(\mathcal{P}) \cong \mathbb{C}^4 \otimes \mathcal{L}_A(\mathcal{P}). \tag{8.81}$$

8.4 B 扭曲的线算子范畴

8.4.1 $\widehat{\mathfrak{g}_\rho}$ 的 Kazhdan-Lusztig 范畴

既然我们已经有了一个同构 $\mathcal{V}_\rho^A \cong \mathcal{V}_\rho^B$，可能会有人问，为什么我们仍然需要定义范畴 $\mathcal{C}_\rho^B$。毕竟，我们必然有导出范畴之间的等价。原因在于，我们希望从仿射李超代数 $\widehat{\mathfrak{g}_\rho}$ 的视角来定义该范畴，以便将其中的对象与物理线算子进行比较。VOA $\mathcal{V}_\rho^B$是 $\widehat{\mathfrak{g}_\rho}$的简单流扩张，因此我们希望利用 $\widehat{\mathfrak{g}_\rho}$ 的 Kazhdan-Lusztig 范畴来定义该范畴，因为这一范畴中的对象可以直接与物理线算子进行比较。

定义 8.18. 我们将 KL_ρ（即 $\widehat{\mathfrak{g}_\rho}$ 的 *Kazhdan-Lusztig* 范畴）定义为 $\widehat{\mathfrak{g}_\rho}$ 的有限长度、分次受限模所构成的范畴。

我们希望将 $\mathcal{C}_\rho^B$ 定义为来自 KL_ρ 的模的提升，但为此，我们首先需要证明 KL_ρ 是一个编织张量范畴。我们声称：

定理 8.19。 KL_ρ 是由对数交织算子定义的编织张量范畴。此外，张量积是正合函子 KL_ρ。

令 $\mathbb{U}_\mu$ 为由单极算符 $\mathcal{U}_\mu$ 生成的 $\widehat{\mathfrak{g}_\rho}$ 的模。

命题 8.20. $\mathbb{U}_\mu$ 模是 KL_ρ 中满足以下融合规则的简单流：

$$\mathbb{U}_\mu \otimes_{\widehat{\mathfrak{g}_\rho}} \mathbb{U}_\nu = \mathbb{U}_{\mu+\nu}. \tag{8.82}$$

$\bigoplus \mathbb{U}_\mu$ 中的代数对象可以与 $\mathcal{V}_\rho^B$等同。

我们将在后文证明这两个结论；它们与简单流扩张的技巧相结合，意味着以下编织张量范畴之间的提升函子的存在：

$$\mathcal{L}_B : KL_\rho^{[0]} \longrightarrow \mathcal{V}_\rho^B\text{-Mod}_{\text{loc}}\left(\text{Ind}(KL_\rho)\right). \tag{8.83}$$

与定义 8.10类似，我们定义：

定义 8.21。 记 $\mathcal{C}_\rho^B$ 为 $KL_\rho^{[0]}$ 在 $\mathcal{L}_B$ 下的像：

$$\mathcal{C}_\rho^B := \mathcal{L}_B(KL_\rho^{[0]}). \tag{8.84}$$

这是通过对数交织算子构成的编织张量范畴。

与 $\widetilde{\mathcal{V}}_\rho^A$ 的情形一样，$(\mathbb{C}^*)^r$ 在 $\mathcal{V}_\rho^B$ 上有一个作用，使得单极算子 $\mathcal{U}_\mu$ 的权为 μ，而其他生成元的权均为零。根据定义，显然有 $(\mathcal{V}_\rho^B)^{(\mathbb{C}^*)^r} = \widehat{\mathfrak{g}}_\rho$。由此可得，$\mathcal{C}_\rho^B$ 是去等变化 $KL_\rho^{[0]}$ ，$_{(\mathbb{C}^*)^r}$，或 $KL_\rho^{[0]}/\mathbb{Z}^r$。

我们希望理解范畴 KL_ρ，尤其是那些与 $\mathcal{V}_\rho^B$具有平凡单值化的范畴对象，以便与物理线算子进行比较。为此，也为了证明定理8.19，我们首先需要考察 $\widehat{\mathfrak{g}}_\rho$ 的 Verma 模。

8.4.2 韦尔玛模

对于 $\mathfrak{g}_\rho$ 的每个有限维模，例如 M，都可以按如下方式定义一个 $\widehat{\mathfrak{g}}_\rho$ 的模，记作 $\widehat{M}$。 $\widehat{\mathfrak{g}}_\rho$ 的模代数（记作 $U(\widehat{\mathfrak{g}}_\rho)$）有一个由所有非负模生成的子代数 $U_{\geq 0}$ 。李代数 $\mathfrak{g}_\rho$ 是$U_{\geq 0}$的一个商。于是，我们可以通过商映射 $U_{\geq 0} \to \mathfrak{g}_\rho$ 将 M 视为一个 $U_{\geq 0}$ 模。换句话说，我们令正模平凡作用。于是，模 M 就是 M 的归纳：

$$\widehat{M} := M \otimes_{U_{\geq 0}} U\left(\widehat{\mathfrak{g}}_\rho\right). \tag{8.85}$$

KL_ρ 中的任何简单元素都由其最低共形权空间生成，因此是某个韦尔玛模的商。因此，为了理解 KL_ρ中的简单模，我们需要理解韦尔玛模。

引理 8.22。 设 $\upsilon \in \mathbb{C}^r$ 和 M 是 $\mathfrak{g}_\rho$ 的简单模，且 E^a 以特征值 $\curlywedge \upsilon^a$ 作用。当 $\sum_i \rho_{ia}\upsilon^a \notin \mathbb{Z}$ 或对所有 i 均有 $\sum_i \rho_{ia}\upsilon^a = 0$ 时，模 M 是简单的。

$\widehat{\ }$证明。我们只需证明任意 $w \in M$ 都生成整个模。注意， M 中的$\widehat{\ }$元素总是具有以下形式：

$$\sum N_*^a \psi_*^{i,+} \psi_*^{i,-} E_*^a v \tag{8.86}$$

$\widehat{\ }$其中 v 属于 M 的最低共形权空间，该空间就是 M。下标均为负整数。我们对 $\widehat{M}$ 规定字典序，使得 $N > \psi^+ > \psi^- > E$，并

$$N_{-n}^a > N_{-n+1}^a > \cdots > N_{-n}^{a+1} > N_{-n+1}^{a+1} \tag{8.87}$$

对于 $\psi^{\pm}$和 E，也类似。给定一个 w，令 $w = w_0 + w'$其中 $w_0 = N^a_* \psi^{i,}{}_*{}^+ \psi^{i,}{}_*{}^- E^a_* v$是字典序最大的齐次向量，使得 $w_0 > w'$。记由 w生成的子表示为 $\mathcal{W}$。

我们执行以下步骤。如果 w_0 的表达式中包含 $(N^a_{-n})^k$，则我们将对 $w(E^a_n)^k$ 应用相应操作。由于 $[E^a_n, N^a_{-n}] = n$，向量 $(E^a_n)^k w_0$ 的表达式中将不再包含任何 N^a_{-n}。此外，每次应用 E^a_n 时，我们都会得到一个非零向量。我们重复这一过程，直到 w_0 的表达式中的所有 N^a_* 都被消去。

下一步我们应用 $\psi^{i}{}_{,n}{}^-$，直到 $\psi^{i}{}_{,*}{}^+$在 w_0的表达式中不再存在。注意，在这一步中，我们需要假设 $\sum_i \rho_{ia} v^a \notin \mathbb{Z}$ 或等于 0，因为当 $n + \sum_i \rho_a{}^i E^a_0 \neq 0$时，交换子 $\{\psi^{i,-}_n, \psi^{i,+}_{-n}\} = n + \sum_i \rho_a{}^i E^a_0$在 w_0 上非平凡地作用。根据定义，$\sum_i \rho_{ia} E^a_0$的作用为 $\sum_i \rho_{ia} v^a$，根据假设，这不是整数或等于 0。因此，$\psi^{i}{}_{,n}{}^-$在 w_0上的作用是非平凡的。现在我们可以放心地继续这一过程，直到 w_0 的表达式中的所有 $\psi^{i,}_{*}{}^+$都被湮灭。

我们可以对所有 $\psi^{j,}{}_*{}^-$和 E^a_*重复这一过程，直到 w_0 的表达式中的所有负模都被湮灭。由于 $w_0 > w'$，这一过程必定会完全湮灭 w'，于是我们得到最低共形权空间中的一个非零向量。因此，$\mathcal{W}$在 M中包含一个非零向量 v。现在可以完成证明，因为假设 M 是简单的，这意味着 $\mathcal{W}$ 包含 M，从而得到 M。

□

注。特别地，$\widehat{\mathfrak{g}_\rho}$ 的真空模是简单的，因为真空模定义为 $\mathbb{C}$，其中 $\mathbb{C}$ 是平凡的（因而是简单的）$\mathfrak{g}_\rho$ 模。这印证了第*4.2.2*节的讨论，尤其是命题*4.2* 和推论*4.3*。

考虑 $\mathfrak{g}_\rho$的一个简单模 M。由于 N^a_0与 E^a_0（ $N^a(z)$ $E^a(z)$的零模）彼此对易，它们必定至少有一个共同的特征向量。对 $\psi^{i,}{}_0{}^-$ 作用后，我们可以假设该特征向量 v 被 $\psi^{i,}{}_0{}^-$ 湮灭，对所有 i均如此。设 $(m_a,\ v_a)$ 是它在 N^a_0和 E^a_0下的特征值。于是显然，模 M由如下形式的向量张成：

$$\psi_0^{i_1,+} \cdots \psi_0^{i_k,+} v, \qquad i_1 < i_2 < \cdots < i_k, k \leq n. \tag{8.88}$$

这些向量中的每一个都是 N^a_0，E^a_0的特征向量，其特征值为：

$$\left(m_a + \sum_{1 \leq s \leq k} \rho_{i_s a},\ v_a \right). \tag{8.89}$$

我们定义　　由方程中所示形式的向量生成的模 $V_{(m,v)}$

（8.88）。那么，任意简单模都是 $V_{(m,\upsilon)}$（其中某个 m， υ） $\in \mathbb{C}^r \times \mathbb{C}^r$的商。记^为 $V_{(m,\upsilon)}$ 相应的韦尔玛模。

引理 8.23。 当对于所有 i， $\sum \rho_{ia}\upsilon^a \neq 0$ 时， $V_{(m,\upsilon)}$ 是 $\mathfrak{g}_\rho$ 的一个简单模。

证明。 证明的思路与前一个引理非常相似。我们在 $V_{(m,\upsilon)}$ 上定义一个字典序，使得 $\psi^{1,+} > \cdots > \psi^{n,+}$。设 w 是 $V_{(m,\upsilon)}$中任意一个向量， M 是由 w 生成的模。设 $w = w_0 + w'$，其中 $w_0 > w'$，且 w_0 是齐次的。于是我们可以依次对 w 施加 $\psi^{i,-}$，以消去 $\psi^{i,+}$。由于 $\sum \rho_{ia}\upsilon^a$ 不为零，这些作用中的每一个在 w_0 上都非平凡。在表达式 w_0 中消去所有 $\psi^{i,+}$ 后，向量 w' 被消去，因为 $w_0 > w'$，于是我们得到一个最高权向量。因此 $M = V_{(m,\upsilon)}$。

□

^由上述两个引理可知，模 $V_{(\mu,\lambda)}$ 在 $\sum_i \rho_{ia}\lambda^a \notin \mathbb{Z}$对所有 i成立时是单模，而在 $\sum_i \rho_{ia}\lambda^a \notin \mathbb{Z}$ 或 $\sum_i \rho_{ia}\lambda^a = 0$ 对所有 i成立时具有有限长度。事实上，我们有如下命题，其证明逐字翻译自 [BN22a，命题 3 的证明。令 $\mathcal{G}_\rho$ 为 $\mathfrak{g}_\rho$的有限维模范畴，并令 $\mathcal{G}_{\rho,\upsilon}$ 为其中 E^a 的广义特征值为 υ^a的子范畴。

命题 8.24。当 $\sum_i \rho_{ia}\upsilon^a \notin \mathbb{Z}$ 或对所有 i都有 $\sum_i \rho_{ia}\upsilon^a = 0$ 时，归纳函子$\curvearrowright M \mapsto M$ 是阿贝尔范畴的一个等价：

$$\mathcal{G}_{\rho,\upsilon} \simeq KL_{\rho,\upsilon}. \tag{8.90}$$

当 υ 不满足上述条件时，我们该如何处理 $KL_{\rho,\upsilon}$？答案是谱流自同构。顶点算子代数 $\widehat{\mathfrak{g}_\rho}$ 具有如下谱流自同构：

$$\sigma_{\mu,\nu}N^a(z) = N^a(z) - \frac{\mu^a}{z}, \qquad \sigma_{\mu,\nu}E^a(z) = E^a(z) - \frac{\nu^a}{z} \qquad \sigma_{\mu,\nu}\psi^{i,\pm}(z) = z^{\mp\sum_a \rho_{ia}\nu^a}\psi^{i,\pm}. \tag{8.91}$$

其中， $\mu \in \mathbb{C}^r$ 和 $\nu \in \mathbb{C}^r$ 满足：对所有 i，都有 $\sum_a \rho_{ia}\nu^a \in \mathbb{Z}$；换言之， $\nu \in \rho^{-1}(\mathbb{Z}^n)$。谱流给出一个等价：

$$\sigma_{\mu,\nu} : KL_{\rho,\upsilon} \simeq KL_{\rho,\upsilon+\nu}. \tag{8.92}$$

对每个 $\upsilon \in \mathbb{C}^r$，利用短正合列（2.10）的分裂，必定存在一个$\nu \in \rho^{-1}(\mathbb{Z}^n)$，使得 $\upsilon + \nu$满足 $\sum_i \rho_{ia}(\upsilon^a + \nu^a) \notin \mathbb{Z}$或 $\sum_i \rho_{ia}(\upsilon^a + \nu^a) = 0$对所有$i$均成立。现在我们可以证明定理 8.19了。

定理 *8.19* 的证明。 在 [CY21，推论 3.4 中，6], 作者证明了：如果 $\widehat{\mathfrak{g}_\rho}$ 的所有分次限制广义韦尔玛模都具有有限长度，那么 KL_ρ 就具有

由对数交织算子构成的编织张量范畴。设 M 是 $\mathcal{G}_\rho$ 中的一个简单模，v。如果对所有 i，$\sum_i \rho_a{}^i v^a \notin \mathbb{Z}$ 或 $\sum_i \rho_a{}^i v^a = 0$，那么结论成立，因为 $\widehat{M}$ 是简单模，因此具有有限长度。

假设对于某个 i，$\sum_i \rho_a{}^i v^a$ 是一个非零整数。取 $\nu \in \rho^{-1}(\mathbb{Z}^n)$，使得 $v+\nu$ 满足：$\rho(v+\nu)$ 的各项要么为零，要么不是整数。我们只需证明 $\frown\sigma_{0,\ \nu}M$ 是有限长度的。取 $m \in M$，令 I 为所有满足 $\sum \rho_{ai}\nu^a > 0$ 且 $\frown J$ 满足 $\sum \rho_{ai}\nu^a < 0$ 的 i 所构成的子集。考虑由下式给出的 $\sigma_{0,\ \nu}M$ 的子表示：

$$N := \bigoplus_{i\in I, 0\le n<\rho_{ai}\nu^a} < \psi_n^{i,-} m > \oplus \bigoplus_{j\in J, 0<n\le -\rho_{aj}\nu^a} < \psi_n^{j,+} m > \tag{8.93}$$

这里，$v \in M$ 对应的 $\langle v\rangle$ 表示由向量 v 生成的 $\widehat{\mathfrak{g}_\rho}$ 的子模。根据 $\frown N$ 的定义，商 $\sigma_{0,\ \nu}M/N$ 由单个元素 m 生成（即 m 在商中的像），且 $\widehat{\mathfrak{g}_\rho}$ 的所有负模都平凡地作用在 m 上。令 M' 为由 m 生成的 $\frown\sigma_{0,\ \nu}M/N$ 的 $\mathfrak{g}_\rho$ 子模；它必定是有限维的。根据 $\widehat{\ }$ — $\widehat{\ }$ 归纳函子的泛性质，我们有一个满射 $M' \to \sigma_{0,\ \nu}M/N$，因此 $\sigma_{0,\ \nu}M/N$ 是有限长度的。

现在，我们可以对 N 中的所有直和项重复这一论证；由于只有有限多个作用非平凡的正模，这一过程必然终止。因此，我们得到一个有限滤过 $\mathcal{F}_*\sigma_{0,\ \nu}M$ 使得每个分次块都是某个 $\widehat{\ }$ 有限长度韦尔玛模的商。因此，$\sigma_{0,\ \nu}M$ 是有限长度的，所以必定是 M。证明完毕。

□

我们现在已经证明，KL_ρ 具有编织张量范畴的结构。然而，这还不够，因为我们需要融合是正合的，并且需要验证简单模 $\mathbb{U}_\mu$ 的融合规则。这可以通过许多不同的方式来实现，我们将 $\frown$ 通过 $\widehat{\mathfrak{g}_\rho}$ 与 $\mathfrak{gl}(1|1)$ 之间的关系来实现，该关系在第 5.3 节中推导得出。该节中证明了 $\widehat{\mathfrak{g}_\rho}\otimes\mathcal{V}^{+-}_{\mathbb{Z}^{2(n-r)}}$ 是 $\widehat{\mathfrak{gl}\ 1|1}(\ )^{\otimes n}$ 的简单流扩张，换句话说，它是 $\mathrm{Ind}(KL^{\boxtimes n})$ 中的一个代数对象。设 $KL^{\boxtimes n,\rho,[0]}$ 为由与 $\widehat{\mathfrak{g}_\rho}\otimes\mathcal{V}^{+-}_{\mathbb{Z}^{2(n-r)}}$ 具有平凡单值的对象构成的子范畴。那么存在一个提升函子：

$$\mathcal{L}_\rho^{\mathrm{ungauge}} : KL^{\boxtimes n,\rho,[0]} \longrightarrow \widehat{\mathfrak{g}_\rho}\otimes\mathcal{V}^{+-}_{\mathbb{Z}^{2(n-r)}}\text{-}\mathrm{Mod}_{\mathrm{loc}}\left(\mathrm{Ind}(KL^{\boxtimes n})\right). \tag{8.94}$$

我们证明：

定理 8.25。$KL^{\boxtimes n,\rho,[0]}$ 在 $\mathcal{L}_\rho^{\mathrm{ungauge}}$ 下的像恰好是范畴 KL_ρ。因此，KL_ρ 与 $KL^{\boxtimes n,\rho,[0]}$ 关于定义 $\widehat{\mathfrak{g}_\rho}\otimes\mathcal{V}^{+-}_{\mathbb{Z}^{2(n-r)}}$ 的简单模格去等变化所得的范畴之间存在编织张量等价。

定理8.19 的最后一条结论现在可由此定理推出。为证明这一点，我们使用自由场实现。

考虑第 4.3 节的自由场实现。对于每个 $v\cdot X+m\cdot Y$，都有一个 $V_{\mathcal{Z}}$模（因此也是 $\widehat{\mathfrak{g}_\rho}$ 的一个模）$V_{\mathcal{Z},\ v\cdot X+m\cdot Y}$，由向量 $v:=|v\cdot X+m\cdot Y\rangle$ 生成。令 $b^i(z)=:e^{Z^i}(z):$ 和 $c^i(z)=:e^{-Z^i}(z):$，并考虑 $V_{\mathcal{Z},v\cdot X+m\cdot Y}$ 上的如下分级 Δ：

$$\Delta(v)=\Delta(c^i_{-1}v)=0,\qquad \Delta(b^i_{-1}v)=\Delta(X^a_{-1}v)=\Delta(Y^a_{-1}v)=1. \tag{8.95}$$

此外，$\Delta(A_nB)=\Delta(A)+\Delta(B)-n-1$。在此分级下，$V_{\mathcal{Z},\ v\cdot X+m\cdot Y}$ 是正分级的，其最低次数部分由如下形式的向量张成：

$$\prod_{i_1<i_2<\cdots<i_k} c^{i_1}_{-1}\dots c^{i_k}_{-1}v. \tag{8.96}$$

向量 $c^1_{-1}c^2_{-1}\cdots c^n_{-1}v$ 在 E^a_0 的作用下具有权 (v_a)，以及以下权：

$$m_a-\sum_i \rho_{ia}. \tag{8.97}$$

在 N^a_0 的作用下。此外，根据次数的考量，由于 $\Delta(x)=1$ for $x\in\mathfrak{g}_\rho$，该向量被 $\widehat{\mathfrak{g}_\rho}$ 的正模湮灭；而且，通过考察 N_0 的权，它还被 ${\psi^i_{,0}}^-$ 杀死。因此，该向量在 ${\psi^i_{,0}}^+$ 的作用下生成了 $V_{(m-\rho,v)}$ 的一个副本，其中 $m-\rho=(\mu_a-\sum_i\rho_{ia})$。根据归纳函子的泛性质，存在一个诱导态射：

$$\widehat{V}_{(m-\rho,v)}\longrightarrow V_{\mathcal{Z},v\cdot X+m\cdot Y}. \tag{8.98}$$

命题 8.26。当 $\sum_i\rho_{ia}v^a\notin\mathbb{Z}$ 或 $\sum_i\rho_{ia}v^a=0$ 对所有 i，方程(8.98)中的态射是一个同构。

证明。我们首先证明这是一个嵌入。为此，根据命题 8.24，我们只需证明它在 $V_{(m-\rho,v)}$的任意子模上都非零。事实上，$\mathfrak{g}_\rho$ 模 $V_{(m-\rho,v)}$有一个由下式生成的唯一简单子模：

$$\prod_{i,\sum\rho_{ia}v^a=0}\psi^{i,+}_0 v. \tag{8.99}$$

因此很明显，将上述映射 $V_{(m-\rho,v)}\to V_{\mathcal{Z},v\cdot X+m\cdot Y}$ 限制在这个唯一的简单对象上时，它非零。

为了证明这是一个同构，我们只需在 $\widehat{V_{(m-\rho,v)}}$ 上定义一个正分次，使得 $V_{(m-\rho,v)}\to V_{\mathcal{Z},v\cdot X+m\cdot Y}$ 是分次的，并且二者具有相同的分次。我们定义 $\widehat{V_{(m-\rho,v)}}$ 上的分次，使得 $\Delta(V_{(m-\rho,v)})=0$，$\Delta(x_{-1}v)=1$ 对所有 $x\in\mathfrak{g}_\rho$ 都成立，并且

$\Delta(A_n B) = \Delta(A) + \Delta(B) - n - 1$。显然，映射 $V_{(m-\rho,\upsilon)} \to V_{\mathcal{Z},\upsilon\cdot X+m\cdot Y}$ 是正分次向量空间之间的映射。容易看出，分次特征 $\mathrm{Tr}(q^{\Delta})$ 在这两个模上相同，因此它们必定同构。

□

C推论 8.27. 对于任意 υ、$m \in \mathbb{C}^r$，模 $V_{\mathcal{Z},\upsilon\cdot X+m\cdot Y}$ 是 KL_ρ 中的一个对象 .

证明。对于所有 i，若 $\sum \rho_{ia}\upsilon^a = 0$ 或 $\sum \rho_{ia}\upsilon^a \notin \mathbb{Z}$，我们已证明了这一点。若不满足这一条件，则存在一个 $\nu \in \rho^{-1}(\mathbb{Z}^n)$，使得 $\upsilon+\nu$ 满足此条件，因此 $V_{\mathcal{Z},(\upsilon+\nu)\cdot X+m\cdot Y}$ 是 KL_ρ 中的一个对象。现在我们可以完成证明，因为显然存在一个同构：

$$V_{\mathcal{Z},\upsilon\cdot X+m\cdot Y} \cong \sigma_{\rho^\perp \rho\nu,\nu} V_{\mathcal{Z},(\upsilon+\nu)\cdot X+m\cdot Y}, \tag{8.100}$$

由以下映射给出 $\sigma_{\rho^\perp\rho\nu,\nu}|(\upsilon+\nu)\cdot X+m\cdot Y\rangle$ 到 $|\upsilon\cdot X+m\cdot Y-\rho(\nu)\cdot Z\rangle$（方程 (4.24) 的自由场实现）。由于谱流 σ 保持 KL_ρ，对象 $V_{\mathcal{Z},\upsilon\cdot X+m\cdot Y}$ 属于 KL_ρ，证明完毕。

□

现在我们可以证明定理8.25：

定理 8.25 的证明。回顾等式（5.28）的场重定义。对于每个 $\upsilon, m \in \mathbb{C}^r$，$\widehat{\mathfrak{g}_\rho} \otimes \mathcal{V}^{+-}_{\mathbb{Z}^{2(n-r)}}$ 的模 $V_{\mathcal{Z},\upsilon\cdot X+m\cdot Y} \otimes \mathcal{V}^{+-}_{\mathbb{Z}^{2(n-r)}}$ 是 $\widehat{\mathfrak{gl}\ 1|1(\ )}^{\otimes n}$ 模 $\bigoplus_{\nu\in\mathbb{Z}^n} \mathcal{F}^X$，$Y\ Z$，$(\upsilon)\cdot\tilde{X}+\sigma^\vee(m)\cdot\tilde{Y}$ $\nu\cdot\tilde{Z}+\rho$（从自由场代数限制而来）的一个提升。结合命题 8.26 和推论 8.27 的证明，这表明 $\mathcal{L}^{\mathrm{ungauge}}_\rho$ 是本质满的。事实上，命题 8.26 与推论 8.27 的证明结合起来表明，KL_ρ 中任意简单对象都是某个 $\upsilon, m \in \mathbb{C}^r$ 对应的 $V_{\mathcal{Z},\upsilon\cdot X+m\cdot Y}$ 的商，因此属于 $\mathcal{L}^{\mathrm{ungauge}}_\rho$ 的像。根据 KL_ρ 和 $KL^{\boxtimes n}$，的定义，函子 $\mathcal{L}^{\mathrm{ungauge}}_\rho$ 是本质满的。

我们现在证明 $\mathcal{L}^{\mathrm{ungauge}}_\rho$ 映入 KL_ρ。设 $\mathcal{M}$ 是 $\widehat{\mathfrak{gl}\ 1|1(\ )}^{\otimes n}$ 的一个简单模，它与 $\widehat{\mathfrak{g}_\rho} \otimes \mathcal{V}^{+-}_{\mathbb{Z}^{2(n-r)}}$ 具有平凡单值。根据 [BN22a，命题 4.3]，，每个这样的 $\mathcal{M}$ 都唯一嵌入到形如 $\bigoplus_{\nu\in\mathbb{Z}^n} \mathcal{F}^X$，$Y\ Z$ 的模中，其中 $\upsilon', m' \in \mathbb{C}^n$。按照引理 8.12 的相同证明，这样的模只有在 $\rho^\vee\upsilon' \in \mathbb{Z}^n$ 且 $\sigma^\intercal m' \in \mathbb{Z}^{n-r}$ 时才能提升。满足这一条件时，这样的模的提升可识别为 $V_{\mathcal{Z},(\sigma^\vee)^\intercal(\upsilon')\cdot X+\rho^\intercal(m')\cdot Y} \otimes \mathcal{V}^{+-}_{\mathbb{Z}^{2(n-r)}}$；根据推论 8.27，它是 KL_ρ 中的一个对象。因此，任何简单模在 $\mathcal{L}^{\mathrm{ungauge}}_\rho$ 下的像都属于 KL_ρ。证明完毕。

□

现在证明命题 8.20：

命题 *8.20* 的证明。对于每个 $\mu \in \mathbb{Z}^r$，模 $\mathbb{U}_\mu \otimes \mathcal{V}^{+-}_{\mathbb{Z}^{2(n-r)}}$ 是 $\mathcal{V}_{\mathcal{Z}}$ 中筛选算子的核，$\mu\cdot X \otimes \mathcal{V}^{+-}_{\mathbb{Z}^{2(n-r)}}$。根据定理 8.25，这就是以下对象的核的像：

$\sim\sim\sim$ 中筛选算子的 $\bigoplus_{\nu\in\mathbb{Z}^n} \mathcal{F}^X_{,\quad Y\,Z,\ (\mu)\cdot\tilde{X}}$ 在 $\mathcal{L}_\rho^{\text{ungauge}}$ 下。这些对象是简单对象这一事实由 [BN22a，命题 4 得出。3] 它们的融合规则现在由 $KL^{\boxtimes n}$ 中的融合规则推出。

为完成证明，我们只需说明融合积

$$\mathbb{U}_\mu \otimes_{\widehat{\mathfrak{g}_\rho}} \mathbb{U}_\nu \longrightarrow \mathbb{U}_{\mu+\nu} \tag{8.101}$$

可以由 $\mathcal{V}_\rho^B$ 的算子乘积展开诱导得到，这是 $\mathbb{U}_\mu$ 的自由场实现的推论。

□

8.4.3 简单对象与物理线算子

我们现在已经论证了对 $\mathcal{C}_\rho^B$ 的定义。不过，我们仍需理解单值化如何作用于 KL_ρ 中的对象，以便研究 $\mathcal{C}_\rho^B$ 中的对象。我们希望得到类似于命题8.11的表述。我们提出以下命题，它表明单值化条件等价于要求 N_0^a 的作用诱导出一个 $(\mathbb{C}^*)^r$ 在一个模上的作用。该命题的证明将基于镜像对称的论述，并将在下一节中给出。

命题 8.28. 一个 $\mathcal{M}$ 的 $\widehat{\mathfrak{g}_\rho}$ 模属于 $KL_\rho^{[0]}$，当且仅当 N_0^a 的作用是半单的，且其特征值为整数。

利用这一点，我们来考察范畴 $\mathcal{C}_\rho^B$ 的结构。由于 KL_ρ 有如下分解：

$$KL_\rho = \bigoplus_{\upsilon\in\mathbb{C}^r} KL_{\rho,\upsilon} \tag{8.102}$$

其中 $KL_{\rho,\ \upsilon}$ 是全子范畴，其中 E_0^a 的广义特征值为 λ^a。因此，有如下分解：

$$KL_\rho^{[0]} = \bigoplus_{\upsilon\in\mathbb{C}^r} KL_{\rho,\upsilon}^{[0]}. \tag{8.103}$$

提升函子将对象 $\mathcal{M}$ 与 $\mathbb{U}_\mu \otimes_{\widehat{\mathfrak{g}_\rho}} \mathcal{M}$ 对应起来，显然 $\mathbb{U}_\mu$ 诱导出一个等价：

$$\mathbb{U}_\mu \otimes_{\widehat{\mathfrak{g}_\rho}} - : KL_{\rho,\upsilon}^{[0]} \xrightarrow{\simeq} KL_{\rho,\upsilon+\mu}^{[0]}. \tag{8.104}$$

由此得到以下推论，其中我们滥用记号 υ，既表示 $(\mathbb{C}/\mathbb{Z})^r$ 中的一个元素，也表示 $\mathbb{C}^r$ 中的一个代表元。

推论 8　　.29. 该范畴 $\mathcal{C}_\rho^B$ 具有一个与融合相容的分解

积：

$$\mathcal{C}_\rho^B = \bigoplus_{\upsilon\in(\mathbb{C}/\mathbb{Z})^r} \mathcal{C}_{\rho,\upsilon}^B \tag{8.105}$$

其中 $\mathcal{C}_{\rho,\ \upsilon}^B$ 是任意代表元 υ 对应的 $KL_{\rho}^{[0],\ \upsilon}$ 的像。

现在，为了理解简单模，我们只需理解 $KL_{\rho}^{[0],\ \upsilon}$ 的简单模。根据前面的讨论，我们看到，$KL_{\rho,\ \upsilon}$ 的任意简单模都是 $\mathcal{V}_{\mathcal{Z},\ \upsilon\cdot X+m\cdot Y}$ 的商。

命题 8.30。 对于每一对 $(m,\upsilon)\in\mathbb{C}^r\times\mathbb{C}^r$，模 $\mathcal{V}_{\mathcal{Z},\ \upsilon\cdot X+(m+\rho)\cdot Y}$ 有唯一的简单商，记作 $\mathbb{W}_{m,\ \upsilon}$。这里，$m+\rho$ 是向量 $(m_a+\sum_i \rho_{ia})$。

证明。 根据定理 8.25 的证明，模 $\mathcal{V}_{\mathcal{Z},\ \upsilon\cdot X+(m+\rho)\cdot Y}\otimes\mathcal{V}^{+-}_{\mathbb{Z}^{2(n-r)}}$ 是下列模的提升

$$\bigoplus_{\nu\in\mathbb{Z}^n} \mathcal{F}^{\widetilde{X},\widetilde{Y},\widetilde{Z}}_{\nu\cdot\widetilde{Z}+\rho(\upsilon)\cdot\widetilde{X}+\sigma^\vee(m+\rho)\cdot\widetilde{Y}}, \tag{8.106}$$

在函子 $\mathcal{L}_{\text{ungauge}}$ 之下；根据 [CGN20]，，它被识别为由 $\widehat{\mathfrak{gl}\ 1|1}()^{\otimes n}$ 的不可分解韦尔玛模的张量积，并且有唯一的简单商，因为张量积中的每个不可分解模都有唯一的简单商。由于 $\mathcal{L}_\rho^{\text{ungauge}}$ 保持合成列，结论得证。

□

为了使 $\mathbb{W}_{m,\ \upsilon}$ 属于 $KL_\rho^{[0]}$（即满足单值化条件），$m\in\mathbb{Z}^r$。提升之后，$\mathbb{W}_{m,\ \upsilon}$ 被认定为 $\mathbb{U}_\nu\otimes_{\widehat{\mathfrak{g}_\rho}}\mathbb{W}_{m,\ \upsilon}$，而后者是 $\mathbb{W}_{m,\ \upsilon+\nu}$。这就是全部的简单对象。我们将其总结如下：

推论 8.31。 的简单模由以下对象标记：$\mathcal{C}_\rho^B$，其标记为 $\mathbb{Z}^r\times(\mathbb{C}/\mathbb{Z})^r$。对于每个 $m\in\mathbb{Z}^r$ 和 $\upsilon\in(\mathbb{C}/\mathbb{Z})^r$，我们将相应的简单对象记为 $\mathbb{W}_m^\upsilon$，这与第7节的记法一致。模 $\mathbb{W}_m^\upsilon$ 是模 $\mathbb{W}_m$ 在提升函子 $\mathcal{L}_B$ 作用下的像，υ 其中代表元 υ可以任意选取。

在 $\upsilon=0$ 的特殊情况下，可以如下构造简单模。考虑由单个向量张成的 $\mathfrak{g}_\rho$ 的模 A_m，该向量在 N_a 的作用下具有权 m_a，并被所有其他元素湮灭。根据定义，显然 $\mathbb{W}_m^0=\mathcal{L}_B\widehat{A_m}$。我们将这些对象称为 Wilson 线算符，因为 $\widehat{A_m}$ 是由规范群 $(\mathbb{C}^*)$ 的表示 r 决定的，该表示由特征 m 给出。当 $\upsilon\neq0$ 时，我们将 $\mathbb{W}_m^\upsilon$ 称为一般规范涡旋，因为在这样的模上，$E(z)$ 的作用，在规范固定后，等于 $E(z)\sim\frac{\upsilon}{z}$。

–

例。 考虑 $\rho=0$ 的情形，即自由超多重态的 B 扭曲。在这种情况下，$\mathcal{V}_\rho^B=\mathcal{V}_{SF}$，因为不存在单极算符。范畴 $KL_\rho\simeq\mathcal{C}_\rho^B$ 等价于

到 $\mathbb{C}[\psi^+,\psi^-]$–模$fin$，即外代数的有限维模范畴$\mathbb{C}[\psi^+,\psi^-]$，作为阿贝尔范畴。该范畴有唯一的简单对象 $\mathcal{V}_{SF}$，即真空模，它对应于平凡模 $\mathbb{C}$，属于 $\mathbb{C}[\psi^+,\psi^-]$。它还有一个射影对象 $\mathcal{L}_A(\mathcal{P})$，如第 *8.3* 节所述，它对应于自由模 $\mathbb{C}[\psi^+,\psi^-]$。

例。考虑 $\rho=1$ 的情形，即 *SQED*$_1$ 的 *B* 扭曲。在这种情况下，顶点算子代数 $\mathcal{V}_\rho^B\cong\mathcal{V}_{\beta\gamma}\otimes\mathcal{V}_{bc}$。范畴 $KL_\rho\simeq KL$ 是 $\widehat{\mathfrak{gl}(1|1)}(\,)$ 的 *Kazhdan-Lusztig* 范畴，$\widehat{\ }$，而满足单值化条件的简单对象是 A_n、$_e$（对应 $n+e/2\in\mathbb{Z}$）以及 $\widehat{V}_n$、$_e$（对应 $n+\frac{1}{2}\in\mathbb{Z}$ 和 $e\notin\mathbb{Z}$）。我们可以将 $\mathbb{W}_n^{[0]}$ 识别为 $\mathcal{L}_B(\widehat{A}_n,0)$，并将 $e\notin\mathbb{Z}$ 对应的 $\mathbb{W}_n^{[e]}$ 识别为 $\mathcal{L}_B(V_{n+\frac{1}{2}},e)$。这些是 $\mathcal{V}_{\beta\gamma}\otimes\mathcal{V}_{bc}$ 的简单模，正如第*8.2*节所解释的那样。

8.5 线算子的镜像对称

本节将证明：

定理 8.32。 存在一个编织张量范畴的等价：

$$\mathcal{C}_\rho^A\simeq\mathcal{C}_{\rho^\vee}^B. \tag{8.107}$$

证明。 证明的策略是利用第 $\widetilde{\mathcal{V}}_\rho^A$与 $\mathcal{V}_\rho^B$节中推导出的关系5.3：

$$\widetilde{\mathcal{V}}_\rho^A\otimes\mathcal{V}_{bc}^V\cong\mathcal{V}_{\rho^\vee}^B\otimes\mathcal{V}_{\mathbb{Z}^{2(n-r)}}^{+-}, \tag{8.108}$$

以及简单流扩张之间存在一个交换图表这一事实 ：

$$\begin{array}{ccccc} & & \widetilde{\mathcal{V}}_\rho^A\otimes\mathcal{V}_{bc}^V\cong\mathcal{V}_{\rho^\vee}^B\otimes\mathcal{V}_{\mathbb{Z}^{2(n-r)}}^{+-} & & \\ & \nearrow & & \nwarrow & \\ \mathcal{V}_{\beta\gamma}^V\otimes\mathcal{V}_{bc}^V & & & & \widehat{\mathfrak{g}}_\rho\otimes\mathcal{V}_{\mathbb{Z}^{2(n-r)}}^{+-} \\ & \nwarrow & & \nearrow & \\ & & \widehat{\mathfrak{gl}(1|1)}^{\otimes n} & & \end{array} \tag{8.109}$$

这诱导出一个提升函子图表：

$$\begin{array}{ccccc} & & \widetilde{V}_\rho^A\otimes\mathcal{V}_{bc}^V\text{–模}_{\mathrm{loc}}\left(\mathrm{Ind}(KL^{\boxtimes n})\right) & & \\ & \overset{\mathcal{L}_A}{\nearrow} & & \overset{\mathcal{L}_B}{\nwarrow} & \\ \mathcal{C}_{\beta\gamma}^{\boxtimes n} & & \Uparrow & & KL_{\rho^\vee} \\ & \underset{\mathcal{L}_{\mathrm{tot}}^{\mathrm{ungauge}}}{\nwarrow} & & \underset{\mathcal{L}_{\rho^\vee}^{\mathrm{ungauge}}}{\nearrow} & \\ & & KL^{\boxtimes n} & & \end{array} \tag{8.110}$$

这是一个交换图表：每个函子的定义域都是与该扩张具有平凡单值的子范畴。注意， $\mathcal{C}_{\rho}^{A}$ 和 $\mathcal{C}_{\rho^{\vee}}^{B}$ 都是$\widetilde{V}_{\rho}^{A}\otimes\mathcal{V}_{bc}^{V}$–$\mathrm{Mod}_{\mathrm{loc}}\left(\mathrm{Ind}(KL^{\boxtimes n})\right)$的全子范畴。正如我们所回顾的，根据 $\mathcal{L}^{\mathrm{ungauge}}$ BN22a， $\mathcal{C}_{\beta\gamma}^{\boxtimes n}$的像是 [BN22a],；而 $\mathcal{L}_{\rho^{\vee}}^{\mathrm{ungauge}}$ 的像是 $KL_{\rho^{\vee}}$ ，这是定理8.25的内容。由于涉及的每个扩张都是简单流扩张，根据 [CR20], ，此类扩张的次序无关紧要。因此，上述图表是一个提升函子的交换图表。令 $KL^{\boxtimes n,[0]}$ 为 $KL^{\boxtimes n}$ 中与$\widetilde{\mathcal{V}}_{\rho}^{A}\otimes\mathcal{V}_{bc}^{V}\cong\mathcal{V}_{\rho^{\vee}}^{B}\otimes\mathcal{V}_{\mathbb{Z}^{2(n-r)}}^{+-}$具有平凡单值的全子范畴。提升函子的复合：

$$\mathcal{L}_{A}\circ\mathcal{L}_{\mathrm{tot}}^{\mathrm{ungauge}}:KL^{\boxtimes n,[0]}\longrightarrow\mathcal{C}_{\rho}^{A} \tag{8.111}$$

是满射，并给出编织张量范畴 $\mathcal{C}_{\rho}^{A}\simeq KL^{\boxtimes n,[0]}/\mathbb{Z}^{n+r}$, 相对于 $(\mathbb{C}^{*})^{n+r}$ 的去等变化等价，该去等变化由扩张 $\widetilde{\mathcal{V}}_{\rho}^{A}\otimes\mathcal{V}_{bc}^{V}$ 确定。另一方面，提升函子：

$$\mathcal{L}_{B}\circ\mathcal{L}_{\rho^{\vee}}^{\mathrm{ungauge}}:KL^{\boxtimes n,[0]}\longrightarrow\mathcal{C}_{\rho^{\vee}}^{B} \tag{8.112}$$

也是满射，并给出相对于 $(\mathbb{C}^{*})^{n+r}$ 的 $\mathcal{C}_{\rho^{\vee}}^{B}\simeq KL^{\boxtimes n,[0]}/\mathbb{Z}^{n+r}$，去等变化等价，该去等变化由同一扩张确定。将两者结合起来，得到一个编织张量范畴的等价：

$$\mathcal{C}_{\rho}^{A}\simeq KL^{\boxtimes n,[0]}/\mathbb{Z}^{n+r}\simeq\mathcal{C}_{\rho^{\vee}}^{B}, \tag{8.113}$$

证明至此完成。

□

至此，我们给出命题8.28的证明：

命题的证明 *8.28*。 根据定理8.32的证明，我们只需要理解范畴 $KL^{\boxtimes n,[0]}$ 及其在 $\mathcal{L}_{\rho^{\vee}}^{\mathrm{ungauge}}$ 下的像。在 [BN22a], 中，我们已经证明，提升函子 $\mathcal{L}^{\mathrm{ungauge}}{}_{\mathrm{tot}}$ 的定义域是这样一个子范畴，其中 N_{0}^{i} 的作用对所有 i都是半单的，且具有整数特征值。另一方面，命题 8.11 意味着，$\mathcal{L}_{A}$的定义域是这样一个子范畴，其中 $\sum\rho_{ai}J_{0}^{i}$的作用是半单的，且具有整数特征值。忽略一个整数值后， $\sum\rho_{ai}J_{0}^{i}$的作用可与 $-\sum\rho_{ai}E_{0}^{i}$等同，而 $-\sum\rho_{ai}E_{0}^{i}$是$\mathcal{L}_{A}\circ\mathcal{L}^{\mathrm{ungauge}}{}_{\mathrm{tot}}$的定义域，即 $KL^{\boxtimes n,[0]}$是 $KL^{\boxtimes n}$的子范畴，其中 N_{0}^{i}和 $\sum\rho_{ai}E_{0}^{i}$的作用都是半单的，且具有整数特征值。通过提升函子 $\mathcal{L}_{\rho^{\vee}}^{\mathrm{ungauge}}$ 得到的这一子范畴的像，显然是这样一个子范畴，其中 N_{0}^{a} 的作用是半单的，且具有整数特征值。证毕。

□

在定理 8.32的等价关系下，我们实际上可以识别两侧简单模的像，这符合第 7节中的物理预期。

推论 8.33。 在定理 *8.32*的等价下，简单对象 $\mathbb{V}_m^{\upsilon}$ 对应于 $\mathbb{W}_m^{\upsilon}$。特别是，当 $\upsilon = 0$ 模 $\mathbb{Z}$时，我们发现威尔逊线 $\mathbb{W}_m^{[0]}$ 对应于涡旋线 $\mathbb{V}_m^{[0]}$。

证明。 根据定义， $\mathbb{W}_m^{\upsilon}$ 是 $\mathcal{V}_{\mathcal{Z},\upsilon\cdot X+(m+\rho^\vee)\cdot Y}$的唯一简单商在 $\mathcal{L}_B$ 下的提升，其中 υ是一个代表元。这是自由场代数的一个模，也是.....的提升。

$$\bigoplus_{\mu\in\mathbb{Z}^n} \mathcal{F}^{\widetilde{X},\widetilde{Y},\widetilde{Z}}_{\mu\cdot\widetilde{Z}+\sigma(m+\rho^\vee)\cdot\widetilde{Y}+\rho^\vee(\upsilon)\cdot\widetilde{X}}, \tag{8.114}$$

<escape>其中 $m+\rho^\vee$ 是向量 $\nu_\alpha + \sum_i \rho_{i\alpha}^\vee$。根据 [BN22a，命题 4.6], 该模在 $\mathcal{L}^{\text{ungauge}}_{\text{tot}}$ 下的像为：</escape>

$$\bigotimes_i \Sigma_i^{b_i-1}\mathcal{W}_{\rho^\vee(\upsilon)_i}, \tag{8.115}$$

其中 $b_i = \sum_\alpha \sigma_{i\alpha}m^\alpha + \sum_{\alpha,j}\sigma_{i\alpha}\rho_{j\alpha}^\vee$。每个张量因子在 $\sum_\alpha \rho_{i\alpha}^\vee \upsilon^\alpha \neq 0$ 模 $\mathbb{Z}$时是简单的，或者在 $\sum_\alpha \rho_{i\alpha}^\vee \upsilon^\alpha = 0$ 模 $\mathbb{Z}$时有唯一的简单商，此时该商为$\mathcal{V}_{-b_i+1}$。利用短正合列（2.10）的分裂，可得一个同构：

$$\sum_{\alpha,j} \sigma_i{}^\alpha \rho_{j\alpha}^\vee + \sum_{a,j} \rho_i{}^a \sigma_{aj}^\vee = 1, \tag{8.116}$$

因此，若我们将 $\rho(\sigma^\vee)$ 定义为向量 $\sum_{a,\ j}\rho_i{}^a\sigma_{aj}^\vee$，则有以下融合规则：

$$\mathbb{V}_{\rho(\sigma^\vee)} \otimes_{\mathcal{V}_{\beta\gamma}^V} \left(\bigotimes_i \Sigma_i^{b_i-1}\mathcal{W}_{\rho^\vee(\upsilon)_i}\right) \cong \bigotimes_i \Sigma_i^{\sigma(m)_i}\mathcal{W}_{\rho^\vee(\upsilon)_i}. \tag{8.117}$$

方程（8.117）右侧的简单商按定义是 $\mathbb{V}_m^{\upsilon}$ 在提升函子 $\mathcal{L}_A$下的原像。由于 $\mathbb{V}_{\rho(\sigma^\vee)}$ 是 $\widetilde{\mathcal{V}}_\rho^A$的直和项，提升函子将方程（8.117）两边对应起来。因此，方程（ $\mathcal{L}_A$ 8.117）左侧简单商在 $\mathcal{L}_A$ 下的像也为 $\mathbb{V}_m^{\upsilon}$。证毕。

□

例。 考虑 $\rho = 0$ 和 $\rho^\vee = 1$的情形。此时， $\mathcal{C}_\rho^A$是 $\mathcal{C}_{\beta\gamma}$，而 $\mathcal{C}_\rho^B$是$KL^N/\mathbb{Z}$。这一等价是 *[BN22a]*的主要内容。

另一方面， $\mathcal{C}_\rho^B$是 $\mathcal{V}_{SF}$的模范畴，而 $\mathcal{C}_{\rho^\vee}^A$ 是$\mathcal{C}_{\beta\gamma}^{[0]}/\mathbb{Z}$的去等变化。 $\mathcal{C}_{\beta\gamma}^{[0]}/\mathbb{Z}$ 中唯一的简单对象是真空的谱流，它在此等价下映射到 $\mathcal{V}_{SF}$ 的真空模。

8.6 线算子范畴中导出自同态的计算

在前面的章节中，我们已经证明，编织张量范畴 $\mathcal{C}_\rho^A$和 $\mathcal{C}_\rho^B$ 中的对象对应于物理线算子，并且这些对象在镜像对称等价下表现良好。在本节中，我们将讨论如何利用这个范畴来获得线交汇处的局部算子空间。由此，我们重新推导了 [CCG18], 的结果：希格斯分支和库仑分支可以由顶点算子代数得到。这也为以下结论提供了最后一块依据：导出范畴 $D^b\mathcal{C}_\rho^A$和 $D^b\mathcal{C}_\rho^B$ 与第7节中构造的体范畴一致，因为 $D^b\mathcal{C}_\rho^B$中威尔逊线的导出扩张群重现了第7.1节的结果。

计算的思路是，尽管范畴 $\mathcal{C}_\rho^A$ 和 $\mathcal{C}_\rho^B$ 被定义为顶点算子代数的模，但实际上它们等价于有限维李代数的表示，因此可以利用切瓦利-埃伦伯格上链复形计算 Hom 空间。我们指出，这本质上是一次 B 面计算，因为用于此次计算的李代数是李超代数 $\mathfrak{g}_\rho$。不过，也可以完全利用 A 面范畴 $\mathcal{C}_\rho^A$进行计算，而不必经过李超代数，因为尽管范畴 $\mathcal{C}_\rho^A$没有射影对象或内射对象，但存在一个模的投射系统，在某种意义上表现得如同射影对象 [BN22a、定理 2.3、定理 2.4], 可利用该系统构造分解。下文中，我们将选择较为简单的方法，利用李超代数进行计算。

令 $KL^{\boxtimes n,N,\rho(E)}$ 为 $KL^{\boxtimes n}$ 的子范畴，使得 $N_{i,\ 0}$ 且 $\sum \rho_{ia}E_0^i$ 半单地作用，且具有整数特征值。由定理 8.32 的证明可知， $KL^{\boxtimes n,N,\rho(E)}$ 与 $KL^{\boxtimes n,[0]}$ 相对应，并且提升函子 $\mathcal{L}_A$ 将 $\mathcal{C}_\rho^A$ 表示为 $KL^{\boxtimes n,N,\rho(E)}$ 的去等变化。对于每个 $\upsilon \in(\mathbb{C}/\mathbb{Z})^{n-r}$，令 $\mathcal{C}_{\rho,\ \upsilon}^A$ 为由 υ 标记的子范畴；稍微滥用记号，将其代表元记为 υ ，则提升函子限制为：

$$\mathcal{L}_A : KL^{\boxtimes n,N,\rho(E)}_{\rho^\vee\upsilon} \longrightarrow \mathcal{C}^A_{\rho,\upsilon}. \tag{8.118}$$

这就是我们与有限维代数建立联系的方式。令 $\mathfrak{gl}(1|1)^{\oplus n}\text{–Mod}^{N,\rho(E)}$ 为 $\mathfrak{gl}(1|1)^{\oplus n}$ 的表示范畴，其中 N_i 半单地作用且具有整数特征值，并且 $\sum \rho_{ia}E^i$ 也半单地作用且具有整数特征值。对于每个 υ，记 $\rho^\vee\upsilon$ 为满足如下条件的向量：$(\rho^\vee\upsilon)_i = \sum \rho^\vee_{i\alpha}\upsilon^\alpha$，若 $\sum \rho^\vee_{i\alpha}\upsilon^\alpha$不是整数；否则 $(\rho^\vee\upsilon)_i = 0$。以下结果证明于 [BN22a，命题 3。2]:

引理 8.34。归纳函子诱导出一个等价：

$$\text{Ind} : \mathfrak{gl}(1|1)^{\oplus n}\text{–Mod}^{N,\rho(E)}_{\rho^\vee\upsilon} \simeq KL^{\boxtimes n,N,\rho(E)}_{\rho^\vee\upsilon}. \tag{8.119}$$

其中，左侧的下标表示这样的子范畴： E_i 的作用具有由 $\rho^\vee\upsilon$给出的特征值。

复合函子 $\mathcal{L}_A \circ \mathrm{Ind}$ 是从 $\mathfrak{gl}(1|1)^{\oplus n}$的表示范畴到范畴 $\mathcal{C}^A_{\rho,\upsilon}$的满射函子。此外，由于该函子将模的张量积映射为融合积（在此处满足的某些条件下），这一点已在 [BN22a, Corollary 3.6]，中得到证明，因此根据 $(\mathbb{C}^*)^r$，该函子将 $\mathcal{C}^A_{\rho,\upsilon}$ 表示为 $\mathfrak{gl}(1|1)^{\oplus n}$–Mod $^{N\,\rho(E)}_{\rho^\vee\upsilon}$ 的去等变化。在有限维李代数的意义下，这个 $(\mathbb{C}^*)^r$ 作用由 $\mathfrak{gl}(1|1)^{\oplus n}$ 的格诱导，该格由 $\mathbb{C}_{\rho(\lambda)}$ 给出，其中 $\mathbb{C}_{\rho(\lambda)}$ 是 $\lambda \in \mathbb{Z}^r$上的子模，N_i 的作用为 $\sum \rho_{ai}\lambda^a$，而其他生成元的作用为零。函子 $\mathcal{L}_A \circ \mathrm{Ind}$ 将 $\mathfrak{gl}(1|1)^{\oplus n}$–$\mathrm{Mod}^{N\,\rho(E)}_{\rho^\vee\upsilon}$ 中的一个模 M 识别为 $\mathbb{C}_{\rho(\lambda)} \otimes M$。因此，至少作为阿贝尔范畴，我们可以通过这个格，将 $\mathcal{C}^A_{\rho,\upsilon}$ 识别为 $\mathfrak{gl}(1|1)^{\oplus n}$–$\mathrm{Mod}^{N\,\rho(E)}_{\rho^\vee\upsilon}$ 的去等变化。

现在定义由 $\widetilde{N_\alpha} := \sum \rho^\vee_{i\alpha} N^i$， ψ^i，$\pm$和 E^i生成的 $\mathfrak{h}$ $\mathfrak{gl}(1|1)^{\oplus n}$ 的李子代数，那么我们有一个限制函子：

$$\mathrm{Res} : \mathfrak{gl}(1|1)^{\oplus n}\text{–}\mathrm{Mod}^{N,\rho(E)}_{\rho^\vee\upsilon} \longrightarrow \mathfrak{h}\text{–}\mathrm{Mod}^{\widetilde{N},\rho(E)}_{\rho^\vee\upsilon}. \tag{8.120}$$

引理 8.35. 限制函子的核是由 $\mathbb{C}_{\rho(\lambda)}$ 生成的张量子范畴。此外，诱导函子：

$$\mathcal{C}^A_{\rho,\upsilon} \longrightarrow \mathfrak{h}\text{–}\mathrm{Mod}^{\widetilde{N},\rho(E)}_{\rho^\vee\upsilon} \tag{8.121}$$

是阿贝尔范畴之间的等价。

证明. 设 M 是 $\mathfrak{gl}(1|1)^{\oplus n}$ 的一个模，则显然，对于任意 $\lambda \in \mathbb{Z}^r$，$\mathrm{Res}(M) \cong \mathrm{Res}(M \otimes \mathbb{C}_{\rho(\lambda)})$。因此，Res 诱导出一个从去等变化范畴出发的函子。为证明其是全忠实的，我们计算：

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{Res}(M), \mathrm{Res}(N)) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{h}}(\mathbb{C}, \mathrm{Res}(M^* \otimes N)). \tag{8.122}$$

限制函子遗忘了 $\rho(N)$ 的半单作用，因此限制函子的右伴随为：

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{h}}(\mathbb{C}, \mathrm{Res}(M^* \otimes N)) \cong \bigoplus_{\lambda\in\mathbb{Z}^r} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{gl}(1|1)^{\oplus n}}(\mathbb{C}_{\rho(\lambda)}, M^* \otimes N) \cong \bigoplus_{\lambda\in\mathbb{Z}^r} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{gl}(1|1)^{\oplus n}}(\mathbb{C}_{\rho(\lambda)} \otimes M, N). \tag{8.123}$$

根据定义，右侧是在去等变化范畴中 M 与 N 之间的 Hom。

现在我们证明它是本质满的。设 M 是一个由单个元素生成的 $\mathfrak{h}$ 模，

我们通过以下方式得到一个 $\mathfrak{gl}(1|1)^{\oplus n}$ 模:

$$\widetilde{M} = \bigoplus M \otimes \mathbb{C}_{\rho(\lambda)} \tag{8.124}$$

其中， $\psi^{\pm,i}$ 将 M 映射到 $M \otimes \mathbb{C}_{\rho(\lambda+\rho^\intercal e_i)}$，其中 e_i 是 $\mathbb{Z}^n$的标准基，在第 i个分量上为 1，其余位置均为零。令 N 为由$m \in M \otimes \mathbb{C}_0$生成的子模。它是有限维的，因为 M 是有限维的，且 $\psi^{i,\pm}$ 的作用是幂零的。我们声称，由 $m \to m$ 诱导的映射 $N \to M$ 实际上是 $\mathfrak{h}$的模同构。确实，它是良定义的，因为若某个 $a \in \mathfrak{h}$使得 $a \cdot m = 0$ 属于 N，那么它在 M中必为零，所以该映射是良定义的模映射。基于同样的理由，它是单射；显然它也是满射，因为 M 中的任意元素都具有 $a \cdot m$ 的形式，其中 $a \in U(\mathfrak{h})$。因此我们得出 Res 是满射。证毕。

□

~这意味着，我们可以改为计算 $\mathfrak{h}$–$\mathbf{Mod}^{N\,\rho(E)}_{\rho^\vee v}$,中对象之间的 Hom。由于 E~是中心的，当 $\rho^\vee v \neq \rho^\vee v'$时， $\mathfrak{h}$–$\mathbf{Mod}^{N\,\rho(E)}_{\rho^\vee v}$,与 ~ ~$\mathfrak{h}$–$\mathbf{Mod}^{N\,\rho(E)}_{\rho^\vee v'}$,中的对象之间不存在 Hom。我们来讨论 M, N 都属于 $\mathfrak{h}$–$\mathbf{Mod}^{N\,\rho(E)}_{\rho^\vee v}$,的情形。在这种情况下，我们将便用伴随:

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{h}}(M, N) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{h}}(\mathbb{C}, M^* \otimes N) \tag{8.125}$$

~这是范畴 $\mathfrak{h}$–$\mathbf{Mod}^{N,\ \rho(E)}$中的一个定义良好的伴随。 $\mathbb{C}$ 和 $M^* \otimes N$ 都属于这样的子范畴： E_i 的广义特征值为 0。再结合要求 $\rho(E)$半单地作用，可知 $\rho(E)$平凡作用。因此，~范畴 $\mathfrak{h}$–$\mathbf{Mod}_0^{N\,\rho(E)}$ ，中的一个模，就是 $\mathfrak{h}/(\rho(E))$的一个模，显然存在一个同构:

$$\mathfrak{h}/(\rho(E)) \cong \mathfrak{g}_*(\rho^\vee) \tag{8.126}$$

作为李超代数。这就是该计算本质上属于 B 侧的原因。

令 $\mathfrak{l}$ 为由 $\psi^{i,\ \pm}$ 和 E_i生成的 $\mathfrak{h}$ 的李子代数，并令 $\mathfrak{l}$ 为关于 $\rho(E)$的商； $\widetilde{\ }$它是 $\mathfrak{g}_*(\rho^\vee)$的一个子代数。若将 N_a 的作用视为诱导一个 $(\mathbb{C}^*)^r$ 作用，则存在一个等价:

$$\mathfrak{h}\text{–}\mathrm{Mod}_0^{\widetilde{N},\rho(E)} \simeq \bar{\mathfrak{l}}\text{–}\mathrm{Mod}_0^{(\mathbb{C}^*)^r}. \tag{8.127}$$

我们将使用右侧进行计算。用 CE($\mathfrak{l}$) 表示 Chevalley-Eilenberg 链复形，它是如下向量空间:

$$\mathrm{CE}(\bar{\mathfrak{l}}) = U(\bar{\mathfrak{l}}) \otimes \mathrm{Sym}\left(\bar{\mathfrak{l}}[1]\right) \tag{8.128}$$

其微分由切瓦利-埃伦伯格微分给出：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(u\otimes \mathrm{Sym}(x_1[1],\cdots,x_p[1])) = &\sum_i (-1)^{\pm} u x_i \otimes \mathrm{Sym}(x_1[1],\cdots,\widehat{x_i[1]},\cdots,x_p[1]) \\ &+\sum_{i<j}(-1)^{\pm} u\otimes \mathrm{Sym}([x_i,x_j][1],x_1[1],\cdots,\widehat{x_i[1]},\cdots,\widehat{x_j[1]},\cdots,x_p[1]).\end{aligned} \tag{8.129}$$

该复形是自由 $\mathfrak{l}$ 模的复形，并且有一个映射到平凡模 $\mathbb{C}$ 的增广映射。在李代数理论中，这是一个标准结论：增广映射 $\mathrm{CE}(\mathfrak{l})\to\mathbb{C}$ 是 $\mathbb{C}$ 的自由分解。我们希望论证可以使用这个分解来计算上述导出 Hom。问题在于，这个分解不是$\mathfrak{l}$–$\mathbf{Mod}_0^{(\mathbb{C}^*)^r}$中的对象；我们将通过证明它的某个有限截断是一个对象来解决这一问题。

引理 8.36. 设 P^* 是 r-等变的自由 $U(\mathfrak{l})$ 分解，其中 $\mathbb{C}^*)^r$，且该分解为 $\mathbb{C}$ 的分解。设 V_* 是任意另一个 r-等变分解，其中 $\mathbb{C}^*)^r$，则存在一个 r-等变映射，其中 $\mathbb{C}^*)^r$，从 P^* 映到 V_*，并诱导一个拟同构。

这是一个标准的教科书结论，例如可见于 [Lan12]。因此，对于 Mod) 中 $\mathbb{C}$ 的任意有界分解 V_*，都存在一个拟同构 $\mathrm{CE}(\bar{\mathfrak{l}})\to V_*$。当然，该映射可经由同调次数上的某个有限截断：

$$\mathrm{CE}(\bar{\mathfrak{l}})_{\geq -k} := \mathrm{Ker}(\mathrm{CE}_{-k})\to \mathrm{CE}_{-k}\to\cdots\to \mathrm{CE}_0, \tag{8.130}$$

而且，当 N 足够大时，它还可经由 $\mathrm{CE}(\mathfrak{l})_{\geq -k}/(E_\alpha^N)$ 分解，因为 E_α 在 V_* 上幂零作用。现在我们有一个由有限维模构成的有限复形，并且分解的投射系统 $\mathrm{CE}(\mathfrak{l})_{\geq -k}/(E_\alpha^N)$ 在所有 $\mathbb{C}$ 的分解所成的范畴中是终对象。根据 Yoneda 扩张群的定义，我们有：

$$\mathrm{RHom}(\mathbb{C}, M^*\otimes N)\cong \varinjlim_{N,k}\mathrm{Hom}\left(\mathrm{CE}(\bar{\mathfrak{l}})_{\geq -k}/(E_\alpha^N), M^*\otimes N\right) = \left(M^*\otimes N\otimes \mathrm{Sym}(\bar{\mathfrak{l}}^*[-1])\right)^{(\mathbb{C}^*)^r}. \tag{8.131}$$

这里，右侧的 $M^*\otimes N\otimes\mathrm{Sym}(\bar{\mathfrak{l}}^*[-1])$ 是 $M^*\otimes N$ 作为 $\mathfrak{l}$ 的模的切瓦利-埃伦伯格上链复形，而上标 $(\mathbb{C}^*)^r$ 表示取不变量。我们将其总结如下：

命题 8.37。 设 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$ 是 $\mathcal{C}^A_{\rho,\upsilon}$ 中的对象，且 M 和 N 是 $\mathfrak{l}$–模$^{(\mathbb{C}^*)^r}_{\rho^\vee\upsilon}$ 中的对象，它们在 $\mathcal{L}_A\circ\mathrm{Ind}$ 下的像分别为 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{N}$。那么存在一个拟同构：

$$\mathrm{RHom}_{D^b\mathcal{C}^A_\rho}(\mathcal{M},\mathcal{N})\cong\left(M^*\otimes N\otimes\mathrm{Sym}(\bar{\mathfrak{l}}^*[-1])\right)^{(\mathbb{C}^*)^r}. \tag{8.132}$$

作为一个具体例子，考虑 $\mathcal{M}=\mathbb{V}_m$ 和 $\mathcal{N}=\mathbb{V}_{m'}$ 对于 $m,\ m'\in\mathbb{Z}^{n-r}$，即

简单涡旋线。与它们对应的对象是 $\mathbb{C}_m$ 和 $\mathbb{C}_{m'}$，$\mathfrak{l}$ 的平凡一维模，但具有由 m 和 m'给出的 $(\mathbb{C}^*)^r$-等变结构。由此可知：

$$\mathrm{RHom}_{\mathcal{C}_\rho^A}(\mathbb{V}_m, \mathbb{V}_{m'}) \cong \mathrm{Sym}\left(\bar{\mathfrak{l}}^*[-1]\right)^{(\mathbb{C}^*)^r, m'-m} \tag{8.133}$$

即 $m'-m$ 半不变量子空间 $\mathrm{Sym}(\mathfrak{l}^*[-1])$。

引理 8.38。 代数 $\mathrm{Sym}(\mathfrak{l}^*[-1])$ 与第 $\mathbb{C}[X_i, Y_i]/(\mu_\alpha)$ 节所述的代数拟同构*7.1*。

证明。 $\psi^{\pm,\,i}$ 的对偶给出变量 X_i 和 Y_i，$\mathfrak{g}^*$ 的对偶给出费米子变量 λ_α。切瓦利-埃伦伯格微分可以显式计算如下：

$$d(\lambda_\alpha) = \sum \rho^\vee_{i\alpha} X^i Y^i, \tag{8.134}$$

而这恰好与 $\mathbb{C}[X_i, Y_i]/(\mu_\alpha)$ 拟同构。 □

因此，我们得到：

命题 8.39。 存在一个拟同构：

$$\mathrm{RHom}_{\mathcal{C}_\rho^A}(\mathbb{V}_m, \mathbb{V}_{m'}) \cong \left(\mathbb{C}[X_i, Y_i]/(\mu_\alpha)\right)_{m'-m} \tag{8.135}$$

其中右侧是半不变量的子空间。

这与方程（7.5）中的物理预言完全一致，只要我们使用 $\mathcal{C}_\rho^A$ 与 $\mathcal{C}_{\rho^\vee}^B$之间的等价关系，以及 $\mathbb{V}_m$ 与 $\mathbb{W}_m$之间的对应关系。

A 共形元与反常

在本附录中，我们计算 $\widehat{\mathfrak{g}}_\rho$的共形元。特别地，我们将证明，共形元是与方程（4.8）中的移位二次型相关联的二次卡西米尔元。此外，我们还将证明，这一移位等价于反常。这意味着，反常不仅存在于物理理论中，对于共形元的修正的杉原构造而言，它在数学上同样具有重要意义。

$\mathfrak{g}$ 是约化李群 G 的李代数，V 是 $\mathfrak{g}$ 的复表示。具有规范群 G 且超多重态取值于 V 的 B 型扭曲理论边界上的微扰顶点算子代数，是与以下李超代数相关联的仿射李超代数：

$$\mathfrak{g}_* = \mathfrak{g}[0] \oplus V[-1] \oplus V^*[-1] \oplus \mathfrak{g}^*[-2] \ni (N_a, \psi^{i,+}, \psi^{i,-}, E^a) \tag{A.1}$$

以及一个由物理学确定的二次卡西米尔元：

$$\kappa(N_a,\ N_b) = (T_V - T_{\mathfrak{g}})\kappa_{\mathfrak{g}}(N_a,\ N_b), \qquad \kappa(N_a, E^b) = \delta^b{}_a, \qquad \kappa(\psi^{i,\ +},\ \psi^{j,\ -}) = \delta^{ij}. \tag{A.2}$$

这里 $\kappa_{\mathfrak{g}}$ 是 $\mathfrak{g}$ 上的标准 Killing 型，并将其平凡地延拓到 $\mathfrak{g}_{*\circ}$ 我们证明：

命题 A.1. 顶点代数 $V_\kappa(\mathfrak{g}_*)$ 是一个顶点算子代数，其共形元由与 $\kappa - (T_V - T_{\mathfrak{g}})\kappa_{\mathfrak{g}}$相关联的二次卡西米尔元给出。

让我们在一个更一般的设定下开始计算。假设给定一个李超代数 $\mathfrak{g}_* = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ 以及一个伴随不变的非退化偶双线性型 κ。令 x_i 为一组基，x^i 为关于 κ 的一组对偶基。相应的 κ 的二次卡西米尔元为

$$\Omega_\kappa = \sum_i (-1)^{|x_i|} x_i x^i, \tag{A.3}$$

其中 $|x_i|$ 是 x_i的宇称。注意，这只取决于 κ 的选择，而与基无关，因此采用该记号。

令 $V_k(\mathfrak{g}_*)$ 表示与 $\mathfrak{g}_*$ 相关联的层为 k的仿射李超代数。该顶点代数由 $x_i(z)$ 生成，其算子乘积展开为：

$$x_i(z)x_j(w) \sim \frac{k\kappa(x_i, x_j)}{(z-w)^2} + \frac{[x_i, x_j](w)}{z-w}. \tag{A.4}$$

与二次卡西米尔元对应的顶点算子为：

$$\Omega_\kappa(z) = \sum_i (-1)^{|x_i|} :x_i(z)x^i(z): . \tag{A.5}$$

按照 [FBZ01], 的计算，与 x_i 的二次卡西米尔元之间的算子乘积展开为：

$$\Omega_\kappa(z)x_i(w) \sim \frac{2kx_i(w) + [\Omega_\kappa, x_i](w)}{(z-w)^2} + \frac{2k\partial x_i(w)}{z-w} + \frac{\partial[\Omega_\kappa, x_i](w)}{z-w}. \tag{A.6}$$

这里 $[\Omega_\kappa,\ x_i]$ 表示二次卡西米尔元作用于李代数自身这个模上的作用：

$$[\Omega_\kappa, x_i] = \sum_j (-1)^{|x_j|}[x_j, [x^j, x_i]]. \tag{A.7}$$

当 $\mathfrak{g}$ 是单的，且 κ 选为标准 Killing 型时，Ω_κ 的作用由乘以 $2h^\vee$ 给出，其中 $h^\vee$ 是 $\mathfrak{g}$ 的对偶考克斯特数。在这种情况下，上述算子乘积展开

变为:

$$\Omega_\kappa(z)x_i(w) \sim \frac{2(k+h^\vee)x_i(w)}{(z-w)^2} + \frac{2(k+h^\vee)\partial x_i(w)}{z-w}, \tag{A.8}$$

因此，~~$1\cdot 2(k+h^\vee)\Omega_\kappa(z)$~~ 是一个共形元。这就是通常的 Segal-Sugawara 构造。

现在我们具体讨论 $\mathfrak{g}_*$ 具有方程（A.1）的形式，且 κ 如方程（A.2所示的情形。在此双线性型下，$\{N_a, \psi^{i,+}, \psi^{i,-}, E^a\}$ 的对偶基为:

$$\{E^a, \psi^{i,-}, -\psi^{i,+}, N_a - (T_V - T_\mathfrak{g})\sum_b \kappa_\mathfrak{g}(N_a, N_b)E^b\} \tag{A.9}$$

因此，二次卡西米尔元为:

$$\Omega_\kappa = \sum_a N_a E^a + E^a N_a - \sum_i \psi^{i,+}\psi_i^- + \sum_i \psi_i^-\psi^{i,+} - (T_V - T_\mathfrak{g})\sum_{a,b} E^a E^b \kappa_\mathfrak{g}(N_a, N_b). \tag{A.10}$$

为方便起见，令 N^a 为 N_a 在 $\kappa_\mathfrak{g}$ 下的对偶基，并令 E_a 为 N^a 在 $\mathfrak{g}^*$ 中的对偶基。由于:

$$\sum_{a,b} E^a E^b \kappa_\mathfrak{g}(N_a, N_b) = \sum_a E_a E^a, \tag{A.11}$$

我们可以简化二次卡西米尔元:

$$\Omega_\kappa = \sum_a N_a E^a + E^a N_a - \sum_i \psi^{i,+}\psi_i^- + \sum_i \psi_i^-\psi^{i,+} - (T_V - T_\mathfrak{g})\sum_a E_a E^a. \tag{A.12}$$

根据方程（A.6），它是否可用作共形元取决于 Ω_κ 如何作用于 $\mathfrak{g}_*$，这是我们接下来要计算的内容:

命题 A.2. κ 对 $\mathfrak{g}_*$ 的Ω作用是幂零的，唯一的非平凡作用如下:

$$\Omega_\kappa(N_a) = 2(T_\mathfrak{g} - T_V)E_a. \tag{A.13}$$

证明. 根据次数，Ω_κ 仅对 N_a有非平凡作用，我们将计算这一作用。先来看这一项:

$$\sum_b [N_b, [E^b, N_a]]. \tag{A.14}$$

用 N_a 表示与基 $\mathfrak{g}$ 相关联的结构常数 f_{ab}^c。即，$[N_a, N_b] = \sum f_{ab}^c N_c$。由于

$$\kappa([E^b, N_a], N_c) = f_{ac}^b = \kappa([N^b, E_a], N_c), \tag{A.15}$$

并且由于 κ 是非退化的，我们得到：

$$\sum_b [N_b, [E^b, N_a]] = \sum_b [N_b, [N^b, E_a]] = 2h^\vee E_a. \tag{A.16}$$

同样

$$\sum_b [E^b, [N_b, N_a]] = 2h^\vee E_a. \tag{A.17}$$

现在考虑：

$$\sum_i \{\psi^{i,+}, [\psi_i^-, N_a]\}. \tag{A.18}$$

计算配对：

$$\kappa(\sum_i \{\psi^{i,+}, [\psi_i^-, N_a]\}, N^b) = \sum_i \kappa([N_a, \psi_i^-], [N^b, \psi^{i,+}]) = \mathrm{Tr}_V(N_a N^b). \tag{A.19}$$

根据我们的选择的归一化，除非 $a = b$，否则其为零；在这种情况下，它为 T_V，因此：

$$\sum_i \{\psi^{i,+}, [\psi_i^-, N_a]\} = T_V E_a. \tag{A.20}$$

同样，$\psi_i^- \psi^{i,+}$ 也给出相同的贡献。最后，根据次数的考虑，$E_a E^a$ 的作用是平凡的，于是我们得到：

$$\Omega_\kappa(N_a) = 2(T_\mathfrak{g} - T_V)E_a. \tag{A.21}$$

正如所期望的。

□

该证明表明，二次卡西米尔元之所以无法成为共形元，正是因为反常。为了解决这一问题，我们需要利用顶点代数中的附加场来抵消作用的这一幂零部分。考虑算子乘积展开：

$$\sum_b :E_b E^b: (z) N_a(w) \sim \frac{2kE_a(w)}{(z-w)^2} + \frac{2k\partial E_a(w)}{z-w}. \tag{A.22}$$

事实上，根据以下计算，我们得到：

$$\sum_b N_a(w) E_{b,-1} E^b_{-1}|0\rangle \sim w^{-2} \sum_b N_{a,1} E_{b,-1} E^b_{-1}|0\rangle + w^{-1} \sum_b N_{a,0} E_{b,-1} E^b_{-1}|0\rangle = w^{-2} 2kE_{a,-1}|0\rangle, \tag{A.23}$$

由此可得：

$$\sum_b :E_bE^b:(z)N_a(w) \sim \frac{2kE_a(z)}{(w-z)^2} \sim \frac{2E_a(w)}{(z-w)^2} + \frac{2k\partial E_a(w)}{z-w}. \tag{A.24}$$

考虑以下元素：

$$\widetilde{\Omega}_\kappa = \frac{1}{2}\Omega_\kappa + \frac{T_V - T_\mathfrak{g}}{2}\sum_a E_aE^a, \tag{A.25}$$

其与 $x(w)$的算子乘积展开为：

$$\widetilde{\Omega}_\kappa(z)x(w) = \frac{2kx(w)}{(z-w)^2} + \frac{2k\partial x(w)}{z-w}. \tag{A.26}$$

As a 因此，$\frac{1}{2k}\widetilde{\Omega}_\kappa(z)$是一个共形元。该元素可写为：

$$\widetilde{\Omega}_\kappa = \frac{1}{2}\left(\sum_a N_aE^a + E^aN_a - \sum_i \psi^{i,+}\psi_i^- + \sum_a \psi_i^-\psi^{i,+}\right), \tag{A.27}$$

由此可见，它不过是与二次型 $\kappa' = \kappa - (T_V - T_\mathfrak{g})\kappa_\mathfrak{g}$相对应的二次卡西米尔元。

事实上，可以从任意双线性型 $\tilde{\kappa} = \kappa + c\kappa_\mathfrak{g}$ 出发，其中 c。二次卡西米尔元$\Omega_{\tilde{\kappa}}$ 总会以相同的因子幂零地作用。此外，在仿射李代数 $V_k(\mathfrak{g}_*)$中，N_a 与 $\sum E_bE^b$ 之间的算子乘积展开保持不变，因为 N_a 与 E_a之间的配对保持不变。因此，对于任意选择 $\tilde{\kappa}$，共形元始终是与 $\tilde{\kappa} - (T_V - T_\mathfrak{g})\kappa_\mathfrak{g}$相对应的二次卡西米尔元，并相差一个反常项。

B 半指标恒等式

在本附录中，我们计算顶点算子代数 $\mathcal{V}_\rho^A$和 $\mathcal{V}_{\rho^\vee}^B$的分次特征，从而重新得到物理学文献中已知的半指标公式。定理4.4将三维镜像顶点算子代数联系起来

$$\mathcal{V}_\rho^A \;\cong\; \mathcal{V}_{\rho^\vee}^B \tag{B.1}$$

立即蕴含分次特征相等，这将半指标恒等式从 [Oka19] 推广到任意 ρ，$\rho^\vee$。

在物理文献中，边界顶点代数的特征称为半指标。它们最一般地定义于保留二维 $\mathcal{N} = 2$ $\mathcal{N} = (0,2)$ 超对称的三维 [GGP13、ST13、YS14、DGP17]，理论的边界条件，是对 [KW11、IY11]的体三维指标计算的推广。将三维 $\mathcal{N} = 4$ 理论视为二维 $\mathcal{N} = 2$ 理论时，

半指标可定义为

$$\mathbb{I}_{\mathcal{V}}^{\mathcal{N}=2}(\eta, q^{\frac{1}{2}}, x) \;=\; \mathrm{Tr}_{\mathcal{V}}\,(-1)^{2J}\eta^{H-C}q^{\frac{1}{2}(2J+H)}x^{F}\,, \tag{B.2}$$

其中 H，C是 $U(1)_H \times U(1)_C \subset SU(2)_H \times SU(2)_C$R 对称性的荷，$J \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$是边界 Spin -（其中 $2J$ 模 2 为费米子数），而 F 是所有可能存在的味对称性的荷向量。公式（B.2）还可以进一步特化为与三维$\mathcal{N}=4$ 体的 A 或 B 拓扑扭曲相对应的边界顶点算子代数的特征（只要边界条件与 A 或 B 扭曲相容）。对于 A 扭曲，特征为

$$\mathbb{I}_{\mathcal{V}}^{A}(q^{\frac{1}{2}}, x) := \mathrm{Tr}_{\mathcal{V}}\,(-1)^{C}q^{L_0}x^{F} \;=\; \mathbb{I}_{\mathcal{V}}^{\mathcal{N}=2}(-1, -q^{\frac{1}{2}}, x)\,, \tag{B.3}$$

注意到 $L_0 = J + H/2$ 在 A 扭曲中。对于 B 扭曲，特征是

$$\mathbb{I}_{\mathcal{V}}^{B}(q^{\frac{1}{2}}, x) := \mathrm{Tr}_{\mathcal{V}}\,(-1)^{H}q^{L_0}x^{F} \;=\; \mathbb{I}_{\mathcal{V}}^{\mathcal{N}=2}(-q^{\frac{1}{2}}, -q^{\frac{1}{2}}, x)\,, \tag{B.4}$$

注意到 $L_0 = J + C/2$ 在 B 扭曲中。

B.1 A 扭曲

在 A 扭曲中，我们有 $\mathcal{V}_{\rho}^{A} = H_{\mathrm{BRST}}(\mathfrak{gl}(1)^r, \mathcal{V}_{\beta\gamma}^{T^*V} \otimes \mathcal{V}_{bc}^{V}) \;= H^{\bullet}\big((\mathcal{V}_{bc}^{\mathfrak{g}} \otimes \mathcal{V}_{\beta\gamma}^{T^*V} \otimes \mathcal{V}_{bc}^{V})^{\mathrm{rel}}, Q_{\mathrm{BRST}}\big)$。微分 Q_{BRST} 的同调次数为 $+1$，除此之外不带电荷；取上同调不会改变特征，因此

$$\mathbb{I}_{\mathcal{V}_{\rho}^{A}} = \mathbb{I}_{(\mathcal{V}_{bc}^{\mathfrak{g}} \otimes \mathcal{V}_{\beta\gamma}^{T^*V} \otimes \mathcal{V}_{bc}^{V})^{\mathrm{rel}}} \tag{B.5}$$

回顾第 2.3.5 节，相对复形 $(\mathcal{V}_{bc}^{\mathfrak{g}} \otimes \mathcal{V}_{\beta\gamma}^{T^*V} \otimes \mathcal{V}_{bc}^{V})^{\mathrm{rel}}$的定义是从 $\mathcal{V}_{bc}^{\mathfrak{g}} \otimes \mathcal{V}_{\beta\gamma}^{T^*V} \otimes \mathcal{V}_{bc}^{V}$开始，去除 $\mathfrak{g}$-值场 c 的零模，并手动限制为有限 $\mathfrak{gl}(1)^r$ 对称性下的不变量。我们可以在特征层面复现这些操作。

令 $\mathcal{V}_{bc}^{\mathfrak{g}\,\prime}$ 表示 $\mathcal{V}_{bc}^{\mathfrak{g}}$（作为一个向量空间）去除了 c 的零模。空间 $\mathcal{V}_{bc}^{\mathfrak{g}\,\prime} \otimes \mathcal{V}_{\beta\gamma}^{T^*V} \otimes \mathcal{V}_{bc}^{V}$具有有限对称性 $U(1)_H \times G \times T_F \times T_B \times T_{\mathrm{top}}$，如第（3.2.1）节所述。我们计算一个分次特征

$$\mathbb{I}_{\mathcal{V}_{bc}^{\mathfrak{g}\,\prime} \otimes \mathcal{V}_{\beta\gamma}^{T^*V} \otimes \mathcal{V}_{bc}^{V}}(q^{\frac{1}{2}}, s, f, b, t) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{V}_{bc}^{\mathfrak{g}\,\prime} \otimes \mathcal{V}_{\beta\gamma}^{T^*V} \otimes \mathcal{V}_{bc}^{V}}\,(-1)^{H}q^{L_0}s^{G}f^{F}b^{B}t^{T}\,, \tag{B.6}$$

其中 $s = (s_1, ..., s_r)$ 是 $U(1)^r$规范作用的逸度（而 $G = (G_1, ..., G_r)$ 是规范荷）；$f = (f_1, ..., f_{n-r})$ 是 T_F味逸度；$b = (b_1, ..., b_{n-r})$ 是 T_B边界

味逸度，而 $t=(t_1,...,t_r)$ 是拓扑 $T_{\rm top}$ 味逸度。特征因子分解为 $\mathrm{Tr}^{\mathcal{V}^{\mathfrak{g}}_{bc}{}'\otimes\mathcal{V}^{T^*V}_{\beta\gamma}\otimes\mathcal{V}^{V}_{bc}}=\mathrm{Tr}^{\mathcal{V}^{\mathfrak{g}}_{bc}{}'}\mathrm{Tr}^{\mathcal{V}^{T^*V}_{\beta\gamma}}\mathrm{Tr}^{\mathcal{V}^{V}_{bc}}$，其中

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{V}^{\mathfrak{g}}_{bc}{}'}=(q;q)_\infty^{2r}\,,\qquad \mathrm{Tr}_{\mathcal{V}^{T^*V}_{\beta\gamma}}=\prod_{i=1}^{n}\left(q^{\frac{1}{2}}s^{\rho_i}f^{\sigma_i},q^{\frac{1}{2}}s^{-\rho_i}f^{-\sigma_i};q\right)_\infty^{-1}\,,\tag{B.7}$$

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{V}^{V}_{bc}}=\prod_{i=1}^{n}\left(-q^{\frac{1}{2}}s^{\rho_i}f^{\sigma_i}b^{\rho_i^\vee}t^{\sigma_i^\vee},-q^{\frac{1}{2}}s^{-\rho_i}f^{-\sigma_i}b^{-\rho_i^\vee}t^{-\sigma_i^\vee};q\right)_\infty,$$

其中 Pochhammer 符号的定义见（4.43）。通过展开并取所有 s 变量的常数项，可以轻松地实现对规范作用下不变量的提取；等价地，也可以取围道积分 $\prod_a\oint\frac{ds_a}{2\pi i\circ}$ 因此，A 扭曲的顶点算子代数的特征为

$$\mathbb{I}_{\mathcal{V}^A_\rho}(q^{\frac{1}{2}},f,b,t)=(q;q)_\infty^{2r}\prod_{a=1}^{r}\oint\frac{ds_a}{2\pi i}\prod_{i=1}^{n}\frac{\left(-q^{\frac{1}{2}}s^{\rho_i}f^{\sigma_i}b^{\rho_i^\vee}t^{\sigma_i^\vee},-q^{\frac{1}{2}}s^{-\rho_i}f^{-\sigma_i}b^{-\rho_i^\vee}t^{-\sigma_i^\vee};q\right)_\infty}{\left(q^{\frac{1}{2}}s^{\rho_i}f^{\sigma_i},q^{\frac{1}{2}}s^{-\rho_i}f^{-\sigma_i};q\right)_\infty}\,.\tag{B.8}$$

B.2 B 扭曲

在 B 扭曲中，我们将计算

$$\mathbb{I}_{\mathcal{V}^B_\rho}(q^{\frac{1}{2}},f,g,t)=\mathrm{Tr}_{\mathcal{V}^B_\rho}(-1)^Cq^{L_0}f^Fg^Gt^T\,,\tag{B.9}$$

其中 $f=(f_1,\ldots\ldots,f_{n-r})$、$g=(g_1,\ldots\ldots,g_r)$，以及 $t=(t_1,\ldots\ldots,t_r)$ 分别是第 T_F、G和 $T_{\rm top}$ 节 4.2.1 中所述的风味对称性的赋值参数。回顾第 4.2.1节，根据第 4.2.2 节，B-扭曲的顶点算子代数是单极子扇区的直和

$$\mathcal{V}^B_\rho=\bigoplus_{\mu\in\mathbb{Z}^r}\mathcal{F}^N_\mu\,,\tag{B.10}$$

其中每个 $\mathcal{F}^N_\mu$都是微扰顶点算子代数 $\mathcal{F}^N_0=\widehat{\mathfrak{g}_\rho}$的一个模，由一个态 $|\mu\rangle$生成，该态对应于式（4.12）中的单极子顶点算子。

微扰顶点算子代数有一个 PBW 基，由以下各项的非正模构成的词给出$N(z)$ $E(z)$ $\psi^+(z)$ $\psi^-(z)$，并按相同顺序书写。利用（4.11）中的荷，微扰顶点算子代数的特征为

$$\mathbb{I}_{\widehat{\mathfrak{g}_\rho}}=\frac{1}{(q;q)_\infty^{2r}}\prod_{i=1}^{N}\left(-qg^{\rho_i}f^{\sigma_i},-qg^{-\rho_i};q\right)_\infty.\tag{B.11}$$

每个模 $\mathcal{F}_\mu^N$ 均由态 $|\mu\rangle$生成，其荷如（4.40）所示，与预期的单极算子的荷（4.5）一致。向量 $|\mu\rangle$ 因此对特征的贡献为$q^{\frac{1}{2}|\rho\mu|^2}g^{\rho^T\rho\mu}t^\mu f^{\sigma^T\rho\mu}$。从算子乘积展开（4.13）可见，该模的其余部分有一个 PBW 基，由 $N(z)$和 $E(Z)$的非正模构成的词给出（因为零模的作用如常数，正模的作用为零，而负模可自由作用）；以及满足以下条件的模 $\psi^{i}_{\ .\ k}{}^{\pm}$

$$\psi_k^{i,+}: \quad k<-(\rho\mu)^i\,, \qquad \psi_k^{i,-}: \quad k<(\rho\mu)^i\,. \tag{B.12}$$

$\psi^{\pm}$ 的这些模在 $|\mu\rangle$上自由作用，其余的则作为常数作用。因此， $\mathcal{F}_\mu^N$本质上是一个韦尔玛模，只是 $\psi^{\pm}$的模编排发生了偏移。考虑到这一偏移，其特征为

$$\mathbb{I}_{\mathcal{F}_\mu^N}=q^{\frac{1}{2}|\rho\mu|^2}g^{\rho^T\rho\mu}t^\mu f^{\sigma^T\rho\mu}\times\frac{1}{(q;q)_\infty^{2r}}\prod_{i=1}^N\big(-q^{1+(\rho\mu)_i}g^{\rho_i}f^{\sigma_i},-q^{1-(\rho\mu)_i}g^{-\rho_i};q\big)_\infty\,. \tag{B.13}$$

将所有内容合并起来，我们得到

$$\mathbb{I}_{\mathcal{V}_\rho^B}(q^{\frac{1}{2}},f,g,t)=\frac{1}{(q;q)_\infty^{2r}}\sum_{\mu\in\mathbb{Z}^r}q^{\frac{1}{2}|\rho\mu|^2}g^{\rho^T\rho\mu}t^\mu f^{\sigma^T\rho\mu}\prod_{i=1}^N\big(-q^{1+(\rho\mu)_i}g^{\rho_i}f^{\sigma_i},-q^{1-(\rho\mu)_i}g^{-\rho_i};q\big)_\infty\,. \tag{B.14}$$

定理4.4 的一个推论是

推论 B.1。 对于任意的 ρ （以及相应的 $\rho^\vee$，还有分裂 σ 和余分裂 $\sigma^\vee$的选择），我们有

$$\mathbb{I}_{\mathcal{V}_\rho^A}(q^{\frac{1}{2}},f,b,t)\;=\;\mathbb{I}_{\mathcal{V}_{\rho^\vee}^B}(q^{\frac{1}{2}},t,b,f) \tag{B.15}$$

例。 考虑带有两个电荷为 *1* 的超多重态的 *SQED*，其中 $r=1$、 $n=2$以及荷为

$$\rho=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\,,\quad \rho^\vee=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\,,\qquad \sigma=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\,,\quad \sigma^\vee=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\,. \tag{B.16}$$

我们找到特征

$$\mathbb{I}_{\mathcal{V}_\rho^A}(q^{\frac{1}{2}},f,b,t)=\frac{1}{(q;q)_\infty^2}\oint\frac{ds}{2\pi is}\frac{\big(-q^{\frac{1}{2}}sfb,-q^{\frac{1}{2}}(sfb)^{-1},-q^{\frac{1}{2}}sb^{-1}t,-q^{\frac{1}{2}}(sb^{-1}t)^{-1};q\big)_\infty}{\big(q^{\frac{1}{2}}sf,q^{\frac{1}{2}}(sf)^{-1},q^{\frac{1}{2}}s,q^{\frac{1}{2}}(s)^{-1};q\big)_\infty} \tag{B.17}$$

$$\mathbb{I}_{\mathcal{V}_{\rho^\vee}^B}(q^{\frac{1}{2}},f,g,t)=\frac{1}{(q;q)_\infty^2}\sum_{\mu\in\mathbb{Z}}q^{\mu^2}g^{2\mu}t^\mu f^{-\mu}\big(-q^{1+\mu}g,-q^{1-\mu}g^{-1},-q^{1-\mu}g^{-1}f,-q^{1+\mu}gf^{-1};q\big)_\infty \tag{B.18}$$

并且可以在 q 中逐阶验证

$$\begin{aligned}\mathbb{I}_{\mathcal{V}_\rho^A}(q^{\frac{1}{2}},f,b,t) &= \mathbb{I}_{\mathcal{V}_{\rho^\vee}^B}(q^{\frac{1}{2}},f,g,t) \\ &= 1+\Big(2+\tfrac{1}{b}+b+\tfrac{1}{f}+\tfrac{1}{bf}+f+bf+\tfrac{b}{f}+\tfrac{bf}{t}+\tfrac{b^2f}{t}+\tfrac{t}{b}+\tfrac{t}{b^2f}+\tfrac{t}{bf}\Big)q+O(q^2)\end{aligned} \tag{B.19}$$

参考文献

[ABC+09] P. S. Aspinwall, T. Bridgeland, A. Craw, M. R. Douglas, A. Kapustin, G. W. Moore, M. Gross, G. Segal, B. Szendr¨oi, and P. M. H. Wilson, 《狄利克雷膜与镜像对称》, Clay 数学专著，第 4 卷，AMS，普罗维登斯，罗得岛，2009年。[ACPV22] D. Adamovic, T. Creutzig, O. Perse, and I. Vukorepa, 《非可容许能级下通过极小仿射 W-代数构造的张量范畴$KL_k(\mathfrak{sl}_{2n})$》, arXiv:2212.00704 [数学物理].[Ada03] D. Adamovi´c, 《某些自由玻色子顶点代数子代数的不可约模分类》, 《代数杂志》270 (2003) 115–132。[AG15] B. Assel and J. Gomis, 《镜像对称与环算子》, 《高能物理学杂志》11 (2015) 055，arXiv:1506.01718 [高能物理理论].[AGG+09] L. F. Alday, D. Gaiotto, S. Gukov, Y. Tachikawa, and H. Verlinde, 《N$=2$ 规范理论中的环算子与曲面算符以及 Liouville 模几何》, 《高能物理学杂志》01 (2010) 113，arXiv:0909.0945 [高能物理理论].[AO21] M. Aganagic and A. Okounkov, 《椭圆稳定包络》, 《美国数学会杂志》34 (2021) 79–133。[AP19] D. Adamovi´c and V. Pedi´c, 《关于 Weyl 顶点代数的融合规则与交织算子》, 《数学物理杂志》60 (2019) 081701。[AW20] R. Allen and S. Wood, 《玻色鬼消除：玻色鬼顶点代数具有带刚性融合的对数模范畴》, 《数学物理通讯》390 (2022) 959–1015, arXiv:2001.05986 [数学物理].[BBFSN22] L. Bhardwaj, M. Bullimore, A. E. V. Ferrari, and S. Schafer-Nameki, 《孤子缺陷所揭示的广义对称性反常》, arXiv:2205.15330[高能物理理论].[BBFSN23] , 《三维 N$=4$ 超共形场论的广义对称性与反常》, arXiv:2301.02249 [高能物理理论].[BCH18] F. Benini, C. C´ordova, and P.-S. Hsin, 《关于二群全局对称性及其反常》, 《高能物理学杂志》03 (2019) 118，arXiv:1803.09336 [高能物理理论]。

[BDG15] M. Bullimore, T. Dimofte, and D. Gaiotto, 《三维 $\mathcal{N}=4$理论的库仑分支》, 《数学物理通讯》354 (2017) 671–751, arXiv:1503.04817[高能物理理论].[BDGH16] M. Bullimore, T. Dimofte, D. Gaiotto, and J. Hilburn, 《三维 $\mathcal{N}=4$ 规范理论中的边界、镜像对称与辛对偶》, 《高能物理学杂志》10 (2016) 108, arXiv:1603.08382 [高能物理理论].[BF18] A. Braverman and M. Finkelberg, 《三维规范理论的库仑分支及相关结构》, 《数学讲义》2248 (2019) 1–52, arXiv:1807.09038 [代数几何].[BF22] M. Bullimore and A. Ferrari, 《三维 N=*4* 理论中的广义对称性与真空模叠》, 2022年。爱丁堡大学 GRIFT 研讨会报告, 2月11日。[BFK21] M. Bullimore, A. E. V. Ferrari, and H. Kim, 《黎曼曲面上三维 $\mathcal{N}=4$ 规范理论的超对称基态》, 《SciPost物理》12 (2022) 072, arXiv:2105.08783 [高能物理理论].[BFN16] A. Braverman, M. Finkelberg, and H. Nakajima, 《迈向三维 $\mathcal{N}=4$ 规范理论库仑分支的数学定义, II》, 《数学物理进展》22 (2018) 1071–1147, arXiv:1601.03586 [数学表示论].[BFN21] , 《库仑分支上的线丛》, 《数学物理进展》25 (2021) 957–993。[BLL+13] C. Beem, M. Lemos, P. Liendo, W. Peelaers, L. Rastelli, and B. C. van Rees, 《四维中的无限手征对称性》, 《数学物理通讯》336 (2015) 1359–1433, arXiv:1312.5344 [高能物理理论].[BLPW10] T. Braden, A. Licata, N. Proudfoot, and B. Webster, 《Gale 对偶与 Koszul 对偶》, 《数学进展》225 (2010) 2002–2049。[BM21] C. Beem and C. Meneghelli, 《a1 型亏格二 class S 理论的几何自由场实现》, 《物理评论 D》104 (2021) 065015, arXiv:2104.11668[高能物理理论].[BMR19] C. Beem, C. Meneghelli, and L. Rastelli, 《来自希格斯分支的自由场实现》, 《高能物理学杂志》09 (2019) 058, arXiv:1903.07624 [高能物理理论]。

[BN22a] A. Ballin 和 W. Niu，三维镜像对称与 $\beta\gamma$ 顶点算子代数，arXiv:2202.01223 [高能物理理论].[BN22b] C. Beem 和 S. Nair，自由场实现与手征普遍中心化子，arXiv:2208.09343 [高能物理理论].[BT96] M. Blau 和 G. Thompson， $N(T) \geq 2$ 拓扑规范理论与 D膜的若干方面，《核物理 B》492 (1997) 545–590，arXiv:hep-th/9612143.[BZ21] M. Bullimore 和 D. Zhang，椭圆曲线上的三维 $\mathcal{N} = 4$ 规范理论，《SciPost物理》13 (2022) 005，arXiv:2109.10907 [高能物理理论].[CCF+18] M. C. N. Cheng、S. Chun、F. Ferrari、S. Gukov 和 S. M. Harrison，三维模性，《高能物理学杂志》10 (2019) 010，arXiv:1809.10148 [高能物理理论].[CCF+22] M. C. N. Cheng、S. Chun、B. Feigin、F. Ferrari、S. Gukov、S. M. Harrison 和 D. Passaro，三维流形与顶点算子代数特征标，arXiv:2201.04640 [高能物理理论].[CCG18] K. Costello、T. Creutzig 和 D. Gaiotto，从顶点算子代数得到希格斯分支与库仑分支，《高能物理学杂志》03 (2019) 066，arXiv:1811.03958 [高能物理理论].[CDG20] K. Costello、T. Dimofte 和 D. Gaiotto，边界手征代数与全纯扭曲，arXiv:2005.00083 [高能物理理论].[CDGG21] T. Creutzig、T. Dimofte、N. Garner 和 N. Geer，一个非半单拓扑量子场论的量子场论，arXiv:2112.01559 [高能物理理论].[CG17] T. Creutzig 和 D. Gaiotto，S对偶的顶点代数，《数学物理通讯》379 (2020) 785–845，arXiv:1708.00875 [高能物理理论].[CG18] K. Costello 和 D. Gaiotto，顶点算子代数与三维 $\mathcal{N} = 4$ 规范理论，《高能物理学杂志》05 (2019) 018，arXiv:1804.06460 [高能物理理论].[CGN20] T. Creutzig、N. Genra 和 S. Nakatsuka，次正则 W代数与主 W超代数的对偶，《数学进展》383 (2021) 107685，arXiv:2005.10713[数学物理].[CGNS21] T. Creutzig、N. Genra、S. Nakatsuka 和 R. Sato，次正则 $\mathcal{W}$代数与主 $\mathcal{W}$超代数的范畴对应，《数学物理通讯》393 (2022) 1–60，arXiv:2104.00942 [数学物理].[CGP21] F. Costantino、S. Gukov 和 P. Putrov，非半单拓扑量子场论与 BPSq级数，《SIGMA》19 (2023) 010，arXiv:2107.14238 [数学物理].

[CHZ13] S. Cremonesi、A. Hanany 和 A. Zaffaroni，规范理论的单极算子与库仑分支的希尔伯特级数，《高能物理学杂志》01 (2014) 005，arXiv:1309.2657 [高能物理理论].[CJOH+20] T. Creutzig、C. Jiang、F. Orosz Hunziker、D. Ridout 和 J. Yang，源自 Virasoro 代数的张量范畴，《数学进展》380 (2021) 107601，arXiv:2002.03180 [数学物理].[CKL15] T. Creutzig、S. Kanade 和 A. R. Linshaw，超越半单性的简单流扩张，《当代数学通讯》22 (2020) 1950001，arXiv:1511.08754 [数学物理].[CKLR16] T. Creutzig、S. Kanade、A. R. Linshaw 和 D. Ridout，海森堡余集的 Schur–Weyl 对偶，《变换群》24 (2019) 301–354，arXiv:1611.00305[数学物理].[CKM17] T. Creutzig、S. Kanade 和 R. McRae，顶点算子超代数扩张的张量范畴，arXiv:1705.05017 [数学物理].[CL20] T. Creutzig 和 A. R. Linshaw，$\mathcal{W}$代数的三重对偶，《剑桥数学杂志》10 (2022) 69–194，arXiv:2005.10234 [数学物理].[CL21] ，正交辛 W 代数的三重对偶，《数学进展》409 (2022) 108678，arXiv:2102.10224 [数学物理].[CLNS22] T. Creutzig、A. R. Linshaw、S. Nakatsuka 和 R. Sato，通过 W 代数的卷积实现对偶，arXiv:2203.01843 [数学物理].[CMY20a] T. Creutzig、R. Mcrae 和 J. Yang，顶点张量范畴的直极限完备化，arXiv:2006.09711 [数学物理].[CMY20b] T. Creutzig、R. McRae 和 J. Yang，关于单重顶点代数的缎带范畴，《数学物理通讯》387 (2021) 865–925，arXiv:2007.12735[数学物理].[CMY22a] ,单重顶点代数完整表示范畴上的缎带张量结构，2022年。https://arxiv.org/abs/2202.05496.[CMY22b] ,仿射 gl(1—1) 的 Kazhdan-Lusztig 范畴上的张量结构，《国际数学研究通知》IMRN (2022) 12462–12515。[CMY22c] ，某些 W-（超）代数在 A型的大模范畴上的刚性张量结构，arXiv:2210.04678 [数学物理].

[CO16] H.-J. Chung 和 T. Okazaki，《三维 $\mathcal{N}=4$ 理论和 IIB 型膜中的 (2,2) 与 (0,4) 超对称边界条件》，《物理评论 D》96 (2017) 086005，arXiv:1608.05363 [高能物理理论].[CP20] K. Costello 和 N. M. Paquette，《扭曲超引力与 Koszul 对偶：AdS 中的一个案例研究》，《数学物理通讯》384 (2021) 279–339，arXiv:2001.02177 [高能物理理论].[CR08] T. Creutzig 和 P. B. Ronne，《GL(1—1)-辛费米子对应》，《核物理 B》815 (2009) 95–124，arXiv:0812.2835 [高能物理理论].[CR11a] T. Creutzig 和 D. Ridout，《关联对数共形场论的典范》，《核物理 B》872 (2013) 348–391，arXiv:1107.2135 [高能物理理论].[CR11b] ，《扩张仿射 $gl(1|1)$ 的 W 代数》，Springer Proc. Math. Stat. 36 (2013) 349–367，arXiv:1111.5049 [高能物理理论].[CR13a] ，《对数共形场论：超越入门》，《物理学杂志 A》46 (2013) 4006，arXiv:1303.0847 [高能物理理论].[CR13b] ,《分数层 WZW 模型 II 的模数据与 Verlinde 公式》，《核物理 B》875 (2013) 423–458，arXiv:1306.4388 [高能物理理论].[CR20] T. Creutzig 和 M. Rupert，《展开量子群的提升》，Commun. Contemp. Math. 24 (2022) 2150023，arXiv:2005.12445 [math.RT].[CRW13] T. Creutzig、D. Ridout 和 S. Wood，《对数 (1, p) 模型的余集构造》，《数学物理快报》104 (2014) 553–583，arXiv:1305.2665 [数学物理].[CY21] T. Creutzig 和 J. Yang，《超越可容许层的仿射李代数张量范畴》，《数学年刊》380 (2021) 1991–2040。[dBHO+96] J. de Boer、K. Hori、H. Ooguri、Y. Oz 和 Z. Yin，《三维理论中的镜像对称、SL(2,Z) 与 D-膜模空间》，《核物理 B》493 (1997) 148–176，arXiv:hep-th/9612131。[dBHOO96] J. de Boer、K. Hori、H. Ooguri 和 Y. Oz，《三维规范理论、箭图与 D-膜中的镜像对称》，《核物理 B》493 (1997) 101–147，arXiv:hep-th/9611063。[DFPY17] M. Dedushenko、Y. Fan、S. S. Pufu 和 R. Yacoby，《三维中的库仑分支算子与镜像对称》，《高能物理学杂志》04 (2018) 037，arXiv:1712.09384 [高能物理理论].

[DGGH19] T. Dimofte、N. Garner、M. Geracie 和 J. Hilburn，《镜像对称与线算符》，《高能物理学杂志》02 (2020) 075，arXiv:1908.00013 [高能物理理论].[DGH10] T. Dimofte、S. Gukov 和 L. Hollands，《涡旋计数与拉格朗日子流形三维流形》，《数学物理快报》98 (2011) 225–287，arXiv:1006.0977 [高能物理理论].[DGN+18] M. Dedushenko、S. Gukov、H. Nakajima、D. Pei 和 K. Ye，《来自 Argyres-Douglas 理论的三维拓扑量子场论》，《物理学杂志 A》53 (2020) 43LT01，arXiv:1809.04638[高能物理理论].[DGP17] T. Dimofte、D. Gaiotto 和 N. M. Paquette，《三维超共形场论中的对偶边界条件》，《高能物理学杂志》05 (2018) 060，arXiv:1712.07654 [高能物理理论].[DLM97] C. Dong、H. Li 和 G. Mason，《有理顶点算子代数的正则性》，《数学进展》132 (1997) 148–166。[DN21] M. Dedushenko 和 N. Nekrasov，《界面与量子代数 I：稳定包络》，arXiv:2109.10941 [高能物理理论].[Dou00] M. R. Douglas，《D膜、范畴与 N=*1* 超对称》，J. Math. Phys. 42 (2001) 2818–2843，arXiv:hep-th/0011017。[DVVV89] R. Dijkgraaf、C. Vafa、E. P. Verlinde 和 H. L. Verlinde，《轨形模型的算子代数》，《数学物理通讯》123 (1989) 485。[EGNO15] P. Etingof、S. Gelaki、D. Nikshych 和 V. Ostrik，《张量范畴》，《数学调查与专著》，美国数学学会，2015。https://books.google.com/books?id=NwM-CgAAQBAJ。[EKSNW19] J. Eckhard、H. Kim、S. Schafer-Nameki 和 B. Willett，《高形式对称性、Bethe 真空与三维-三维对应》，《高能物理学杂志》01 (2020) 101，arXiv:1910.14086 [高能物理理论].[EMSS89] S. Elitzur、G. W. Moore、A. Schwimmer 和 N. Seiberg，《关于 Chern-Simons-Witten 理论的正则量子化的评述》，《核物理 B》326 (1989) 108–134。[FBZ01] E. Frenkel 和 D. Ben-Zvi，《顶点代数与代数曲线》，《数学调查与专著》第 88 卷，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛，2001。https://doi-org.ezproxy.is.ed.ac.uk/10.1090/surv/088。

[FG18] E. Frenkel 和 D. Gaiotto，《边界条件、D-模与共形块的量子朗兰兹对偶》，《数论物理通讯》14（2020年）199–313，arXiv:1805.00203 [高能物理理论].[FGZ86] I. B. Frenkel、H. Garland 和 G. J. Zuckerman，《半无限上同调与弦理论》，《美国国家科学院院刊》83（1986年）8442。[Gai16] D. Gaiotto，《三维理论的扭曲紧化与共形块》，《高能物理学杂志》02（2019年）061，arXiv:1611.01528 [高能物理理论].[Gar22] N. Garner，《顶点算子代数与拓扑扭曲的切恩-西蒙斯-物质理论》，arXiv:2204.02991 [高能物理理论].[GGP13] A. Gadde、S. Gukov 和 P. Putrov，《五膜与四维流形》，《数学进展》319（2016年）155–245，arXiv:1306.4320 [高能物理理论].[GH22] B. Gammage 和 J. Hilburn，《Betti Tate 的论文与反常 schober 的迹》，arXiv:2210.06548 [数学物理].[GHMG22] B. Gammage、J. Hilburn 和 A. Mazel-Gee，《反常 schober 与三维镜像对称》，arXiv:2202.06833 [数学物理].[GHN+20] S. Gukov、P.-S. Hsin、H. Nakajima、S. Park、D. Pei 和 N. Sopenko，《库仑分支的 Rozansky-Witten 几何与对数结不变量》，《几何与物理杂志》168（2021年）104311，arXiv:2005.05347 [高能物理理论].[GHP20] S. Gukov、P.-S. Hsin 和 D. Pei，《理论的广义全局对称性：第一部分》，《高能物理学杂志》04（2021年）232，arXiv:2010.15890 [高能物理理论].[GKL+21] D. Gang、S. Kim、K. Lee、M. Shim 和 M. Yamazaki，《由三维秩为 0 的 SCFT 导出的非幺正拓扑量子场论》，《高能物理学杂志》08（2021年）158，arXiv:2103.09283 [高能物理理论].[GKSW14] D. Gaiotto、A. Kapustin、N. Seiberg 和 B. Willett，《广义全局对称性》，《高能物理学杂志》02（2015年）172，arXiv:1412.5148 [高能物理理论].[GN23] N. Garner 和 W. Niu，《(1|1) 切恩-西蒙斯理论中的线算子》，arXiv:2304.05414 [高能物理理论].[GR17] D. Gaiotto 和 M. Rapˇc´ak，《角点处的顶点代数》，《高能物理学杂志》01（2019年）160，arXiv:1703.00982 [高能物理理论].[GW06] S. Gukov 和 E. Witten，《规范理论、分歧与几何朗兰兹纲领》，arXiv:高能物理理论/0612073。

[GW08] D. Gaiotto 和 E. Witten，《N=4超杨-米尔斯理论中边界条件的 S 对偶》，《数学物理进展》13（2009年）721–896，arXiv:0807.3720 [高能物理理论].[GY22] N. Geer 和 M. B. Young，《由 $U_q(\mathfrak{gl}(1|1))$ 与 $U(1|1)$ 切恩-西蒙斯理论得到的三维拓扑量子场论》，arXiv:2210.04286[数学物理].[HH97] A. Hanany 和 K. Hori，《二维中的膜与 N=2 理论》，《核物理 B》513（1998年）119–174，arXiv:高能物理理论/9707192。[HLS18] P.-S. Hsin、H. T. Lam 和 N. Seiberg，《关于三维和四维中的一形式全局对称性及其规范化的评论》，《SciPost物理》6（2019年）039，arXiv:1812.04716 [高能物理理论].[HLZ10a] Y.-Z. Huang、J. Lepowsky 和 L. Zhang，《共形顶点代数广义模的对数张量范畴理论 I：引言、强分次代数及其广义模》，arXiv:1012.4193[数学物理].[HLZ10b] ,《对数张量范畴理论 II：对数形式演算与对数交织算子的性质》，arXiv:1012.4196 [数学物理].[HLZ10c] ,《对数张量范畴理论 III：交织映射与张量积双函子》，arXiv:1012.4197 [数学物理].[HLZ10d] ,《对数张量范畴理论 IV：张量积双函子的构造与相容条件》，arXiv:1012.4198 [数学物理].[HLZ10e] ,《对数张量范畴理论 V：交织映射的收敛条件及相应的相容条件》，arXiv:1012.4199[数学物理].[HLZ10f] ，《对数张量范畴理论 VI：展开条件、对数交织算子的结合性及结合性同构》，arXiv:1012.4202 [数学物理].[HLZ11a] ，《对数张量范畴理论 VII：收敛与延拓性质，以及其在交织映射展开中的应用》，arXiv:1110.1929 [数学物理]。

[*HLZ11b*] ———，对数张量范畴理论 *VIII*：共形顶点代数广义模范畴上的编织张量范畴结构，*arXiv:1110.1931 [数学物理]*.[*HR*21] *J. Hilburn* 和 *S. Raskin*，德拉姆背景下的 *Tate*论文，*arXiv:2107.11325 [math.AG]*.[*IS*96] *K. A. Intriligator* 和 *N. Seiberg*，三维规范理论中的镜像对称，《物理快报 *B*》*387*（*1996*）*513–519*，*arXiv:hep-th/9607207*。[*IY*11] *Y. Imamura* 和 *S. Yokoyama*，具有一般*R*荷赋值的三维超共形场论的指标，《高能物理学杂志》*04*（*2011*）*007*，*arXiv:1101.0557 [hep-th]*.[*Kap*05] *A. Kapustin*，四维规范理论中的*Wilson-'t Hooft*算子与*S*对偶，《物理评论 *D*》*74*（*2006*）*025005*，*arXiv:hep-th/0501015*。[*KL*02] *A. Kapustin* 和 *Y. Li*，*Landau-Ginzburg*模型中的*D*膜与代数几何，《高能物理学杂志》*12*（*2003*）*005*，*arXiv:hep-th/0210296*。[*KN*20] *K. Kiyoshige* 和 *T. Nishinaka*，二属类 *S*理论的手性代数，*arXiv:2009.11629 [hep-th]*.[*KR*09] *A. Kapustin* 和 *L. Rozansky*，三维拓扑场论与辛代数几何 *II*，《数论物理通讯》*4*（*2010*）*463–550*，*arXiv:0909.3643 [math.AG]*.[*KRS*08] *A. Kapustin*、*L. Rozansky* 和 *N. Saulina*，三维拓扑场论与辛代数几何 *I*，《核物理 *B*》*816*（*2009*）*295–355*，*arXiv:0810.5415 [hep-th]*.[*KS*99] *A. Kapustin* 和 *M. J. Strassler*，论三维阿贝尔规范理论中的镜像对称，《高能物理学杂志》*04*（*1999*）*021*，*arXiv:hep-th/9902033*。[*Kuw*13] *T. Kuwabara*，辛反射代数的*BRST*上同调与超环面簇的量子化，*arXiv:1311.1787 [math.QA]*.[*KW*11] *A. Kapustin* 和 *B. Willett*，三维场论的广义超共形指标，*arXiv:1106.2484 [hep-th]*.[*Lan*12] *S. Lang*，《代数》，第*211*卷，*Springer Science & Business Media*，*2012*年。

[Li97] H. Li，顶点算子代数理论中的物理超选择原理，《代数杂志》196（1997）436–457。[McR20] R. McRae，紧轨形顶点算子代数模的张量结构，《数学杂志》296（2020）409–452。[Mik15] V. Mikhaylov，解析挠率、三维镜像对称与超群陈-西蒙斯理论，arXiv:1505.03130 [hep-th].[MS89] G. W. Moore 和 N. Seiberg，驯服共形动物园，《物理快报 B》220（1989）422–430。[Nak15] H. Nakajima，迈向三维 $\mathcal{N}=4$ 规范理论库仑分支的数学定义 I，《数学物理进展》20（2016年）595–669，arXiv:1503.03676 [math-ph].[NSWZ23] S. Nawata、M. Sperling、H. E. Wang 和 Z. Zhong，具有1-形式对称性的三维 $\mathcal{N}=4$ 镜像对称，arXiv:2301.02409 [hep-th].[Oka19] T. Okazaki，(0,4) $\mathcal{N}=$ 边界条件的阿贝尔对偶，《高能物理学杂志》08（2019年）170，arXiv:1905.07425 [hep-th].[OR18] A. Oblomkov 和 L. Rozansky，范畴陈特征与辫群，arXiv:1811.03257 [math.GT].[Pro08] N. J. Proudfoot，超环面几何与拓扑综述，《环面拓扑》，《当代数学》，第460卷，美国数学学会，普罗维登斯，罗德岛州，2008年，第323–338页。[RW96] L. Rozansky 和 E. Witten，超凯勒几何与三维流形不变量，《Selecta Mathematica》3（1997）401–458，arXiv:hep-th/9612216。[RW10] J. Roberts 和 S. Willerton，论 Rozansky-Witten 权系统，《代数与几何拓扑》10（2010）1455–1519。[ST13] S. Sugishita 和 S. Terashima，带边界流形上的超对称场论的精确结果，《高能物理学杂志》11（2013）021，arXiv:1308.1973[hep-th].[SW96] N. Seiberg 和 E. Witten，规范动力学与紧化至三维，《物理学之数学美》会议（纪念C. Itzykson），1996年6月，第333–366页。arXiv:hep-th/9607163。

[*SW*21] *C. Schweigert* 和 *L. Woike*，《微分分次 *Verlinde* 公式与 *Deligne* 猜想》，*arXiv:2105.*01596 [数学物理].[*SY*89] *A. N. Schellekens* 和 *S. Yankielowicz*，《由简单电流得到的模不变量：显式证明》，《物理快报 *B*》*227 (1989) 387–391*。[*Tel*14] *C. Teleman*，《规范理论与镜像对称》，《*2014* 年国际数学家大会论文集——首尔》，第 *II* 卷，*Kyung Moon Sa*，首尔，*2014* 年，第 *1309–1332* 页。[*TW*12] *A. Tsuchiya* 和 *S. Wood*，《W_p *triplet* 代数表示范畴上的张量结构》，《物理学杂志 *A*》*46 (2013) 445203*，*arXiv:1201.0419*[高能物理理论].[*Web*16] *B. Webster*，《*Higgs* 范畴与 *Coulomb* 范畴之间的 *Koszul* 对偶》 $\mathcal{O}$，*arXiv:1611.*06541 [数学物理].[*Web*19] ，《相干层与量子 *Coulomb* 分支 *I*：来自可积系统的倾斜丛》，*arXiv:1905.*04623 [数学物理].[*Wit*88] *E. Witten*，《拓扑量子场论》，《数学物理通讯》*117 (1988) 353*。[*Wit89a*] ，《（*2+1*）维引力中的拓扑改变振幅》，《核物理 *B*》*323 (1989) 113–140*。[*Wit89b*] ，《量子场论与 *Jones* 多项式》，《数学物理通讯》*121 (1989) 351–399*。[*Wit*03] ，《具有阿贝尔对称性的三维共形场论上的 *SL(2,Z)* 作用》，《从场到弦：理论物理巡礼：纪念 *Ian Kogan* 会议》，*2003* 年 *7* 月，第 *1173–1200* 页。*arXiv:*高能物理理论*/0307041*。[*Woo*18] *S. Wood*，《可容许能级 $\mathfrak{osp}(1|2)$ 极小模型及其松弛最高权模》，~~*arXiv:1804.*01200 [数学物理]~~.[*Yos*23] *Y. Yoshida*，《通过具有边界的三维 W-代数规范理论构造费米子扩张》 $\mathcal{N}=4$，*arXiv:2304.*03270 [高能物理理论].[*YS*14] *Y. Yoshida* 和 *K. Sugiyama*，《三维 $\mathcal{N}=2$ 超对称理论在 $S^1\times D^2$ 上的局域化》，*PTEP 2020 (2020) 113B02*，*arXiv:1409.6713*[高能物理理论]。

———

———

———