arXiv:2304.11026v1 [cs.CE] 21 Apr 2023

循环弹塑性中的时间多尺度分解

Angelo Pasquale[*,1,3]，Sebastian Rodriguez[1]，Khanh Nguyen[2]，Amine Ammar[3,4]，和 FranciscoChinesta[1,4]

[1]ESI Group PIMM Lab 主席，ENSAM理工学院，巴黎，F-75013，151 Boulevard de l'Hˆopital，法国，angelo.pasquale@ensam.eu，sebastian.rodriguez iturra@ensam.eu，francisco.chinesta@ensam.eu

[2]马德里理工大学航空与航天工程高等技术学院，西班牙马德里，28040，Pza. Cardenal Cisneros，khanhnguyen.gia@upm.es

[3]ESI Group LAMPALab 主席，ENSAM理工学院，2 Boulevard du Ronceray BP 93525，49035 昂热 cedex 01，法国，angelo.pasquale@ensam.eu，amine.ammar@ensam.eu

[4]CNRS@CREATE LTD，新加坡 138602，1 Create Way，# 08-01 CREATE Tower，新加坡

摘要

对于时变问题的数值模拟，近期研究建议采用一种基于时间轴张量分解的时间推进格式。该时间分离表示可在适当广义分解（PGD）框架下直接引入。通过新的分离坐标，将时间坐标转换为多维时间，即微观时间和宏观时间。从物理角度来看，问题中涉及的所有量的时间演化都可以沿两个时间尺度进行跟踪：较快的微观尺度和较慢的宏观尺度。本文将该方法应用于计算循环载荷作用下弹塑性结构的准静态响应。研究表明，在计算循环塑性中存在一种物理上相容的时间分解。这种微观—宏观表征对于高周载荷分析可能尤其具有吸引力，例如老化和疲劳问题；相关研究将在未来的后续工作中展开。

关键词： PGD、时间多尺度、循环弹塑性、历史依赖性、

*通讯作者

非线性问题

1 引言

尽管高性能计算平台已广泛可用，固体力学中遇到的复杂时变非线性问题的数值求解如今仍然是一项棘手的挑战。例如，当处理定义在非常长的时间区间内的问题（如疲劳、老化，以及载荷包含多个特征时间的动力学问题），且系统响应必须涵盖模型中存在的不同时间尺度时，便会出现这种情况 [1, 2, 3, 4]。这一情形使得难以采用基于经典时间推进格式的数值模拟。

在近期的研究中，针对具有长期时间跨度且涉及不同时间尺度的问题，有研究提出采用多时间分离表示 [5, 6, 7]来实现时间分离。忽略时间导数后，一个准静态（非线性）问题可表示为

$$\mathcal{L}(u(\boldsymbol{x},t)) = f(\boldsymbol{x},t) \tag{1}$$

其中， $\mathcal{L}(\bullet)$ 表示涉及空间导数的通用非线性微分算子。此处，时间依赖性与载荷 $f(\boldsymbol{x}\ t)$ 相关。

如果时间坐标必须解析非常精细的细节，同时又必须覆盖较长的时间区间（这在疲劳分析中十分常见），那么，在不假设尺度分离的情况下，可以定义快时间和慢时间（也可以考虑其他中间尺度），分别记为 τ 和 T。如 [5, 7, 8]，中利用适当广义分解（PGD）所示，只要 $\mathcal{L}$ 是一个线性算子，就可以高效地以空间/多时间分离形式计算方程（1）的解。

对于非线性问题，非线性算子 $\mathcal{L}$ 可以分解为线性部分 $\mathcal{L}_{\mathrm{l}}$和非线性部分 $\mathcal{L}_{\mathrm{nl}}$。这样，问题 (1) 可改写为 (2)

$$\mathcal{L}_{\mathrm{l}}(u(\boldsymbol{x},t)) = f(\boldsymbol{x},t) - \mathcal{L}_{\mathrm{nl}}(u(\boldsymbol{x},t)), \tag{2}$$

该式很容易线性化，例如可写为

$$\mathcal{L}_{\mathrm{l}}(u^{(l)}(\boldsymbol{x},t)) = f(\boldsymbol{x},t) - \mathcal{L}_{\mathrm{nl}}(u^{(l-1)}(\boldsymbol{x},t)),$$

其中上标 (l) 表示非线性迭代。线性化问题的解可以通过完整的空间/微观时间/宏观时间分解 [5, 7]求得

$$u^{(l)}(\boldsymbol{x},t) \approx \sum_k U_k^{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}) U_k^{\tau}(\tau) U_k^{T}(T),$$

或者先进行空间/时间分离，再进一步采用多时间分解来计算时间函数（微观/宏观时间子模态） [8]

$$u^{(l)}(\boldsymbol{x},t) \approx \sum_k U_k^{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}) U_k^{t}(t) \approx \sum_k U_k^{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}) \sum_j U_{k,j}^{\tau}(\tau) U_{k,j}^{T}(T).$$

本文旨在计算循环弹塑性问题中的这种时间多尺度表示，其中非线性项取决于过去的历史，即

$$\mathcal{L}_{\mathrm{nl}}(u^{(l-1)}(\boldsymbol{x},t)) = \int_0^t \mathcal{L}_{\mathrm{nl}}(u^{(l-1)}(\boldsymbol{x},s))\,\mathrm{d}s\,.$$

本文并不寻求计算有效性，而只是要证明时间分解在假设存在塑性所促成的时间历史非线性项时能够运行并正确执行。

一篇正在撰写的论文将通过在此提出的时间分离表示框架内结合离散化方法与机器学习，探讨计算有效性。

本文结构如下：第 2 节以强形式和弱形式陈述问题。第 3 节将问题重新表述为适当广义分解的数值框架，从空间和时间分离入手，随后讨论多时间分离。第 4 节展示加载-卸载拉伸试验的结果。第 5 节给出结论与展望。

2 理论

作为参考问题[1]，，考虑准静态弹塑性方程（小变形条件下）。为此，引入物体 $\mathcal{B}$，其占据的空间区域为 $\Omega \subset \mathrm{R}^d$，其中 $d = 2,3$，其边界记为 $\Gamma = \partial\Omega$。此外，令 $I = (0, T_f)$ 为时间区间。待求变量为位移场 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}\ t)$ 和应力场 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}\ t)$，其中 $(\boldsymbol{x}\ t) \in \Omega \times I$，满足

$$\begin{cases} \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{f} & \text{in } \Omega \times I \\ \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_D & \text{on } \partial\Omega_D \times I \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{f}_N & \text{on } \partial\Omega_N \times I \\ \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_0 & \text{in } \Omega \times \{0\} \end{cases} \tag{3}$$

其中，$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}\ t)$ 是给定的体力历程，$\partial\Omega_D$ 和 $\partial\Omega_N$ 分别是边界 $\partial\Omega = \partial\Omega_D \dot{\cup} \partial\Omega_N$ 的狄利克雷区域和诺伊曼区域（其中符号 $\dot{\cup}$ 表示不相交并），而 $\boldsymbol{n}$ 是 $\partial\Omega_N$ 的外法向单位向量。与通常一样，$\boldsymbol{u}_0$ 是初始条件，$\boldsymbol{u}_D$ 是 $\partial\Omega_D$ 上给定的位移，$\boldsymbol{f}_N$ 是 $\partial\Omega_N$ 上给定的牵引力（单位变形面积上的力）。

此外，$\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{\sigma}$ 验证弹塑性本构关系：

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathsf{C} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) \tag{4}$$

其中，C 为四阶刚度张量，$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^s \boldsymbol{u}$ 为总应变张量（$\nabla^s(\bullet)$ 为对称梯度算子），$\boldsymbol{\varepsilon}^p$ 为塑性应变张量，$:$ 表示张量积的双重缩并。

2.1 全局平衡方程的弱形式

在小变形假设下，准静态问题 (3) 的弱形式可以很容易地从平衡方程的局部形式推导得到 [9, 10, 11]。

首先，将 V_D 定义为具有足够正则性且满足运动学容许条件的位移场空间（即确保在区域 $\partial\Omega_D$ 上施加的位移）：

$$V_D = \{\boldsymbol{u} : \Omega \times I \to H^1(\Omega; \mathbb{R}^d) \text{ s.t. } \boldsymbol{u}(\boldsymbol{\gamma}, t) = \boldsymbol{u}_D(\boldsymbol{\gamma}, t), \quad (\boldsymbol{\gamma}, t) \in \partial\Omega_D \times I\}.$$

[1] Mu多维函数直至二阶张量均用粗斜体字母表示。

同样， $H_0^1(\Omega;\mathrm{R}^d)$ 是试验函数空间，在$\partial\Omega_D$上满足齐次狄利克雷条件：

$$H_0^1(\Omega;\mathbb{R}^d)=\{\boldsymbol{v}:\Omega\to H^1(\Omega;\mathbb{R}^d)\ \text{s.t.}\ \boldsymbol{v}(\boldsymbol{\gamma})=\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{\gamma}\in\partial\Omega_D\}.$$

作出上述定义后，弱形式要求寻找 $\boldsymbol{u}\in V_D$，使其满足 $\forall t\in I$ 和$\forall \boldsymbol{v}\in V_0$：

$$\int_\Omega[\boldsymbol{\sigma}(t):\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})-\boldsymbol{f}(t)\cdot\boldsymbol{v}]\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}-\int_{\partial\Omega_N}\boldsymbol{f}_N(t)\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\gamma}=0. \tag{5}$$

利用公式 (4) 并重新排列各项，公式 (5) 可写为：

$$\int_\Omega\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}):\mathsf{C}:\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}-\int_\Omega\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}):\mathsf{C}:\boldsymbol{\varepsilon}^p(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\int_\Omega\boldsymbol{f}(t)\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\int_{\partial\Omega_N}\boldsymbol{f}_N(t)\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\gamma}\,,$$

或者，等价地，

$$k(\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{v})-f^p(\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{v})=f^{ext}(\boldsymbol{v};t), \tag{6}$$

在引入双线性型和线性型之后

$$\begin{cases}k(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\displaystyle\int_\Omega\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}):\mathsf{C}:\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\ f^{ext}(\boldsymbol{v};t)=\displaystyle\int_\Omega\boldsymbol{f}(t)\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\int_{\partial\Omega_N}\boldsymbol{f}_N(t)\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\gamma}\,,\end{cases}$$

以及考虑塑性应变的非线性项

$$f^p(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\int_\Omega\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}):\mathsf{C}:\boldsymbol{\varepsilon}^p(\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,.$$

回顾一下，方程 (6) 中 $f^p(\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{v})$ 的计算需要知道 $\boldsymbol{\varepsilon}^p(\boldsymbol{u}(t))$，而后者取决于所假设的塑性模型 [9, 10, 11]。

2.2 塑性模型

这里采用标准的 von Mises（J_2）塑性，其屈服面定义为

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}(t),\boldsymbol{\varepsilon}^p(t))=\sqrt{3J_2}-\sigma_{y,t}=0, \tag{7}$$

其中，$J_2=J_2$（t）表示第二偏不变量

$$J_2=J_2(\boldsymbol{s})=\frac{1}{2}\boldsymbol{s}:\mathrm{s},\quad \boldsymbol{s}=\boldsymbol{\sigma}-\frac{1}{3}\operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma})\boldsymbol{I}$$

而 $\sigma_{y,\ t}$ 是单轴屈服应力，它通过适当的应变硬化曲线演化。该评估的详细信息如下所述。

假设采用各向同性硬化，在任意硬化状态下，屈服面 (7) 的演化对应于初始屈服面的均匀（各向同性）扩张。这是通过假设 $\sigma_{y,\ t}$ 是累积（或有效）塑性应变的函数而得到的

$$\bar{\varepsilon}_t^p=\int_0^t\sqrt{\frac{2}{3}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p}\,\mathrm{d}s\,.$$

特别地，假设采用线性硬化，则 $\sigma_{y,\ t}$ 可表示为

$$\sigma_{y,t} = \sigma_{y,0} + H\bar{\varepsilon}_t^p, \tag{8}$$

其中，$\sigma_{y,0}$ 为初始屈服应力，H 为（常数）硬化模量 .

此外，考虑标准的关联塑性流动法则，即塑性应变率是应力空间中垂直于屈服面的张量，即

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda}\boldsymbol{N}, \quad \boldsymbol{N} := \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{\boldsymbol{s}}{\|\boldsymbol{s}\|}. \tag{9}$$

按照通常的记号，在方程（9）中，λ 表示未知的塑性乘子 [10]。

3 材料和方法

在大多数基于有限元的方法中，平衡方程（6）以增量方式恢复。这对应于一个全局循环，其中由 f^p 引起的非线性通过显式或隐式方式 [9, 10]进行处理。然而，诸如方程（6）所示的非线性问题，也已通过时间上的非增量策略得到成功处理，正如 LATIN 和 PGD 文献 [8, 12, 13, 14, 15]所建议的那样。这里，解表示为低秩分离形式

$$\boldsymbol{u}_m(\boldsymbol{x}, t) = \sum_{k=1}^{m} \boldsymbol{U}_k^{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}) U_k^t(t), \tag{10}$$

并通过迭代策略在整个空间—时间域中直接计算。在方程（10）中，m 表示解的秩，也称为 PGD 模态的数量。

本文采用了 PGD 方法相同的线性化策略，并进一步探讨了求解的时间多尺度表示。

与计算塑性中的通常做法一样，本构方程的积分对应于一个局部循环，通常称为状态更新过程 [9, 10]。事实上，塑性模型可归结为微分本构方程，可通过欧拉格式（显式或隐式）进行数值求解。本文采用基于弹性预测/返回映射过程的隐式算法，并通过牛顿–拉夫森格式求解由此得到的非线性方程（关于增量塑性乘子）。

3.1 线性化与空间-时间分离

按照标准伽辽金方法，在 V_D 定义的有限维子空间中寻求满足式（6）的 $\boldsymbol{u}(t)$ 的近似解

$$V_D^h = \left\{ \boldsymbol{u}_h \in V_D \text{ s.t. } \boldsymbol{u}_h(\boldsymbol{x}, t) = \sum_{i=1}^{N_{\boldsymbol{x}}} \boldsymbol{u}_i(t)\phi_i(\boldsymbol{x}), \quad (\boldsymbol{x}, t) \in \Omega \times I \right\}$$

其中，$\{\phi_i\}_{i=1}^{N_{\boldsymbol{x}}}$ 是在空间中适当选取的形函数集合，而 $\{\boldsymbol{u}_i(t)\}_{i=1}^{N_{\boldsymbol{x}}}$ 则是相应的未知时间系数。同样，V_0^h表示 $H_0^1(\Omega; \mathrm{R}^d)$ 的 Galerkin 近似空间。

在（6）的半离散对应形式中，寻求满足以下条件的 $\boldsymbol{u}_h \in V_D^h$： $\forall t \in I$ 以及$\forall \boldsymbol{v}_h \in V_0^h$,

$$k(\boldsymbol{u}_h(t), \boldsymbol{v}_h) - f^p(\boldsymbol{u}_h(t), \boldsymbol{v}_h) = f^{ext}(\boldsymbol{v}_h; t).$$

为解决该问题的非线性，首先需要计算一个满足[2], $\forall t \in I$的弹性解近似值。

$$k(\boldsymbol{u}^{(0)}(t), \boldsymbol{v}_h) = f^{ext}(\boldsymbol{v}_h; t),$$

其代数对应形式可直接得到为

$$\mathbf{K}\mathbf{u}^{(0)}(t) = \mathbf{f}^{ext}(t), \tag{11}$$

其中， $K_{ij} = k(\phi_i, \phi_j)$ 和 $f_i^{ext}(t) = f^{ext}(\phi_i; t)$，对于 $i, j = 1, \ldots, N_{\boldsymbol{x}}$。
此时，引入区间 I 的时间离散。这是基于考虑 N_t 个均匀时间点 t_i，使得
$t_{i+1} - t_i = \Delta t > 0$，其中 $i = 1, \ldots, N_t$。
于是，公式（11）可在整个时空域上改写为张量形式 [5], ，并寻找满足以下条件的 $\mathbf{U}^{(0)} \in \mathbb{R}^{N_{\boldsymbol{x}} \times N_t}$：

$$(\mathbf{K} \otimes \mathbf{I}_{N_t}) : \mathbf{U}^{(0)} = \mathbf{F}^{ext} \tag{12}$$

其中，$\mathbf{I}_{N_t} \in \mathbb{R}^{N_t \times N_t}$ 表示时间方向上的单位矩阵，而 $\mathbf{F}^{ext} \in \mathbb{R}^{N_{\boldsymbol{x}} \times N_t}$ 汇集了式 (11) 右端项在各个时间点的取值，即 $\mathbf{f}^{ext}(t_i) \in \mathbb{R}^{N_{\boldsymbol{x}}}$, $i = 1, \ldots, N_t$。
问题 (12) 可以直接通过 PGD算法求解，该算法旨在对$\mathbf{U}^{(0)}$ 构造低秩分离近似，形式如下

$$\mathbf{U}^{(0)} \approx \mathbf{U}_{m^{(0)}}^{(0)} = \sum_{k=1}^{m^{(0)}} \mathbf{U}_k^{(0),\boldsymbol{x}} \otimes \mathbf{U}_k^{(0),t},$$

其中， $m^{(0)}$ 为 PGD 模态的数量。关于空间-时间分离问题的 PGD 组装与求解，读者可参阅 [5] 及其中的参考文献。
由于$\mathbf{U}_{m^{(0)}}^{(0)}$ 是$\boldsymbol{u}^{(0)}(t)$的低秩近似， $\forall t \in I$。弹性解$\boldsymbol{u}^{(0)}(t)$的近似， $\forall t \in I$ 所有历史相关变量都可以根据$\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} = \nabla^s \boldsymbol{u}^{(0)}$进行更新。特别是，更新 $\boldsymbol{\varepsilon}^{p,(0)}$ 可以冻结方程 (6) 中的非线性项，并启动一个迭代过程，其中每次迭代 $l \geq 1$ 包含两个步骤:

1.（状态更新）通过弹性预测/返回映射过程更新 $\boldsymbol{\varepsilon}^{p,(l-1)} = \boldsymbol{\varepsilon}^p(\boldsymbol{u}_{(l-1)})$。该过程包含一组非线性计算，可写为

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{p,(l-1)} = \mathcal{N}(\boldsymbol{\varepsilon}^{(l-1)}, \bar{\varepsilon}_{T_f}^p),$$

其中， $\mathcal{N}$ 表示依赖于总应变张量以及截至终止时间 T_f的有效塑性应变的非线性算子。

[2]为简化记号，省略与 Galerkin近似 相关的下标 h 。

2.（线性化平衡态）线性化问题的解

$$k(\boldsymbol{u}^{(l)}(t), \boldsymbol{v}_h) = f^{ext}(\boldsymbol{v}_h; t) + f^{p}(\boldsymbol{u}^{(l-1)}(t), \boldsymbol{v}_h),$$

寻找空间-时间分离近似

$$\mathbf{U}^{(l)} \approx \mathbf{U}^{(l)}_{m^{(l)}} = \sum_{k=1}^{m^{(l)}} \mathbf{U}_k^{(l),\boldsymbol{x}} \otimes \mathbf{U}_k^{(l),t} \tag{13}$$

相应张量问题的

$$(\mathbf{K} \otimes \mathbf{I}_{N_t}) : \mathbf{U}^{(l)} = \mathbf{F}^{ext} + \mathbf{F}^{p,(l-1)}$$

其中，$\mathbf{F}^{p,(l-1)}_{,} \in \mathbb{R}^{N_x \times N_t}$ 计入塑性贡献。

当两个连续近似在适当距离下足够接近时，线性化迭代停止。这意味着，给定一个足够小的 $\delta > 0$

$$e_l = \frac{\left\|\mathbf{U}^{(l)} - \mathbf{U}^{(l-1)}\right\|_F}{\left\|\mathbf{U}^{(l-1)}\right\|_F} < \delta, \tag{14}$$

其中，$\|\bullet\|_F$ 例如表示标准的弗罗贝尼乌斯范数。

记满足收敛准则(14) 的迭代为 L ，非线性问题(6)的最终PGD近似为$\mathbf{U}^{(L)}$，即近似(10)的秩为 $m = m^{(L)}$。

整体求解过程总结如图 1 所示。

备注。 刚度矩阵$\mathbf{K}$ 的组装采用经典的有限元方法，而右端项$\mathbf{F}^{p,\ (l-1)}$ 的计算遵循标准的塑性积分算法（弹性预测/返回映射过程）。这两项计算均可使用任意计算力学软件完成。因此，整个流程具有弱侵入性，因为它只需将线性化循环外置，并在组装后使用时空 PGD 求解器。

备注。 如 [5], 所述，可以在 PGD 构造器中轻松地进一步分解时间轴。当预计系统响应会呈现多个时间尺度时，这一点尤为重要。此外，从计算角度来看，线性化问题的求解能够节省运算和内存开销，尤其是在将较大的时间区间与较小的时间步长结合使用时。

为了降低求解方案的整体复杂度，下一小节将探讨弹塑性响应是否存在时间多尺度分解。

3.2 多时间分离

遵循相同的策略， [5, 7, 8], PGD时间模态的计算$\{U_i^t\ (t)\ \}_{i=1}^m$可以通过多时间分离表示（MT-PGD）来处理。

特别地，线性化问题的 PGD 解（为简化记法，省略非线性迭代的指标）可通过空间-微观时间-宏观时间分离表示来近似 [5, 7]

$$\boldsymbol{u}_m(\boldsymbol{x}, t) = \sum_{k=1}^{m} \boldsymbol{U}_k^{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}) U_k^t(t) \approx \sum_{k=1}^{M} \boldsymbol{U}_k^{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}) U_k^{\tau}(\tau) U_k^T(T), \tag{15}$$

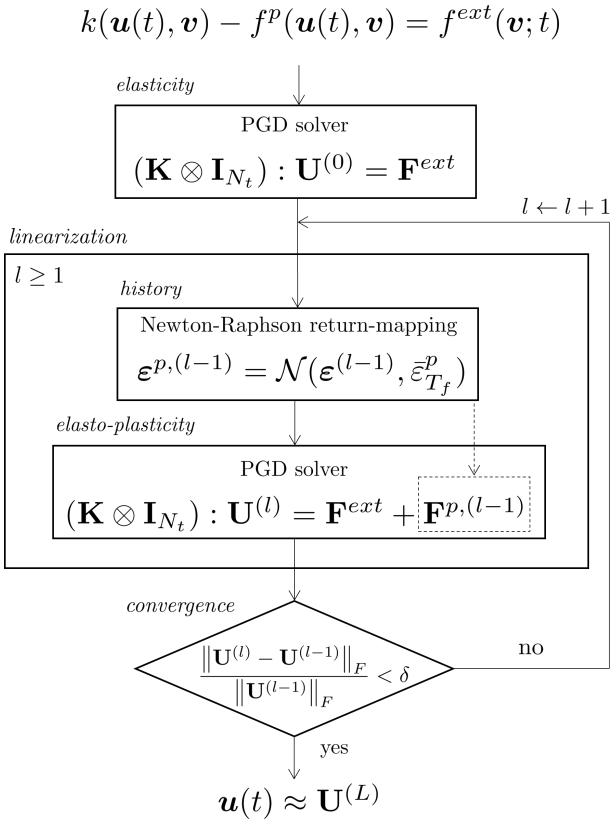


图 1：基于 PGD 的弹塑性求解方案。

或者，在计算时间函数（微观/宏观时间子模态）时采用多时间分解 [7, 8]

$$\boldsymbol{u}_m(\boldsymbol{x},t) = \sum_{k=1}^{m} \boldsymbol{U}_k^{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}) U_k^t(t) \approx \sum_{k=1}^{m} \boldsymbol{U}_k^{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}) \sum_{j=1}^{m_k} U_{k,j}^{\tau}(\tau) U_{k,j}^{T}(T), \tag{16}$$

其中，引入了两个新的独立时间坐标 τ（微观时间，或快时间）和 T（宏观时间，或慢时间）。此外，在方程 (15) 中，新的模态数记为 M（通常为 $M > m$）；而在方程 (16) 中，参与时空分离的模态数仍记为 m， m_k 表示近似当前全局模态k所需的时间子模态数。

在离散层面，区间 I 上常规的时间离散 $\{t_i\}_{i=0}^{N_t}$ 现由以下方式取代：

1. 在整个区间 I 上布置等间距宏观自由度的宏观离散 $\{T_i\}_{i=0}^{N_T}$，宏观步长为常数 $\Delta T = T_{i+1} - T_i > 0$, $T_0 = 0$；2. 在第一个宏观子区间 $[0, T_1)$ 上布置等间距微观自由度的微观离散化 $\{\tau_i\}_{i=0}^{N_\tau}$，微观步长为常数 $\Delta\tau = \tau_{i+1} - \tau_i > 0$, $\tau_0 = T_0 = 0$ 和 $\tau_{N_t} = T_1 - \Delta\tau$。

这样，通过新引入的微观和宏观网格的张量积，即可恢复单尺度细时间网格，也就是说 $\{t_i\}_{i=0}^{N_t} = \{T_i\}_{i=0}^{N_T} \otimes \{\tau_i\}_{i=0}^{N_\tau}$ meaning$N_t = N_T N_\tau$。

备注。 在 PGD 组装过程中，考虑时间多尺度近似时，时间算子 $\mathbf{I}_t$ 可精确地恢复为 $\mathbf{I}_{N_t} = \mathbf{I}_{N_T} \otimes \mathbf{I}_{N_\tau}$。此外，对于涉及时间导数的偏微分方程，相关时间算子的精确张量分解已在 [5] 中进行了讨论。

备注。 在近似式 (16) 中，按构造无法保证每个乘积 $U^{\tau}_{k,j}(\tau)U^{T}_{k,j}(T)$ 连续。事实上，张量积会沿宏观尺度复制微观尺度模式 $U^{\tau}_{k,j}(\tau)$。然而，通过添加足够数量的模态 m_k，可以确保 $U^{t}_{k}(t)$ 的多时间近似连续。

备注。 这两种方法（15）和（16）均能保证存储需求降低，因为 N_t 函数的求值结果是通过组合宏观函数和微观函数的 N_T 次与 N_τ 次求值结果重构得到的。此外，与PGD方法中的通常情况一样，交替方向策略（ADS）中需要求解的独立系统规模现在更小 [5]，，从而节省了计算成本。

注释。 如果单尺度函数 $U^{t}_{k}(t)$ 表现出多尺度行为，并且合理地选择宏观分区（例如，遵循函数的典型模式，如周期行为），那么只需少量子模态 m_k 就足以获得良好的近似（16） [8]。

在这种情况下，采用表示式（16）已足够，因为本研究的主要目标是探究 PGD 时间函数内部的多尺度模式。在这种 PGD 形式体系中，应注意到，离散时间函数 $\mathbf{h}^t \in \mathbf{R}^{N_t}$ 现在表示为

$$\mathbf{h}^t \approx \sum_{j=1}^{m_k} \mathbf{h}^T \otimes \mathbf{h}^\tau,$$

从而确保显著节省计算成本，因为沿新的分离坐标执行的运算所涉及的自由度数量较少。

特别地，通过将近似式 (13) 替换为其代数多时间对应形式，将第 3.1 小节中介绍的过程扩展到时间多尺度框架中。

$$\mathbf{U}^{(l)} \approx \mathbf{U}^{(l)}_{m^{(l)}} = \sum_{k=1}^{m^{(l)}} \mathbf{U}^{(l),\boldsymbol{x}}_{i} \otimes \sum_{j=1}^{m_k} \mathbf{U}^{(l),T}_{k,j} \otimes \mathbf{U}^{(l),\tau}_{k,j}.$$

这条格局直接意味着总应变的简化时间多尺度表示】【。 in

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m(\boldsymbol{x},t) = \sum_{k=1}^{m} \boldsymbol{\varepsilon}^{\boldsymbol{x}}_k(\boldsymbol{x})\varepsilon^t_k(t) \approx \sum_{k=1}^{m} \boldsymbol{\varepsilon}^{\boldsymbol{x}}_k(\boldsymbol{x}) \sum_{j=1}^{m_k} \varepsilon^{\tau}_{k,j}(\tau)\varepsilon^{T}_{k,j}(T).$$

注释。 需要注意的是，到目前为止，使用 MT-PGD 所带来的计算收益仅限于 [5, 8] 中讨论的线性问题。事实上，由于历史依赖性，步骤 1（状态更新）中的非线性特征要求对 N_t 个步骤进行标准积分。换言之，迄今为止，MT-PGD 尚未用于弹塑性本构关系的计算。在图 1 所示的工作流程中，PGD 求解器模块被 MT-PGD 求解器模块所取代。

我们正在进行的工作旨在从对非线性项的原始评估中实现计算有效性。

4 结果与讨论

本节考虑循环弹塑性中的两个示例，改变试样的几何形状和施加载荷。通过PGD时空构造器对这些问题进行数值求解。特别关注PGD时间模态及其通过多时间分解（MT-PGD）进行的表征。

4.1 哑铃形试样

本文考虑在单周期循环载荷作用下，对狗骨形钢试样进行单轴加载-卸载拉伸试验。载荷由施加于试样两侧、具有恒定幅值的狄利克雷数据 $u_D(t)$ 构成。

材料的杨氏模量为 $E = 210$ GPa，泊松比为 $\nu = 0.3$。假设的塑性定律 (8) 由初始屈服应力 $\sigma_{y,\,0} = 205$ MPa 和线性硬化系数 $H = 2$ GPa 表征。为确保小变形，施加的恒定振幅位移的最大振幅为 $u_D^{max} = 0.125$ mm，加载速率固定为 $v_l = 0.025$ mm/s，遵循准静态试验标准。单个循环（加载-卸载-加载）的时间为 $T_1 = 4u_D^{max}/v_l = 20$ s。

图2展示了二维离散几何以及施加的包含10个周期的位移。空间网格由 $N_e = 500$个四边形单元和$N_x = 561$ 个网格节点组成。时间区间被划分为 $N_t = 800$ 个时间段。

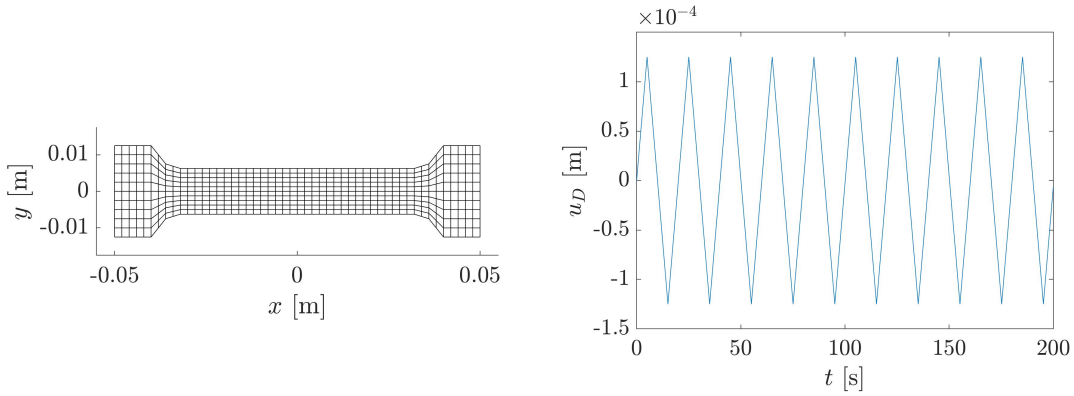


图2：离散几何（左）和施加的位移（右）。

图 3 给出了在终止时间 $T_f = 200$ s 时计算得到的位移场大小和各向同性硬化函数。

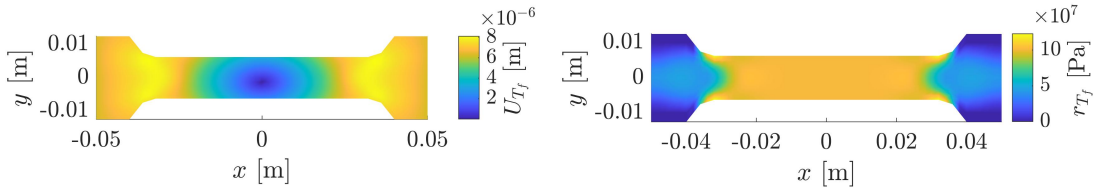


图3：终止时间 T_f时的位移场（左）和各向同性硬化（右）。

图 4 展示了 PGD 结果与经典的基于有限元的增量算法（采用基于回归映射的塑性的隐式积分）在试样中心（x_0，y_0）=(0，0)处计算结果的对比。

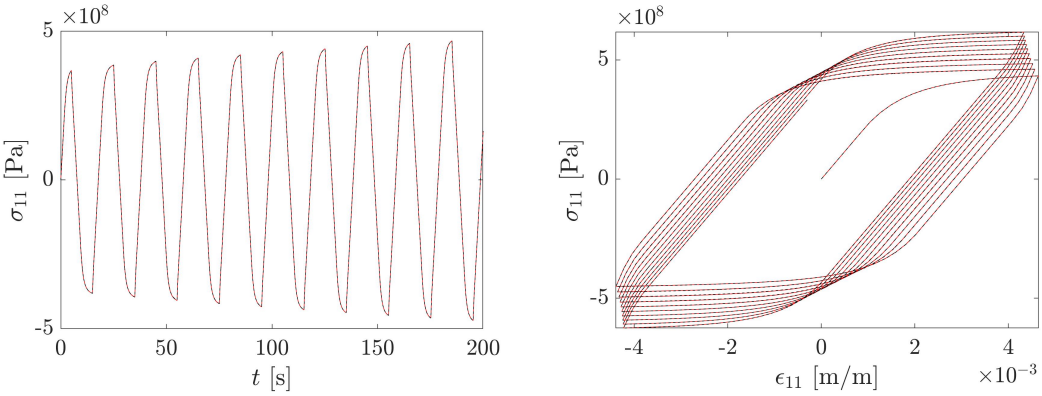


图4：(0，0)中的应力-位移曲线（左）和滞回环（右）。红线：有限元，黑色虚线：PGD。

PGD近似（10）在空间和时间上的前四个归一化模态如图5所示。

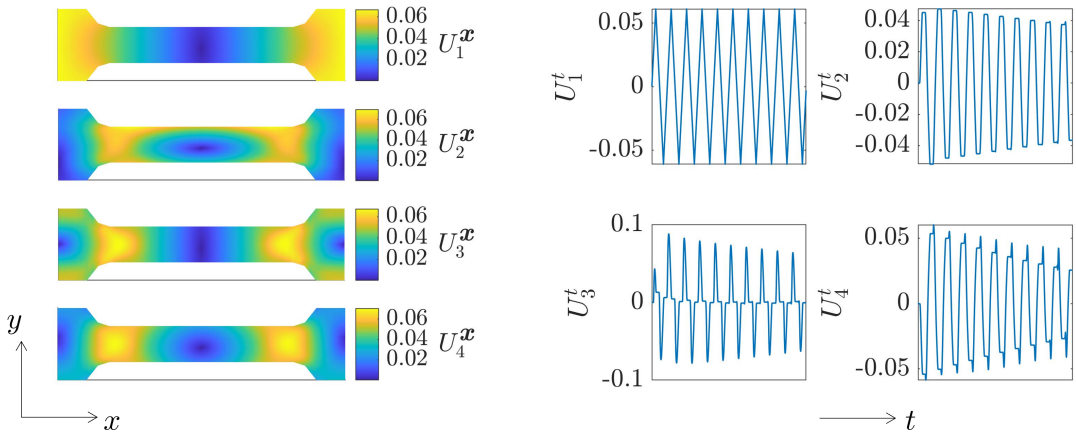


图5：前四个归一化 PGD 模态。

聚焦于时间模态，可以观察到，U_1^t 对应于弹性响应，而后续模态呈现出相似的演化过程，其特征为：(a) 开始时的瞬态区；(b) 向近似周期性（循环性）行为逐渐稳定的模式；(c) 信号幅值缓慢衰减。这种行为可以通过 MT-PGD近似（16）轻松刻画：

$$\boldsymbol{u}_m(\boldsymbol{x},t)=\sum_{k=1}^{m}\boldsymbol{U}_k^{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x})U_k^t(t)\approx\sum_{k=1}^{m}\boldsymbol{U}_k^{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x})\sum_{j=1}^{m_k}U_{k,j}^{\tau}(\tau)U_{k,j}^{T}(T).$$

这是通过基于 N_T 个等间距宏观时间点的宏观离散实现的，而微观尺度由 N_τ 个等间距微观时间点构成。例如，如果是单个循环

定义自载荷-卸载-载荷序列，宏观离散可由一个粗网格构成（如后文所述，不失一般性），其宏观时间步长为 ΔT ，覆盖整个周期。微观离散化则对应沿周期划分的细网格，如图 6 所示。

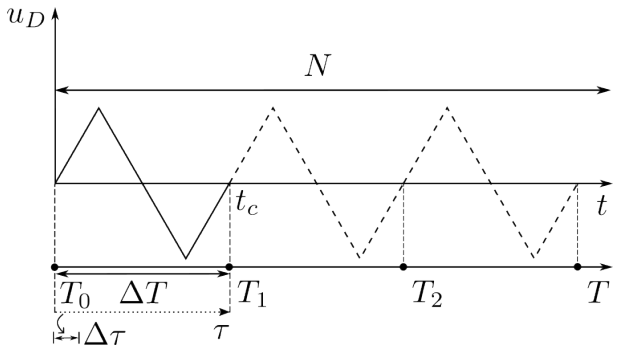


图 6：微观尺度和宏观尺度的时间离散化。

随着周期数增加，这种分解方式的优势显而易见。例如，图 7 展示了图 5 中时间模态的对应结果，其中相同的载荷施加了 60 个周期。

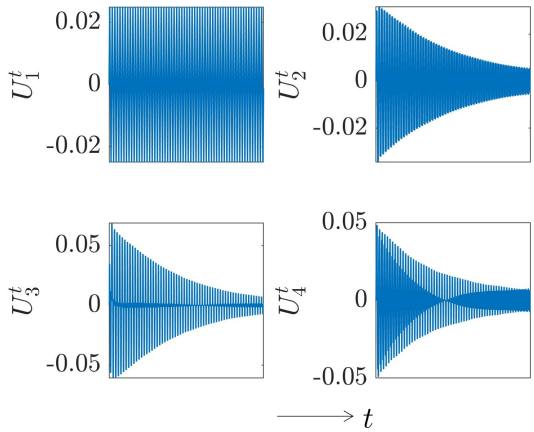


图 7：60 个周期下的 PGD时间模态 $\{U_k^t(t)\}_{k=1}^4$ 。

采用 MT-PGD 时，图 7 中的每一个信号均通过微观–宏观子模态进行近似。例如，图 8 上方展示了通过 PGD算法及其多时间对应算法 MT-PGD 计算得到的第二模态$U_2^t(t)$（如放大图所示，黑色虚线与蓝色实线相互重合）。下方的图像分别展示了微观时间模态 $\{U_{2,j}^\tau(\tau)\}_{j=1}^4$和宏观时间模态 $\{U_{2,j}^T(T)\}_{j=1}^4$。

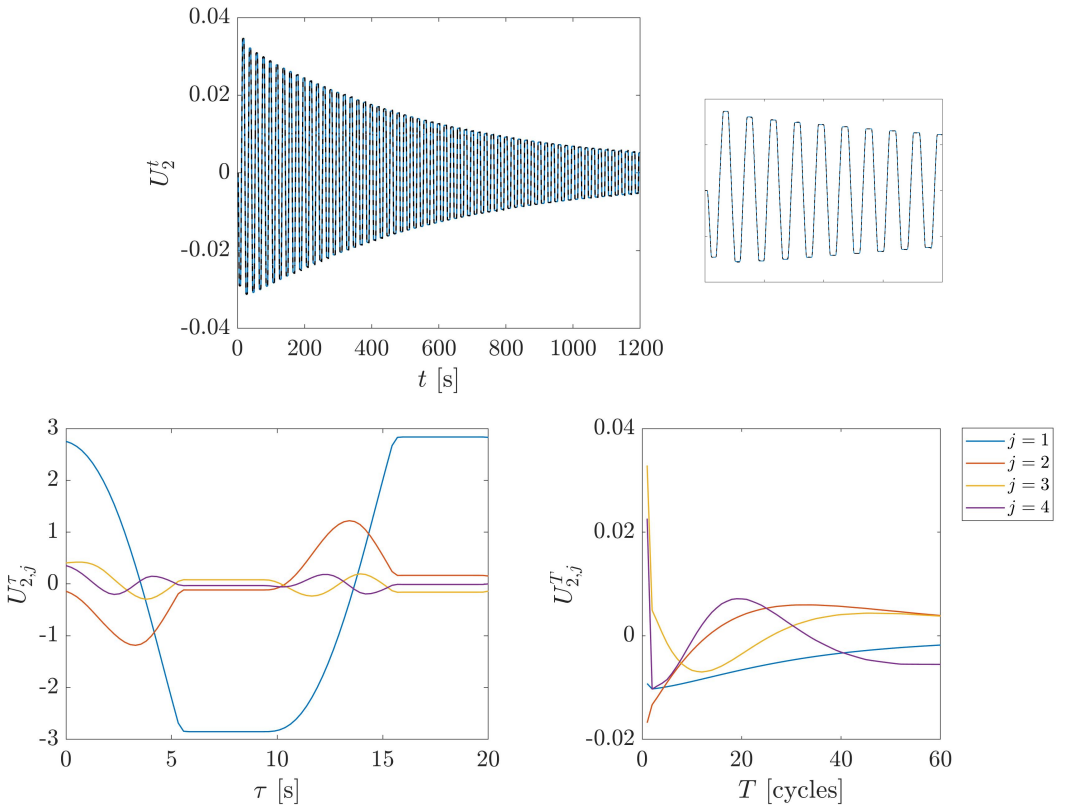


图 8： U 多时间分解的前四个微观-宏观模态 $\frac{t}{2}$.

如图 8 所示，微观—宏观表征与此前强调的时间响应演化具有很强的物理一致性。实际上，微观尺度函数通过呈现快速动力学的周期性高度非线性模式，捕捉了该函数的近似周期性。相反，宏观尺度上的动力学非常缓慢，其函数表现出初始的过渡行为，随后趋于平滑演化。

我们简要评论一下宏观尺度定义中宏观分区的选择（即 ΔT 的选择）。如前文在 [5], 中所述，多时间策略之外的张量分解使这一选择完全任意，但结果可能会受到影响。正如在 [5], 中观察到的，如果该选择缺乏物理意义，多尺度近似的收敛性可能会恶化（可能需要更多时间子模态才能实现收敛）。

因此，为了实现最佳收敛，首先需要建立一种符合物理规律的时间域分解。例如，参照图 6，一个明智的方案是选择 $\Delta T = kt_C$，其中 $k \in \mathbb{N}^+$，这意味着 ΔT 是外部激励周期的整数倍。随后， k 的选择可由物理和计算两方面的原因决定。一方面，这取决于人们希望在快尺度上捕捉什么（例如， $k = 1$ 对应一个完整周期的响应）。另一方面，在子模态计算中产生的分离问题，其规模分别随微观尺度和宏观尺度的 N_τ 和 N_T 而变化。令 N 为周期数，则有 $N_T = N/k$ 和 $N_\tau = N_t/N_T$，因此 k 的选择会影响它们的复杂度。

4.2 带边缘裂纹的板

第二个应用案例涉及一块由相同材料制成的二维板，其上部存在一条边缘裂纹，如图9左侧的红色线段所示。与前述情况一样，通过对板的左右两侧施加给定的位移演化来控制仿真。此外，我们考虑施加一个具有给定斜率的位移，该位移持续40个周期（不再以零为中心），如图9右侧所示。空间网格由 $N_e = 400$ 个四边形单元和 $N_x = 451$ 个节点组成。时间区间被划分为 $N_t = 3200$ 个时间点。单个循环（加载-卸载-加载）的持续时间为$T_1 = 30$ s，这意味着终止时间为 $T_f = 1200$ s。

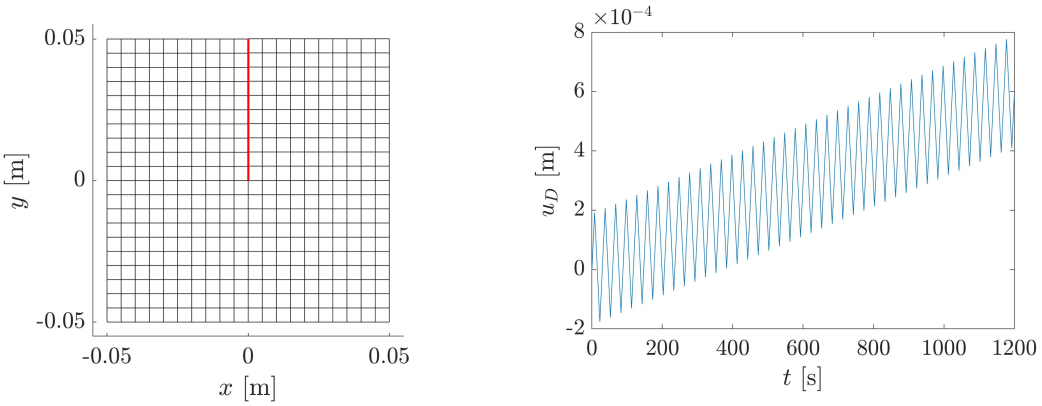


图9：离散几何（左）和施加的位移（右）。

图10给出了终止时间 $T_f = 1200$ s 时计算得到的位移场幅值和各向同性硬化函数。

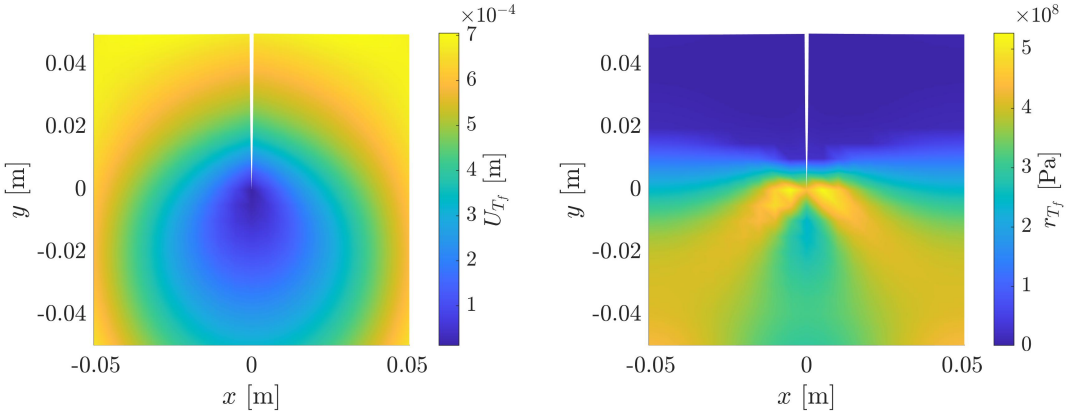


图10：终止时间 T_f 时的位移场（左）和各向同性硬化（右）。

图11展示了在试样中心（x_0，y_0）=(0，0)处计算得到的PGD结果与经典的基于有限元的增量算法（考虑基于回归映射的塑性隐式积分）的对比。

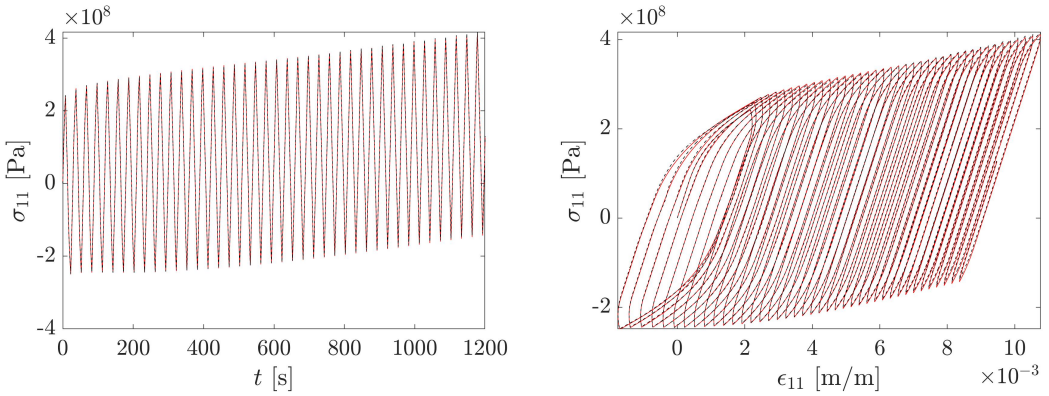


图11：在 (0,0) 处的应力-位移曲线（左）和滞回环（右）。红线：有限元；黑色虚线：PGD。

图12展示了PGD近似（10）在空间和时间上的前四个归一化模态。

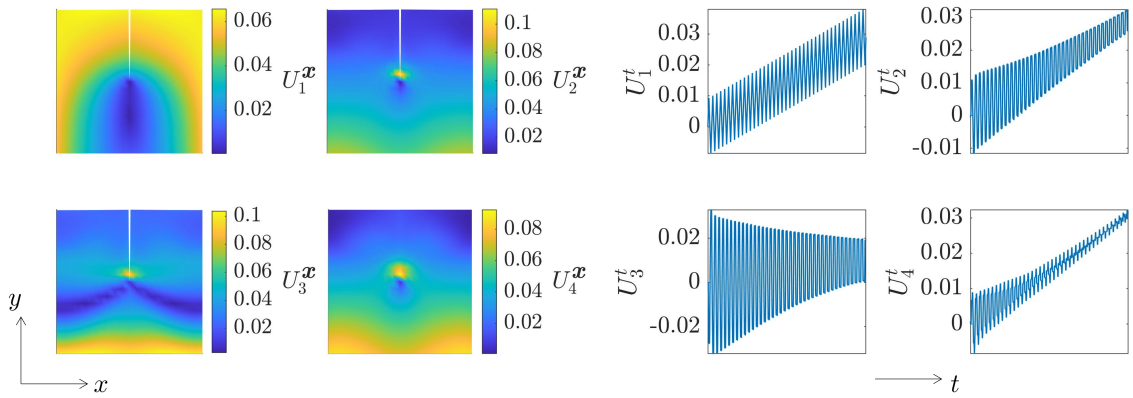
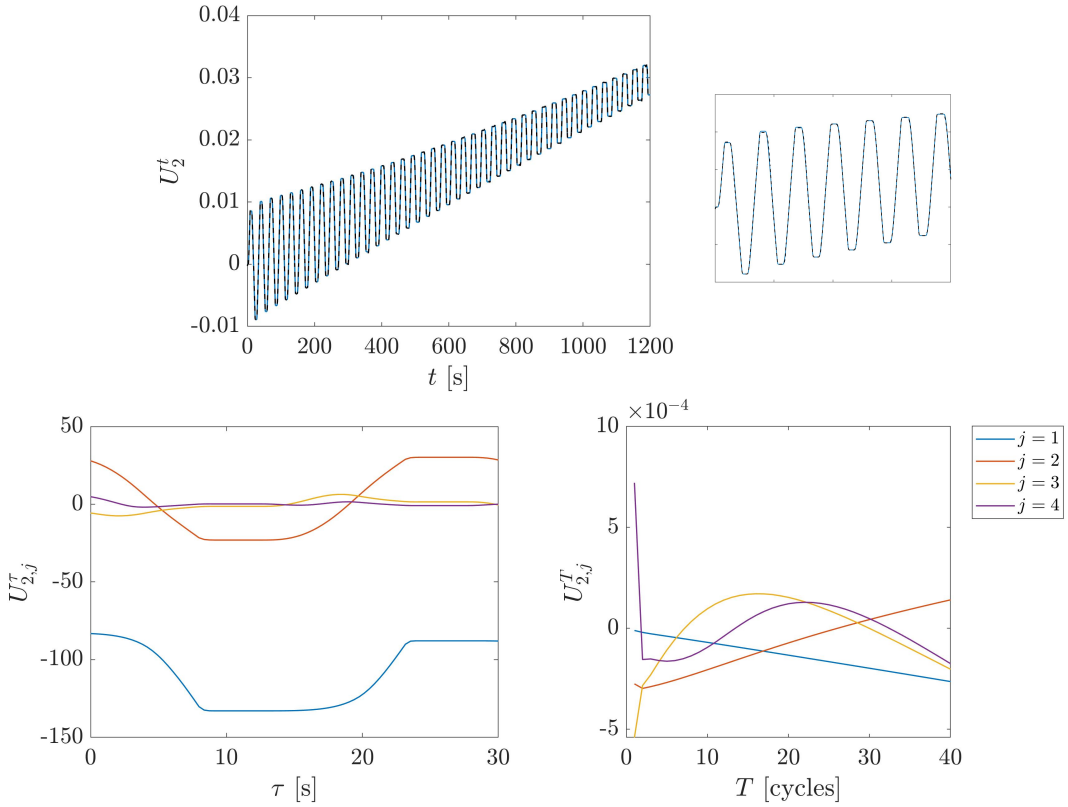


图12：前四个归一化 PGD 模态。

图 12 中的时间模态清晰地展现了多尺度行为，采用 MT-PGD 时很容易识别。与前一个示例一样，宏观自由度的数量对应于周期数 $N_T = 40$，而微观尺度在第一个宏观时间区间内包含 $N_\tau = 80$ 个时间点（在高周次分析中，或可采用更大的 ΔT 以降低宏观尺度问题的复杂度）。第二个 PGD 时间模态 U_2^t 的多时间分解如图 13 所示。可以观察到，重复模式由微观尺度模态识别，而其稳定过程较慢，并由宏观尺度模态捕捉；后者追踪大尺度上近乎线性的趋势。



Fi图 13: U_2^t多时间分解的前四个微观-宏观模态 .

5 结论

作为 [5], 的扩展，本研究成功地在周期弹塑性的非线性情形下计算了时间分离解。

在基于 PGD 的时间多尺度过程中，时间响应沿两个彼此分离的时间尺度计算，即微观尺度和宏观尺度。这些尺度被定义为彼此独立的新坐标，而完整尺度则通过它们的张量积恢复。研究表明，循环载荷下的弹塑性响应结果在物理上是一致的。具体而言，将一个完整周期交由微观尺度处理后，可在快速尺度上观察到高度非线性的模式，同时宏观尺度则捕捉到平滑且缓慢的演化。这使得宏观尺度表征特别适用于长时间跨度的分析，例如老化和疲劳 [3]。

在 [8], 中，作者提出了一种高效算法，可将复杂信号（包含许多频率）最优地分解为快、慢两个尺度。在进行多时间近似之前，可将 [8] 中的算法应用于当前问题的外部激励。如此便可预先建立时间轴的最优分解（即确定宏观尺度步长 ΔT 的最佳值），从而保证多时间 PGD 过程最优收敛。目前正在开展相关研究。

关于该问题的非线性特性，线性化过程基于在整个空间/时间域内求解弹性问题，并将塑性贡献施加到右端项上。塑性的积分通过

弹性预测/回归映射算法 [9, 10]执行。该算法可视为作用于总应变张量和截至终止时间 T_f的有效塑性应变的非线性算子 $\mathcal{N}$，即

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{p,(l-1)} = \mathcal{N}(\boldsymbol{\varepsilon}^{(l-1)}, \bar{\varepsilon}^{p}_{T_f}). \tag{17}$$

具体而言，式（17）的评估需要重构自过去以来的完整历史记录

$$\bar{\varepsilon}^{p}_{t} = \int_0^t \sqrt{\frac{2}{3}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p}\,\mathrm{d}s\,.$$

从这个意义上说，迄今为止，所提出的方法仍然具有计算塑性中标准技术的常见缺点，因为塑性的积分并未受益于时间格式的多时间表示。

当前的研究也聚焦于这一问题。具体而言，研究人员正利用多尺度表示来构建弹塑性本构关系的高效数据驱动模型。这将实现式（17）的实时评估，从而能够在长期情景（例如高周疲劳）下直接模拟非弹性行为。

最后需要指出的是，该方法受益于基于 PGD 的过程所具有的通常优势。例如，可以将模型参数和载荷条件视为问题的额外坐标，从而快速计算多参数解[16, 17, 18]。此外，进一步的时间分离保证了在线性化问题求解过程中，能够获得 [5] 中所讨论的相同计算和内存节省。

参考文献

[1] Fusahito Yoshida. “循环塑性本构模型”。载于：*International Jour-nal of Plasticity* 16.3 (2000)，第 359–380 页。 ISSN: 0749-6419。 DOI: https://doi.org/10.1016/S0749-6419(99)00058-3。 URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0749641999000583。[2] Radim Halama、Josef Sedlak 和 Michal ˇSofer。“循环塑性的现象学建模”。载于：2012 年 3 月。 ISBN: 978-953-51-0219-9。 DOI: 10.5772/35902。[3] H. Jahed 和 A.A. Roostaei。金属的循环塑性：建模基础与应用。Elsevier 塑性材料丛书。Elsevier Science，2021 年。ISBN: 9780128192931。 URL: https://books.google.fr/books?id=5O9NEAAAQBAJ。[4] Jie Chen 和 Yongming Liu。“利用神经网络进行疲劳建模：全面综述”。载于：*Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*45.4 (2022)，第 945–979 页。 DOI: https://doi.org/10.1111/ffe.13640。eprint: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1111/ffe.13640。 URL: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1111/ffe.13640。[5] Angelo Pasquale 等。“适当广义分解框架内涉及多个时间尺度的分离表示”。载于：*Advanced Modelingand Simulation in Engineering Sciences* 8（2021 年 11 月），第 26 页。 DOI: 10.1186/s40323-021-00211-7。

[6] Rub´en Ib´a˜nez 等。“基于单位划分的多尺度适当广义分解”。载于：*International Journal for Numerical Methods in Engineering*120.6 (2019)，第 727–747 页。 DOI: 10.1002/nme.6154。 eprint: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/nme.6154。 URL: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/nme.6154。[7] Francisco Chinesta、Amine Ammar 和 Elias Cueto。《时间多尺度模型的适当广义分解》。载于：《International Journal for Numerical Methods in Engineering》83（2010年8月），第1114–1132页。 DOI： 10.1002/nme.2794。[8] Sebastian Rodriguez Iturra。《用于地震工程且包含与载荷相关参数的虚拟图表》。由 N´eron David、Ladev`eze Pierre 和 Charbonnel Pierre-Etienne 指导的博士论文。G´enie civil，巴黎萨克雷大学，2021年。博士论文。2021年。 URL: http://www.theses.fr/2021UPAST097。[9] J.C. Simo 和 T.J.R. Hughes。《计算非弹性力学》。跨学科应用数学。Springer New York，2006年。 ISBN: 9780387227634。 URL： https://books.google.fr/books?id=EILbBwAAQBAJ。[10] E.A. de Souza Neto、D. Peric 和 D.R.J. Owen。《塑性计算方法：理论与应用》。Wiley，2008年。 ISBN：9780470694527。 URL： https://books.google.fr/books?id=cBrQmlQW8YAC。[11] Koichi Hashiguchi 和 Yuki Yamakawa。《连续体弹塑性有限应变理论导论》。Wiley，2012年。 ISBN: 978-1-118-43772-8。 DOI： 10.1002/9781118437711。[12] David N´eron 和 Pierre Ladev`eze。《多尺度与多物理场问题的适当广义分解》。载于：《Archives of Computational Methods in Engineering》17.4（2010年），第351–372页。[13] Mohamed Aziz Nasri 等。《适当广义分解（PGD）在循环载荷下多晶集合体数值模拟中的应用》。载于：《Comptes Rendus M´ecanique》346.2（2018年），第132–151页。 ISSN：1631-0721。 DOI： https://doi.org/10.1016/j.crme.2017.11.009。 URL： https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1631072117302334。[14] Jean-Michel Bergheau 等。《适当广义分解作为弹塑性问题的时空积分器》。载于：《Comptes Rendus Mecanique》344（2016年9月），第759–768页。 DOI： 10.1016/j.crme.2016.06.002。[15] Tahar Arjoune、Bernd Markert 和 Franz Bamer。《利用时空刚度算子对几何非线性结构动力学进行非增量响应评估》。载于：《Computational Mechanics》70（2022年4月）。 DOI： 10.1007/s00466-022-02169-8。[16] Francisco Chinesta 等。《基于PGD的计算手册：高效设计、优化与控制》。载于：《Archives of Computational Methods in Engineering》20（2013年3月）。 DOI: 10.1007/s11831-013-9080-x。[17] Giacomo Quaranta 等。《从线性到非线性基于PGD的参数化结构动力学》。载于：《Comptes Rendus M´ecanique》347.5（2019年），第445–454页。 ISSN：1631-0721。 DOI: https://doi.org/10.1016/j.crme.2019.01.005。 URL： https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1631072119300269。

[18] Mohammad-Javad Kazemzadeh-Parsi 等。《基于PGD的空间分离表示中的增强参数化形状描述》。载于：*Advanced Modeling andSimulation in Engineering Sciences*8（2021年12月）。 DOI： 10.1186/s40323-021-00208-2。