arXiv:2304.11102v1 [math.MG] 21 Apr 2023

多面体锥的立体角测度

ALLISON FITISONE 和 YUAN ZHOU

Abstract. 本文探讨多面锥的归一化立体角测度的计算。在二维和三维情形下，这一问题已得到充分研究。对于更高维的情形，在满足正定性判据的前提下，可以通过多变量超几何级数计算该测度。我们提出了两种分解方法，可将满维单纯锥分解为有限个满足正定性判据的锥，从而利用超几何级数计算任意多面体锥的立体角测度。此外，第二种分解方法得到的锥具有特殊的三对角结构，因此可以减少超几何级数公式所需的坐标数。我们还研究了这种情形下超几何级数的收敛性。研究结果为计算高维空间中的立体角测度提供了有力工具。

1. 引言 Introduction

过去几年中，立体角研究日益受到关注，并已见诸多篇论文（参见 [20], [5], [6], [9], [17] 等）。尤其值得关注的是高维多面锥的立体角测度。这一测度具有广泛的潜在应用，例如计算 n-立方体三角剖分中的单纯形期望数量 [19], 、计算相对像素纯度指数（PPI）得分 [13], ，以及计算生态群落可行域的体积 [16]。文献中高维立体角测度的多种应用表明了这一主题的重要性，也说明有必要对其进行更深入的理解。

回顾一下，多面锥是经过原点的有限个半空间的交。根据著名的 Minkowski–Weyl 定理，多面锥也可以表示为有限个向量的凸锥包。在 $\mathbb{R}^2$ 中，立体角（或平面角）测度可以通过标准内积计算。在 $\mathbb{R}^3$ 中，由三个单位向量生成的锥的立体角测度，等于这些单位向量在单位球面上形成的球面三角形的面积。欧拉和拉格朗日早已提出一个利用标量三重积的闭式公式。设 $\mathbf{v}_1$,$\mathbf{v}_2$ 和 $\mathbf{v}_3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的单位向量。由 $\mathbf{v}_1$,$\mathbf{v}_2$ 和 $\mathbf{v}_3$ 生成的锥的立体角测度由 [8] 给出:

$$E := 2\tan^{-1}\left(\frac{|\mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3)|}{1 + \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3}\right),$$

因此，锥的归一化立体角测度，即该锥所占的 $\mathbb{R}^3$ 比例，为 $\frac{E}{4\pi}$。

—

作者衷心感谢美国国家科学基金会通过授予 Y. Zhou 的 DMS-2012429 号基金提供的部分资助。

在更高维数中，我们按照 [12]，定义多面锥的立体角测度，并按照 [20] 进行归一化，使整个空间的测度为1。

定义 1.1. 相对于空间 $\mathbb{R}^n$，多面锥 $C \subseteq \mathbb{R}^n$ 的归一化立体角测度记为 $\Omega_n(C)$，定义为该锥与以原点为中心的 $\mathbb{R}^n$ 中的单位球面 S_{n-1} 的交集的 $(n-1)$ 维体积与单位球面体积之比，即：

$$\tilde{\Omega}_n(C) = \frac{\mathrm{vol}_{n-1}(C \cap S_{n-1})}{\mathrm{vol}_{n-1}(S_{n-1})}. \tag{1}$$

我们注意到，上述定义同样适用于凸的非多面锥，也与低维情形 $n = 2$ 和 $n = 3$中的定义一致。当锥 C 的维数为 $d < n$时，令 S_{d-1} 表示包含 C的 d 维线性空间中以原点为中心的单位球面。我们以类似方式定义相对于 C 的线性张成的 C 的归一化立体角测度：

$$\tilde{\Omega}_d(C) = \frac{\mathrm{vol}_{d-1}(C \cap S_{d-1})}{\mathrm{vol}_{d-1}(S_{d-1})}.$$

注 1.2. 以下不失一般性，我们只需考虑满维单纯形锥 C。事实上，如果 C 不是单纯锥，则可以通过三角剖分将 C 分解为单纯锥（即具有线性无关生成元系的锥），而 $\Omega_n(C)$等于分解中各锥的归一化立体角之和。如果 C 不是满维的，那么根据我们的归一化方式，$\tilde{\Omega}_n(C) = 0$. 但请注意，$\Omega_d(C) \neq 0$，其中 d 是 C的线性张成的维数。其他论文则相对于半空间 [11] 或仿射空间 [15]进行归一化。我们将在下面的例子中说明这种区别。

例 1.3。考虑由向量 $\mathrm{v}_1 = (1,0,0)$、$\mathrm{v}_2 = (0,1,0)$ 和 $\mathrm{v}_3 = (-1,0,0)$ 生成的多面锥 $C \subseteq \mathbb{R}^3$。环境空间的维数为三。然而，显然 C 位于平面 $z = 0$ 上，因此 C 的线性张成的维数为 2。因此，$\Omega_3(C) = 0.$。不过，当我们相对于线性张成来考虑测度时，可得 $\Omega_2(C) \neq 0$。注意，尽管C 不是单纯锥，但可以将其三角剖分为两个单纯锥：由向量 v_1 和 v_2，生成的 C_1，以及由向量 v_2 和 v_3 生成的 C_2。因此，$\tilde{\Omega}_2(C) = \Omega_2(C_1) + \Omega_2(C_2) = 0.25 + 0.25 = 0.5$。

据我们所知，目前对于维数大于三的多面体锥，其立体角测度尚无简洁的闭式公式。正如 Seeger 和 Torki 所指出的，[21], 推导出易于计算的立体角测度公式是一项艰巨的任务，因此必须采用其他方法进行近似。这些方法包括概率方法、数值积分方法以及多变量幂级数方法。关于前两种方法，参见 [11]。关于最后一种方法，Ribando [20] 和 Aomoto [3]分别独立发现了一个以多变量超几何级数形式表示的单纯锥归一化立体角测度公式。

Ribando 通过注意到表示归一化立体角测度有许多等价方式，推导出了幂级数公式。将定义 1.1 中的体积视为积分是自然的。这样便得到以下等价的

˜Ω 的定义$_n$:

$$\tilde{\Omega}_n(C) = \frac{\mathrm{vol}_{n-1}(C \cap S_{n-1})}{\mathrm{vol}_{n-1}(S_{n-1})} = \frac{\int_C f(\mathbf{x})d\mathbf{x}}{\int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})d\mathbf{x}}\,, \tag{2}$$

其中 f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是任何一个在绕原点旋转时保持不变的函数。Ribando 发现，形式 $f = e^{-\|\mathbf{x}\|^2}$ 能使积分的计算变得简洁

$$\tilde{\Omega}_n(C) = \frac{\int_C e^{-\|\mathbf{x}\|^2}d\mathbf{x}}{\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|\mathbf{x}\|^2}d\mathbf{x}} = \frac{\int_C e^{-\|\mathbf{x}\|^2}d\mathbf{x}}{\pi^{\frac{n}{2}}}\,, \tag{3}$$

将其化简并展开后，得到一个收敛的超几何级数。此外，Ribando 证明了幂级数的收敛性取决于某个矩阵，我们称之为关联矩阵。

Ribando 的结果见下文定理 1.5。请回想，根据备注 1.2，我们只考虑满维单纯锥。

定义 1.4。设 C 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个单纯锥，其生成元为线性无关的单位向量 $\mathbf{v}_1$、.....、$\mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^n$。那么， C 的关联矩阵 记为 $M_n(C)$，是一个 $n \times n$ 矩阵，其第（i， j）个元素为 $-|\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j|$，其中 $i \neq j$；而其对角线上第（i， i）个元素为 1。

$$M_n(C) = \begin{bmatrix} 1 & -|\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2| & \cdots & -|\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_n| \\ -|\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1| & 1 & \cdots & -|\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_n| \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -|\mathbf{v}_n \cdot \mathbf{v}_1| & -|\mathbf{v}_n \cdot \mathbf{v}_2| & \cdots & 1 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

定理 1.5 （[20, 定理 2.2 和推论 3。3], 改述）。设 $C \subseteq \mathbb{R}^n$ 为由单位向量 $\mathbf{v}_1$，.....，$\mathbf{v}_n$ 生成的单纯锥。设 $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 为一个矩阵，其 i^{th} 列为 $\mathbf{v}_i$. 设 $\alpha_{ij} = \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j$ 对于 $1 \leq i$, $j \leq n$。设

$$T_{\boldsymbol{\alpha}} = \frac{|\det V|}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \sum_{\mathbf{a}\in\mathbb{N}^{\binom{n}{2}}} \left[\frac{(-2)^{\sum_{i<j} a_{ij}}}{\prod_{i<j} a_{ij}!} \prod_{i=1}^{n} \Gamma\left(\frac{1 + \sum_{m\neq i} a_{im}}{2} \right) \right] \boldsymbol{\alpha}^{\mathbf{a}}. \tag{5}$$

˜那么，当且仅当其关联矩阵 M_n（C）为正定矩阵时， $T_{\boldsymbol{\alpha}}$ 绝对收敛到该锥的归一化立体角测度Ω$_n$（C）。

在上述级数（5）中， Γ 为欧拉-伽马函数； $\boldsymbol{\alpha} =$(α$_{12}$， α$_{13}$， ⋯α$_{n-1,\ n}$) 是关于 $\binom{n}{2}$ 个变量的多元函数；而$\mathbf{a}$ =(a_{12}， a_{13}，.....， $a_{n-1,\ n}$) 是一个多重指数。我们定义

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathbf{a}} := \prod_{i<j}^{n} \alpha_{ij}^{a_{ij}}.$$

当 $i > j$ 时，我们设定 $a_{ij} = a_{ji}$，并将 $\sum_{m\neq i} a_{im}$ 定义为多重指数中所有满足 i 作为第一或第二个指标出现的项之和。

其他泛函 f 也曾用于方程（2），将高维立体角测度表示为积分。Hajja 和 Walker [12, 定理 1] 使用 f(**x**) = 1并考虑一种标准变量替换，从而得到立体角测度的积分公式，其中积分取遍正交正象限内的单位球面部分。Kabluchko 和 Zaporozhets [15, 命题 1.1]采用一种与高斯分布相关的形式，给出了特定类别的锥的立体角测度的等价公式。

本文将专门关注 Ribando 的超几何级数公式。

如上所述，已有其他方法可用于估计立体角测度。数值积分方法通常只能对立体角测度给出粗略估计，或者涉及只能在特定条件下计算的积分 [11]。随机估计技术需要大量样本才能获得准确的近似值，正如 [11] 中所述。Heylen 和 Scheunders [13] 采用蒙特卡洛抽样的多维扩展来获得立体角测度的估计值。Adam 和 Speciel [1] 使用 Heaviside 阶跃函数，随后采用蒙特卡洛方法进行估计，将立体角测度重新表示为公式（2）中的形式。多元幂级数方法可以说是计算精确高维立体角测度的首选方法 [1]。然而，幂级数方法此前一直被认为过于复杂且技术性太强 [10], [2]。

Ribando 指出，应用幂级数方法时存在两个重要问题 [20]。第一个主要问题是，在更高维数下，使用该公式所需的大量坐标阻碍了计算的可行性。要计算一个 n–维单纯锥的归一化立体角测度，需要 $\binom{n}{2}$ 个坐标。几位作者曾提及幂级数，但通常指出它在高维情况下计算上难以处理。第二个问题是，关联矩阵的正定性是应用幂级数公式的一个必要假设。当不满足这一条件时，$\boldsymbol{\alpha}$ 位于级数的收敛域之外，因此无法以有意义的方式使用该公式。

本文提出了一种方法，可通过幂级数法计算任意多面锥的归一化立体角测度。此外，我们还解决了阻碍幂级数法广泛用于计算立体角测度的两个主要问题。

我们通过锥的带符号分解来处理正定性判据。第 2 节中，我们研究相对于超平面的锥的 Brion–Vergne 分解。定理 2.5 和推论2.6表明，相对于某个特定超平面对单纯锥进行 Brion–Vergne 分解，会得到有限个锥；这些锥要么具有正定的关联矩阵（因此可直接通过幂级数公式计算其立体角测度），要么包含直线（因此应用推论 2.4 后，可将立体角测度的计算简化为一个低维问题，并可通过对维数进行归纳来解决）。第 3 节中，我们研究相对于直线的锥的 Brion–Vergne 分解。定理 3.3 表明，相对于某条特定直线进行 Brion–Vergne 分解，可将单纯锥再次分解为有限个锥，且每个锥都具有正定的关联矩阵。该定理给出了一种方法，可将位于收敛域之外的立体角分解为位于定理 1.5 中级数收敛域内的立体角。

我们还通过减少所需坐标的数量，探讨幂级数方法在计算上的可行性。在第 4 节中，我们研究应用更强版本的定理 3.3 后得到的锥的性质。这些锥的关联矩阵不仅是正定的，而且是三对角的，因此，幂级数公式所需的坐标数从$\binom{n}{2}$ 减少到 $n-1$。定理 4.1 表明，在三对角假设下，幂

级数公式总是收敛到立体角测度。在定理 4.9 中，我们考察关联矩阵为三对角矩阵的锥的幂级数公式的渐近误差。

此外，我们开发了相应软件，可利用本文介绍的分解方法计算任意维数的多面体锥的归一化立体角测度。该软件以 SageMath [22]，编写，SageMath 是一个基于 Python 的综合性开源计算机代数系统。软件可在 https://github.com/yuan-zhou/solid-angle-code 获取，并可在本地安装的 SageMath 中运行，也可通过 CoCalc 在线使用 SageMath 运行。不过，需要指出的是，该软件并非本文的重点。所有计算问题和实验将留待后续论文讨论。

2. 首个分解方法

2.1. 关于超平面的 Brion–Vergne 分解。 我们将使用关于超平面的 Brion–Vergne（B–V）分解（见 [7], [4]）。B–V 分解是将单纯锥带符号地分解为一个满维单纯锥有限族。该超平面为分解中的每个锥确定一个面。我们采用了 [4] 中使用的部分记号，并在下文重新表述这一分解。

定义 2.1。 设 $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_d$ 是 $\mathbb{R}^n$中的向量。我们用 $\langle \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_d \rangle$ 表示$\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_d$的线性张成。我们用 $\mathfrak{c}(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_d)$表示由向量$\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_d$生成的锥。

设 $L \subseteq \mathbb{R}^n$ 为一个超平面，且 $\mathbf{w}_i \in \mathbb{R}^n \setminus L$。我们用 $\rho_i \colon \mathbb{R}^n \to L$ 表示沿$\mathbf{w}_i$平行投影到 L上的投影。

设 C 为一个锥。我们用 $[C]$ 表示锥 C的示性函数。

在本文中，如果它们的示性函数满足关系式，则称锥 C可以分解为锥 $C_1, \dots, C_k$，

$$[C] \equiv \sum_{i=1}^{k} s_i [C_i], \text{ where } s_i \in \{\pm 1\},$$

模去包含直线的锥的示性函数（第 2 节），或模去低维锥的示性函数（第 3 节）。

定理 2.2 (相对于超平面的 Brion–Vergne 分解 [4, 命题 15b])。 设 $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n$ 构成 $\mathbb{R}^n$ 的一组基，并令锥 $C = \mathfrak{c}(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n)$。设 $L \subseteq \mathbb{R}^n$ 是一个超平面。假设当且仅当 $r+1 \le i \le s$ 时，$\mathbf{w}_i \in L$，并且对于 $1 \le i \le r$，$\mathbf{w}_i$ 位于 L 的一侧；对于 $s+1 \le i \le n$，则位于另一侧。于是，模去包含直线的锥的示性函数后，有如下关系。

$$[C] \equiv \sum_{i=1}^{r} [\mathbb{R}_+ \mathbf{w}_i + \rho_i(C)] - \sum_{i=s+1}^{n} [\mathbb{R}_+(-\mathbf{w}_i) + \rho_i(C)].$$

2.2. 包含包含直线的锥的立体角分解。 我们首先证明，凸锥正交和的归一化立体角等于该正交和中各锥的归一化立体角之积。

引理 2.3。 设 $C \subseteq \mathbb{R}^n$ 是一个维数为 d 的多面锥（或更一般地说，凸锥）。假设 $C = C_1 \oplus C_2$ 是锥 C_1 和 C_2 的正交和

其维数分别为 d_1 和 d_2。那么，相对于 C 的线性张成，C 的归一化立体角测度满足

$$\tilde{\Omega}_d(C) = \tilde{\Omega}_{d_1}(C_1) \cdot \tilde{\Omega}_{d_2}(C_2).$$

证明。由于 C_1 和 C_2 正交，$d = d_1 + d_2$。任意 $\mathbf{u} \in C$ 都可以唯一地表示为 $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$，其中 $\mathbf{v} \in C_1$，$\mathbf{w} \in C_2$ 且 $\|\mathbf{u}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2$。因此，

$$\int_C e^{-\|\mathbf{u}\|^2} d\mathbf{u} = \int_{C_1 \oplus C_2} e^{-\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\|^2} d(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \int_{C_1} e^{-\|\mathbf{v}\|^2} d\mathbf{v} \int_{C_2} e^{-\|\mathbf{w}\|^2} d\mathbf{w}.$$

由此可得，方程 (3) 表明

$$\tilde{\Omega}_d(C) = \frac{\int_C e^{-\|\mathbf{u}\|^2} d\mathbf{u}}{\pi^{d/2}} = \frac{\int_{C_1} e^{-\|\mathbf{v}\|^2} d\mathbf{v}}{\pi^{d_1/2}} \cdot \frac{\int_{C_2} e^{-\|\mathbf{w}\|^2} d\mathbf{w}}{\pi^{d_2/2}} = \tilde{\Omega}_{d_1}(C_1) \cdot \tilde{\Omega}_{d_2}(C_2).$$

□

在其中一个正交部分是 ℓ 维线性˜子空间 L of $\mathbb{R}^n$ 的特殊情形下，由于 $\Omega_\ell(L) = 1$，我们得到以下推论。

推论 2.4。设 $C \subseteq \mathbb{R}^n$ 是一个维数为 d 的多面锥（或更一般地，凸锥），且 $C = C' \oplus L$ 是一个˜ ˜维数为 $d' < d$ 的锥 C' 与一个 $\mathbb{R}^n$ 的线性子空间 L 的正交和。那么，$\Omega_d(C) = \Omega_{d'}(C')$。

推论 2.4 说明，计算含有直线的锥的立体角，可归结为计算低维锥的立体角。

现在，我们对一个给定的满维单纯锥作带符号分解，该锥的立体角测度是我们关注的对象（回想一下，根据备注 1.2，此假设不失一般性），使得分解所得的锥要么含有直线，从而适用推论 2.4；要么具有正定关联矩阵，从而适用定理 1.5。

定理 2.5. 给定线性无关单位向量 $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n \in \mathbb{R}^n$，锥 $\mathfrak{c}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n)$ 可分解为一个有限锥族，其中每个锥均满足以下条件之一：

(I) 含有直线的锥，或
(II) 一个维数为 n 的锥 $\mathfrak{c}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$，其关联矩阵

$$M_n = \begin{bmatrix} 1 & -|\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2| & \cdots & -|\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_n| \\ -|\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1| & 1 & \cdots & -|\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_n| \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -|\mathbf{v}_n \cdot \mathbf{v}_1| & -|\mathbf{v}_n \cdot \mathbf{v}_2| & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

是正定的。特别地，
(a) $\|\mathbf{v}_i\| = 1$ *for* $i = 1, 2, \ldots, n$
(b) $\mathbf{v}_n = \mathbf{w}_n$
(c) $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{n-1} \rangle = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_{n-1} \rangle$
(d) $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_n = 0$ *for* $i = 1, 2, \ldots, n-2$
(e) $\mathbf{x}^T M_n \mathbf{x} = \left\| [\varepsilon_1 \mathbf{v}_1, \ldots, \varepsilon_n \mathbf{v}_n] \mathbf{x} \right\|^2$ *holds for every* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, *where* $\varepsilon_i = \pm 1$.

在证明定理之前，我们指出，性质（IIe）保证了由公式（4）给出的关联矩阵 M_n 为正定矩阵。事实上，对于

任意非零向量 $\mathbf{x} := (x_1, \dots, x_n)$，由于 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ 线性无关，

$$\left[\varepsilon_1 \mathbf{v}_1, \dots, \varepsilon_n \mathbf{v}_n\right] \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i \mathbf{v}_i \neq \mathbf{0},$$

因此 $\mathbf{x}^T M_n \mathbf{x} = \left\| \left[\varepsilon_1 \mathbf{v}_1, \dots, \varepsilon_n \mathbf{v}_n\right] \mathbf{x} \right\|^2 > 0$。因此，分解中一个属于后一种形式（II）的锥，其立体角公式（5）是一个收敛幂级数。

证明。我们对维数进行归纳。

考虑基础情形 $n = 2$。设 $\mathbf{w}_1 = (w_{11}, w_{12})$ 和 $\mathbf{w}_2 = (w_{21}, w_{22})$ 是线性无关单位向量。我们证明，锥 $\mathfrak{c}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$ 本身已属于形式（II）。该锥显然满足性质（IIa）至（IId）。令 $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$。性质（IIe）中的方程左端为

$$\mathbf{x}^T M_n \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -|\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_2| \\ -|\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_2| & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = {x_1}^2 + {x_2}^2 - 2x_1 x_2 |\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_2|,$$

以及右侧

$$\begin{aligned} \left\| \left[\varepsilon_1 \mathbf{w}_1, \varepsilon_2 \mathbf{w}_2\right] \mathbf{x} \right\|^2 &= \left\| \begin{bmatrix} \varepsilon_1 w_{11} & \varepsilon_2 w_{21} \\ \varepsilon_1 w_{12} & \varepsilon_2 w_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right\|^2 \\ &= (\varepsilon_1 x_1 w_{11} + \varepsilon_2 x_2 w_{21})^2 + (\varepsilon_1 x_1 w_{12} + \varepsilon_2 x_2 w_{22})^2 \\ &= {x_1}^2 (w_{11}^2 + w_{12}^2) + {x_2}^2 (w_{21}^2 + w_{22}^2) + 2\varepsilon_1 \varepsilon_2 x_1 x_2 (w_{11} w_{21} + w_{12} w_{22}) \\ &= {x_1}^2 + {x_2}^2 + 2\varepsilon_1 \varepsilon_2 x_1 x_2 (\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_2). \end{aligned}$$

因此，适当选择 ε_1 和 ε_2后，我们可以看到性质（IIe）得以满足。

假设该命题对维数 $n - 1$成立。现在考虑维数为 n 的锥$\mathfrak{c}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n)$，它尚不属于形式 (I) 或 (II)。根据正交性，我们区分两种情形。

情形 1：假设$\mathbf{w}_n$ 与所有$\mathbf{w}_i$ 正交，其中 $1 \leq i \leq n - 1$。令$\mathbf{v}_n$ =$\mathbf{w}_n$。根据归纳假设，锥 $\mathfrak{c}(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{n-1})$ 可以分解为有限多个（带符号的）锥 $\mathfrak{k}_1, \dots, \mathfrak{k}_N$，这些锥要么包含直线，要么属于第二种形式，并满足所需性质。于是，显然，这些锥

$$C_1 := \mathfrak{k}_1 + \mathfrak{c}(\mathbf{v}_n),\ C_2 := \mathfrak{k}_2 + \mathfrak{c}(\mathbf{v}_n),\ \dots,\ C_N := \mathfrak{k}_N + \mathfrak{c}(\mathbf{v}_n)$$

通过闵可夫斯基和得到的锥构成了 $\mathfrak{c}(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n)$ 的一个分解。

如果分解 $\mathfrak{c}(\mathbf{w}1, \dots, \mathbf{w}_{n-1})$ 中的锥 $\mathfrak{k}_i$ 含有直线，那么 C_i 也含有直线，因此其形式为 (I)。否则，$\mathfrak{k}_i$ 必须具有形式 $\mathfrak{c}(\mathbf{v}1, \dots, \mathbf{v}_{n-1})$，并满足维数为 $n - 1$ 时的性质（IIa）–（IIe）。显然，$C_i = \mathfrak{c}(\mathbf{v}1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{v}_n)$ 满足维数为 n 时的性质（IIa）、（IIb）和（IId）。根据归纳假设，$\langle \mathbf{v}1, \dots, \mathbf{v}_{n-2} \rangle = \langle \mathbf{w}1, \dots, \mathbf{w}_{n-2} \rangle$ and $\mathbf{v}_{n-1} = \mathbf{w}_{n-1}$。因此，我们有 $\langle \mathbf{v}1, \dots, \mathbf{v}_{n-2}, \mathbf{v}_{n-1} \rangle = \langle \mathbf{w}1, \dots, \mathbf{w}_{n-2}, \mathbf{w}_{n-1} \rangle$，所以性质（IIc）成立。接下来只需验证性质（IIe）。注意到由于 $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_n = 0$，根据定义 1.4，$C_i$ 的关联矩阵满足

$$M_n(C_i) = \begin{bmatrix} & & & 0 \\ & M_{n-1}(\mathfrak{k}_i) & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

根据归纳假设，存在 $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1} \in \{\pm 1\}$，使得性质（IIe）中等式的左边可以写为

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^T M_n(C_i)\mathbf{x} &= \begin{bmatrix} x_1 \cdots x_{n-1} \end{bmatrix} M_{n-1}(\mathfrak{k}_i) \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix} + x_n^2 \\ &= \|\varepsilon_1 x_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \varepsilon_{n-1} x_{n-1} \mathbf{v}_{n-1}\|^2 + x_n^2 \\ &= \left\| \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \mathbf{v}_1, \dots, \varepsilon_{n-1}\mathbf{v}_{n-1}, \varepsilon_n \mathbf{v}_n \end{bmatrix} \mathbf{x} \right\|^2,\end{aligned}$$

这等于其右端，其中我们令 $\varepsilon_n = 1$。因此，性质（IIe）成立。

情形2：假设$\mathbf{w}_n$与所有$\mathbf{w}_1$、.. . 、$\mathbf{w}_{n-1}$都不正交。不失一般性，我们可以假设$\mathbf{w}_{n-1} \cdot \mathbf{w}_n \neq 0$。

为了应用 Brion–Vergne 分解定理 2.2，我们构造一个超平面 L ，如下所示。对于 $1 \leq i \leq n-2$，我们定义

$$\boldsymbol{\ell}_i := \mathbf{w}_i - \frac{\mathbf{w}_i \cdot \mathbf{w}_n}{\mathbf{w}_{n-1} \cdot \mathbf{w}_n} \mathbf{w}_{n-1}. \tag{6}$$

我们注意到，对于所有 $i = 1, 2, \dots, n-2$，均有 $\boldsymbol{\ell}_i \cdot \mathbf{w}_n = 0$。令

$$L := \langle \boldsymbol{\ell}_1, \dots, \boldsymbol{\ell}_{n-2}, \mathbf{w}_n \rangle.$$

这是 L 一个 $\mathbb{R}^n$ 的超平面，因为如果存在标量 λ_i's 使得

$$0 = \sum_{i=1}^{n-2} \lambda_i \boldsymbol{\ell}_i + \lambda_n \mathbf{w}_n = \sum_{i=1}^{n-2} \lambda_i \mathbf{w}_i - \sum_{i=1}^{n-2} \lambda_i \frac{\mathbf{w}_i \cdot \mathbf{w}_n}{\mathbf{w}_{n-1} \cdot \mathbf{w}_n} \mathbf{w}_{n-1} + \lambda_n \mathbf{w}_n,$$

那么，$\mathbf{w}_i$的线性无关性意味着每个 $\lambda_i = 0$。

接下来，我们针对每个 i 判断 $\mathbf{w}_i \in L$ 是否成立，并用 $s_i = -1$ 或 **1** 表示 $\mathbf{w}_i$ 属于哪个开半空间。显然，$\mathbf{w}_n \in L$。我们还知道 $\mathbf{w}_{n-1} \notin L$，因为否则 L 会包含所有 $\mathbf{w}_1$，.....，$\mathbf{w}_n$，这就矛盾了。我们令 $s_{n-1} = 1$。对于 $1 \leq i \leq n-2$，若 $\mathbf{w}_i \cdot \mathbf{w}_n = 0$，则由等式 (6) 可得 $\mathbf{w}_i = \boldsymbol{\ell}_i \in L$；否则，若 $\mathbf{w}_i \cdot \mathbf{w}_n \neq 0$，则有 $\mathbf{w}_i \notin L$ ，因为

$$\mathbf{w}_i = \boldsymbol{\ell}_i + \left(\frac{\mathbf{w}_i \cdot \mathbf{w}_n}{\mathbf{w}_{n-1} \cdot \mathbf{w}_n} \right) \mathbf{w}_{n-1} \tag{7}$$

同样由等式 (6) 得出。相应地，我们令

$$s_i = \begin{cases} 1, & \text{if } \mathbf{w}_i \text{ and } \mathbf{w}_{n-1} \text{ are on the same side of } L \\ -1, & \text{if } \mathbf{w}_i \text{ and } \mathbf{w}_{n-1} \text{ are on the opposite sides of } L. \end{cases}$$

记

$$I^+ = \{1 \leq i \leq n-1 \mid s_i = 1\} \text{ and } I^- = \{1 \leq i \leq n-1 \mid s_i = -1\}.$$

我们指出， $I^- \cup I^+$ 是满足 $\mathbf{w}_i \in \mathbb{R}^n \setminus L$ 的 i 集合；等价地，它是满足 $\mathbf{w}_i \cdot \mathbf{w}_n \neq 0$ 的 $1 \leq i \leq n-1$ 集合。

根据定理 2.2，模去包含直线的锥的示性函数后，我们可以将锥 $C = \mathfrak{c}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots..., \mathbf{w}_n)$ 分解为

$$[C] \equiv \sum_{i \in I^+} [\mathbb{R}_+ \mathbf{w}_i + \rho_i(C)] - \sum_{i \in I^-} [\mathbb{R}_+(-\mathbf{w}_i) + \rho_i(C)],$$

可将其改写为

$$[C] \equiv \sum_{i \in I^+ \cup I^-} s_i \left[\mathbb{R}_+(s_i \mathbf{w}_i) + \rho_i(C)\right]. \tag{8}$$

因此，只需证明（8）右侧的每个锥都可以分解为由（I）或（II）形式的锥组成的有限族。

为此，我们令 $i \in I^+ \cup I^-$，并考虑锥

$$\mathfrak{c}_i := \mathbb{R}_+(s_i \mathbf{w}_i) + \rho_i(C).$$

根据定义 2.1,

$$\rho_i(C) = \mathfrak{c}\left(\rho_i(\mathbf{w}_1), \ldots, \rho_i(\mathbf{w}_{i-1}),\, \rho_i(\mathbf{w}_{i+1}), \ldots, \rho_i(\mathbf{w}_n)\right).$$

由于 $\mathbf{w}_n \in L$，我们有 $\rho_i(\mathbf{w}_n) = \mathbf{w}_n$。因此，

$$\mathfrak{c}_i = \mathfrak{c}\left(s_i \mathbf{w}_i,\, \rho_i(\mathbf{w}_1), \ldots, \rho_i(\mathbf{w}_{i-1}),\, \rho_i(\mathbf{w}_{i+1}), \ldots, \rho_i(\mathbf{w}_{n-1}),\, \mathbf{w}_n\right). \tag{9}$$

接下来，我们通过区分 $i = n-1$ 和 $i \neq n-1$ 两种情况，确定方程（9）右侧出现的投影。在前一种情况（$i = n-1$）下，由方程（7）可得，对于所有 $1 \leq k \leq n-2$，$\rho_i(\mathbf{w}_k) = \boldsymbol{\ell}_k$。因此，方程（9）简化为

$$\begin{aligned}\mathfrak{c}_{n-1} &= \mathfrak{c}(s_{n-1}\mathbf{w}_{n-1}, \boldsymbol{\ell}_1, \boldsymbol{\ell}_2, \ldots, \boldsymbol{\ell}_{n-2}, \mathbf{w}_n) \\ &= \mathfrak{c}(s_{n-1}\mathbf{w}_{n-1}, \mathbf{w}_1 - \frac{\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_n}{\mathbf{w}_{n-1} \cdot \mathbf{w}_n}\mathbf{w}_{n-1}, \ldots, \mathbf{w}_{n-2} - \frac{\mathbf{w}_{n-2} \cdot \mathbf{w}_n}{\mathbf{w}_{n-1} \cdot \mathbf{w}_n}\mathbf{w}_{n-1}, \mathbf{w}_n).\end{aligned}$$

在后一种 $i \leq n-2$ 且 $\mathbf{w}_i \cdot \mathbf{w}_n \neq 0$的情况下，根据公式（7）可得

$$\mathbf{w}_{n-1} = \frac{\mathbf{w}_{n-1} \cdot \mathbf{w}_n}{\mathbf{w}_i \cdot \mathbf{w}_n}(\mathbf{w}_i - \boldsymbol{\ell}_i),$$

SO

$$\begin{aligned}\rho_i(\mathbf{w}_{n-1}) &= -\left(\frac{\mathbf{w}_{n-1} \cdot \mathbf{w}_n}{\mathbf{w}_i \cdot \mathbf{w}_n}\right)\boldsymbol{\ell}_i = -\left(\frac{\mathbf{w}_{n-1} \cdot \mathbf{w}_n}{\mathbf{w}_i \cdot \mathbf{w}_n}\right)\left(\mathbf{w}_i - \frac{\mathbf{w}_i \cdot \mathbf{w}_n}{\mathbf{w}_{n-1} \cdot \mathbf{w}_n}\mathbf{w}_{n-1}\right) \\ &= \mathbf{w}_{n-1} - \left(\frac{\mathbf{w}_{n-1} \cdot \mathbf{w}_n}{\mathbf{w}_i \cdot \mathbf{w}_n}\right)\mathbf{w}_i.\end{aligned} \tag{10}$$

对于满足 $1 \leq k \leq n-2$ 和 $k \neq i$的情形，有

$$\mathbf{w}_k = \boldsymbol{\ell}_k + \frac{\mathbf{w}_k \cdot \mathbf{w}_n}{\mathbf{w}_{n-1} \cdot \mathbf{w}_n}\mathbf{w}_{n-1} = \boldsymbol{\ell}_k + \frac{\mathbf{w}_k \cdot \mathbf{w}_n}{\mathbf{w}_{n-1} \cdot \mathbf{w}_n} \cdot \frac{\mathbf{w}_{n-1} \cdot \mathbf{w}_n}{\mathbf{w}_i \cdot \mathbf{w}_n}(\mathbf{w}_i - \boldsymbol{\ell}_i).$$

由（6）可得

$$\rho_i(\mathbf{w}_k) = \boldsymbol{\ell}_k - \frac{\mathbf{w}_k \cdot \mathbf{w}_n}{\mathbf{w}_i \cdot \mathbf{w}_n}\boldsymbol{\ell}_i = \mathbf{w}_k - \frac{\mathbf{w}_k \cdot \mathbf{w}_n}{\mathbf{w}_i \cdot \mathbf{w}_n}\mathbf{w}_i. \tag{11}$$

利用（10）和（11），公式（9）可化简为

$$\mathfrak{c}_i = \mathfrak{c}\left(s_i \mathbf{w}_i, \left\{\mathbf{w}_k - \frac{\mathbf{w}_k \cdot \mathbf{w}_n}{\mathbf{w}_i \cdot \mathbf{w}_n}\mathbf{w}_i \mid 1 \leq k \leq n-1, k \neq i\right\}, \mathbf{w}_n\right).$$

我们注意到，在后一种情况下，$\mathfrak{c}_i$ 的生成元与前一种情况下 $\mathfrak{c}_{n-1}$ 的生成元一致，只需令 $i = n-1$即可。

因此，我们可以将任意 $i \in I^+ \cup I^-$ 对应的锥 $\mathfrak{c}_i$ 改写为如下形式:

$$\mathfrak{c}_i = \mathfrak{c}\left(\frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|}, \ldots, \frac{\mathbf{u}_{n-2}}{\|\mathbf{u}_{n-2}\|}, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{w}_n\right),$$

其中

$$\{\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_{n-2}\}=\left\{\mathbf{w}_k-\frac{\mathbf{w}_k\cdot\mathbf{w}_n}{\mathbf{w}_i\cdot\mathbf{w}_n}\mathbf{w}_i \mid 1\le k\le n-1, k\neq i\right\} \tag{12}$$

$$\mathbf{u}_{n-1}=s_i\mathbf{w}_i \tag{13}$$

如果该锥 $\mathfrak{c}_i$ 已经是形式（I）或（II），则无需进一步分解。否则，我们对（$n-1$）维锥应用归纳假设

$$\mathfrak{c}\left(\frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|},\dots,\frac{\mathbf{u}_{n-2}}{\|\mathbf{u}_{n-2}\|},\mathbf{u}_{n-1}\right)$$

以得到其分解为锥 $\mathfrak{k}_1$，……，$\mathfrak{k}_M$，这些锥均为形式（I）或（II）。也就是说，对于来自 $\{\mathfrak{k}_1,\dots,\mathfrak{k}_M\}$ 的每个锥 $\mathfrak{k}_m:=\mathfrak{c}(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_{n-1})$，要么（I）包含直线，要么（II）满足

(i) $\|\mathbf{v}_j\|=1$ for $j=1,2,\dots,n-1$
(ii) $\mathbf{v}_{n-1}=\mathbf{u}_{n-1}$
(iii) $\langle\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\dots,\mathbf{v}_{n-2}\rangle=\langle\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\dots,\mathbf{u}_{n-2}\rangle$
(iv) $\mathbf{v}_j\cdot\mathbf{v}_{n-1}=0$ for $j=1,2,\dots,n-3$
(v) $\mathbf{x}^TM_{n-1}(\mathfrak{k}_m)\,\mathbf{x}=\left\|\left[\varepsilon_1\mathbf{v}_1,\dots,\varepsilon_{n-1}\mathbf{v}_{n-1}\right]\mathbf{x}\right\|^2$ holds for every $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^{n-1}$, where $\varepsilon_j=\pm1$.

Let

$$C_m=\mathfrak{k}_m+\mathfrak{c}(\mathbf{w}_n)=\mathfrak{c}(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_{n-1},\mathbf{w}_n)$$

设其为通过将 $\mathbf{w}_n$ 附加到 $\mathfrak{k}_m$的生成元上得到的 n维锥。那么，锥 C_1，C_2，……，C_M给出了右侧（8）中锥 $\mathfrak{c}_i$的一个分解。显然，如果 $\mathfrak{k}_m$ 包含直线，那么 C_m 也包含直线，因此它是形式（I）。剩下要证明的是，在 $\mathfrak{k}_m=\mathfrak{c}(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_{n-1})$ 满足性质（i）–（v）的情况下，$C_m=\mathfrak{c}(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_{n-1},\mathbf{w}_n)$ 是形式（II）。

令 $\mathbf{v}_n=\mathbf{w}_n$。那么，由于 (i)，$C_m=\mathfrak{c}(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_{n-1},\mathbf{v}_n)$ 显然满足性质 (IIa) 和性质 (IIb)。性质 (IIc) 成立，因为

$$\langle\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_{n-2},\mathbf{v}_{n-1}\rangle=\langle\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_{n-2},\mathbf{u}_{n-1}\rangle=\langle\mathbf{w}_1,\dots,\mathbf{w}_{n-2},\mathbf{w}_{n-1}\rangle,$$

其中，第一个等式由性质 (ii) 和 (iii) 得出，第二个等式由方程 (12) 和 (13) 得出。对于任意 $1\le k\le n-1$、$k\neq i$，有

$$\left(\mathbf{w}_k-\frac{\mathbf{w}_k\cdot\mathbf{w}_n}{\mathbf{w}_i\cdot\mathbf{w}_n}\mathbf{w}_i\right)\cdot\mathbf{w}_n=\mathbf{w}_k\cdot\mathbf{w}_n-\frac{\mathbf{w}_k\cdot\mathbf{w}_n}{\mathbf{w}_i\cdot\mathbf{w}_n}\,\mathbf{w}_i\cdot\mathbf{w}_n=0.$$

因此，根据 (12)，$\mathbf{w}_n$ 与所有 $\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_{n-2}$ 正交。性质 (IId) 成立，因为$\mathbf{v}_n=\mathbf{w}_n$ 也根据性质 (iii) 与所有 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_{n-2}$ 正交。利用性质 (IId)，C_m 的关联矩阵可以表示为与 $\mathfrak{k}_m$的关联矩阵之间的关系，即

$$M_n(C_m)=\begin{bmatrix} & & & 0\\ & M_{n-1}(\mathfrak{k}_m) & & \vdots\\ & & & 0\\ & & & -|\mathbf{v}_{n-1}\cdot\mathbf{v}_n|\\ 0 & \dots & 0 & -|\mathbf{v}_{n-1}\cdot\mathbf{v}_n| \quad 1 \end{bmatrix}.$$

令向量 $\mathbf{x} = \left(x_1, \ldots\ldots, x_n\right) \in \mathbb{R}^n$。那么，

$$\mathbf{x}^T M_n(C_m)\mathbf{x} = \left[x_1 \cdots x_{n-1}\right] M_{n-1}(\mathfrak{k}_m) \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix} - 2|\mathbf{v}_{n-1} \cdot \mathbf{v}_n|\, x_{n-1}x_n + x_n^2.$$

根据性质（v），适当选取 $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1} \in \{\pm 1\}$ 后，上述等式右端的第一项等于

$$\left\|\varepsilon_1 x_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \varepsilon_{n-1} x_{n-1} \mathbf{v}_{n-1}\right\|^2.$$

令

$$\varepsilon_n = \begin{cases} -1, & \text{if } \mathbf{v}_{n-1} \cdot \mathbf{v}_n \text{ and } \varepsilon_{n-1} \text{ have the same sign} \\ 1, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

我们有 $-|\mathbf{v}_{n-1} \cdot \mathbf{v}_n| = \varepsilon_{n-1}\varepsilon_n(\mathbf{v}_{n-1} \cdot \mathbf{v}_n)$，因此

$$\begin{aligned} &\mathbf{x}^T M_n(C_m)\mathbf{x} \\ &= \left\|\varepsilon_1 x_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \varepsilon_{n-1} x_{n-1} \mathbf{v}_{n-1}\right\|^2 + 2\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n \left(\mathbf{v}_{n-1} \cdot \mathbf{v}_n\right) x_{n-1}x_n + \varepsilon_n^2 x_n^2 \\ &= \left\|\left[\varepsilon_1 \mathbf{v}_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}\mathbf{v}_{n-1}, \varepsilon_n \mathbf{v}_n\right] \mathbf{x}\right\|^2. \end{aligned}$$

这意味着性质（IIe）也成立。我们证明了，在情形2中，通过B–V分解得到的每个锥都可以进一步分解为有限锥族，其中每个锥要么包含直线，要么其关联矩阵为正定矩阵。定理证明完毕。□

推论2.6。 定理 *2.5* 中的分解使得可以通过幂级数 (5) 计算单纯锥 $C \in \mathbb{R}^n$ 的归一化立体角。

证明。 假设定理 2.5 给出了分解 $C_1, \ldots, C_N$，使得 $C[C] = \sum_{i=1}^N s_i[C_i]$，其中 $s_i = \pm 1$。那么

$$\tilde{\Omega}_n(C) = \sum_{i=1}^N s_i \tilde{\Omega}_n(C_i).$$

对于分解中的每个 C_i，若其形式为 (I)，则可应用推论 2.4 将其化为低维问题；若其形式为 (II)，则˜定理 1.5 适用。根据维数归纳法，可以计算每个 $\Omega_n(C_i)$。□

我们注意到，要利用定理 2.5 计算立体角测度，必须确定包含直线的锥，并通过正交投影降低维数，而这并非显而易见。因此，我们在下一节介绍另一种分解方法。

3. Second decomposition method

本节的分解定理 3.3 给出了一种更直接的方法，用于计算单纯锥的归一化立体角测度。所得的锥要么是低维锥，要么是满维单纯锥。在前一种情况下，这些锥的归一化立体角测度为 0。在后一种情况下，这些锥的生成元均被明确给出。因此，根据推论 3.4，我们可以确定原锥的归一化立体角测度。

3.1. **关于一条直线的 Brion–Vergne 分解**。 我们将使用 Brion–Vergne（B–V）分解的另一种变体（见 [7], [4]），该分解是相对于一个一维子空间而言的。分解中的每个锥都将包含一个沿给定一维子空间方向的生成元。下面将对这一 B–V分解进行重新表述。

定理 3.1（关于一条直线的 Brion–Vergne 分解， [4, 命题 15a], 改述）。 设 $\mathbf{w}_1$、.....、$\mathbf{w}_n$ 构成 $\mathbb{R}^n$ 的一个基，并设锥 $C = \mathfrak{c}$（$\mathbf{w}_1$、.....、$\mathbf{w}_n$）。给定一个非零向量 $\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{w}_i \in \mathbb{R}^n$，令 $\delta_i \in \{-1, 0, 1\}$ 表示 λ_i 关于 $1 \leq i \leq n$的符号。那么，以下关系在模去包含直线的锥的示性函数后成立。

$$[C] \equiv \sum_{i:\delta_i \neq 0} s_i \left[\mathfrak{c}\left(\varepsilon_{i,1}\mathbf{w}_1, \ldots, \varepsilon_{i,i-1}\mathbf{w}_{i-1}, \varepsilon_{i,i+1}\mathbf{w}_{i+1}, \ldots, \varepsilon_{i,n}\mathbf{w}_n, \delta_i \mathbf{r}\right)\right],$$

其中，对于 s_i、$\varepsilon_{i,\,k} \in \{\pm 1\}$， $1 \leq k \leq n$、$k \neq i$ 由下式给出：

$$s_i = \begin{cases} (-1)^{\mathbf{card}(\{1 \leq j < i \,|\, \delta_j = 1\})}, & \text{if } \delta_i = 1 \\ (-1)^{\mathbf{card}(\{i < j \leq n \,|\, \delta_j = -1\})}, & \text{if } \delta_i = -1 \end{cases} \tag{14}$$

$$\varepsilon_{i,k} = \begin{cases} -1, & \text{if } \delta_i = \delta_k = 1 \text{ and } k < i, \text{ or if } \delta_i = \delta_k = -1 \text{ and } k > i \\ 1, & \text{otherwise} \end{cases}. \tag{15}$$

回顾一下，若 $C = \mathfrak{c}$（$\mathbf{w}_1$、.....、$\mathbf{w}_n$）是 $\mathbb{R}^n$ 中由某个基 $\mathbf{w}_1$、.....、$\mathbf{w}_n \in \mathbb{R}^n$生成的单纯锥，则其对偶锥

$$C^* := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{y} \cdot \mathbf{x} \geq 0 \ \forall \mathbf{x} \in C\}$$

也为单纯锥。对偶锥 $C^* = \mathfrak{c}(\mathbf{w}_1^* \ldots,\ \mathbf{w}_n^*)$ 由某个对偶基 $\mathbf{w}_1^*$、.....、$\mathbf{w}_n^* \in \mathbb{R}^n$ 生成，使得对每个 $1 \leq i,\ j \leq n$ 和 $j \neq i$,

$$\mathbf{w}_i^* \cdot \mathbf{w}_i > 0 \text{ and } \mathbf{w}_i^* \cdot \mathbf{w}_j = 0. \tag{16}$$

此外，二重对偶就是锥本身，即 $(C^*)^* = C$。含有直线的锥的对偶是一个低维锥（即仿射维数小于 n的锥）。

先取对偶锥，再对某条特定直线应用 Brion–Vergne 分解定理 3.1，最后再次取对偶，便得到以下分解；该分解模去低维锥后成立。此外，分解中的每个锥都至少与原锥共享两个生成元 $\mathbf{w}_i$ 和$\mathbf{w}_n$ 。

定理3.2。设 $\mathbf{w}_1$、.....、$\mathbf{w}_n$ 构成 $\mathbb{R}^n$ 的一组基，并令锥 $C = \mathfrak{c}\,(\mathbf{w}_1$、.....、$\mathbf{w}_n)$。令 $\delta_i \in \{-1, 0, 1\}$ 表示当 $1 \leq i \leq n-1$ 时$\mathbf{w}_i \cdot \mathbf{w}_n$ 的符号，并设 $\delta_n = 0$。假设这些 δ_i并非全为零。则以下关系在模去低维锥的示性函数后成立。

$$[C] \equiv \sum_{i:\delta_i \neq 0} s_i \left[\mathfrak{c}_i\right],$$

其中，每个锥 $\mathfrak{c}_i$ 由$\mathbf{u}_{i,\,k}\ (1 \leq k \leq n)$ 定义为

$$\mathbf{u}_{i,k} = \begin{cases} \mathbf{w}_k, & \text{if } \delta_k = 0 \text{ or } k = i \\ \varepsilon_{i,k}\left(\mathbf{w}_k - \frac{\mathbf{w}_k \cdot \mathbf{w}_n}{\mathbf{w}_i \cdot \mathbf{w}_n}\mathbf{w}_i\right), & \text{otherwise} \end{cases} \tag{17}$$

而符号 s_i，$\varepsilon_{i,\,k} \in \{\pm 1\}$ 分别由方程(14) 和(15)给出。

证明。假设对偶锥 C^* 由 $\mathbf{w}_1^*$、.....、$\mathbf{w}_n^* \in \mathbb{R}^n$生成。设

$$\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\mathbf{w}_i \cdot \mathbf{w}_n}{\mathbf{w}_i \cdot \mathbf{w}_i^*} \right) \mathbf{w}_i^*.$$

注意，符号 δ_i 与定理 3.1 中定义的符号一致，因为 $\mathbf{w}_i \cdot \mathbf{w}_i^* > 0$。我们对对偶锥 $C^* = \mathfrak{c}(\mathbf{w}_1^*, \ldots, \mathbf{w}_n^*)$ 应用定理 3.1，其中相对于非零向量 $\mathbf{r}$，可得

$$[C^*] \equiv \sum_{i:\delta_i \neq 0} s_i \left[\mathfrak{c} \left(\varepsilon_{i,1} \mathbf{w}_1^*, \ldots, \varepsilon_{i,i-1} \mathbf{w}_{i-1}^*, \varepsilon_{i,i+1} \mathbf{w}_{i+1}^*, \ldots, \varepsilon_{i,n} \mathbf{w}_n^*, \delta_i \mathbf{r} \right) \right],$$

模去包含直线的锥的示性函数后。

由于对锥的示性函数成立的线性恒等式对其对偶锥也成立，因此有

$$[C] \equiv \sum_{i:\delta_i \neq 0} s_i \left[\mathfrak{c} \left(\varepsilon_{i,1} \mathbf{w}_1^*, \ldots, \varepsilon_{i,i-1} \mathbf{w}_{i-1}^*, \varepsilon_{i,i+1} \mathbf{w}_{i+1}^*, \ldots, \varepsilon_{i,n} \mathbf{w}_n^*, \delta_i \mathbf{r} \right)^* \right],$$

模去低维锥的示性函数后。

现在证明，上述关系右侧的每个对偶锥都由式（17）中定义的 $\mathbf{u}_{i,\,k}$ 生成。为此，我们验证

$$\mathbf{w}_i \cdot (\delta_i \mathbf{r}) > 0 \text{ and } \mathbf{w}_i \cdot \left(\varepsilon_{i,j} \mathbf{w}_j^* \right) = 0 \; \forall j \neq i, \tag{18}$$

并且对于任意 $k \neq i$,

$$\mathbf{u}_{i,k} \cdot (\delta_i \mathbf{r}) = 0, \; \mathbf{u}_{i,k} \cdot (\varepsilon_{i,k} \mathbf{w}_k^*) > 0 \text{ and } \mathbf{u}_{i,k} \cdot \left(\varepsilon_{i,j} \mathbf{w}_j^* \right) = 0 \; \forall j \neq i \text{ or } k. \tag{19}$$

由于 (16)，(18) 中的条件显然成立。为了证明 $k \neq i$ 满足 (19)，我们先考虑 $\delta_k = 0$ 的情形，这意味着根据 (17)，$\mathbf{w}_k \cdot \mathbf{w}_n = 0$ 且 $\mathbf{u}_{i,\,k} = \mathbf{w}_k$。我们有

$$\mathbf{w}_k \cdot (\varepsilon_{i,k} \mathbf{w}_k^*) > 0, \quad \mathbf{w}_k \cdot \left(\varepsilon_{i,j} \mathbf{w}_j^* \right) = 0 \; \forall j \neq i \text{ or } k, \text{ and}$$

$$\mathbf{w}_k \cdot (\delta_i \mathbf{r}) = \mathbf{w}_k \cdot \left(\delta_i \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{\mathbf{w}_j \cdot \mathbf{w}_n}{\mathbf{w}_j \cdot \mathbf{w}_j^*} \right) \mathbf{w}_j^* \right)$$

当 $k = n$ 时其值为 0；当 $k \neq n$ 时，其值为 $\delta_i (\mathbf{w}_k \cdot \mathbf{w}_n) = 0$。现在考虑满足 $\delta_k \neq 0$ 的 $k \neq i$，这意味着 $k \neq n$。由于 $\delta_i \neq 0$，我们还知道 $i \neq n$ 且 $\mathbf{w}_i \cdot \mathbf{w}_n \neq 0$。利用 (17)，我们得到

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_{i,k} \cdot (\delta_i \mathbf{r}) &= \varepsilon_{i,k} \, \delta_i \left(\mathbf{w}_k - \frac{\mathbf{w}_k \cdot \mathbf{w}_n}{\mathbf{w}_i \cdot \mathbf{w}_n} \mathbf{w}_i \right) \cdot \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{\mathbf{w}_j \cdot \mathbf{w}_n}{\mathbf{w}_j \cdot \mathbf{w}_j^*} \right) \mathbf{w}_j^* \\
&= \varepsilon_{i,k} \, \delta_i \left[\frac{\mathbf{w}_k \cdot \mathbf{w}_n}{\mathbf{w}_k \cdot \mathbf{w}_k^*} (\mathbf{w}_k \cdot \mathbf{w}_k^*) - \frac{\mathbf{w}_k \cdot \mathbf{w}_n}{\mathbf{w}_i \cdot \mathbf{w}_n} \cdot \frac{\mathbf{w}_i \cdot \mathbf{w}_n}{\mathbf{w}_i \cdot \mathbf{w}_i^*} (\mathbf{w}_i \cdot \mathbf{w}_i^*) \right] = 0 \\
\mathbf{u}_{i,k} \cdot (\varepsilon_{i,k} \mathbf{w}_k^*) &= \varepsilon_{i,k}^2 \left(\mathbf{w}_k - \frac{\mathbf{w}_k \cdot \mathbf{w}_n}{\mathbf{w}_i \cdot \mathbf{w}_n} \mathbf{w}_i \right) \cdot \mathbf{w}_k^* = \mathbf{w}_k \cdot \mathbf{w}_k^* > 0 \\
\mathbf{u}_{i,k} \cdot \left(\varepsilon_{i,j} \mathbf{w}_j^* \right) &= \varepsilon_{i,k} \, \varepsilon_{i,j} \left(\mathbf{w}_k - \frac{\mathbf{w}_k \cdot \mathbf{w}_n}{\mathbf{w}_i \cdot \mathbf{w}_n} \mathbf{w}_i \right) \cdot \mathbf{w}_j^* = 0 \qquad \forall j \neq i \text{ or } k.
\end{aligned}$$

因此，(19) 中的条件均得到满足。定理得证。 □

3.2. **包含低维锥的立体角分解**。我们针对一个给定的满维单纯锥，提出另一个分解定理，该锥的立体角测度是我们关注的对象。该定理类似于定理 2.5。定理 3.3 得到的锥要么是低维锥，因此其归一化立体角测度为 0；要么具有正定关联矩阵，因此适用定理 1.5。

定理 3.3. 给定线性无关单位向量 $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n \in \mathbb{R}^n$，锥 $\mathfrak{c}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n)$ 可分解为一个有限锥族，其中每个锥要么是

(I) 仿射维数小于 n的锥，要么是(II) 由满足定理 *2.5* 中性质 (IIa)–(IIe) 的某些向量 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ 生成的全维锥，因此其关联矩阵为正定矩阵。

证明. 证明与定理 2.5 的证明类似。我们按维数进行归纳。基础情形 $n = 2$ 显然成立（证明与定理 2.5 中相同）。假设该定理对维数 $n - 1$成立。现在考虑维数为 n的锥$\mathfrak{c}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n)$，它尚不属于形式 (I) 或 (II)。

如果 $\mathbf{w}_n$ 与所有满足 $1 \le i \le n-1$ 的 $\mathbf{w}_i$ 正交，那么定理 2.5 证明中**情形 1** 的论证（将“包含直线”替换为“仿射维数小于 n”）可原样适用，因此该结论对维数 n 成立。

接下来，我们假设 $\mathbf{w}_n$ 并非与所有 $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{n-1}$ 正交。令 $\delta_n = 0$ 和$\delta_i \in \{-1, 0, 1\}$ 表示当 $1 \le i \le n$ 时 $\mathbf{w}_i \cdot \mathbf{w}_n$ 的符号。那么，δ_i 并非全为零。应用定理3.2，可得如下（带符号）分解

$$[C] \equiv \sum_{i:\delta_i \neq 0} s_i \, [\mathfrak{c}_i] \ \text{ modulo indicator functions of lower dimensional cones,} \quad (20)$$

其中，每个锥 $\mathfrak{c}_i = \mathfrak{c}(\mathbf{u}_{i,1}, \mathbf{u}_{i,2}, \dots, \mathbf{u}_{i,n})$ 都由$\mathbf{u}_{i,k}$根据方程 (17) 生成。特别地，$\mathbf{u}_{i,i} = \mathbf{w}_i$ 以及$\mathbf{u}_{i,n} = \mathbf{w}_n$。因此，对于任意满足 $\delta_i \neq 0$ 的 $1 \le i \le n-1$，我们可以将锥 $\mathfrak{c}_i$ 改写为

$$\mathfrak{c}_i = \mathfrak{c}\left(\frac{\mathbf{u}_{i,k}}{\|\mathbf{u}_{i,k}\|}, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{w}_n\right), \quad k \neq i$$

其中 $\{\mathbf{u}_1, \dots\dots, \mathbf{u}_{n-2}\} = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{i-1}, \mathbf{u}_{i+1}, \dots, \mathbf{u}_{n-1}\}$ 和 $\mathbf{u}_{n-1} = \mathbf{w}_i$。

如果锥 $\mathfrak{c}_i$ 已经是形式 (I) 或 (II)，则无需进一步分解。否则，根据归纳假设，$(n-1)$ 维锥$\mathfrak{c}(\mathbf{u}_1, \dots\dots, \mathbf{u}_{n-2}, \mathbf{u}_{n-1})$ 可以分解为若干锥 $\mathfrak{k}_1, \dots\dots, \mathfrak{k}_M$，使得每个锥 $\mathfrak{k}_m := \mathfrak{c}(\mathbf{v}_1, \dots\dots, \mathbf{v}_{n-1})$（属于 $\{\mathfrak{k}_1, \dots, \mathfrak{k}_M\}$）要么是 (I) 仿射维数小于 $n-1$ 的锥，要么是 (II) 具有正关联矩阵且满足性质 (i)–(v) 的锥。令

$$C_m = \mathfrak{k}_m + \mathfrak{c}(\mathbf{w}_n) = \mathfrak{c}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{w}_n)$$

是通过将$\mathbf{w}_n$ 添加到 $\mathfrak{k}_m$ 的生成元中而得到的 n 维锥。然后，定理 2.5 证明中的相同论证表明，C_m 具有所需的性质，并且锥 C_1、……、C_M构成关系式 (20) 中锥 $\mathfrak{c}_i$ 的一个（带符号）分解。归纳步骤至此完成，因此定理成立。□

推论 3.4. 设 C 是 $\mathbb{R}^n$中的一个单纯锥。定理 *3.3* 明确给出了能够通过

幂级数公式 (5) 计算其归一化立体角测度的锥 及符号 $s_i \in \{\pm 1\}$，使得 C 的归一化立体角测度满足

$$\tilde{\Omega}_n(C) = \sum_{i=1}^{N} s_i \tilde{\Omega}_n(C_i). \tag{21}$$

此外，分解中的锥的数量为 $N \leq$ （$n-1$）！。

证明。 假设定理 3.3 给出了锥 C 的一个带符号分解:

$$[C] \equiv \sum_{i=1}^{N} s_i \, [C_i] \ \text{ modulo indicator functions of lower dimensional cones.}$$

由于相对于 $\mathbb{R}^n$ 而言，低维锥的归一化立体角测度为零，等式 (21) 成立。

由于分解所得的每个全维锥 C_i 都具有˜正定矩阵，定理 1.5 适用，因此 Ω$_n$(C_i) 可通过幂级数 (5) 计算。

最后，我们通过对 n 使用归纳法证明 $N \leq (n-1)!$。若 $n = 2$，则定理 2.5 证明中的基础情形表明，锥 C 已经具有形式 (II)，因此无需进一步分解。假设一个 $(n-1)$ 维锥至多可分解为 $(n-2)!$ 个锥。对于一个 n 维锥 C，若其关联矩阵尚非正定，则根据 (20)，定理 3.3 首先将其分解为满足 $\delta_i \neq 0$ 的锥 $\mathfrak{c}_i$，其中 i。由于 $\delta_n = 0$，这样的锥 $\mathfrak{c}_i = \mathfrak{c}(\mathfrak{u}_{i,1}, \ldots, \mathfrak{u}_{i,n})$ 至多有 $n-1$ 个。随后，对于每个关联矩阵尚非正定的 $\mathfrak{c}_i$，我们省去其生成元 $\mathfrak{u}_{i,n} = \mathfrak{w}_n$，从而得到 $(n-1)$ 维锥 $\mathfrak{c}(\mathfrak{u}_{i,1}, \ldots, \mathfrak{u}_{i,n-1})$，再根据归纳假设将其进一步分解为至多 $(n-2)!$ 个满足所需性质的锥。因此，根据定理 3.3 得到的锥总数至多为 $(n-1)(n-2)! = (n-1)!$。□

4. Asymptotic bound on the truncation error

4.1. 三对角关联矩阵。 如前所述，所需的大量坐标给定理 1.5 中幂级数公式（5）的计算可行性带来了问题。Ribando [20, 第 487] 页指出：“[.....]精确的级数近似将需要一些定理，使我们能够减少需要计算的项数。”注意，当 $\alpha_{ij} = 0$ 时，级数（5）中 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathbf{a}}$ 的非零项只能具有多重指数 $\mathbf{a}$，其 $a_{ij} = 0$。因此，减少计算所需项数的一种可能方法，是将其分解为具有尽可能多两两正交生成元的锥。一个特别有趣的情形是，当 $(\alpha_{ij})_{1 \leq i,\ j \leq n}$ 为三对角矩阵（即，当 $i \neq j$ 且 $i+1 \neq j$ 时，$a_{ij} = \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = 0$），正如本节将要讨论的那样。

给定线性无关单位向量 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^n$，令 $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 表示一个矩阵，其第 i 列向量为 $\mathbf{v}_i$。假设 $V^T V$如下

对称三对角矩阵，其中 $\beta_i = \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_{i+1}$，且 $1 \leq i \leq n-1$。

$$V^TV = \begin{bmatrix} 1 & \beta_1 & 0 & \dots & 0 \\ \beta_1 & 1 & \beta_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \beta_{n-2} & 1 & \beta_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & \beta_{n-1} & 1 \end{bmatrix}. \tag{22}$$

于是，公式 (5) 简化为以下关于 $n-1$ 个变量的多元幂级数 $T_{\boldsymbol{\beta}}$。

$$T_{\boldsymbol{\beta}} = \frac{|\det V|}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \sum_{\mathbf{b}\in\mathbb{N}^{n-1}} \left[\frac{(-2)^{\sum b_i}}{\prod_{i=1}^{n-1} b_i!} \Gamma\left(\frac{1+b_1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1+b_1+b_2}{2}\right) \cdots \right. \\ \left. \Gamma\left(\frac{1+b_{n-2}+b_{n-1}}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1+b_{n-1}}{2}\right) \right] \boldsymbol{\beta}^{\mathbf{b}}. \tag{23}$$

定理 4.1。 设 $C = \mathfrak{c}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ 是由线性无关单位向量 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中生成的一个锥。设 V 是以 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ 为列向量的矩阵。假设 V^TV 是如 (22) 所示的三对角矩阵。那么，关联矩阵 $M_n(C)$ 与 V^TV 具有相同的特征值。

特别地，如果 V^TV 是三对角矩阵，那么 $M_n(C)$ 是正定的，且锥 C的归一化立体角测度$\Omega_n(C)$对应的幂级数 (23) ˜绝对收敛。

证明。 当 V^TV 是方程 (22) 给出的对称三对角矩阵时， C 的关联矩阵为

$$M_n(C) = \begin{bmatrix} 1 & -|\beta_1| & 0 & \dots & 0 \\ -|\beta_1| & 1 & -|\beta_2| & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & -|\beta_{n-2}| & 1 & -|\beta_{n-1}| \\ 0 & \dots & 0 & -|\beta_{n-1}| & 1 \end{bmatrix}, \tag{24}$$

它也具有对称性，且为三对角矩阵。

设 $P_j(\lambda)$ 为V^TV的第 j 阶顺序主子式的特征多项式，其中 $1 \leq j \leq n$。令 $\beta_0 = 0$。我们有 $P_0(\lambda) = 1$， $P_1(\lambda) = 1-\lambda$ 且

$$P_j(\lambda) = (1-\lambda)P_{j-1}(\lambda) - \beta_{j-1}^2 P_{j-2}(\lambda) \text{ for } 2 \leq j \leq n,$$

其中，最后一个递推关系是对称三对角矩阵的一个众所周知的结果（例如，参见 [18]）。由于该关系仅取决于 $\beta_{j-1}^2 = (-|\beta_{j-1}|)^2$, ，显然，关联矩阵的特征多项式与$V^TV$的相同。因此， V^TV和 $M_n(C)$具有相同的特征值。

由于 V 的列线性无关，对于任意 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$，我们有$\mathbf{x}^T(V^TV)\mathbf{x} = \|V\mathbf{x}\|^2 > 0$，这表明 V^TV 是正定的。因此， $M_n(C)$ 也是正定的。由定理 1.5 可知，幂级数 (23) 绝对收敛到锥 C 的归一化立体角测度 $\Omega_n(C)$。□

备注 4.2。 我们可以将定理 2.5 和定理 3.3 中性质 (IId) 从“$\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_n = 0$ 对于 $i = 1, \ldots, n-2$”加强为

$$\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = 0 \text{ for all } 1 \leq i, j \leq n \text{ such that } j \neq i \text{ or } i \pm 1. \tag{IId'}$$

这两个定理的证明可以原样沿用。新的性质 (IId') 确保，对于分解得到的任意一个锥， $V^T V$都是三对角矩阵，因此定理 4.1 适用。因此，我们得到推论 3.4 的以下变体，它利用了三对角结构。需要指出的是，新分解得到的锥的数量可能多于推论 3.4 中的数量，但仍有上界 $(n-1)!$。

推论 4.3. 设 C 是 $\mathbb{R}^n$中的一个单纯锥。定理 *3.3*（将性质 (IId)替换为 (IId')）显式给出了锥 C_i 和符号 $s_i \in \{\pm 1\}$，使得 C 的归一化立体角测度满足

$$\tilde{\Omega}_n(C) = \sum_{i=1}^{N} s_i \tilde{\Omega}_n(C_i).$$

锥 C_i 的关联矩阵是正定三对角矩阵，因此其~归一化立体角测度 $\Omega_n(C_i)$ 可以通过简化的幂级数公式 (23)计算。此外，分解中锥的数量为$N \leq (n-1)!$。

4.2. **特征值与级数截断误差**。 在他们的研究中 [11], ， Gourion 和 Seeger 观察到，当关联矩阵接近奇异时，某个幂级数的收敛速度很慢。结合这一观察和前面的定理 4.1，研究特征值对幂级数收敛性的影响是合理的。

我们注意到，若线性无关单位向量$\mathbf{v}_i$两两正交，则锥 $C = \mathfrak{c}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$的归一化立体角测度显然为：

$$\tilde{\Omega}_n(C) = \frac{1}{2^n}.$$

因此，在下文中，我们进一步假设 $n \geq 2$ ，且对某个 $1 \leq i < j \leq n$，有$\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j \neq 0$ 。令 V表示其第 i^{th} 列为$\mathbf{v}_i$的矩阵。令 $\lambda_{\min}$ 表示 $V^T V$的最小特征值。

引理 4.4。 $V^T V$的最小特征值 $\lambda_{\min}$ 满足 $0 < \lambda_{\min} < 1$。

证明。 矩阵 $V^T V$是正定的，因为对于任意 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$，都有$\mathbf{x}^T(V^T V)\mathbf{x} = \|V\mathbf{x}\|^2 > 0$，其中最后一个严格不等式由 V 的列线性无关得出。因此， $\lambda_{\min} > 0$。

根据柯西交错定理， $\lambda_{\min}$ 小于或等于 $V^T V$ 的某个主子矩阵的最小特征值。特别地，取主子矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j \\ \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j & 1 \end{bmatrix}$，其中 $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j \neq 0$，可得 $\lambda_{\min} \leq 1 - \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j < 1$。 □

在本节余下部分中，我们重点讨论 $V^T V$ 是式 (22) 中定义的三对角矩阵的情形。定理 4.1 表明，式 (23) 中定义的关于 $n-1$ 个变量的幂级数 $T_{\mathcal{B}}$ 绝对收敛到立体角

测度。为简单起见，我们只考虑级数部分

$$\frac{(4\pi)^{n/2}}{|\det V|}T_{\boldsymbol{\beta}} = \sum_{\mathbf{b}\in\mathbb{N}^{n-1}} A_{\mathbf{b}}\,\boldsymbol{\beta}^{\mathbf{b}},$$

其中，对于任意多重指数 $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_{n-1})$，属于 $\mathbb{N}^{n-1}$，

$$\begin{aligned} A_{\mathbf{b}} := \frac{(-2)^{\sum b_i}}{\prod_{i=1}^{n-1} b_i!}\,\Gamma\left(\frac{1+b_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+b_1+b_2}{2}\right)\cdots \\ \Gamma\left(\frac{1+b_{n-2}+b_{n-1}}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+b_{n-1}}{2}\right). \end{aligned} \tag{25}$$

我们将

$$T(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{b}\in\mathbb{N}^{n-1}} A_{\mathbf{b}}\, x_1^{b_1} x_2^{b_2}\cdots x_{n-1}^{b_{n-1}}$$

视为 Horn意义下的 $(n-1)$ 个变量 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{n-1})$ 的超几何级数[14]。

注4.5. 我们回顾一些关于超几何级数收敛性的标准记号和结果 [14, 20] 。下面针对三对角情形对其重新表述，以描述 $T(\mathbf{x})$ 的收敛域。

令 $\mathbf{e}_i$ 表示第 i 个标准基向量。对于 $1 \le i \le n-1$，我们定义相邻系数之比

$$f_i(\mathbf{b}) := \frac{A_{\mathbf{b}+\mathbf{e}_i}}{A_{\mathbf{b}}}, \tag{26}$$

并引入极限

$$\Psi_i(\mathbf{b}) := \lim_{t\to\infty} f_i(t\mathbf{b}).$$

我们可以将 $A_{\mathbf{b}}, f_i(\mathbf{b})$ 和 $\Psi_i(\mathbf{b})$ 视为关于 $\mathbf{b} \in \mathbb{R}_+^{n-1}$ 而非 $\mathbf{b} \in \mathbb{N}^{n-1}$ 的函数。于是，对于 $1 \le i \le n-1$， f_i 是变量 $\mathbf{b} \in \mathbb{R}_+^{n-1}$ 的有理函数。令$b_0 = b_n = 0$。函数 Ψ_i 满足

$$\Psi_i(\mathbf{b}) = \lim_{t\to\infty} \frac{A_{t\mathbf{b}+\mathbf{e}_i}}{A_{t\mathbf{b}}} = -\frac{\sqrt{(b_{i-1}+b_i)(b_i+b_{i+1})}}{b_i}, \tag{27}$$

且它是一个有理的零次齐次函数。

参数化曲线 $\left(\frac{1}{|\Psi_1(\mathbf{b})|}, \dots, \frac{1}{|\Psi_{n-1}(\mathbf{b})|}\right)$ 描述了一个界定超几何级数 $T(\mathbf{x})$ 收敛域的超曲面。也就是说，如果点 $\mathbf{x}$ 位于收敛域边界上，那么对于某个 $\mathbf{b} \in \mathbb{R}_+^{n-1}$，

$$|x_i| = \frac{1}{|\Psi_i(\mathbf{b})|} \qquad \forall\, 1 \le i \le n-1. \tag{28}$$

此外， [20, 定理 3.2] 指出，如果 $\mathbf{x}$ 位于收敛域边界上，

$$\det\begin{bmatrix} 1 & -|x_1| & 0 & \dots & 0 \\ -|x_1| & 1 & -|x_2| & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & -|x_{n-2}| & 1 & -|x_{n-1}| \\ 0 & \dots & 0 & -|x_{n-1}| & 1 \end{bmatrix} = 0. \tag{29}$$

由定理 4.1 可知，在三对角情形下，式 (24) 中给出的关联矩阵 $M(C)$ 的最小特征值也为 $\lambda_{\min}$，其中 $0 < \lambda_{\min} < 1$ 由引理 4.4 得出，并且 $\mathbf{x} = \boldsymbol{\beta}$ 位于 $T(\mathbf{x})$ 的收敛域内。下面的引理表明，$1 - \lambda_{\min}$ 在 $T(\mathbf{x})$ 的收敛过程中发挥着作用。

引理 4.6。点 $\left(\frac{\beta_1}{1-\lambda_{\min}}, \ldots, \frac{\beta_{n-1}}{1-\lambda_{\min}}\right)$ 位于级数 T（$\mathbf{x}$）的收敛域边界上。

证明。根据注4.5，只需证明方程（29）对 $\mathbf{x} = \frac{\boldsymbol{\beta}}{1-\lambda_{\min}}$ 成立。显然这是成立的，因为 $\lambda_{\min}$ 是 $M(C)$ 的一个特征值。□

我们给出一个关于式（26）中函数 f_i 单调性的引理，这将在之后分析级数截断误差时发挥作用。

引理 4.7。设 $\mathbf{b} \in \mathbb{R}_+^{n-1}$，并令 $1 \le i、j \le n-1$ 满足 $i \ne j$。那么，$|f_i（\mathbf{b} + \mathbf{e}j）| \ge |f_i（\mathbf{b}）|$。

证明。若 $j \ne i \pm 1$，则由方程（26）和（25）可得 $|f_i（\mathbf{b} + \mathbf{e}j）| = |f_i（\mathbf{b}）|$。若 $j = i \pm 1$，则所需不等式等价于

$$\frac{\Gamma\left(\frac{3+b_i+b_j}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2+b_i+b_j}{2}\right)} \ge \frac{\Gamma\left(\frac{2+b_i+b_j}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+b_i+b_j}{2}\right)},$$

这是因为 Γ 函数在正实轴上是对数凸的。□

我们关注级数$T(\boldsymbol{\beta})$截断误差的渐近分析。将级数按部分次数截断（N_1、……、N_{n-1}），误差项有如下界：$E(N_1, \ldots, N_{n-1})$。

定义 4.8. 对于部分次数（N_1、……、N_{n-1}）$\in \mathbb{N}^{n-1}$，定义级数 $T(\boldsymbol{\beta})$ 的截断误差为

$$E(N_1, \ldots, N_{n-1}) = \sum_{\mathbf{b} \in B} \left| A_{\mathbf{b}} \boldsymbol{\beta}^{\mathbf{b}} \right|,$$

其中 $B = \{\mathbf{b} \in \mathbb{N}^{n-1} \mid b_i \ge N_i$ 对至少一个 $i\}$成立。

我们研究 $E(N_1、\ldots、N_{n-1})$ 的渐近衰减及其与 $1-\lambda_{\min}$ 的关系。

定理 4.9. 对于任意满足 $1 - \lambda_{\min} < \rho < 1$ 的 ρ，存在部分次数$N_1、\ldots、N_{n-1}$，使得对于任意整数 $\ell \ge 1$，都有

$$E(N_1 + \ell, \ldots, N_{n-1} + \ell) \le \rho^{\ell} E(N_1, \ldots, N_{n-1}).$$

为简化记号，我们将专门针对 $n = 3$ 证明定理 4.9，并在下文将其重述为命题 4.10。注意，对一般情形 n 的证明完全相同。

命题 4.10. 对于任意满足 $1 - \lambda_{\min} < \rho < 1$ 的 ρ，存在部分次数 N_1 和 N_2，使得对于任意整数 $\ell \ge 1$，有

$$E(N_1 + \ell, N_2 + \ell) \le \rho^{\ell} E(N_1, N_2).$$

证明。对于多重指数 (b_1, b_2)，方程 (25) 中的系数 $A_{\mathbf{b}}$ 写成

$$A_{b_1,b_2} = \frac{(-2)^{b_1+b_2}}{b_1!\, b_2!} \Gamma\left(\frac{1+b_1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1+b_2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1+b_1+b_2}{2}\right).$$

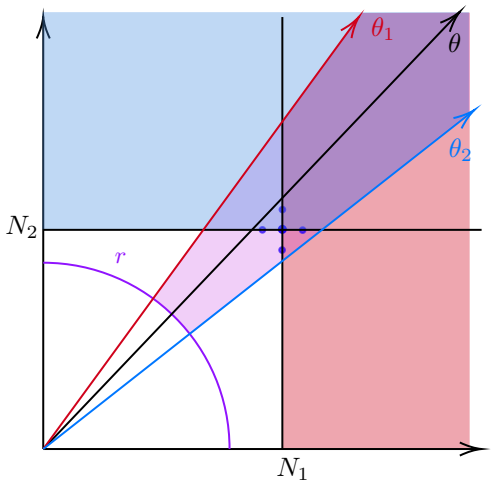


FIGURE 1. 与命题 4.10 证明相对应的（b_1，b_2）平面。紫色扇区区域表示式（34）中的比值界成立的范围；红色区域和蓝色区域分别对应断言 4.11（1）和（2）。

根据引理 4.6 和 (28)，存在 x_1，$x_2 \in \mathbb{R}_+$ 使得

$$\frac{|\beta_1|}{1-\lambda_{\min}} = \frac{1}{|\Psi_1(x_1,x_2)|} \quad \text{and} \quad \frac{|\beta_2|}{1-\lambda_{\min}} = \frac{1}{|\Psi_2(x_1,x_2)|}$$

因此，

$$|\beta_1\Psi_1(x_1,x_2)| = 1-\lambda_{\min} \quad \text{and} \quad |\beta_2\Psi_2(x_1,x_2)| = 1-\lambda_{\min} \tag{30}$$

由于 Ψ_1，Ψ_2 根据（27）是零次齐次有理函数，它们的取值仅取决于 x_1 与 x_2 之间的比值。（我们注意到，对于一般的 $n>3$，每个 Ψ_i 至多仅取决于两个相邻的成对比值。）我们将（x_1，x_2）用极坐标（r_0，θ_0）表示，其中 $r_0 = \sqrt{x_1^2+x_2^2}$，且 $\theta_0 = \arctan(x_2/x_1)$。由（27）可知，$|\Psi_1(r\cos\theta,\ r\sin\theta)| = \sqrt{1+\tan\theta}$，其在 $\theta \in [0,\pi/2)$ 上递增；而 $|\Psi_2(r\cos\theta,\ r\sin\theta)| = \sqrt{1+\cot\theta}$，其在 $\theta \in (0,\ \pi/2]$ 上递减。由（30）可得

$$\left|\beta_1 \lim_{r\to\infty} f_1(r\cos\theta_0, r\sin\theta_0)\right| = \left|\beta_2 \lim_{r\to\infty} f_2(r\cos\theta_0, r\sin\theta_0)\right| = 1-\lambda_{\min}. \tag{31}$$

令 ε 为一个较小的正数。具体而言，我们设定

$$\varepsilon := \sqrt{\frac{\rho}{1-\lambda_{\min}}} - 1 > 0. \tag{32}$$

由（31）可知，存在 $r_0>0$，使得

$$\forall\, r \ge r_0, \quad |\beta_i f_i(r\cos\theta_0, r\sin\theta_0)| \le (1-\lambda_{\min})(1+\varepsilon/2) \ \text{ for } i=1,2.$$

由于 f_1, f_2 是有理函数，存在 θ_1,θ_2，使得 $\theta_2<\theta_0<\theta_1$ 满足$\forall\, r\ge r_0$ 和 $\theta\in[\theta_2,\theta_1]$，$|\beta_i f_i(r\cos\theta, r\sin\theta)| \le (1-\lambda_{\min})(1+\varepsilon)$，其中 $i=1,2$.令 S 为扇区，其极坐标 r,θ 满足

$$r > r_0 \quad \text{and} \quad \theta\in[\theta_2,\theta_1].$$

记为

$$\mu := (1-\lambda_{\min})(1+\varepsilon) = \sqrt{(1-\lambda_{\min})\rho} < 1. \tag{33}$$

注意，对于 $(b_1,\ b_2) \in \mathbb{R}_+^2$,

$$\beta_1 f_1(b_1,b_2) = \left(A_{b_1+1,b_2}\,\beta_1^{b_1+1}\beta_2^{b_2}\right) / \left(A_{b_1,b_2}\,\beta_1^{b_1}\beta_2^{b_2}\right);$$
$$\beta_2 f_2(b_1,b_2) = \left(A_{b_1,b_2+1}\,\beta_1^{b_1}\beta_2^{b_2+1}\right) / \left(A_{b_1,b_2}\,\beta_1^{b_1}\beta_2^{b_2}\right).$$

因此，对于位于扇区 S 中的任意 $(b_1,\ b_2) \in \mathbb{R}_+^2$,

$$\frac{\left|A_{b_1+1,b_2}\,\beta_1^{b_1+1}\beta_2^{b_2}\right|}{\left|A_{b_1,b_2}\,\beta_1^{b_1}\beta_2^{b_2}\right|} \le \mu \quad \text{and} \quad \frac{\left|A_{b_1,b_2+1}\,\beta_1^{b_1}\beta_2^{b_2+1}\right|}{\left|A_{b_1,b_2}\,\beta_1^{b_1}\beta_2^{b_2}\right|} \le \mu. \tag{34}$$

设 $(N_1,\ N_2)$ 是 S 内部的一个整点，使得 $(N_1 \pm 1,\ N_2)$ 和 $(N_1,\ N_2 \pm 1)$ 也位于扇区 S 内。这样的点 $(N_1,\ N_2)$ 存在，因为通过缩放总能满足下述条件。

$$\begin{aligned} &N_2\cot\theta_1 + 1 \le N_1 \le N_2\cot\theta_2 - 1 \text{ and} \\ &N_1\tan\theta_2 + 1 \le N_2 \le N_1\tan\theta_1 - 1. \end{aligned} \tag{35}$$

图 1 展示了这些参数和区域。

结合 (34)–(35) 与引理 4.7，我们得到以下结论。

断言 4.11. 令 $(b_1, b_2) \in \mathbb{N}^2$。

(1) If $b_1 \ge N_1$ *and* $b_2 \le b_1\tan\theta_1$, *then* $\frac{\left|A_{b_1+1,b_2}\,\beta_1^{b_1+1}\beta_2^{b_2}\right|}{\left|A_{b_1,b_2}\,\beta_1^{b_1}\beta_2^{b_2}\right|} \le \mu.$

(2) If $b_2 \ge N_2$ *and* $b_2 \ge b_1\tan\theta_2$, *then* $\frac{\left|A_{b_1,b_2+1}\,\beta_1^{b_1}\beta_2^{b_2+1}\right|}{\left|A_{b_1,b_2}\,\beta_1^{b_1}\beta_2^{b_2}\right|} \le \mu.$

为了研究截断误差 $E(N_1,\ N_2)$ 和 $E(N_1+\ell,\ N_2+\ell)$，我们将其改写为

$$E(N_1,N_2) = S_1 + S_2 + S_3 \tag{36}$$

and

$$E(N_1+\ell, N_2+\ell) \le S_1' + S_2' + S_3' + S_4', \tag{37}$$

分别，其中

$$S_1 = \sum_{\substack{b_1\ge N_1\\ 0\le b_2<N_2}} \left|A_{b_1,b_2}\beta_1^{b_1}\beta_2^{b_2}\right|; \qquad S_2 = \sum_{\substack{b_2\ge N_2\\ 0\le b_1<N_1}} \left|A_{b_1,b_2}\beta_1^{b_1}\beta_2^{b_2}\right|;$$
$$S_3 = \sum_{\substack{b_1\ge N_1\\ b_2\ge N_2}} \left|A_{b_1,b_2}\beta_1^{b_1}\beta_2^{b_2}\right|,$$

and

$$S_1' = \sum_{\substack{b_1\ge N_1+\ell\\ 0\le b_2<N_2}} \left|A_{b_1,b_2}\beta_1^{b_1}\beta_2^{b_2}\right|; \qquad S_2' = \sum_{\substack{b_2\ge N_2+\ell\\ 0\le b_1<N_1}} \left|A_{b_1,b_2}\beta_1^{b_1}\beta_2^{b_2}\right|;$$
$$S_3' = \sum_{\substack{b_1\ge N_1\\ b_2\ge N_2+\ell}} \left|A_{b_1,b_2}\beta_1^{b_1}\beta_2^{b_2}\right|; \qquad S_4' = \sum_{\substack{b_1\ge N_1+\ell\\ b_2\ge N_2}} \left|A_{b_1,b_2}\beta_1^{b_1}\beta_2^{b_2}\right|.$$

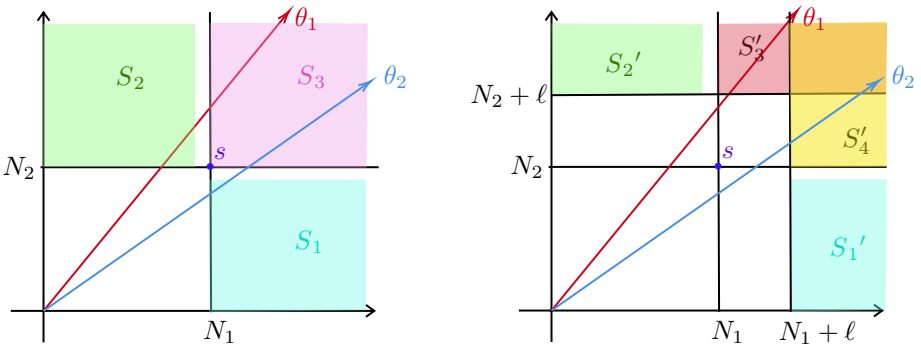


FIGURE 2. 用于分析级数截断误差的多重指数平面 $(b_1,\ b_2)\ \in \mathbb{N}^2$ $(N_1,\ N_2)$（左）和 $E\,(N_1+\ell,\ N_2+\ell)$（右）。点 $(b_1,\ b_2)$ 的颜色表示方程（36）和（37）中项 $|A_{b_1,\ b_2}\beta_1^{b_1}\beta_2^{b_2}|$ 所属的级数。

我们将级数 S_k 中的每一项 $|A_{b_1,b_2}\beta_1^{b_1}\beta_2^{b_2}|$ 视为对应于第一象限中的点 (b_1,b_2)。见图 2。

我们首先考虑 S_1 和 S_1'。设 $(b_1,\ b_2)\ \in \mathbb{N}^2$，使得 $b_1 = N_1 + i$，其中某个 $i \geq 0$ 和 $b_2 \leq N_2$。我们比较对应于 $(b_1,\ b_2)$ 的项与对应于 $(N_1,\ b_2)$ 的项。根据断言 4.11–(1)，可得

$$\left|\frac{A_{N_1+i,b_2}\beta_1^{N_1+i}\beta_2^{b_2}}{A_{N_1,b_2}\beta_1^{N_1}\beta_2^{b_2}}\right| = \prod_{j=0}^{i-1}\left|\frac{A_{N_1+j+1,b_2}\beta_1^{N_1+j+1}\beta_2^{b_2}}{A_{N_1+j,b_2}\beta_1^{N_1+j}\beta_2^{b_2}}\right| \leq \mu^i.$$

特别地，上述不等式对 $i = \ell$ 及任意 $0 \leq b_2 \leq N_2 - 1$ 均成立。这意味着

$$S_1' \leq \mu^\ell S_1. \tag{38}$$

同样，利用断言 4.11–(2)，我们得到

$$S_2' \leq \mu^\ell S_2. \tag{39}$$

接下来，我们将 S_3 中与 (b_1,b_2) 对应的一项，与由 (N_1,N_2) 对应的项 s 进行比较，其定义为

$$s := \left|A_{N_1,N_2}\beta_1^{N_1}\beta_2^{N_2}\right|.$$

断言 4.12。 设 $b_1 = N_1 + i$ 和 $b_2 = N_2 + j$，其中 i、j 为非负整数。则

$$\frac{\left|A_{b_1,b_2}\beta_1^{b_1}\beta_2^{b_2}\right|}{s} \leq \mu^{i+j}.$$

证明。根据点 (b_1,b_2) 位于从原点经过点 (N_1,N_2) 的射线下方还是上方，我们分别将 b_1 或 b_2 减 1，如下所示。根据 (35) 中的几何条件，若 (b_1,b_2) 位于该射线下方，则 $b_1 - 1$ 位于扇区S中；若 (b_1,b_2) 位于该射线上方，则 $b_2 - 1$ 位于扇区 S中。无论哪种情况，我们都可以应用断言 4.11，得到对应于 (b_1,b_2) 和 (b_1',b_2') 的项之间的比值 $=(b_1,b_2-1)$ 或 (b_1-1,b_2) 不超过 μ。重复此过程，直到 $(b_1',b_2') = (N_1,N_2)$。将过程中得到的各个比值相乘，即得所需的不等式。□

特别地，断言 4.12 给出了以 s为依据的 S_3' 和 S_4' 的上界。

$$\begin{aligned} S_3' &\le s\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=\ell}^{\infty}\mu^{i+j} = \frac{\mu^{\ell}s}{(1-\mu)^2}, \\ S_4' &\le s\sum_{i=\ell}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\mu^{i+j} = \frac{\mu^{\ell}s}{(1-\mu)^2}. \end{aligned} \tag{40}$$

断言 4.13。 当 N_1、N_2 非常大时，我们可以假设 s/S_1 足够小。

证明。 设 $(N_1^*, N_2^*) \in \mathbb{N}^2$ 是扇区 S 中的一个点，使得 $N_1^* \ge N_1, N_2^* = N_2 + k$ 且 $k := \lfloor N_2^* - N_1^* \tan\theta_2 \rfloor$ 是一个较大的整数。定义 s^* 为对应于整点 (N_1^*, N_2^*) 的项，并相应地定义级数 S_1^*。注意，我们可以用其中的单项 t 对 S_1^* 给出下界，其中 $t := \left|A_{N_1^*,N_2}\beta_1^{N_1^*}\beta_2^{N_2}\right|$ 对应于点 (N_1^*, N_2)。由于该点位于 S 和 $N_2 = N_2^* - k$ 中，断言 4.11–(2) 表明 $s^*/t \le \mu^k$。因此， $s^*/S_1^* \le \mu^k$，当 k 足够大时，这已经足够小。□

具体而言，我们取足够大的 N_1, N_2 使得 $s/S_1 \le \frac{1}{2}\varepsilon(1-\mu)^2,$，或者等价地，

$$\frac{2s}{(1-\mu)^2} \le \varepsilon S_1. \tag{41}$$

结合式 (36)–(41)，我们得到

$$\begin{aligned} E(N_1+\ell, N_2+\ell) &\le S_1' + S_2' + S_3' + S_4' \le \mu^{\ell}\left(S_1 + S_2 + \frac{2s}{(1-\mu)^2}\right) \\ &\le \mu^{\ell}\left(S_1 + S_2 + \varepsilon S_1\right) \le \mu^{\ell}(1+\varepsilon)(S_1 + S_2 + S_3) \\ &\le \mu^{\ell}(1+\varepsilon)^{\ell}(S_1 + S_2 + S_3) \\ &= (\mu(1+\varepsilon))^{\ell}E(N_1, N_2). \end{aligned}$$

最后，根据定义 (32) 和 (33)，

$$\mu(1+\varepsilon) = \sqrt{(1-\lambda_{\min})\rho}\cdot\sqrt{\frac{\rho}{1-\lambda_{\min}}} = \rho.$$

因此，所需的不等式 $E(N_1+\ell,\ N_2+\ell) \le \rho^{\ell}E(N_1,\ N_2)$ 成立。 □

References

[1] G. Adam 和 R. Speciel, 《评估集成对抗攻击的鲁棒性》, 2020年, arXiv:2005.05750。[2] R. Aljundi、M. Lin、B. Goujaud 和 Y. Bengio, 《用于在线持续学习的基于梯度的样本选择》, 2019年, arXiv:1903.08671。[3] K. Aomoto, 《Schl ¨afli 函数的解析结构》, Nagoya Math. J. 68 (1977), 1–16, 见 http://projecteuclid.org/euclid.nmj/1118796538, MR 569685。[4] V. Baldoni、N. Berline、M. K¨oppe 和 M. Vergne, 《多面体上的中间和：计算与实 Ehrhart 理论》, Mathematika 59 (2013), no. 1, 1–22, https://doi.org/10.1112/S0025579312000101, MR 3028168。[5] M. Beck 和 S. Robins, 《立体角》, 载于《离散连续计算：多面体中的整点枚举》, Springer New York, 纽约, NY, 2007年, 第 179–190 页, https://doi.org/10.1007/978-0-387-46112-0_11, ISBN 978-0-387-46112-0。[6] M. Beck、S. Robins 和 S. V. Sam, 《立体角多项式的正性定理》, Beitr¨age Algebra Geom. 51 (2010), no. 2, 493–507, MR 2663951。[7] M. Brion 和 M. Vergne, 《留数公式、向量划分函数与有理多面体中的格点》, J. Amer. Math. Soc. 10 (1997), no. 4, 797–833, https://doi.org/10.1090/S0894-0347-97-00242-7, MR 1446364。[8] F. Eriksson, 《立体角的测度》, Math. Mag. 63 (1990), no. 3, 184–187, https://doi.org/10.2307/2691141, MR 1058149。[9] L. Fukshansky 和 S. Robins, 《三阶格的立体角界》, J. Combin. Theory Ser. A 118 (2011), no. 2, 690–701, https://doi.org/10.1016/j.jcta.2010.06.001, MR 2739513。[10] L. Fukshansky 和 S. Wang, 《格与全实数域中的正半群》, 2021年, arXiv:2105.10458。[11] D. Gourion 和 A. Seeger, 《计算凸锥体积模量的确定性与随机方法》, Comput. Appl. Math. 29 (2010), no. 2, 215–246, https://doi.org/10.1590/S1807-03022010000200007, MR 2672258。[12] M. Hajja 和 P. Walker, 《 n维欧几里得空间中立体角的测度》, Internat. J. Math. Ed. Sci. Tech. 33 (2002), no. 5, 725–729, https://doi.org/10.1080/00207390210144025, MR 1939582。[13] R. Heylen 和 P. Scheunders, 《用于凸包估计和端元提取的多维像元纯度指数》, IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing 51 (2013), no. 7, 4059–4069, https://doi.org/10.1109/TGRS.2012.2226734。[14]J. Horn, 《关于两个及三个变量的超几何级数的收敛性》, Math. Ann. 34 (1889), no. 4, 544–600, https://doi.org/10.1007/BF01443681, MR 1510591。[15] Z. Kabluchko 和 D. Zaporozhets, 《高斯多面体与正则球面单纯形的吸收概率》, Adv. in Appl. Probab. 52 (2020), no. 2, 588–616, https://doi.org/10.1017/apr.2020.7, MR 4123647。[16]M. S. Mariani、Z.-M. Ren、J. Bascompte 和 C. J. Tessone, 《复杂网络中的嵌套性：观测、涌现与影响》, Phys. Rep. 813 (2019), 1–90, https://doi.org/10.1016/j.physrep.2019.04.001, MR 3961158。

[17] O. Mazonka，锥面、多面体锥与相交球冠的立体角，2012年，arXiv:1205.1396。[18] B. N. Parlett，对称特征值问题，工业与应用数学学会，1998年。[19] J. M. Ribando，用于高效三角剖分 n维超立方体的概率方法，博士论文，加利福尼亚大学圣迭戈分校，2000年。[20] ，三维以上空间中的立体角测量，《离散与计算几何》**36**（2006年），第3期，479–487，https://doi.org/10.1007/s00454-006-1253-4，MR 2255515。[21] A. Seeger 和 M. Torki，凸锥的中心与部分体积 I：基础理论，《Beiträge zur Algebra und Geometrie》**56** （2015年），第1期，227–248，https://doi.org/10.1007/s13366-014-0220-8，MR 3305445。[22] Sage 开发者，*SageMath，Sage* 数学软件系统（版本 *9.6*），2022年，https://www.sagemath.org。

Allison Fitisone: Dept. of Mathematics, University of Kentucky
Email address: allison.fitisone@uky.edu

Yuan Zhou: Dept. of Mathematics, University of Kentucky
Email address: yuan.zhou@uky.edu