arXiv:2304.11025v1 [math.CV] 21 Apr 2023

拟测地线框架、可见性与测地线环

FILIPPO BRACCI

谨以此文献给 Simeon Reich 教授，值其七十五岁寿辰之际。

摘要。本文通过“拟测地线框架”刻画 $\mathbb{C}^d$ 中 Kobayashi 完备双曲且 Gromov 双曲的有界域的可见性及测地环的存在性。

目录

1. 引言 1 2. 记号与预备知识 4 3. 可见域与拟测地线框架 5 4. 可见域中的测地环 8 参考文献 11

1. 引言

近年来，多复变函数论中有界域和无界域的可见性概念已被提出，并证明是研究双全纯映射的连续延拓、Kobayashi距离估计以及迭代理论的关键概念（例如参见 [11, 6, 12, 2, 3, 4, 14, 18, 19, 20]）。

本文考虑 $\Omega \subset \mathbb{C}^d$ 一个有界域（对 $\partial\Omega$ 的正则性不作任何假设），并假设其 Kobayashi 距离 K_Ω 是完备的（Kobayashi 距离的定义和性质，例如参见 [17] ）。

域 Ω 是可见的，粗略地说，如果收敛到边界中不同点的测地线在域内弯曲。

日期：2023年4月24日。2010年数学主题分类：32F45。关键词和短语：Gromov 双曲空间；Kobayashi 双曲空间；可见性；全纯映射的延拓。部分经费来自 PRIN 2017 项目“实与复流形：拓扑、几何与全纯动力系统”（编号：2017JZ2SW5）、INdAM 的 GNSAGA，以及授予罗马第二大学数学系的 MUR 卓越系部项目 MatMod@TOV （ CUP：E83C23000330006 ）。

由于 K_Ω 的完备性以及 Arzel`a–Ascoli 定理，一列不在紧集上发散的测地线射线或直线必然存在一个子列，在紧集上一致收敛于一条测地线射线或直线。

本文的一个基本观察是，如果 Ω 可见，那么收敛实际上是一致的（而不仅仅是在紧集上一致）——参见引理 3.1。

此外，可见域具有一族自然的测地线，它们表现出某些特殊性质（它们构成某种“框架”）。受此启发，我们给出如下定义：

定义 1.1. 设 $\Omega \subset\subset \mathbb{C}^d$ 是一个域，使得（Ω,K_Ω）是完备双曲的，并且 $A \geq 1$、$B \geq 0$。若一族 $\mathscr{F}$ 是一个由 (A,B)-拟测地线构成的框架，则它满足

（1）对每个 $\gamma \in \mathscr{F}$，存在 $R_\gamma \in (0, +\infty]$，使得当 $R_\gamma < +\infty$, $\gamma: [0,R_\gamma] \to \Omega$ 是一条 (A, B)-拟测地线段，而当 $R_\gamma = +\infty$, $\gamma: [0, +\infty) \to \Omega$ 是一条 (A, B)-拟测地线射线；（2）若 $\gamma \in \mathscr{F}$ 是一条拟测地线射线（即 $R_\gamma = +\infty$），则存在 $p_\gamma \in \partial\Omega$，使得 $\lim_{t\to+\infty} \gamma(t) = p\gamma$；（3）存在一个紧子集 $K \subset \Omega$，使得对每个 $\gamma \in \mathscr{F}$，$\gamma(0) \in K$；（4）对每个序列 $\{\gamma_k\} \subset \mathscr{F}$，都存在一个子序列 $\{\gamma_{k_m}\}$ 和 $\gamma \in \mathscr{F}$，使得 $\{\gamma_{k_m}\}$ 一致收敛于 γ；（5）存在 $\varepsilon > 0$ 和 $\delta > 0$，使得对于每个满足 $\mathrm{dist}(z\ \partial\Omega) < \varepsilon$ 的 $z \in \Omega$，都存在 $\gamma \in \mathscr{F}$，使得 $K_\Omega(z\ \gamma([0, +\infty]) < \delta$。

事实证明，可见域具有测地线框架（见命题 3.2）。本文的主要结果之一是证明 Gromov 双曲域的逆命题：

定理 1.2. 设 $\Omega \subset\subset \mathbb{C}^d$ 是一个域，使得 (Ω, K_Ω) 完备双曲且为 Gromov 双曲。假设 $\partial\Omega$ 不含非平凡解析圆盘。那么，Ω 可见，当且仅当存在某些 $A \geq 1$、$B \geq 0$，使得其具有一个 (A, B)-拟测地线框架。

关于边界上不存在非平凡解析圆盘的假设是技术性的。目前尚不清楚一个可见的完备双曲且 Gromov 双曲域的边界上是否可能存在非平凡解析圆盘（在 [4, 定理 1.2] 中证明了，对于一个没有测地环（定义见下文）且边界为 C^0 的可见完备双曲 Gromov 双曲域，其边界上不可能存在非平凡解析圆盘）。

域 Ω 是一个 Gromov 模型域，前提是恒等映射可以延拓为一个同胚映射，将 Ω 的 Gromov 紧化映射到其欧几里得闭包 $\overline{\Omega}$（见 [6]）。

由于在一维情形下，Gromov 拓扑与 Carath´eodory 的素端拓扑等价（参见例如 [5, 第 4] 章），Gromov 模型域实质上起着单连通 Jordan 域的作用，而可见域则起着边界局部连通的单连通域的作用，其中双全纯映射可延拓至边界（关于这一事实的详细解释，参见 [6] ）。

以下是 Gromov 模型域的示例：C^2-有界强拟凸域 [1], Gromov 双曲（有界或无界）凸域 [7, 8, 9], 光滑

有界 D'Angelo 有限型凸域 [21, 22], 光滑有界 D'Angelo 有限型伪凸域（位于 $\mathbb{C}^2$ [16] 中），有界 Gromov 双曲 Lipschitz $\mathbb{C}$-凸域[12]。

事实证明（见 [6, 12]），有界的 Kobayashi 完备双曲且 Gromov 双曲的域 Ω 是 Gromov 模型，当且仅当 Ω 是可见的且没有测地环。这里，对于 $\overline{\Omega}$ 而言，一个测地环是测地线 $\gamma: (-\infty, +\infty) \to \Omega$，使得 γ 在 $+\infty$ 处的聚簇集与 γ 在 $-\infty$ 处的聚簇集重合。

在这一方向上，我们首先证明（见命题 4.3）：如果 Ω 是可见的，并且存在 $p \in \partial\Omega$ 以及 p 的一个开邻域 U，使得 $U \cap \Omega$ 至少有两个以 p 为边界点的连通分支，那么存在一个关于 $\overline{\Omega}$ 的测地环。

本文的第二个主要结果是根据拟测地线框架刻画测地环的（不）存在性。

定义 1.3. 设 $\Omega \subset\subset \mathbb{C}^d$ 为一个域，使得 (Ω, K_Ω) 是完备双曲的，并令 $A \geq 1, B \geq 0$。如果存在两条拟测地线射射线 $\gamma, \eta \in \mathscr{F}$，满足 $\lim_{t\to+\infty} \gamma(t) = \lim_{t\to+\infty} \eta(t)$，且它们彼此始终相距无限远，则称 (A, B)-拟测地线框架 $\mathscr{F}$ 是绕圈的。否则称拟测地线框架 $\mathscr{F}$ 不绕圈。

然后我们证明：

定理 1.4. 设 $\Omega \subset\subset \mathbb{C}^d$ 为一个域，使得 (Ω, K_Ω) 是完备双曲且 Gromov 双曲的。假设 $\partial\Omega$ 不包含非平凡解析圆盘，且 Ω 是可见的。那么 Ω 没有测地环，当且仅当它存在某些 $A \geq 1$ 和 $B \geq 0$ 对应的 (A,B)-拟测地线无环框架。

作为一封由定理 1.2、定理 1.4 以及前面的讨论可知，我们有：

定理 1.5. 设 $\Omega \subset\subset \mathbb{C}^d$ 是一个域，使得 (Ω, K_Ω) 是完备双曲且 Gromov 双曲的。假设 $\partial\Omega$ 不包含非平凡的解析圆盘。那么，Ω 是一个 Gromov 模型域，当且仅当它具有某个 $A \geq 1$ 和 $B \geq 0$ 对应的 (A,B)-拟测地线无环框架。

乍看之下，（无环）拟测地线框架的定义似乎相当技术化，也没有什么用处。然而，仔细梳理 [7, 8, 9, 10, 21, 22, 23, 16] 中的证明可知，文中证明若干类（Gromov 双曲）有界域是 Gromov 模型时，实际上主要工作恰恰是按照我们的定义构造无环拟测地线框架。再举一例，我们简要说明如何在强拟凸域中构造无环拟测地线框架，并假定 C^2 有界强拟凸域 Ω 是 Kobayashi 双曲且 Gromov 双曲的。事实上，可以轻易地按如下方式构造无环拟测地线框架。若 $p \in \partial\Omega$，且 U_p 是 p 的一个开邻域，使得 $\Omega \cap U_p$ 双全纯于一个强凸域 V_p，那么可以考虑 V_p 中所有从 V_p 内某个固定点出发的实线段所构成的族。按照 [7, 8] 中的方法推理可知，这个族是 V_p 中的无环拟测地线框架。因此，其原像 $\mathscr{F}_p$ 是 $\Omega \cap U_p$ 中的无环拟测地线框架。

令 $\mathscr{F}$ 为所有 $\mathscr{F}_p$ 的并集，并利用边界处 Kobayashi距离的局部化性质，可以证明 $\mathscr{F}$ 是 Ω 的无环拟测地线框架，因此，根据定理 1.5， Ω 是一个 Gromov 模型域（这一结果众所周知，正如上文所述，见 [1] 之后）。

本文的组织结构如下。第2节回顾一些定义，并陈述证明中所需的一些预备结果。第3节证明定理 1.2，第4节证明定理 1.4。

2. 记号与预备知识

在本节中，我们令 $\Omega \subset \mathbb{C}^d$ 为一个有界域。我们用 k_Ω 表示 Ω 的 Kobayashi无穷小伪度量，用 K_Ω 表示 Ω 的 Kobayashi距离。关于定义和性质，请参阅 [17] 。

如果 $\Omega \subset\subset \mathbb{C}^d$ 是完备双曲的，即（Ω,K_Ω）是一个完备度量空间，则根据 Hopf-Rinow定理，（Ω,K_Ω）是测地的，因此， Ω中的每一对点都可以通过一条对于 K_Ω的测地线（即长度最小化曲线）连接起来。如果 $p,q \in \Omega$，我们将连接 p 和 q 的任意测地线记为$[p, q]_\Omega$ 。

测地线 $\gamma : [a, b] \to \Omega$, $-\infty < a < b < +\infty$ 称为测地线段。测地线$\gamma : [a\ +\infty) \to \Omega, a \in \mathbb{R}$，称为测地射线；测地线 $\gamma : (-\infty, +\infty) \to \Omega$称为测地线。

测地三角形 T 是 3 条测地线段（称为边）的并集，这些边为 $T = [x, y]_\Omega \cup [y, z]_\Omega \cup [z, x]_\Omega$，连接 3 个点 $x, y, z \in X$。

完备度量空间 (Ω, K_Ω) 是 Gromov 双曲的，当且仅当存在 $\delta > 0$ （ Ω 的 Gromov常数），使得每个测地三角形 T 都是 δ-薄的，也就是说，T 的任一边上的每一点到另外两条边之并的距离都小于或等于 δ（详情及更多性质参见 [13, 15] ）。

对于一条绝对连续曲线 $\gamma : [a, b] \to \Omega$，我们用 $l_{k_\Omega}(\gamma; [s, t])$ 表示曲线 γ 在 $[s,t], a \le s < t \le b$ 上的曲线长度，即

$$l_{k_\Omega}(\gamma; [s,t]) := \int_s^t k_\Omega(\gamma(\tau); \gamma'(\tau))d\tau.$$

设 $A > 1$ 和 $B > 0$。绝对连续曲线 $\gamma : [a, b] \to \Omega$ 是一条 (A, B)-拟测地线，如果对于任意 $a \le s < t \le b$，均有：

$$l_{k_\Omega}(\gamma; [s,t]) \le AK_\Omega(\gamma(s), \gamma(t)) + B.$$

(A, B)-拟测地射线（或直线）是指一条绝对连续曲线，其在定义域内任意紧区间上的限制都是一条 (A, B)-拟测地线。拟测地线就是指对于某些 $A \ge 1$ 和 $B \ge 0$，任意一条 (A, B)-拟测地线段、射线或直线。

Gromov 双曲空间的主要特征之一是所谓的测地稳定性定理，该定理指出，每条 (A,B)-拟测地线都存在一条测地线与之相伴，二者之间的距离仅取决于 A、B 以及该空间的 Gromov常数。本文并不直接需要使用该定理，而是将采用其关于“拟测地线矩形”的一个直接推论（参见，例如， [22, 观察 4.4]）：

引理 2.1. 设 $\Omega \subset\subset \mathbb{C}^d$ 是一个 Kobayashi 完备双曲域，且 (Ω, K_Ω) 是 Gromov 双曲的。设 $a, b, c, d \in \Omega$。设 $A \geq 1$ 且 $B \geq 0$。若 Γ_1 是一条连接 a 与 b 的 (A,B)-拟测地线，Γ_2 是一条连接 b 与 c 的 (A, B)-拟测地线，Γ_3 是一条连接 c 与 d 的 (A,B)-拟测地线，Γ_4 是一条连接 a 与 d 的 (A, B)-拟测地线（即，$\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$ 是一个以 Γ_1、Γ_2、Γ_3 和 Γ_4 为边的 (A, B)-拟测地线矩形），那么存在 $N > 0$（其仅依赖于 A、B 和 Ω 的 Gromov常数），使得任意一条边上的每个点都包含在其他三条边的并集的 N-管状邻域内（相对于 K_Ω）。

现在我们转向可见性的精确定义。

设 $p, q \in \partial\Omega$，$p \neq q$。我们称点对 (p, q) 关于 K_Ω 满足可见性条件，如果存在 p 的一个邻域 V_p 和 q 的一个邻域 V_q，以及 Ω 的一个紧子集 K，使得 $V_p \cap V_q = /0$，并且对于每个 $x \in V_p \cap \Omega$、$y \in V_q \cap \Omega$，都有 $[x, y]_\Omega \cap K \neq /0$。

我们称 Ω 为可见的，如果每一对点 $p,q \in \partial\Omega$，$p \neq q$，都满足关于 K_Ω 的可见性条件。

若测地线 $\gamma : (-\infty, +\infty) \to \Omega$ 在 $+\infty$ 和 $-\infty$处的聚簇集 Γ 相同，则称其为 D 中的测地环。在这种情况下，我们称 Γ 为测地环 γ的顶点。

根据 [11, 引理 3.1], ，我们有:

引理 2.2。设 $\Omega \subset \mathbb{C}^d$ 是一个有界完备双曲域。若 Ω 可见，则每条测地射线都有极限点，即若 $\gamma : [0, +\infty) \to \Omega$ 是一条测地线，则存在 $p \in \partial\Omega$，使得 $\lim_{t\to+\infty}\gamma(t) = p$。特别地，$\overline{\Omega}$ 中每个测地环的顶点都是 $\partial\Omega$中的点。

接下来，我们还需要以下引理（见 [6, 引理 A.2]）。

引理 2.3（D'Addezio）。设 $D \subset \mathbb{C}^d$ 是一个完备双曲有界域。假设∂D 不包含非平凡解析圆盘。若 $\{z_n\}$、$\{w_n\} \subset D$ 是两个序列，且 $\lim_{n\to+\infty} z_n = p$、$\lim_{n\to+\infty} w_n = q$，其中 p、$q \in \partial D$，并且

$$\sup_n K_D(z_n, w_n) < +\infty,$$

然后 $p = q$。

3. 可见域与拟测地线框架

作为记号约定，若 $\{\gamma_k\}$ 是 $\mathbb{C}^d$ 中的曲线序列，使得对于每个 k，曲线 γ_k 定义在某个区间 $[0, R_k]$ 上，其中 $R_k \in (0, +\infty]$，我们称 $\{\gamma_k\}$ 一致收敛于曲线 $\gamma : [0,a] \to \Omega$，前提是 $a = \lim_{k\to+\infty} R_k$，并且对于每个 $\theta > 0$，存在 $k_0 \in \mathbb{N}$，使得对于每个 $k \geq k_0$，以及每个 $t \in [0, R_k]$，都有

$$|\gamma_k(t) - \gamma(t)| \leq \theta.$$

引理 3.1. 设 $\Omega \subset\subset \mathbb{C}^d$ 是一个域，使得 (Ω, K_Ω) 是完备双曲的。假设 Ω 可见。如果 $\{\gamma_k\}$ 是 Ω 中的一列测地线（线段或射线），且在紧集上一致收敛到测地射线 γ，那么 $\{\gamma_k\}$ 一致收敛到 γ。

证明。根据假设，对每个 k，要么 γ_k 是定义在 $[0,R_k]$ 上的测地线段，其中 $R_k>0$；要么 γ_k 是定义在 $[0,+\infty)$ 上的测地射线。

若 γ_k 是一条测地射线，由于 Ω 是可见的，根据引理 2.2，存在 $\gamma_k(+\infty):=\lim_{t\to+\infty}\gamma_k$；因此，为统一记号，在这种情况下，我们可以认为 γ_k 定义在 $[0,+\infty]$ 上，并令 $R_k=+\infty$。

现在，反设存在 $\theta>0$ 和一个序列 $\{t_k\}$，使得 $t_k\in[0,R_k]$，且

$$|\gamma_k(t_k)-\gamma(t_k)|\geq\theta,$$

其中，与之前一样，若 $t_k=+\infty$，我们令 $\gamma(+\infty):=\lim_{t\to+\infty}\gamma(t)$。

由于 $\{\gamma_k\}$ 在紧集上一致收敛到 γ，可知 $t_k=+\infty$ 或 $\{t_k\}$ 收敛到 $+\infty$。因此，取子列后，我们可以假设 $\{\gamma_k(t_k)\}$ 收敛到一点 $q\in\partial\Omega$，使得

$$|q-\gamma(+\infty)|\geq\theta.$$

取 $\gamma(+\infty)$ 的一个开邻域 U，以及 q 的一个开邻域 V，使得 $U\cap V=\emptyset$。根据可见性假设，存在一个紧子集 $K\subset\Omega$，使得 Ω 中每条连接 $U\cap\Omega$ 中一点与 $V\cap\Omega$ 中一点的测地线都必须与 K 相交。

由于 $\gamma(t)$ 当 $t\to+\infty$ 时趋于 $\gamma(+\infty)$，因此存在 $R>0$，使得对于所有 $r\geq R$，都有 $\gamma(r)\in U\cap\Omega$。因此，对于每个 $r\geq R$，都存在 $k_r\in\mathbb{N}$，使得 $\gamma_k(r)\in U\cap\Omega$，其中 $k\geq k_r$。通过取更大的 k_r，我们还可以假设，当 $k\geq k_r$ 时，$\gamma_k(t_k)\in V\cap\overline{\Omega}$。

因此，当 $k\geq k_r$ 时，$\gamma_k([r,t_k))$ 是一条从 $U\cap\Omega$ 到 $V\cap\Omega$ 的测地线。因此，对于每个 $k\geq k_r$，都存在 $s_k\in(r,t_k)$，使得 $\gamma_k(s_k)\in K$。

But,

$$+\infty>\max_{\xi\in K}K_\Omega(z_0,\xi))\geq K_\Omega(z_0,\gamma_k(s_k))=K_\Omega(\gamma_k(0),\gamma_k(s_k))=s_k>r,$$

当 r 足够大时，这便导致矛盾。 □

命题 3.2. 设 $\Omega\subset\subset\mathbb{C}^d$ 是一个域，且 (Ω,K_Ω) 是完备双曲的。若 Ω 可见，则存在一个测地线框架。

证明。固定 $z_0\in\Omega$，令 $\mathscr{F}$ 为所有从 z_0 出发的测地线的集合，即 $\gamma\in\mathscr{F}$，如果存在 $R_\gamma\in(0,+\infty)$，使得 $\gamma\colon[0,R_\gamma]\to\Omega$ 是一条测地线段，或者 $\gamma\colon[0,+\infty)\to\Omega$ 是一条测地射线，并且（在两种情况下）$\gamma(0)=z_0$。根据定义，$\mathscr{F}$ 满足定义 1.1 的条件 (1) 和 (3)。此外，由于距离 K_Ω 是完备的，根据 Hopf-Rinow 定理，对于每个 $w\in\Omega$，都存在一条连接 z_0 与 w 的测地线段 γ，因此，条件 (5) 对任意 $\varepsilon>0$ 和 $\delta>0$ 都显然成立。

此外，由于 Ω 是可见的，根据引理 2.2 可知，$\mathscr{F}$ 也满足 (2)。 .

现在，我们证明 $\mathscr{F}$ 满足（4）。假设 $\{\gamma_k\}$ 是从 z_0 出发的一列测地线。注意，对于每个 k，γ_k 要么是在 $[0,R_k]$ 上定义的测地线段，其中 $R_k>0$，要么 γ_k 是在 $[0,+\infty)$ 上定义的测地射线。然而，正如上文所述，在后一种情况下存在 $\gamma_k(+\infty):=\lim_{t\to+\infty}\gamma_k$，因此，我们可以将 γ_k 视为定义在 $[0,+\infty]$ 上的函数，并令 $R_k=+\infty$。

根据 Arzel`à-Ascoli 定理可知，经过取子列，$\{\gamma_k\}$ 在紧子集上一致收敛于某个 $\gamma \in \mathscr{F}$。根据引理 3.1，该收敛实际上是一致的，证毕。□

现在我们已经具备了证明定理 1.2 的良好条件：

定理 1.2 的证明。一个方向由命题 3.2 得出。

反之，假设 Ω 具有一族 $\mathscr{F}$ 的 (A,B)-拟测地线。因此，存在一个紧子集 $K \subset \Omega$，使得每条 $\mathscr{F}$ 中的拟测地线都始于 K。假设 $\{z^j{}_k\} \subset \Omega$ 是一个收敛于 $p_j \in \partial\Omega$ 的序列，其中 $j = 1, 2$，且 $p_1 \neq p_2$。

我们用反证法，假设 $\{[z_k^1, z_k^2]_\Omega\}$ 最终逃离 Ω 的每个紧子集。根据假设，当 k 足够大时，可以找到 $\gamma_k^1, \gamma_k^2 \in \mathscr{F}$ 和 $w^j{}_k \in \gamma^j{}_k$，使得 $K_\Omega(z_{jk}, w^j{}_k) < \delta$, $j = 1, 2$（这里稍微滥用一下记号，我们也用 $\gamma^j{}_k$ 表示拟测地线 $\gamma^j{}_k$ 的像）。

由引理 2.3 可知，由于 $\partial\Omega$ 不包含非平凡解析圆盘，因此 $\{w^j{}_k\}$ 收敛到 p_j, $j = 1, 2$, 当 $k \to +\infty$。

根据定义 1.1 的条件 (4)，不妨取子列，使得 $\{\gamma^j{}_k\}$ 一致收敛到某个 $\gamma^j \in \mathscr{F}$, $j = 1, 2$。因此，

$$\lim_{t \to +\infty} \gamma^j(t) = p_j, \quad j = 1, 2. \tag{3.1}$$

我们现在断言，若 $\{[w_k^1$ 最终逃离 Ω 中的每个紧子集，则 $\{[z_k^1, z_k^2]_\Omega\}$ 也如此。事实上，反设存在紧集 $Q \subset\subset \Omega$ and $c_k \in [w_k^1, w_k^2]_\Omega$，使得对每个 k，$c_k \in Q$。由于

$$[w_k^1, w_k^2]_\Omega \cup [z_k^1, z_k^2]_\Omega \cup [z_k^1, w_k^1]_\Omega \cup [z_k^2, w_k^2]_\Omega$$

是一个测地矩形，由引理 2.1 可知，存在 $N > 0$ and

$$t_k \in [z_k^1, z_k^2]_\Omega \cup [z_k^1, w_k^1]_\Omega \cup [z_k^2, w_k^2]_\Omega$$

使得 $K_\Omega(t_k, c_k) \leq N$。由于对于每个 $s \in [z_{jk}, w^j{}_k]_\Omega$，我们都有 $K_\Omega(s, z_{jk}) \leq K_\Omega(w^j{}_k, z_{jk}) < \delta$，$j = 1, 2$，因此根据 K_Ω 的完备性可得 $t_k \in [z_k^1, z_k^2]_\Omega$。但这样一来，$t_k$ 就属于 Q 的一个 N-管状邻域，而该邻域也是 Ω 的一个相对紧子集，这就产生了矛盾。

因此，$\{[w_k^1, w_k^2]_\Omega\}$ 最终会离开 Ω 的每个紧子集。

取一个 $a_{jk} > 0$，使得 $\gamma^j{}_k(a_{jk}) = w^j{}_k$，$j = 0, 1$，现在考虑拟测地线矩形

$$[w_k^1, w_k^2]_\Omega \cup \gamma_k^1([0, a_k^1]) \cup \gamma_k^2([0, a_k^1]) \cup [\gamma_k^1(0), \gamma_k^2(0)]_\Omega.$$

注意到 $\{[\gamma_k^1(0)\ \gamma_k^2(0)]_\Omega\}$ 在 Ω 中相对紧。因此，根据引理 2.1，存在 $N > 0$，使得对每个点 $s_k \in [w_k^1, w_k^2]_\Omega$，都存在 $\zeta(s_k) \in \gamma_k^1([0, a_k^1]) \cup \gamma_k^2([0, a_k^1])$，使得

$$K_\Omega(s_k, \zeta(s_k)) \leq N. \tag{3.2}$$

由于 $\{s_k\}$ 是紧逃逸的，根据 K_Ω 的完备性可知，$\{\zeta(s_k)\}$ 也紧逃逸。由 (3.1) 可知，$\{\zeta(s_k)\}$ 的聚簇集包含于 $\{p_1\}\cup\{p_2\}$ 中；根据 (3.2) 和引理 2.3，$\{s_k\}$的聚簇集也如此。然而，这与 $[w_k^1,\ w_k^2]_\Omega$的聚簇集必定连通且同时包含 p_1和 p_2矛盾。因此，Ω是可见的。□

4. 可见域中的测地环

定义 4.1. 设 $\Omega\subset\subset\mathbb{C}^d$ 是一个域，使得 (Ω, K_Ω) 是完备双曲的。我们称两个拟测地线射线 γ,η 彼此相距无穷远，如果对于每个 $C>0$，都存在 $t_C>0$ 使得

$$\min_{t\geq t_C} K_\Omega(\gamma(t),\eta([0,+\infty))>C,\quad \min_{t\geq t_C} K_\Omega(\eta(t),\gamma([0,+\infty))>C.$$

引理 4.2. 设 $\Omega\subset\subset\mathbb{C}^d$ 是一个域，使得 (Ω, K_Ω) 是完备双曲的。假设 $\gamma:\ \mathbb{R}\to\Omega$ 是 D 的一条测地环。令 $\gamma^+:\ [0,+\infty)\to\overline{\Omega}$ 为由 $\gamma^+(t):=\gamma(t)$ 定义的测地射线，并令 $\gamma^-:\ [0,+\infty)\to\Omega$ 为由 $\gamma^-(t):=\gamma^-(t)$ 定义的测地射线。那么 γ^+ 与 γ^- 彼此之间始终保持无限距离。

证明。反设 γ^+、γ^- 彼此之间的距离并非始终为无穷远，则存在 $C>0$，使得对于每个 $t\in[0,+\infty)$，都存在 $s_t\in[0,+\infty)$，满足

$$K_\Omega(\gamma^+(t),\gamma^-(s_t))\leq C.$$

但是，由于 γ 是一条测地线，

$$t+s_t=K_\Omega(\gamma(t),\gamma(-s_t))=K_\Omega(\gamma^+(t),\gamma^-(s_t))\leq C,$$

并且，对于 $t\to+\infty$ 我们得到了矛盾。 □

命题 4.3. 设 $\Omega\subset\subset\mathbb{C}^d$ 是一个域，使得 (Ω,K_Ω) 是完备双曲的。假设 Ω 是可见的。若存在 $p\in\partial\Omega$ 和 p 的一个开邻域 U，使得 $U\cap\Omega$ 至少有两个连通分支，且 p 属于它们的闭包，则存在一个以 p 为顶点的 $\overline{\Omega}$ 的测地环。

证明。设 p、U 如陈述所述，并设 V_1,V_2 是 $\Omega\cap U$ 的两个连通分支，满足 $p\in V_j$，$j=1,\ 2$。对于 $j=1,\ 2$，设 $\mathscr{V}_j\subset\subset V_j$ 是一个开集，使得 $p\in\overline{\mathscr{V}_j}$且 $p\notin\partial\mathscr{V}_j$。此外，对于 $j=1,\ 2$，设 $\{z_{jn}\}\subset\mathscr{V}_j$ 是一个收敛到 p 的序列。对于每个 n，设$\gamma_n:\ [a_n,\ b_n]:\to\Omega$ 是一条测地线，满足 $\gamma_n(a_n)=z_n^1$且 $\gamma_n(b_n)=z_n^2$，$a_n<b_n$。

我们断言，存在一个紧子集 $K\subset\Omega$，使得对所有 n，$\gamma_n([a_n,b_n])\cap K\neq/0$。事实上，若非如此，我们可以假设当 n 足够大时，$\{\gamma_n([a_n,b_n])\}$ 逃逸出 Ω 的每个紧子集。设 $r_n\in(a_n,b_n)$ 满足对所有 t 都有 $\gamma_n(r_n)\in\partial\mathscr{V}_2$。那么，取子列后，$\{\gamma_n(r_n)\}$ 收敛；当 $n\to\infty$时，它收敛到点 $q\in\partial\Omega\setminus\{p\}$。由于 Ω是可见的，因此存在一个紧子集 $K'\subset\Omega$，使得 $\gamma_n([r_n,b_n])\cap K'\neq/0$，矛盾。

因此，经过仿射参数变换，我们可以假设 $\{\gamma_n(0)\}$ 在 Ω 中相对紧，并且对所有 n 都有 $a_n<0<b_n$。

我们断言，在假设 $\{\gamma_n\}$ (0) $\{\gamma_n$在 Ω中相对紧的情况下，$\overline{\Omega}$ 中的一列测地线环（顶点为 p）存在子列收敛。

事实上，由于 (Ω, K_Ω) 是完备的，且 $\gamma_n(0) \in K$,

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} K_\Omega(\gamma_n(0), z_n^1) = +\infty,$$

因此，当 $n \to \infty$ 时，$a_n \to -\infty$。类似地，当 $n \to \infty$ 时，$b_n \to +\infty$。因此，对于每一对 $S,T \in \mathbb{R}$，都存在 n_0，使得当 $n > n_0$ 时，$S, T \in (a_n, b_n)$。此外，令 $R > 0$,

$$d_K(R) := \max\{K_\Omega(z,w) : K_\Omega(z,K) \le R, K_\Omega(w,K) \le R\} < +\infty,$$

对于所有 $n > n_0$,，我们有

$$K_\Omega(\gamma_n(S), \gamma_n(T)) = K_\Omega(\gamma_n(0), \gamma_n(S)) + K_\Omega(\gamma_n(0), \gamma_n(T)) \le d_K(|S|) + d_K(|T|).$$

因此，$\{\gamma_n\}$ 在局部上一致有界且局部上一致连续，根据阿尔泽拉–阿斯科利定理，并注意到对于所有 n，K_D(γ_n(T) γ_n(S)) $= |T - S|$，我们可以提取一个子序列，使其在 $\mathbb{R}$ 的紧集上一致收敛于一条测地线 γ，且 γ(0) ∈ K。

根据引理 2.2，$\lim_{t\to\pm\infty} \gamma(t) = p$。因此，γ是 $\overline{\Omega}$ 中以 p 为顶点的测地环，证毕。□

对于Gromov双曲域，测地环的存在等价于存在两条落在同一点、彼此始终保持无限距离的测地射线:

命题 4.4. 设 $\Omega \subset\subset \mathbb{C}^d$ 是一个域，使得 (Ω, K_Ω) 是完备双曲且 Gromov 双曲的。假设 Ω 是可见的。那么，当且仅当存在两条在 Ω 中以 p 为端点且彼此始终保持无限距离的测地射线时，存在一条以 p∈ ∂Ω 为顶点的 $\overline{\Omega}$ 测地环。

证明。若 γ 是一条以 p 为顶点、对应于 $\overline{\Omega}$ 的测地环，则 γ^+ 和 γ^- 是彼此相距无穷远、且终止于 p 的测地射线（见引理 4.2）。

反过来，如果 $\alpha, \beta : [0, +\infty) \to \Omega$是两条彼此始终保持无限距离的测地射线，对于每个 $T > 0$, 我们考虑由.....给出的测地矩形。

$$[\alpha(0), \beta(0)]_\Omega \cup \alpha([0,T]) \cup [\alpha(T), \beta(T)]_\Omega \cup \beta([0,T]).$$

由于 (Ω, K_Ω) 是 Gromov 双曲空间，根据引理 2.1，存在 $\delta > 0$，使得 $[\alpha(T)\ \beta(T)]_\Omega$ 包含在 $[\alpha(0)\ \beta(0)]_\Omega \cup \alpha([0,T]) \cup \beta([0,T]$ 的 δ-管状邻域内（相对于 K_Ω）。

由于 α和 β 彼此之间始终保持无限距离，因此存在 $T_0 > 0$，使得对于所有 t, s $\ge T_0$，均有 K_Ω(α (t) β(s)) $> 4\delta$。

我们断言，对于所有 $T > T_0$，都存在 $z_T \in [\alpha(T)\ \beta(T)]_\Omega$，使得 z_T属于δ的管状邻域 $\mathcal{N}$，其中 [α (0) β(0)]$_\Omega \cup \alpha([0,T_0)] \cup \beta([0,T_0])$。

事实上，如果情况并非如此，那么每个 $\xi \in [\alpha(T)\ \beta(T)]_\Omega$都将属于 δ-管状邻域 U，即 $\alpha([T_0, T]) \cup \beta([T_0, T])$ 的一个管状邻域。然而，由于对于所有 t, s $\ge T_0$,，均有 $K_\Omega(\alpha(t)\ \beta(s)) > 4\delta$，因此 U 是两个开集的不交并。但这样一来，$[\alpha(T)\ \beta(T)]_\Omega$就是由 $\xi \in [\alpha(T)\ \beta(T)]_\Omega$U 给出的两个开集的不交

并，因此不连通，矛盾，故该断言得证。

现在，由于 K_Ω 是完备距离，$K := \overline{\mathcal{N}}$ 是 Ω 的紧子集，并且

$$[\alpha(T), \beta(T)]_\Omega \cap K \neq \emptyset \quad \forall T \geq 0.$$

选择 $[\alpha(T)\ \beta(T)]_\Omega$ 的一个参数化 γ_T，使得 $\gamma_T(0) \in K$，并仿照命题 4.3 的证明进行论证，我们可以提取一个序列 $\{\gamma_{T_n}\}$，它收敛于 $\overline{\Omega}$ 的一条顶点为 p 的测地环。□

现在我们已准备好证明定理 1.4:

定理 1.4 的证明。首先，假设 Ω 没有测地环。根据命题 3.2（及其证明），所有从给定点 $z_0 \in \Omega$ 出发的测地线 $\mathscr{F}$ 构成一个测地线框架。根据命题 4.4，这样的测地线框架是无环的。

现在假设 Ω 具有一个拟测地线 $\mathscr{F}$ 的无环框架。反设 $\gamma\colon \mathbb{R} \to \Omega$ 是一条测地环。由于 Ω 是可见的，因此存在 $p \in \partial\Omega$，使得 $\lim_{t\to\pm\infty} \gamma(t) = p$。令 $\delta > 0, \varepsilon > 0$ 如定义 1.1 的 (5) 所给定，并令

$$V := \{z \in \Omega : \operatorname{dist}(z, \partial\Omega) < \varepsilon\}.$$

对于所有 $t \geq 0$，令 $\gamma^+(t) := \gamma(t)$，并令 $\gamma^-(t) := \gamma(-t)$，其中 $t \geq 0$。

因此，存在 $t_0 > 0$，使得当 $t \geq t_0$ 足够大时，$\gamma^\pm(t) \in V$。

根据假设，对于每个 $k \geq t_0, k \in \mathbb{N}$，都存在 $\gamma_k^\pm \in \mathscr{F}$，以及定义域中某个 $s_k^\pm$，使得 $\gamma_k^\pm$ 满足

$$K_\Omega(\gamma^\pm(k), \gamma_k^\pm(s_k^\pm)) \leq \varepsilon. \tag{4.1}$$

当 $k \to +\infty$ 时，由于 K_Ω 是完备的度量空间，并由引理 2.3 可知，$s_k^\pm \to +\infty$ 且 $\gamma_k^\pm(s_k^\pm) \to p$。根据拟测地线框架的定义，取子列后，$\{\gamma_k^\pm\}$ 一致收敛于某条拟测地射线 $\gamma_\infty^\pm \in \mathscr{F}$，使得

$$\lim_{t\to+\infty} \gamma_\infty^\pm(t) = p.$$

由于 $\mathscr{F}$ 不形成环，γ_∞^+ 和 γ_∞^- 彼此之间的距离有限。

我们声称，这意味着存在 $C > 0$，使得对所有 $T \geq 0$,

$$K_\Omega(\gamma^+(T), \gamma^-(T)) \leq C, \tag{4.2}$$

从而与引理 4.2 矛盾。

为了证明 (4.2)，对于每个 $k \geq t_0$,，考虑如下拟测地线矩形

$$[\gamma^+(k), \gamma_k^+(s_k)]_\Omega \cup \gamma^+([0,k]) \cup \gamma_k^+([0, s_k^+]) \cup [\gamma(0), \gamma_k^+(0)]_\Omega.$$

固定 $T \geq t_0$。因此，根据引理 2.1，存在某个 $R > 0$ 使得对于每个 $k > T$，都存在 $z_k \in [\gamma^+(k)\gamma_k^+(s_k)]_\Omega \cup \gamma_k^+([0, s_k^+]) \cup [\gamma(0)\ \gamma_k^+(0)]_\Omega$ 使得

$$K_\Omega(z_k, \gamma^+(T)) \leq R. \tag{4.3}$$

由于根据假设，$\{\gamma_k^+(0)\}$ 在 Ω中相对紧——$\{[\gamma(0)\ \gamma_k^+(0)]_\Omega\}$也如此——且当 $t \to +\infty$ 时，$\gamma^+(t) \to p \in \partial\Omega$，因此，如果 t_0（从而 T）足够大，那么 $z_k \notin [\gamma(0)\ \gamma_k^+(0)]_\Omega$。

此外，$\{[\gamma^+(k)\gamma_k^+(s_k)]_\Omega\}$ 是紧逃逸的。事实上，若非如此，则存在 $y_k \in [\gamma^+(k)\gamma_k^+(s_k)]_\Omega$ 使得 $\{y_k\}$ 相对紧，因此

$$K_\Omega(\gamma^+(k),\gamma_k^+(s_k)) = K_\Omega(\gamma^+(k),y_k) + K_\Omega(y_k,\gamma_k^+(s_k)),$$

且后一个量在 $k \to +\infty$ 时趋于 $+\infty$，因为 K_Ω 是完备的距离空间，这与 (4.1) 矛盾。因此，当 k 足够大时，$z_k \in \gamma_k^+([0,s_k^+])$。由 (4.3)，$\{z_k\}$ 在 Ω中相对紧。

由于 γ_∞^- 与 γ_∞^+ 彼此保持有限距离，且 $\{\gamma_k^\pm\}$ 一致收敛到 $\gamma_\infty^\pm$，可知当 k 足够大时，存在 $D > 0$ 和 $w_k \in \gamma_k^-$，使得

$$K_\Omega(z_k,w_k) \le D.$$

特别地，这意味着 $\{w_k\}$ 在 Ω 中也相对紧。

再次利用引理 2.1，并像之前处理拟测地线矩形那样进行论证

$$[\gamma^-(k),\gamma_k^-(s_k)]_\Omega \cup \gamma^-([0,k]) \cup \gamma_k^-([0,s_k^-]) \cup [\gamma(0),\gamma_k^-(0)]_\Omega,$$

我们可以找到 $S \ge 0$ 和 $E > 0$，使得对所有充分大的 k

$$K_\Omega(\gamma^-(S),w_k) \le E.$$

于是，根据三角不等式，$K_\Omega(\gamma^+(T)\ \gamma^-(S)) \le C := R + D + E$。因此，

$$\begin{aligned} K_\Omega(\gamma^+(T),\gamma^-(T)) &\le K_\Omega(\gamma^+(T),\gamma^-(S)) + K_\Omega(\gamma^-(S),\gamma^-(T)) \\ &= K_\Omega(\gamma^+(T),\gamma^-(S)) + |T-S| \\ &= K_\Omega(\gamma^+(T),\gamma^-(S)) + |K_\Omega(\gamma^+(T),\gamma(0)) - K_\Omega(\gamma^-(S),\gamma(0))| \\ &\le 2K_\Omega(\gamma^+(T),\gamma^-(S)) \le C. \end{aligned}$$

因此，(4.2) 得证，证明完毕。 □

参考文献

[1] Z. M. BALOGH, M. BONK，严格伪凸域上的 Gromov 双曲性与 Kobayashi 度量，Comment. Math. Helv. 75 (2000), 504–533.[2] G. BHARALI, A. MAITRA，弱可见性概念、一系列例子及 Wolff-Denjoy 定理，Ann. Scuola Norm. Sup. di Pisa, Cl. Sci. (5), Vol. XXII (2021), 195–240.[3] G. BHARALI, A. ZIMMER，Goldilocks 域、弱可见性概念及其应用，Adv. Math. 310 (2017), 377–425.[4] G. BHARALI, A. ZIMMER，无界可见域、端紧化及其应用，arXiv:2206.13869[5] F. BRACCI, M. D. CONTRERAS, S. D´IAZ-MADRIGAL，单位圆盘全纯自映射的连续半群，Springer 数学专著丛书。Springer, Cham, 2020. xxvii+566 页。[6] F. BRACCI, H. GAUSSIER，抽象边界与双全纯映射的连续延拓，Anal. Math. 48 (2022), no. 2, 393–409。

[7] F. BRACCI, H. GAUSSIER，视球拓扑，Ann. Scuola Norm. Sup. di Pisa, Cl. Sci. (5), Vol. XX (2020), 239–289.[8] F. BRACCI, H. GAUSSIER，单位球中凸映射的 Muir-Suffridge 猜想的一个证明，$\mathbb{C}^n$，Math. Ann. 372 845–858 (2018).[9] F. BRACCI, H. GAUSSIER, A. ZIMMER，$\mathbb{C}^d$ 中凸域的拟等距映射的同胚延拓与迭代理论，Math. Ann. 379 (2021), 691–718.[10] F. BRACCI, H. GAUSSIER, A. ZIMMER，具有负钳制 Kähler 度量的域的几何，arXiv:1810.11389；即将发表于 J. Diff. Geom.[11] F. BRACCI, N. NIKOLOV, P. J. THOMAS，凸域中 Kobayashi 测地线的可见性及相关性质，Math. Z. 301 (2022), 2, 2011-2035.[12] F. BRACCI, H. GAUSSIER, N. NIKOLOV, P. J. THOMAS，关于 Kobayashi距离的域的局部与整体可见性及 Gromov 双曲性，arXiv:2201.03070[13] M. BRIDSON, A. HAEFLIGER，非正曲率度量空间，数学科学基础丛书 [数学科学基本原理]。Springer, Berlin (1999). [14] V. S. CHANDEL, A. MAITRA, A. D. SARKAR，关于 Kobayashi距离的可见性概念：比较与应用，arXiv:2111.00549.[15] M. COORNAERT, T. DELZANT, A. PAPADOPOULOS，G´eom´etrie et th´eorie des groupes. Les groupes hyperboliques de Gromov. Lecture Notes in Mathematics, 1441. Springer-Verlag, Berlin, 1990.[16] M. FIACCHI，$\mathbb{C}^2$中拟凸有限型域的 Gromov 双曲性，Math. Ann. 382 (2022), 37–68.[17] S. KOBAYASHI，双曲复空间，数学科学讲义丛书 [数学科学基本原理], 318。Springer-Verlag, Berlin, 1998. xiv+471.[18] A. MAITRA，关于 Kobayashi 等距映射的连续延拓，Proc. Amer. Math. Soc. 148 (2020), 3437–3451..[19] N. NIKOLOV, A. Y. OKTEN, P. J. THOMAS，关于 Kobayashi距离的局部与整体可见性概念及其比较，arXiv:2210.10007..[20] N. NIKOLOV, A. Y. OKTEN，Kobayashi距离的强局部化，arXiv:2211.15488.[21] A.M. ZIMMER，有限型凸域上的 Gromov 双曲性与 Kobayashi 度量，Math. Ann. 365 (2016), 1425–1498.[22] A.M. ZIMMER，Gromov 双曲性、Kobayashi 度量与 $\mathbb{C}$-凸集，Trans. Amer. Math. Soc. 369 (2017), 8437–8456.[23] A.M. ZIMMER，由 Gromov 双曲性导出的次椭圆估计，Adv. Math. 402 (2022), Paper No. 108334. F

· BRACCI：数学系，罗马第二大学“托尔维加塔”校区，科学研究街科学研究街1号 , 00133, ROMA，意大利
电子邮箱：fbracci@mat.uniroma2.it