arXiv:2304.11203v1 [math.HO] 21 Apr 2023

从《逻辑哲学论》到后期著作再回返——遗稿带来的新启示*

Ruy J.G.B.de Queiroz 伯南布
哥联邦大学信息中心´伯南布哥联邦
大学 巴西累西腓 r
uy@cin.ufpe.br

摘要

作为庆祝第 *Tractatus* 100 个周年纪念，重新审视它与后期著作的关系或许是值得的。从前者到后者，David Pears 回忆道：“每个人都意识到维特根斯坦后期哲学的整体性特征，但人们并不太了解，这一特征在 *Tractatus* 中就已经开始形成”（*The False Prison*，1987）。从后者到前者，Stephen Hilmy 对 *Nachlass* 的广泛研究（*The Later Wittgen-stein*，1987）帮助消除了诸如 Hintikka 所提出的经典误解，即“维特根斯坦在 *Philo-sophical Investigations* 中几乎完全放弃了演算类比”。Hilmy 指出，即使在 *Investigations* 中，也可以发现运用演算／游戏范式来理解语言的做法，例如“操作这个词时”（第一部分，第559节）以及“它在演算中扮演不同的角色”。Hilmy 还引用了一份晚期（1946年）的未发表手稿（MS 130）：“这个句子在语言演算中有其用处”，这似乎与“询问一个命题是否以及如何能够被验证，只是询问‘你的意思是什么？’的一种特殊方式”相容。在这一来回往复的核心，有一个方面似乎值得在关于数学语言语义学的讨论中加以注意；这种语义学可能建立在证明的（规范化）以及／或者 Hintikka／洛伦岑的游戏对话之上：后果的阐释。开放且可搜索的 *The WittgensteinArchives at the University of Bergen* 的使用，为这一讨论提供了实质性支持。这些发现被置于自然演绎风格的推理规则语境下关于逻辑常项意义的讨论之中。[1]

*预印本。最终版本将发表于 *SATS – Northern European Journal of Philosophy*, Walter de Gruyter。[1]本文所报告的内容（部分曾于2021年9月14日至17日举行的线上会议上 ներկայաց*100 anos do Tractatus Logico-Philosophicus*）进一步发展了一项正在进行的研究计划：为后期维特根斯坦大力倡导的“意义即使用”这一论断提出一种形式对应物，同时尝试在维特根斯坦早期及后期著作中寻找一条共同主线。为此，本文基于一系列

关键词——证明与意义、意义即使用、维特根斯坦的 *Nachlass*、归约规则、语义／对话博弈、证明论、类型论

1 引言

为了阐明我们所认为的维特根斯坦关于意义、使用与后果之间联系的观点中贯穿始终的一条主线——从 *Tractatus* 到后期著作，再回到早期著作——并以此为基础，为谓词逻辑语言提出一种“意义即使用”的（对话式／博弈论）语义学的形式对应物，我们需要言简意赅，同时引入维特根斯坦著作中的关键摘录（包括 *Nachlass*），以及那些对证明与意义之间的联系持不同解释的形式语义学家的论述。本文旨在考察所谓的证明约简规则，视其为解释一个命题的（直接）后果的形式对应物。这与其他意义证实主义理论形成鲜明对照；这些理论由 Gentzen、Dummett、Prawitz、Martin-L¨of 等人提出，倡导以一种带有“实用主义”倾向的方式处理谓词逻辑的语义学。因此，我们将考察维特根斯坦已发表及未发表著作中的若干段落，以全面勾勒“意义即使用”的形式对应物。

“早期”与“晚期”维特根斯坦之间那种著名的对立，已受到 Pears（1987）和 Hilmy（1987）等学者的质疑。维特根斯坦核心议题与主张中一项重要却遭忽视的连续性，涉及“意义”即“使用”。将他早期和晚期关于“意义即使用”的文本联系起来的，是他诉诸一个术语或短语的直接后果；例如，他将语言称为一种“演算”。这些段落对于理解维特根斯坦的“意义即使用”观至关重要，尽管学术文献长期以来普遍忽视了它们。本文通过重新考察维特根斯坦的 *Nachlaß*，进一步证实并凸显了这些段落的核心地位与重要性；这也是作者持续研究这一主题的又一步。阐释这些段落，揭示了它们与近期的对话语义学、博弈语义学，以及皮尔士对说话者和解释者互补视角的关注之间密切而重要的相似之处。逻辑联结词的约简规则、引入规则、消去规则和博弈论说明，构成了相互补充的功能规范集合；这些正是维特根斯坦本人“意义即使用”论述的核心。第一节介绍这些问题，并记录、考察维特根斯坦对术语或短语直接后果的一贯关注。第二节记录并考察文献中普遍忽视这些问题的重要性。此外，第二节还考察维特根斯坦在后期出版物中对术语或短语直接后果持续而核心的关注。在此背景下，第三节考察当前关于意义、知识与逻辑之交界的两种进路：

本文部分内容沿用了此前的出版物，以强化总体论证的连贯性：

Wittgenstein Symposium 1988 1989,1992 *Dialectica* 1988 1991,1994 *Logic J. of the IGPL* 2001 *Studia Logica* 2008

(b,)、(a,)、( )、( )。我们相信，本文具有创新性，尤其是因为我们广泛使用了维特根斯坦的 *Nachlass*，而此前的论文均未如此处理。因此，作为一系列可追溯至数十年前的论文中的新一步，本文无疑与此前旨在为当前手稿提供语境和自足性的出版物存在部分重叠，而这也大大强化了先前的论证。（感谢 *Wittgenstein Archives at the University of Bergen*的编者（*WAB*），他们以免费在线且可检索的形式，为维特根斯坦研究提供了如此宝贵的礼物—— *Nachlass*！）

洛伦岑的对话语义学和 Hintikka 的博弈语义学，并说明二者如何汇聚为一套共同的推理图式。

关于意义与使用（作为有用性）之间联系的直觉，在维特根斯坦非常晚期的评述中有明确体现，例如“意义、功能、目的、有用性——彼此关联的概念”[2]，；它也构成了“词语是工具”[3] 这一概念联系的基础，该联系主要见于 *Investigations*第一部分。不过，这一直觉似乎根植于极早期的评述，见于《 *Notebooks* 》和《 *Tractatus*》等早期著作。前者已显露出意义与使用之间联系的早期迹象——“语言表示意义的方式，反映在语言的使用中”[5]；而在后者（及其早期版本，即所谓的 *Prototractatus*）中，则可以找到这样的评述：

> 为了在符号中辨认出象征，人们会注意

[2]§291，第 41e页， *Last Writings on the Philosophy of Psychology*[3]“想想工具箱里的工具：有锤子、钳子、锯子、螺丝刀、尺子 e, 一罐胶水、胶水、钉子和螺钉。——词的功能就像 s 这些物件的功能一样多种多样。（而且在这两种情况下也存在相似之处。）”第11节，第一部分，第 6e 页e *Investigations*。请看一份写于1929—30年的未发表手稿（Ms. 107）中的这段话：能否说：一个句子的——的意义就是它的目的？ [或者，就一个词而言，“它的意义就是它的目的”。]

可译为：

> 能否说：一个句子的——的意义就是它的目的？ [或者，就一个词而言，“它的意义就是它的目的”。]

Ms. 107,234（维特根斯坦遗稿 Ms-107：III，《哲学考察》（ ¨ONB, Cod.Ser.n.22.020）——（IDP）。（访问日期：2022年6月11日））

[4]维特根斯坦指出：

> 现实并不是预期之物所欠缺的一种属性，并且在它发生时才加到预期之物上。——现实也不像日光：事物仿佛已经在黑暗中无色地存在，只有日光到来时才赋予它们色彩。所有这些语法形式都没有表现出预期与实现之间的对立。语言只以它一贯表现对立的方式来表现这一对立，即通过句子“我期待 p”与“p 已经发生”之间的对立。
>
> 我怎么会预期到它，而它随后真的发生了呢？——仿佛预期是一块黑暗的透明板，而随着实现，后面的光才被点亮。但所有这类比喻都是错误的，因为它把现实表现为某种可描述的附加物，加到预期——加到思想上，这是荒谬的。

可译为：

> 现实并不是期待之物所缺少、而在事情发生时才添上的一种性质。——它也不像日光：日光仿佛只在黑暗中为事物赋予色彩，因为那时事物本身似乎是无色的。这些语法形式都没有呈现期待与实现的对立。语言只通过句子“I expect p”（我期待 p）与“p has arrived”（p 已经到来）的对立，像它一贯呈现的那样，呈现这种对立。
>
> 我怎么会期待它，而随后它竟真的到来了？——这仿佛期待是一片黑暗的透明片，实现时，其后的光便亮了起来。然而，这种明喻都是错误的，因为它把现实说成是可以描述的、附加于期待和思想之上的东西，而这纯属荒谬。

Ms-109,54 (访问于2022维特根斯坦遗稿 Ms-109: V, 札记 (WL) - (IDP) .

日期为 11 .9.16, p · 82e 的 *Notebooks 1914-1916* ·

使用。[6]

> 在哲学中，问题“我们究竟用那个词、那个句子来做什么”一再带来有价值的洞见。 [在哲学中，问题“我们究竟用那个词、那个句子来做什么”一再带来有价值的洞见。][7]

> 如果一个符号毫无用处，它就毫无意义。这正是奥卡姆格言的要点。[8]

这里的“毫无用处”应理解为“没有目的”，正如同一 *Tractatus*中稍后所明确的那样：

> 当然，奥卡姆格言并非一条任意规则，也不是一条因其实践成效而得到辩护的规则：它的要点在于，符号语言中不必要的单位毫无意义。服务于同一目的的符号在逻辑上等价，而不服务于任何目的的符号在逻辑上毫无意义。[9]

一则日期为 23.4.15 的评注再次将意义与使用／目的／有用性联系起来：

> 显然，达到同一目的的符号在逻辑上相同
> 是。纯粹的逻辑正是所有这些符号都能实现的东西。

对于前者，逻辑常项是否存在的问题甚至不被认为相关，因为它们可以“消失”。再者，鉴于将此类“常项”视为

[6]§3.252， *Prototractatus*。维特根斯坦 *Nachlass* Ms-104：《逻辑哲学论》 [所谓的 *Prototractatus*] （博德利图书馆，MS. German d. 7）-（IDP）（访问于2021年5月13日）事实上，这段话已经出现在更早的一份手稿中，即注明日期为23.10.14的Ms 101中：要在符号中认出符号，必须注意其使用。（Ms-101,59r）可译为：要在符号中认出符号，必须注意其使用。[7]§6.1221， *Prototractatus*。维特根斯坦 *Nachlass* Ms-104：《逻辑哲学论》 [所谓的 *Prototractatus*] （博德利图书馆，MS. German d. 7）-（IDP）。（访问于2022年5月15日）[8]§3.328， *Tractatus*第16页。这一点已经出现在一份1915年的手稿中：5’30634 发挥一种目的的符号在逻辑上是等价的。没有发挥任何目的的符号在逻辑上是无意义的。3’2521 如果一个符号没有被使用，它就是无意义的。这就是奥卡姆格言的意义。可译为：5’30634 发挥同一目的的符号在逻辑上是相同的。没有发挥任何目的的符号在逻辑上是无意义的。3’2521 如果一个符号没有被使用，它就是无意义的。这就是奥卡姆格言的要点。Ms-104,60（1915–18）（载于：维特根斯坦，路德维希：《交互式动态呈现》（IDP）。）（访问于2022年6月16日）[9]同上，§5.47321，第48页。[10]可译为：显然，发挥同一目的的符号在逻辑上是相同的。纯粹的逻辑正是所有这些符号都能实现的东西。Ms-102,75r（Ms-102（WL）（IDP））。（访问于2022年6月16日。）

用具，即在其使用／有用性中才有意义的工具，这一立场可以看作与上述评论中表达的观点相一致。就这一点而言，维特根斯坦的话在 *Notebooks* 中表述如下：

> 对于逻辑常项，我们无需追问它们是否存在，因为它们甚至可能消失！[11]

在 *Notebooks* 后文中，据说，符号“0”（的引入）之所以具有其意义，是因为它有助于实现十进制记数法：

> 为了实现十进制记数法而引入符号“0”：这一做法的逻辑意义。[12]

如果意义应当被理解为用法／有用性，那么逻辑联结词实际上就是工具，而不是常项。维特根斯坦不仅在后期著作中如此阐明，例如：

> 谈论那些作为工具毫无价值的句子是没有意义的。
>
> 一个句子的意义就是它的目的。[13]

即使在 *Tractatus* 中，源自弗雷格和罗素、以真值为基础的语义观，也将“早期维特根斯坦”界定为有别于“晚期维特根斯坦及以使用为基础的语义观”。他对逻辑、语言与现实之间关系的这一独到看法，早已体现在他指出逻辑联结词是工具这一点上；因此，“逻辑联结词是常项”这一观点，以及“存在逻辑常项，即‘∨’、‘⊃’、‘.’、（‘∧’）等”这一看法，几乎都难以成立。为说明这一点，他回顾了这些“常项”通常具有的相互定义关系：[14]

> 至此，显而易见，不存在“逻辑对象”或“逻辑常项”（按弗雷格和罗素的意义）。[15]

此时可以合理地说，既然逻辑联结词被理解为用具、工具，就不应将它们视为“原始”符号。维特根斯坦对此坚持己见，早在 *Tractatus*中便已如此：

> 显而易见，∨、⊃等并不是关系，其意义并非像左右等关系那样。弗雷格和罗素的逻辑“原始符号”可以相互定义，这足以表明它们并非原始符号，更不是关系符号。[16]

因此，尽管通过“命题是真值函项”来借助真值和真值函项为逻辑命题的意义建立精确说明，

[11]日期为25.10.14，19[e]，见 *Notebooks*。[12]日期为16.11.14，31[e]，见 *Notebooks*[13]可译为：谈论没有工具价值的句子毫无意义。句子的意义就是它的目的。Ms-107,249（1929–30）（维特根斯坦 *Nachlass* Ms-107: III, 哲学考察（¨ONB, Cod.Ser.n.22.020）-（IDP）。）[14]谈到逻辑“常项”时，人们关心的是将它们与其在命题中所作用于的变量区分开来。在此语境中，关键在于弗雷格或罗素对“逻辑对象”和“逻辑常项”的区分。（感谢一位匿名审稿人作出如此重要的提醒。）[15]《逻辑哲学论》第5.4节，第44页。[16]同上，第5.42节，第44页。

基本命题。（基本命题是它自身的真值函项。）”[17]维特根斯坦似乎并不确信，真值函项这一概念能够同样适用于弗雷格—罗素逻辑演算中的所有逻辑概念和联结词。作为一种他在后期著作中反复提及的“典型”例子，包含全称量词的一般性概念在以下文字中被明确地与真值函项区分开来：

> 我将“全体”这一概念与真值函项区分开来。弗雷格和罗素将一般性与逻辑积或逻辑和联系起来。这使得命题‘$(\forall x).fx$’和‘$(\exists x).fx$’难以理解，因为其中嵌入了这两种思想。[18]

D. Pears 和 B. McGuinness 在译文中使用“区分”一词，似乎强化了维特根斯坦在“Ich trenne den Begriff Alle von der Wahrheitsfunktion”中有意将二者分开的意图。从维特根斯坦与第一位（英文）译者 C. K. Ogden 的通信中可以清楚看出这一点。在 *Letters to C. K. Ogden* 的《散页评论 II》（‘Comments II on Separate Sheets’）中，第 61 页，他写道：

> 5.521 我的意思是“分开”，而不是“推导”。它们原本是联系在一起的，我把它们分开。

以及编者的评论，第 65 页：

> 5.521 正在讨论的段落是：“我将‘全体’这一概念与真值函项分开。”
>
> 奥格登曾质疑是否应将“separate”改为“derive”

后来，在一份 1931–32 年的打字稿中（部分发表于 *Philosophical Grammar* 和 *Remarks on Frazer's Golden Bough*），我们再次发现一处提及：存在量词不应被视为单纯的总和：

> 是啊，可是说（$\exists x$）$.fx \vee fa =$（$\exists x$）$.fx$ 不是已经包含在 fa 中了吗？这不表明 fa 依赖于（$\exists x$）$.fx$吗？不，除非（$\exists x$）$.fx$ 被定义为逻辑和（其中一个加数是 fa）。如果是这样，那么（$\exists x$）$.fx$（不过是）一个缩写。[19]

由此应当清楚，毫无根据地说维特根斯坦在 *Tractatus* “把量化句子解释为合取和析取”[20]。Hintikka 与 Hintikka 的结论似乎建立在摩尔的报告之上。[21] 维特根斯坦

[17]同上，§5，第36页。[18]同上，§5.521，第51页。[19]可译为：

> 难道（$\exists x$）$.fx \vee fa =$（$\exists x$）$.fx$ 不意味着 fa 已经包含在（$\exists x$）$.fx$ 中吗？难道这不表明 fa 依赖于（$\exists x$）$.fx$ 吗？不，除非（$\exists x$）$.fx$ 被定义为逻辑和（含有一个加项 fa）。如果是这样，那么（$\exists x$）$.fx$ 就（不过是）一种缩写。

Ts 211,38（维特根斯坦 *Nachlass* Ts-211 (WL) (IDP).）（访问于2022年6月18日）[20]第110页，见（欣蒂卡与欣蒂卡（1986））。

[21]摩尔说，维特根斯坦在1930—1933年间“接着说，他在 *Tractatus* 中犯的一个重大错误，是认为对于所有‘由语法界定’的类，全称命题都等同于逻辑积或逻辑和（这里所说的逻辑积或逻辑和，是指 fx的值所对应的命题的逻辑积或逻辑和）；而据他说，对于‘原色’这一类，它们确实如此。他说，写作 *Tractatus*时，他曾认为所有这类全称命题都是‘真值函数’；（……）他说，写作 *Tractatus* 时，他本会为以下观点辩护：

考虑到他对自己极为苛刻，几乎毫不留情，而且经常强调自己在 *Tractatus*中犯下的重大错误，他很可能会这样说。例如，他在 *Philosophical Grammar* 268, $\exists x\ .\varphi\ x$ 第 p 页一个题为“对我过去关于一般性的看法的批评”的段落中说，他“对全称命题的看法是 ( ) ( ) 是一个逻辑和”。尽管如此，在 *Tractatus* 中，存在量词从未被视为逻辑和。此外，正如我们下文将看到的，早期的评论表明，他对全称量词采取了不同的、“非真值函项式”的处理方式。

就逻辑一般性这一概念及其对应的全称量词符号这一具体情形而言，自维特根斯坦早期著述以来，“由.....推出”这一概念便压过了更具 *Tractatus* 特征的真值函项。在某个阶段，尤其是在《 *Tractatus*》的大部分内容中，维特根斯坦似乎更倾向于采用更具 *Tractatus* 特征的真值函项；但即使在这本书中，也能看到这种在早期和晚期著述中都占主导地位的做法留下的痕迹：

> (24.11.14.) 可以从命题“$(x)\phi x$”推出命题“ϕa”，这表明一般性也存在于符号“$(x)\phi x$”之中。同样，这当然也适用于一般的全称量词符号。[2]

[2]

《 *Tractatus*》中也出现了类似的说法：

> 从 $(x).fx$ 推理得出 fa 的可能性表明，符号 $(x).fx$ 本身就包含一般性。[23]

展示从命题‘$(x).fx$’可以推出的（直接）后果的推理，实际上清楚地表明，主要逻辑符号（即‘$(x).$’， *for all x*）的显著特征在于其一般性。从这一角度出发，可以用一种据我们所知在早期维特根斯坦研究文献中几乎未曾采用的方式，解读 *Tractatus* 本身所包含的许多评注，并将它们与后期维特根斯坦的评注联系起来；这些评注同样运用了意义、用法／有用性与后果之间的联系。在解释从存在陈述可以推出的后果时，维特根斯坦显然必须借助其他资源，这一点反映在自然演绎中 ∃消去规则所采用的间接形式上：从$(\exists x)f.(x)$推出后果。[24] 例如，一则评注谈到这样一种观点：在逻辑中，进行演绎（‘*Folgern*’）是先验地发生的；而且似乎

他随后提出的问题所体现的错误观点是：如果 $(x).fx$ 不是逻辑积，(fa)怎么可能由它推出？他回答说，这个问题的答案是：当 $(x).fx$ 不是逻辑积时，“$(x).fx$ 蕴涵 fa”这一命题“被视为一个基本命题”；而当它是逻辑积时，这一命题则是从其他基本命题中推导出来的。摩尔（1955，3）。[22]可译为：（24.11.14）人们能够从句子“ϕa”推导出句子“$(x)\phi x$”这一事实，表明一般性也存在于符号“$(x)\phi x$”之中。当然，同样的道理也适用于一般性标记本身。Ms-102,38r（维特根斯坦 *Nachlass* Ms-102 (WL) (IDP).（访问日期：2022年6月11日））[23] *Tractatus*，§5.1311，第38页。[24]在 TS 212 中，对存在量词及其意义的解释有一段长篇讨论；以下是相关摘录：$(\exists x).fx \vee fa = (\exists x).fx$，$(\exists x).fx$ & 我怎么知道这一点？（因为上面的内容可以说是我已经证明了的。）人们或许会说：“我就是懂得‘$(\exists x).fx$’。”（这是一个说明“理解”是什么意思的绝妙例子。）

可以借助例如 Hintikka 的语义游戏来理解这一点。语义游戏是后期维特根斯坦所说“符号的意义就是它在语言游戏中的用法”的一种（半）形式对应物；在其中，逻辑联结词通过“一步”推理规则获得意义。事实上，根据 Ms101 中一则日期为 15.10.14 的评注，“在命题具有意义之前，必须先完全确定哪些命题可以由它推出”[25]，：

> 可以这样说：所有完全一般的命题都可以先验地构造出来。[26]

以及 Ms-104 中的这条评注：“5’0415 一切推论都先验地发生”[27]（已出版

不过，我也完全可以问：“我怎么知道（$\exists x$）.fx 由 fa 推出？”并回答：“因为我理解‘（$\exists x$）.fx？’。”但我实际上怎么知道它能推出呢？——因为我就是这样演算的。我怎么知道（$\exists x$）.fx 由 fa 推出？我是否仿佛看到了符号“（$\exists x$）.fx”背后，并看到了它背后的意义，以及从它本身看出它由 fa 推出？这就是理解吗？不，那条方程是理解——理解的一部分——表达了理解的一部分（它就这样展开在我面前）。（想想——比较一下这种理解观：原本可以一瞬间把握的东西——一举领会的东西，只有展开之后才能如此呈现。）如果我说“我知道（$\exists x$）.fx 能推出，因为我理解它”，那就意味着，我在理解它时，看到了给定符号以外的某种东西，仿佛是这个符号的定义，由此便得出推论。它可以译为：（$\exists x$）.$fx \vee fa =$（$\exists x$）.fx，（$\exists x$）.fx&$fa = fa$ 我怎么知道？（因为可以说，我已经证明了上面的内容。）人们会想说：“我就是理解‘（$\exists x$）.fx’。”（这是理解为何物的绝佳例子。）不过，我也完全可以问：“我怎么知道（$\exists x$）.fx 由 fa推出？”并回答：“因为我理解‘（$\exists x$）.fx’？”但我实际上怎么知道它能推出呢？——因为我就是这样演算的。我怎么知道（$\exists x$）.fx 由 fa推出？我是否看到了符号“（$\exists x$）.fx”背后，并看到了它背后的意义，由此看出它从 fa推出？这就是理解吗？不，那条方程是理解——理解的一部分——表达了理解的一部分（它就这样展开在我面前）。（想想——比较一下这种理解观：原本可以一瞬间把握的东西——一举领会的东西，只有展开之后才能如此呈现。）如果我说：“我知道‘（$\exists x$）.fx’能推出，因为我理解它”，这意味着，我在理解它时，看到了给定符号以外的某种东西，仿佛是这个符号的定义，由此便得出后果。

Ts-212,IX-66-2（维特根斯坦 *Nachlass* Ts-212 (WL) - (IDP)。（与 Heinz Wilhelm Kr¨uger 合作（2022 年：规范化转录文本校对））（访问于 2022 年 6 月 12 日）。

[25]§3.20103，《{v2》第 65 页。几乎相同的评论已见于*Notebooks 1914–16*：“我们也可以这样要求确定性：若一个命题要有意义，那么它各部分在句法上的用法就必须预先确定。——例如，不可能到后来才发现一个命题是从它推导出来的。但是，例如，一个命题能推出哪些命题，必须在该命题具有意义之前就完全确定！”*Notebooks*，日期为 18.6.15，第 64^{e} 页。

[26]可译为：

> 可以这样说：所有全称命题都可以先验地构成 .

Ms-101,43r（维特根斯坦 *Nachlass* Ms-101（WL）（IDP）。）（访问于2022年6月19日）。

[27]维特根斯坦 *Nachlass* Ms-104：逻辑哲学论 [所谓的 *Prototrac-*

如 *Prototractatus*），因此：

> 所有演绎都是先验地作出的。[28]

根据 *Tractatus*。说这些评论可以沿着本文所主张的同一思路来理解，是恰当的：只要承认，展示从一个命题可以得出的（直接）后果，就是展示可以如何运用它；这些先验的、直接的推导属于“定义”。此外，沿着同一推理思路，（用早期维特根斯坦自己的话来说）必须指出：“逻辑必须照料自身”[29]，原因很简单：要使一个命题在逻辑中得到定义并具有意义，展示从该命题可以得出哪些后果（推导）的规则就必须先验地给出。因此，“我们不可能给一个符号错误的意义”[30]，，所以，（一步的）“推导”之所以是先验地作出的，正是因为它们构成了该命题的意义。

此时，再次强调那些暗示断言的意义与可由其推导出的内容之间存在联系的评述，是有意义的；即使在非常早期的著作中也有这样的评述，例如：“一个命题肯定由它推出的每一个命题。”[31]，以及：“‘$p.q$’是肯定‘p’的命题之一，同时也是肯定‘q’的命题之一。[32]属于 *Tractatus*。早在1912年，在一封日期为1.7.12、写给罗素的信中，他已经表达了与上文所述本质上相似的观点：

> 如果我提出如下建议，你会认为我疯了吗？：符号（x）$.\phi x$ 并不是一个完整的符号，只有在如下类型的推理中才有意义：由 $\vdash\ \phi x\ \supset_x\ \psi x.\phi$（$a$）推出 ψ（a）。或者更一般地说：由 $\vdash$（x）$.\phi x.\varepsilon_0$（a）推出 ϕ（a）。当然，我对此极不确定，但类似的说法或许确实是对的。[33]

当解释命题的直接后果是适用于一般元素 a 的句子实例，即 $\phi(a)$ 时，关于 $\phi(x)$ 的全称量词才有意义。

基于编目 *Nachlass* 的研究揭示了许多由维特根斯坦哲学著作相当零散的性质所造成的误解。鉴于这些发现，例如，可以合理地认为，《 *Tractatus* 》中的逻辑原子论被维特根斯坦所拒绝，是因为它假定一个名称指称一个对象，而该对象就是它的“意义”（即指称对象）。《 *Investigations* *MS 111* *TS 213* *Blue* 》 *Book* *Brown Book* 109 1930 31 *Bemerkungen*[34]的开篇几行（以及：、、、的开头；另参见 Ms.（–））揭示了主要的一个

---

tatus] (博德利图书馆，MS. German d. 7) (IDP)。[28]《逻辑哲学论》的§5.133，第39页。[29]同上，§5.473，第47页。[30]同上，§5.4732。[31]同上，§5.124，第38页。[32]同上，§5.1241。[33]维特根斯坦的信件 R.

3, 12 1974 *Letters to Russell Keynes and Moore* 第¨[34]页，Ms.109,140：一个（词的）意义只能是我们在解释一个词时所解释的东西。人们总是有一种错误的观念，仿佛一个词的意义是一个——如果一个词的意义是一个对象，即一个事物，其意义就如同诺通剑是“Nothung”这个词的意义一样。但即使在这里也有些不对，因为我毕竟可以说

对 *Tractatus*原子论的批评：即名称指称对象，而这些对象就是其意义这一假设。在后期阶段，尽管这一假设被放弃，原子论却得以保留，从而形成一种「功能原子论」：词语被视为具有独立可识别性的工具，在语言演算中发挥着某种意义（函数、目的、有用性）。将其早期（「官方」）的严格原子论修正为一种可驾驭的整体论，既解释了其思想的连续性（即原子论中融入了「功能性」（「可驾驭的整体论」）成分，正如 David Pears 所强调的那样：「一个句子只能通过其在系统中的位置来得到解释.....这一观念是图像理论的核心要点之一」[35]，以及「每个人都意识到维特根斯坦后期哲学的整体论特征，但人们并不太了解，这一特征其实早在 *Tractatus*中就已开始确立。」[36]），也解释了其核心观点的不连续性（即「意义即指称」与「意义即使用」之间的区别）。

现在的挑战是建立一个充分的基础，使函数式原子论能够用于构造一种框架：在语言演算中，逻辑联结词具有意义（函数、目的、有用性），而这种意义可通过解释人们应当从相应命题推出的（直接）后果来阐明。我们曾在别处（2001，2008）讨论过，所谓逻辑的“函数式解释”如何提供帮助。作为构建这一框架的又一步骤，我们在此展示它与意义的“实用主义”／“对话式”路径之间的联系；这种路径已见于皮尔士关于 *Interpreter* vs*Utterer* 二分法的著作，并改进了这样一种观点：逻辑常项是工具，其意义由它们的用法／有用性决定。除了先前发表的成果之外，这种联系似乎还取决于意义的“游戏”／“对话”路径（洛伦岑、Hintikka、Fra¨ıss´e）。逻辑联结词的（Curry–Howard）函数式解释是一种“扩展的”自然演绎系统，其中表示证明构造的项与公式并列。它可用于以操作方式表述各种逻辑演算，在这些演算中，人们处理假设的方式决定了逻辑。因此，指出它与皮尔士二分法之间联系的新意，进一步印证了 Curry-Howard 路径中的证明约简规则所揭示的事实：这种路径天然具有原子论特征，仍然关注证明，而且在这样的意义上是函数式的：其主要语义工具是证明的约简（而不只是可断言性条件）。这与洛伦岑（及 Hintikka）的对话／游戏式语义形成了平行对应：典范项（引入）代表“断言”（分别为“我方”）步，非典范项（消去）则代表“攻击”（分别为“自然”）步。这似乎与维特根斯坦的“函数式原子论”相符：它以函数式的方式说明了早期原子论（D. Pears（1990）认为其中已带有整体论倾向），并遵循“词语是工具”和“语言是演算”的主张（而这，

，“诺通剑——‘Nothung’已不复存在”，那么这里的“Nothung”是否恰恰因为这把剑已不复存在而毫无意义？这段话可译为：一个词的意义——只能是我们在解释一个词时所说明的内容。人们总有一种误解，认为一个词的意义——仿佛就是一个对象，也就是一件事物，正如诺通剑是“Nothung”一词的意义。但这里也有问题，因为我仍然可以说：“诺通剑——‘Nothung’已不复存在”，那么这里的“Nothung”是否恰恰因为这把剑已不复存在而毫无意义？（维特根斯坦 *Nachlass* Ms-109：V，《札记》（WL）-（IDP）。）[35]Pears（1987）第121页脚注34。[36]Pears（1990）开篇。

正如 S. Hilmy 所证实的那样，“这一观点在 20 世纪 30 年代初就已确立，并至少一直延续到 1946 年。”[37]

在维特根斯坦后期早期阶段的著作中——这些著作见于一些笔记本，内容主要是关于数学基础，现已以 *Philosophical Remarks* and *Philosophical Grammar*为题出版——关注点显然从真值和真值函项转向了数学证明；而真值和真值函项正是《 *Tractatus*》的典型特征。数学证明的概念得到了全面考察，有些段落甚至赋予它一种相当优先的地位，使其凌驾于数学语言的语义学之上。从这些“过渡时期”著作中似乎可以得到这样的启示（借用维特根斯坦自己的话说）：“若想知道一个命题的意义，也就是它的意义，就必须考察它的证明证明了什么。”下面是手稿 Ms 106：II（第182页）中的一则评注（1929 年）：

> 人们可¨以问： (x)2x = x + x 说了什么？它说，所有形如 2x = x + x 的等式都是正确的。但这有什么意义吗？能不能说：是的，我看出所有这种形式的等式都是正确的，因此我现在可以写下“(x)2x =x + x”吗？
>
> 它们的意义必须从其证明中显现出来。证明所证明的，就是该命题的意义（不多不少）。[38]

然而，要对意义与证明之间联系的立场作出重要修正，并不需要太久；在1941–44年间写成的 *Remarks on theFoundations of Mathematics*中：

> 我曾经说过：“如果你想知道一个数学命题说了什么，就看看它的证明证明了什么。”[39] 难道这话不既有真理，也有谬误吗？因为只要我们能够跟随证明，一个数学命题的意义、要点就真的清楚了吗？ [40]

在后期阶段，有相当多的评述表明，关于命题的意义与其证明之间联系的这一修正，并未被如此明确地表述。其中一则出自同一部约写于1943/1944年的 *Remarks on the Foundations of Mathematics* ，写道：

> 一个命题的证明当然不会提及，当然不会

[37]Hilmy（1987，第14页）指出，即使在 *Investigations* 中，也能看到以演算／游戏范式来理解语言的做法，例如“im Laufe des Kalk¨uls”（第一部分，第559节）（英译为“在使用这个词时”），以及“它在演算中发挥着不同的作用”。Hilmy还引用了一份较晚（1946年）的未刊手稿（MS 130）：“这个句子在语言演算中有其用途”，这与“询问一个命题是否以及如何能够得到验证，只不过是以一种特定方式询问‘你是什么意思？’”相容（*Investigations*，第一部分，第353节）。[38]可译为：有人或许会问：（x）2x = x + x 说了什么？它说，所有形式为2x =x + x 的方程都是正确的。但这有意义吗？能不能说：是的，我看到这种形式的所有方程都是正确的，所以现在我可以写下“（x）2x = x +x”吗？它们的意义必须从其证明中显现出来。证明所证明的，就是该命题的意义（不多不少）。维特根斯坦 *Nachlass* Ms-106：II（¨ONB，Cod.Ser.n.22.019）—（IDP）。（访问于2022年5月16日）。[39]参见 *Philosophical Grammar*，第369页； *Philosophical Remarks*，第183–4页。[40]《 *Remarks on the Foundations of Mathematics*》第七部分第10节，第367页。

描述支撑该命题并赋予其意义的整个计算体系。[41]

这表明，他关注的是：就解释意义而言，仅仅解释什么算作证明（即解释可断言性条件）是不充分的。[42]他关于命题的意义与人们可以由该命题直接推出的后果之解释之间联系的论述，恰好表明，看似无法实行的整体论完全可以用于为数学语言制定意义理论：

> 人们通过了解“fa”由“$(x).fx$”推出，来掌握“all”的意义 [Bedeutung] 。..... 而“$(x).fx$”的意义 [Sinn] ，则通过我们坚持“fa”由它推出而得到澄清。[43]

正如 D. Pears（1987）所指出的，这些语言部分只有在与其他相邻语言部分的关系中才能得到理解：

> W. 后期语言理论的新观点 [of W.’s later theory of language] 是，我们在语言的每个部分与其他相邻部分的关系中体验它。（第171页）

维特根斯坦对“一个词的意义由其在语言中的作用决定”这一观点的运用，可以这样理解：通过展示如何“消除”“摆脱”逻辑符号，说明人们能够从一个以该符号为主要联结词的命题中得出哪些结论，也就展示了该符号在命题演算／系统中所发挥的作用。

在Ms-145 [所谓的C1] （1933）中，可以找到如下论述，即将一个句子的意义与人们能够从中得出的后果联系起来：

> 对我来说，这个句子不是单纯的声音；它在我心中唤起一个意象，比如有人在参议院大楼里的情景。但句子和这个意象并非只是一个声音和一个模糊的意象：可以说，句子本身蕴含着唤起这个意象的能力，也蕴含着其他后果，而这就是它的意义。意象似乎只是这种意义的一个模糊映像，或者说，只是这种意义的一种呈现。——但我这话是什么意思呢？我不正是把句子看成一个后果体系中的一环吗？我能不能说：当我思索一个句子的意义是什么——句子有意义究竟意味着什么时，我发现，它——就在于根据约定，后果会从句子中产生；我把句子看得就像游戏中的一步棋。

[41]同上，第11节，第六部分，第313页。[42]请参阅这段维特根斯坦于1929年在Ms-106中写下的文字：数学命题与其证明的关系，就如同一个身体的最上表面与身体本身的关系。人们可以把命题的证明称为其身体。只有当表面之后存在一个身体时，这个句子对我们才具有意义。人们也会说：数学命题（仅仅）是证明链条中的最后一个环节。（Ms 106，第195页）维特根斯坦 *Nachlass* Ms-106：II（¨ONB，Cod.Ser.n.22.019）（IDP）（访问于2021年5月13日）[43]同上，第一部分，第10节，第41页，以及第11节，第42页。[44]可译为：

维特根斯坦承认，将数学证明和可断言性条件用作语义概念并不恰当；然而，一些“证实主义”意义理论似乎忽略了这一点。这些理论试图在维特根斯坦的语义理论中寻求概念基础，并认为“意义即使用”是其底层语义范式。例如，Michael Dummett（1977，12）：

> 每个 [逻辑] 常项的意义，都要通过说明：对于以该常项为主要运算符的任意句子，什么才算是该句子的证明，来加以确定；这里假定我们已经知道，任何一个组成部分的证明应当如何认定。[45]

D. Prawitz（1977）提出了所谓的、以证明为基础的 Dummett–Prawitz 意义理论，其背后是对维特根斯坦“意义即使用”这一观点的诠释：

> 正如 Dummett 所指出的，这整套论证方式强调交流以及数学语言的作用，受到维特根斯坦思想的启发，与 Brouwer 将数学视为一种无语言活动的、颇为唯我论的观点截然不同。不过，它似乎构成了支持 Brouwer 某些结论的最佳论证。（……）
>
> 我还论证过，若要有力地驳斥柏拉图主义的意义理论，就必须依照上述关于意义与使用原则的讨论所提出的思路，发展出一种恰当的意义理论。即便这样一种维特根斯坦式理论并不能导向对经典逻辑的否定，它本身也极具价值。

沿着同样的思路，Dummett（1991，251页及以下）再次谈到这一点：

> 格哈德·根岑发明了自然演绎和相继演算，率先教会我们逻辑应当如何形式化；他对此提供了一点提示，指出“引入规则可以说给出了相关常项的定义”，他的意思是，这条规则确定了它的意义，而消去规则归根结底不过是这一定义的后果。（……）显然，

> 对我而言，这个短语不只是一个声音；它会在我心中唤起一幅图景，仿佛有人身处参议院大楼。然而，这个句子和这幅图景并不只是一个声音和一个模糊的观念。可以说，这个句子本身就能唤起这幅图景，也能引出其他后果，而这就是它的意义。这幅图景似乎只是那种意义的一幅淡淡影像，或者说，只是对那种意义的一种看法。——但我这话是什么意思？难道我不是把这个句子看作后果体系中的一个环节吗？我能不能这样说：如果我思考一个句子的意义——命题的意义由什么构成，我发现它——就在于，根据约定，会从命题中产生种种后果；我看待这个命题的方式，类似于看待游戏中的一步棋。
>
> Ms-145,80-81（1933）（载于：维特根斯坦，路德维希：《交互式动态呈现（IDP）》。访问日期：2022年6月13日）

[45]顺便一提，我们这里的论述或许可以理解为表明，建构主义语义学既不必也不应是（至少在 Dummett 意义上的）“证实主义”。从布劳威尔的直觉主义中应当保留下来的要点是其建构主义。“唯我论”是虚假的；但在这个意义上，布劳威尔和维特根斯坦是正确的：理解必须是第一人称的，尽管任何人获得这种理解，当然都可能是在社会和世俗的情境中进行的，包括在黑板前。（感谢匿名审稿人指出这一点。）

> 消去规则并不是以可以从引入规则推导出来的直截了当意义上的引入规则的后果；因此，Gentzen 想必是指某种更有力的得出后果的方法。他还隐含地声称，引入规则按我们的术语来说是自我正当化的。

在下文中，Dummett 认为，P. Martin-L¨of 在其直觉主义类型论中主张的是一种不同的立场，即：确立命题直接后果的消去规则，定义了逻辑联结词的意义：

> 直观地说，Gentzen 关于应将引入规则视为确定逻辑常项意义的主张，并不比相反的主张更有说服力，即认为逻辑常项的意义是由消去规则确定的；当我们从一个逻辑常项转向另一个逻辑常项时，直观上的合理性便在这两个相互对立的主张之间摇摆。事实上，Per Martin-L¨of 已经在“由消去规则决定意义”这一假设的基础上，为数学语言构建了一整套意义理论。其基本思想是，陈述的内容就是：如果你接受它，你能用它做什么——得知它为真将会，或至少可能会，对你产生什么影响。当然，这正是实用主义意义理论的指导思想。当这一思想应用于逻辑常项时，任何逻辑复杂陈述的直接后果，都被视为通过应用相关消去规则之一而得出。

按照类似的推理，Martin-L¨of 本人显然也赞同同一观点：引入规则，即确立可断言性条件的规则，应被视为定义逻辑联结词意义的规则：

> 直觉主义者解释命题的概念，并不是说命题是真值条件的表达，而是借用 Heyting 的话说，命题表达了一种期待或意图。你可能会问：对什么的期待或意图？答案是：对该命题的证明的期待或意图。Kolmogorov 则用另一种说法表达了实质相同的解释：命题表达了一个问题或任务（德语：*Aufgabe*）。不久之后，又出现了另一种解释，即 Gentzen 提出的解释：逻辑常项的引入规则应当被视为这些常项的定义，也就是说，是赋予这些常项以意义的东西。我想要阐明的是，这四种看似不同的解释实际上都归结为同一点：它们不仅彼此兼容，而且只是表达同一种解释的不同方式。（Martin-L¨of（1987，410）。）

这段话直接让人想起他在 *Intuitionistic Type Theory*(1984, 24) 中表达的观点，即引入规则定义了意义：

> 引入规则说明了集合的规范元素（以及相等的规范元素）是什么，从而赋予集合以意义。

在对其验证主义方法较为近期的论述中，Martin-L¨of 将“维特根斯坦公式”称为所谓的“意义的验证原则”：

> 由此可清楚看出，对命题是什么这一问题的一般解释应当是：命题是通过规定其证明（更准确地说，是规范证明或直接证明）的构成方式来定义的。而且，如果我们把构成规范证明所依据的规则视为引入规则——我的意思是，如果我们像 Gentzen 那样将这些规则称为引入规则——那么，他关于逻辑常项由其引入规则定义的主张完全正确，因此我们可以恰当地说，命题由其引入规则定义。
>
> 现在我想指出的是，只要对它作适当的解释，这种说明完全可以被视为与验证原则相同。首先请记住验证原则的内容，即一个命题的意义就是它的验证方法。把这一原则视为一个公式或口号时，问题在于它允许多种不同的解释，因此便产生了一个问题：应当如何解释它？事实上，至少有三种自然的解释。按照第一种解释，验证一个命题的手段就是它的引入规则；这样一来，维特根斯坦的公式便没有什么不妥，只要我们像我刚才那样把“方法”改为“手段”（它的形式本来就是复数），或者把单数改为复数：一个命题的意义就是验证它的方法。按这种方式解释，它就与关于命题是什么的直觉主义说明完全一致；或者，如果你愿意，也可以说，它就是用引入规则来表述的 Gentzen 版本。（Martin-L¨of (2013, 6)）

如果将其理解为“意义由证明决定”，那么这并未考虑到维特根斯坦的自我修正。[46]

相比之下，在后期阶段，Dummett本人承认，可以通过假设消去规则赋予每个逻辑常项以意义，来构建一种意义理论，正如 P. Schroeder-Heister（2018）所指出的：

> 大多数证明论语义学进路都将引入规则视为基础性的、赋予意义的或自我证成的，而消去推理则被认为相对于既定的引入规则是有效的。（.....）人们或许可以探究，以消去规则而非引入规则作为证明论语义学的基础，究竟能走多远。Dummett（1991，第13章）曾勾勒出一些以消去规则而非引入规则为基础的证明论语义学构想，尽管形式还相当粗略。

同一思路的较早表述见于：

> 证明论语义学有多个源头，其中最具体的一个是 Gentzen（1934）的论述：他指出，自然演绎演算中的引入规则定义了逻辑常项的意义，而消去规则则可由此定义推导得出。更广义地说，它属于这样一种传统：按照这一传统，某个词的意义是一

[46]第10节，第七部分，第367页和第11节，第六部分，第313页。 *Remarks on the Foundations of Mathematics*

> 术语必须通过参照它在我们的语言中的用法来加以说明。（Schroeder-Heister（2006，525））

这些论述都试图通过回顾维特根斯坦的“意义即使用”范式，坚持为所谓的“证明论语义学”提供正当性。在最近的一篇出版物中，Prawitz 在试图定义什么是有效论证时，回顾了 Gentzen 的格言：

> Gentzen 的思想详述如下：要知道句子 $meaning$ 的 A 在 c-形式中是什么，就是要知道 $introductions$ 的 c（即 c的引入规则的应用）是推导出 A的 $canonical$ 方式，也就是说：(1) 它们是有效的推理；(2) 如果 A 能够被证明，那么它就能以这种方式被证明，即通过一个最后一步是应用 c 的引入规则的证明来证明（因此我们将其称为 $canonical\ proof$。）。(Prawitz（2019，221）)

另一方面，Martin-L¨of 探讨了应用 Gentzen 的原则[47]来评估人们能够以何种方式赋予弗雷格的断言号“⊢”以意义：

> (...) 我们现在可以先表述一种自然的说法，即所谓的断言正确性条件：也就是说，在什么条件下作出断言才是恰当的。这里有几个词可以使用：恰当、正确、合适。我会以相同的意义使用这些词。作出断言恰当、正确或合适的条件是，你知道如何完成构成断言内容的任务。这就是我在摘要中所说的断言正确性条件。
>
> 对于一般的行为，通常有启发性的问题是：行为的目的是什么？在这里，如果我们接受我刚才提出的正确性条件，那么问题就是：作出断言的目的是什么？此时我们已经必须考虑到，言语行为不仅涉及说话者，也涉及听话者，即言语行为的接收者。那么，断言者想要实现什么？作出断言的目的是什么？如果我们坚持我此刻正在讨论的断言知识论，那么目的无非是向听话者传达：说话者知道如何完成构成内容的任务。断言这一言语行为的目的别无其他，只是把说话者知道如何完成构成断言内容的任务这一信息从说话者传递给听话者；而这一传递之所以成功，是因为说话者必须遵守我刚才表述的断言正确性条件。（Martin-L¨of (2019, 229f))

请注意，这里通过说话者与听话者之间的二分法建立起来的意义与目的之间的“皮尔士式”联系，与前文所主张的证实主义视角颇为不同。回顾 Gentzen 的建议：

[47]摘自 Gentzen（1935年）（刊于 von Plato（2017年，153）：

> “引入规则”可以说给出了相关符号的“定义”，而“消去规则”实际上只是由此得出的后果，表达方式大致如下：消去某个符号时，外层符号为该符号的命题必须“只能按照该符号基于其引入规则所表示的含义来使用。”（.....）我认为，若将这一思想阐述得更加精确，就可以证明，在某些条件下，E-推理是相应 I-推理的 $unique$ 后果。

> 我一开始就说过，整场讲座大致要讨论断言号的意义是什么。我们习惯于认为，当我们询问某种语言构造的意义时，通常应当能从支配该构造的规则中看出来，用维特根斯坦术语来说就是如此。第一个例子当然是 Gentzen 提出的建议：逻辑运算由其引入规则来定义。（Martin-L¨of（2019，234））

Martin-L¨of 最后承认，在这种情况下，决定「断言号」意义的不是引入规则，而是消去规则：

> 那么断言号呢？如果没有这条新规则（C- elim），你就只有通常的推理规则，而这些规则的形式是（C-intro）。如果认为断言号由这些规则决定，那么断言 $\vdash C$ 所能表达的就只能是 C 已经得到证明，已经通过通常的推理规则推导出来。而弗雷格引入断言号时，并不是这个意思；弗雷格所说的断言号并非如此。我之前解释过：断言号表达的是对某项内容之真理的认可。因此，如果只有（C-intro）这些规则，我们根本无法通过规定断言号的规则来解释它。但现在情况好一些了，因为我们还有（C-elim）这些规则，而它们恰恰是决定断言号意义的规则。（同上）

请注意，Martin-L¨of 通过讨论他所谓的经由「*Speaker*与 *Hearer*」二分法来探讨意义的「义务论」路径，已接近皮尔士的「*Utterer* 与 *Interpreter*」：

> （.....）现在我来谈断言的承诺观，它源自皮尔士在上世纪很早期的著作，我想是1902至1903年。皮尔士认为，断言应被理解为承担责任，即为断言的内容承担责任。（同上，230页）

通过强调说话者与听话者之间交互的首要重要性，Martin-L¨of 承认了解释后果的作用：听话者能够从说话者所断言的内容中立即推导出的东西，是意义定义的核心。

维特根斯坦明确强调，从一个命题中能够推导出的后果可以用来解释其意义。然而，基于使用的语义理论的倡导者坚持认为可断言条件具有首要地位，他们似乎并未充分关注这一观点，而这一观点理应得到更多重视。早在 1930—31 年的一份手稿 Ms-109 V. *Bemerkun-gen* ——（德文；1930—31 年的部分内容发表于 *Philosophical Remarks*，前言）中，维特根斯坦就明确提到了他对这样一种观点的担忧，即命题的意义由其得到验证的方式所决定：

> 如果我说“一个句子的意义由其验证方式所决定”，那么，对于这个句子的意义——这个句子¨——这幅图像，即翻译——应当是那个对象的肖像，我又必须说些什么呢？这究竟该如何验证？[48]

[48]可译为：

> 如果我说“一个命题的意义取决于它如何得到验证”，那么对于这个句子——这幅图景的命题的意义，我必须作何理解？

对解释而非阐释的需要，在一份较早的（1930—31）手稿中相当频繁地出现：

> 所以我真正想说的是：并不存在语法与符号解释这两者。只要还能谈论解释，也就是对符号的说明，那么这种说明就必须由语法本身来完成。
>
> 因为我只需问：解释是否应通过句子来进行？这些句子又应与它们所创制的语言保持怎样的关系？[49]

据我们所知，关于维特根斯坦的哲学的文献，大多也很少关注维特根斯坦晚年著作中的这一特定方面。因此，为了重新阐述所谓的 Dummett–Prawitz 数学语言意义理论（两位作者都称之为“维特根斯坦式理论”），似乎有必要阐明维特根斯坦关于语言、意义与使用的实际观点。

2 后期著作

早在一份写于1937—38年的手稿中，就能找到一些札记，强调词语的意义与其用法之间的联系，以及人们可以从一个使用了该词语的句子中推导出的后果：

> “这个表象毕竟是‘红色’”，仿佛我只能在定义‘红色’时通过某种行为，才能区分我用“红色”意指的是这个表象、物体，还是它的颜色。当然，确实有“把颜色喝进去”之类的说法；但这对我定义颜色有什么帮助？如果我在定义时把注意力放在颜色上，那么我究竟是在何种意义上给颜色命名的？定义毕竟是为了将来使用的，？而那个心灵行为对此又有什么用处？人们可以说：你在定义时所意指的东西——如果这种意指应当是一种心灵行为的话——对于定义的使用、因而对于其意义，完全无关紧要。关键在于你如何运用这个定义。因此，你把什么称为“红色”，要由使用这个词的计算来表明。当然，我明白，定义时以不同方式指示和运用注意力可能有帮助，例如帮助记住定义。但认为定义时通过某种特定的心灵行为，就能把名称赋予的不是比如脸颊，而是感觉，这是一种迷信。

这种翻译——那个对象的画像——究竟应该是什么？如何验证这一点？Ms-109,77，维特根斯坦 $Nachlass$ Ms-109: V, $Bemerkungen$ (WL) - (IDP).[49]可译为：我真正想说的是：不存在所谓符号的语法和解释。相反，只要可以谈论解释，也就是对符号的说明，那么语法本身就必须提供这种说明。因为我只需问：解释是否应当通过命题来进行？这些句子又应当如何与它们所创造的语言相关联？Ms-109,129（维特根斯坦 $Nachlass$ Ms-109: V, 札记 (WL) - (IDP)。）

> 仿佛因此就把“牙痛”这个名称赋予了这个对象，而不是那个对象；仿佛这个名称于是归于一个对象，而不是另一个对象；仿佛在定义时，人们可以通过一种“意指”行为，把名称附加到这个对象而不是那个对象上。——（这里的提问方式似乎有误。）这不可与以下情况混淆：我可以通过一种心灵行为建立这一种联想联系，而不是另一种。但是，我是否成功建立了这种联系，要看其后果。也就是说，我是否通过这种观察方式把某些东西记在心里，要等到我的记忆受到检验时才会显现。

摘自一系列 *Lectures on Religious Belief*的笔记。这些讲座于1938年夏季前后在剑桥举行，由Y. Smythies记录，并发表于 *Lectures and Conver-sations on Aesthetics, Psychology and Religious Belief*。其中有些段落将用法与后果联系起来：

> 如果你对我说——“你会不复存在吗？”——我会感到困惑，不知道这话究竟是什么意思。“如果你不消失，死后就会受苦”，听到这里，我便开始联想到一些东西，也许是关于责任的伦理观念。问题在于，尽管这些都是耳熟能详的话，尽管我可以从一个句子联想到另一个句子，或联想到图像，[我不知道你从这条陈述中得出了什么后果]。[51]
>
> “是的，这可能是一种分歧——如果他本人使用这个词的方式出乎我的意料，或者得出了我没想到他会得出的结论。”[52]
>
> 当我说他在使用一幅图景时，我只是在作一条 *grammatical* 评论。[我所说的话] 只能通过他得出或没有得出的后果来验证。[53]

---

[50]可译为：

> “但这个观念是‘红色的’”——仿佛在“红色”的定义过程中，仅通过一个行为，我就能区分：用“红色”这个词时，我指的是这个观念、身体，还是它的颜色。当然有一种方法：喝下颜料之类的；但这如何帮助我进行定义？当我意指颜色就是在下定义时，我在多大程度上命名了这种颜色？定义是为将来使用的——而那个心理行为有什么用？可以这样说：你在下定义时所意指的东西，如果这个意义被认为是灵魂的一种行为，那么它对于使用、因而对于定义的意义而言，完全无关紧要。关键在于你如何使用这个定义。因此，你所命名为“红色”的东西，显示了这个词的演算。当然，我明白，展示和运用注意的不同方式在定义时可能是有用的；例如，用来记住定义。但认为通过某种心理行为，人就不能定义脸颊，却可以给感觉命名为“牙痛”，这是一种迷信。仿佛名称因此被赋予了这个对象，而不是那个对象。仿佛是这个对象而不是那个对象获得了它。仿佛人在通过“意向”这一行为进行定义时，可以把名称附着于这个对象而不是那个对象。？这不可与以下情况混淆：我可以通过灵魂的一种行为，创造一个——建立这种联想，而不是另一种联想。但是：我是否成功建立了这样一种联系，要由后果来显示。也就是说，我是否记住了某种东西，要在我的记忆受到检验时才能显现。

(Ms 120,2v,3r,3v,4r) 维特根斯坦 *Nachlass* Ms-120: XVI (WL) - (IDP). [51]第 69 70 *Lectures and Conversations on Aesthetics Psychology and Religious Be- – lief*

of the , . [52]同上，第 71 页。[53]同上，第 72 页。

> “……做哲学或心理学的人或许会说：“*I* 觉得我在脑子里思考”。但他无法说清这意味着什么，因为他无法说出那是什么样的 *what* 感觉；他只会用“感觉到”这个表达，仿佛他说的是“*I* 感觉到这里有一针刺痛 *here*”。因此，他没有意识到，他的表达“我感觉到”在这里究竟是什么意思仍有待探究，也就是说：我们可以从这段话语中得出哪些后果。我们是否可以得出与从“我感觉到这里有一针刺痛”这句话中相同的后果。[54]

> 因为问题不是“当……时我在做什么？”（因为这只能是一个心理学问题）——而是“这条陈述有什么意义？能从中推导出什么？它会产生什么后果？”[55]

> 我 KNOW 这是我的脚。我不可能接受任何与此相反的经验作为证明。——这也许是一声感叹；但能从中 *follows* 什么？至少，我会以一种毫无疑虑的确定性，依照我的信念行事。[56]

> 人常常会被一个词迷惑。比如“知道”这个词。
> 上帝受我们的知识约束吗？我们的许多陈述是否 *incapable* 为虚假？我们想说的正是这个。
> 我倾向于说：“那 *cannot* 可能是假的。”这很有意思；但它会产生什么后果？[57]

在《 *Last Writings on the Philosophy of Psychology*》第一卷中，可以找到一些非常明确的例子，说明词语的用法与相应话语的后果之间的联系，有时这些联系是以肯定的方式呈现的，如下所示。该卷依据的是手稿，而非像先前出版的《 *Remarks on the Philosophy of Psychology*》那样依据打字稿；这些手稿写于1948年10月22日至1949年3月22日之间，最后一则札记除外，它标注的日期是5月20日（手稿137的后半部分及手稿138全文）：

> 当你说出“……”这些词时，你是在告诉我什么？我能用这句话语做什么？它会产生什么后果？[58]

> 有人说“现在我把它看成……”时，他是在告诉我什么？这一信息会产生什么后果？我能用它做什么？[59]

> “‘……’这个词充满了它的意义”这一说法 *is used quitedifferently*，与“它具有……的意义”相比，会产生完全不同的后果。[60]

此处对维特根斯坦的 *Nachlass* 重新考察，证实并进一步阐明了维特根斯坦的观点所具有的重要意义：意义由阐明某个陈述或术语的直接后果来决定。这些新的

---

[54]§350，第 69e 页， *Remarks on the Philosophy of Psychology*第一卷。[55]§38，第 8e 页， *Remarks on the Philosophy of Psychology*第二卷。（TS 232，其中的评论源自1947年11月至1948年8月25日期间写成的手稿）[56]§360， 47e 第 *On Certainty/ Über Gewissheit*页。[57]同上，§§435–7，第 57e页。（日期为1951年3月27日）[58]§624， 80e 第 *Last Writings on the Philosophy of Psychology I*页。[59]同上。同上，§630。（该段也见于 *Investigations*第二部分第xi节，第 202e页）[60]同上，§785，第 100e页。

这些发现反驳了这样一种主张：所谓 Gentzen-Dummett-Prawitz-Martin-L¨ 所提出的“由可断言性条件／引入规则决定意义”，恰当地说属于“维特根斯坦式观点”。相反，这些段落有力地表明，它们与有关意义的“实用主义”／“对话式”方法有所关联；早在皮尔士关于 *Interpreter* 与 *Utterer* 之间交互的论述中，便已可见这些关联，而这些论述似乎同样涉及有关意义的“博弈”／“对话”方法（洛伦岑、Hintikka、Fra¨ıss´e）。

Inversion Principle[61]（由 Gentzen 和 Prawitz 倡导）似乎也像这些博弈／对话式方法一样，以“元层次”来阐释意义，其中包括塔斯基的“元语言”方法。因此，在自然演绎中，约简规则（将 *Inversion Principle* 形式化）应被视为赋予意义的规则，而不是仅仅依据引入规则为消去规则提供辩护。下文考察的带标签自然演绎的约简规则（“*Grundgesetze* 与 *Begriffsschrift* 并列”（de Queiroz (1992), de Queiroz and Gabbay (1999), de Queiroz 等人 (2011)）），将这一方法扩展至与命题等式相对应的“恒等类型”。值得注意的是，对这些材料的考察为“意义即使用”这一格言迈向形式对应物迈出了重要一步，同时凸显了维特根斯坦从极早期到极晚期著作中的一条重要共同脉络。

3 洛岑的对话语义学与 Hintikka 的博弈语义学

至少有两个研究纲领，探讨在对话、博弈或更广义的交互情境中，意义、知识与逻辑之间的关系。其中一个纲领也为证明论和意义理论提供了另一种视角，主张应当将维特根斯坦的“意义即使用”范式——在证明论语境下的理解——视为一种恰当的形式化方式，用以说明从一个命题可以直接推出哪些后果；所谓约简规则（展示消去规则如何作用于引入规则的结果）正是如此。由此也能揭示语言演算中其主要联结词的函数／目的／有用性。回顾 D. Prawitz *Natural Deduction*（1965）的原始表述：“约简步骤”被定义为作用于证明的规则，因而它们构成“元层次”的

[61] 回顾 Prawitz (1965):

Inversion Principle。请注意，消去规则在某种意义上是相应引入规则的逆：若一次消去规则的应用，其主要前提是通过应用引入规则推得的，那么应用该消去规则，实质上就是恢复此前已经确立的内容。引入规则与消去规则之间的这种关系，大致可由以下原则表达，我将其称为 *inversion principle*:

Let α be an application of an elimination rule that has B as consequence. Then, deductions that satisfy the sufficient condition (in the list above) for deriving the major premiss of α (if any) already "contain" a deduction of B; the deduction of B is thus obtainable directly from the given deductions without the addition of α. (Prawitz, 1965, 33)

（Prawitz（ ））Prawitz 在一条脚注中提到了洛岑的逆转原则：洛岑所称的逆转原则（参见例如 Lorenzen（1950）和（1955））与这一源自 Gentzen 的思想密切相关。（关于洛岑原则的正确表述，见 Hermes（1959）。）（同上）

规则，而非“对象层面”的规则。这表明，它们确实可以被视为发挥“语义学”作用，这与其他几种定义（塔尔斯基的真值条件、洛岑的对话规则、欣蒂卡的博弈语义规则、阿伯拉尔—爱洛伊丝评价博弈规则[62]）类似。

关于意义、逻辑与交互之间的关系，E. Krabbe（2001）提出了一种视角，在这种视角下，洛伦岑的对话行为可被视为将维特根斯坦的意义即使用原则应用于数学语言：

> 由此可见，在数学基础的语境中，对话理论有两个不同的目标。首要目标是通过对话行为提出有意义性标准，而这些行为通常被描述为攻击与辩护。广为人知的口号“不要追问意义，要考察用法”在这里被转述为：“要知道一个句子的含义，就必须知道如何攻击它并为它辩护。”

在同一文集中，Wilfrid Hodges（2001）在其《怀疑性的审视》一文中，首先引用了C. S. Peirce 对全称量词与存在量词的博弈规则之间二元关系的早期论述：

> 在 1898 年的第二场洛谒演讲中，C. S. Peirce 解释了“每一个”与“某一个”之间的区别：
>
> > 当我说“每个人都会死”时，我的意思是，你可以自行挑选一个人，只要他属于 $this\ here$ 世界，你就会发现他会死。“有些”意味着由命题的 $deliverer$ 从“这个此处”的世界中进行选择，或者为了他的利益进行选择。“每个” $transfers$ 则将选择的功能赋予命题的 $interpreter$ ，或者赋予任何为了其利益行事的人。
>
> 这很有意思，值得仔细剖析。皮尔士设想了两个人：一个传达者和一个解释者。（……）乍看之下，似乎这位

[62]参见 V¨an¨a¨anen（2022）：博弈 $G(M,\phi)$有两位博弈参与者 Abelard 和 Eloise。直观地说，Eloise 为命题辩护： ϕ 在 M 中（非正式地说）为真；而 Abelard 对此表示怀疑。整个博弈过程中，博弈参与者都在考察一个 L句子和一个赋值s。（……）假设当前局面为(ψ, s)。（1）如果 ψ 是一个文字，博弈便结束；若 $\psi \in \Gamma(s)$，则 Eloise 获胜。否则 Abelard 获胜。（2）如果 ψ是 $\psi_0 \wedge \psi_1$，Abelard 就选择下一局面是(ψ_0, s)还是(ψ_1, s)。（3）如果 ψ是 $\psi_0 \vee \psi_1$，Eloise 就选择下一局面是(ψ_0, s)还是(ψ_1, s)。（4）如果 ψ是 $\forall x\theta$，Abelard 就选择 $a \in M$，下一局面为$(\theta, s(a/x))$。（5）如果 ψ是 $\exists x\theta$，Eloise 就选择 $a \in M$，下一局面为$(\theta, s(a/x))$。（……）最早明确提出评价博弈的可能是 J. Hintikka ［（1968）］，他后来有力地倡导了这种博弈的力量和有用性。Hintikka 提到 L. Wittgenstein ［$Investigations$］是其灵感来源。更早些时候，L. Henkin ［（1961）］提出了一种量词的博弈论方法，并指出可以将其推广到非常一般的无穷量词和偏序量词。如今，评价博弈已成为数学逻辑、哲学逻辑和计算机科学逻辑中的标准工具。

> 这种类比并不令人信服：对于“每一个”，解释者可以挑选任何一个人；但对于“有些”，传递者必须挑选一个合适的人。不过，如果我们这样看，那么由谁来做出选择就无关紧要，而皮尔士从来没有理由区分传递者和解释者。和往常一样，皮尔士把他试图说明什么留给我们自行判断。

请注意，通常被称为“实用主义的”意义理论（有时被认为是 Dummett 晚期观点的一部分）主张，逻辑联结词的消去规则——它在某种（不完整的）意义上表达了人们能从句子中直接推出的后果——恰恰源自最著名的实用主义者 C. S. Peirce，这并非巧合。看到对话逻辑的规则让人想起皮尔士的观点，不足为奇：

> 粒子规则（也称为论证形式）抽象地描述了如何反驳一个以给定逻辑联结词为主联结词的公式，以及如何回应这种反驳。根据定义，论证形式是由以下部分组成的元组：（1）一个断言；（2）一组攻击；（3）一组防御；（4）一种关系，用来为每种攻击指定相应的防御。论证形式之所以是抽象的，是因为其定义并未提及应用该规则时所处的论证语境（即论证过程中的一种情境，例如，在作出该粒子规则所定义的断言之前已经进行的论证行动集合）。因此，粒子规则构成了逻辑的局部语义，因为它们决定了每个逻辑常项的对话意义，却没有说明这种意义可能如何与其他任何事物相关联。然而，粒子规则所给出的局部语义本质上依赖于对话这一概念，因为它们描述的是语言行为的序列。（Keiff（2009））。

事实上，不少作者都曾关注过洛伦岑和 Hintikka 等人的博弈语义学的这一源流。对于后者，Pietarinen（2014）承认：

> Jaakko Hintikka 无疑是现代 $game\text{-}theoreticalsemantics$ (GTS)的奠基者，但这一理论的精神内核，甚至常常连措辞本身，都可以追溯到博学多才的查尔斯·皮尔士，以及他在 19th 和 20^{th}世纪初的逻辑研究中所取得的开创性发现。

事实上，对“证明论语义学”（Gentzen、Prawitz、Dummett、Martin-L¨of）的一种替代方案主张：“逻辑联结词的意义由其可断言性条件所赋予”；而另一种方案则借鉴了维特根斯坦早期的观点，即解释能够从一个命题中推出的后果，更适合所谓“意义即使用”范式；这一观点早在1912年致罗素的信中就已出现。如今，考察那些可归类为以“对话式”方式解释意义的较新方法的性质时，例如Hintikka的博弈论语义学和洛伦岑的对话游戏，可以看出，这与皮尔士关于“$Utterer$ vs $Interpreter$”的框架存在平行之处，体现在全称量词与存在量词的区分上。皮尔士关注的是经验性陈述，但由“$Utterer$ vs $Interpreter$”这一二分法所提出的对话立场，同样可以通过解释能够从一个命题中推出的后果，来给出逻辑上的意义解释。[63]

[63]皮尔士同样普遍关注符号学，也关注逻辑和数学。规定术语或概念时，预期经验

此前，我们已经指出，我们的方案与其他关于逻辑联结词语义的方法之间存在相似之处；这些方法以解释相应命题的（直接）后果为基础，例如洛伦岑的对话游戏（1950、1955、1969，第25页）和Hintikka的语义游戏（1968、1979，第3页）。其一般性的基础原则是由Gentzen发现、后来由洛伦岑阐明的逻辑 *Inversion Principle*：消去程序正是引入程序的精确逆过程，因此，对于一个断言，所能提出的一切要求，正是解释消去程序时所表明的内容。依照维特根斯坦在其（1930—31）Ms 110,61中的评论精神：“Die Erkl¨arung ist ¨aquivalent mit der Bedeutung” [“解释等同于意义”]。[64] 可以考察洛伦岑的对话游戏，并通过将其与基于约简的意义说明进行比较，来展示 *Inversion Principle* 如何存在于游戏方法之中。其对应关系如下：(i) 断言对应于引入规则（以及相应的构造子）；(ii) 攻击对应于消去规则（以及相应的析构子）；(iii) 防御集合对应于约简规则（即消去规则对引入规则结果所产生的作用）；(iv) 为每一种攻击规定相应防御的关系，由约简规则的结果所定义。

取自 *reduction* 自然演绎系统中证明之间的规则。这类系统在公式之外还配有项，例如所谓的 Curry-Howard 诠释（Howard（1980））， 马丁-洛夫的类型论可被视为其中一个实例。[65] 将与推导相对应的项分离出来，便可得出如下对应关系：[66] 考察归约推理规则的结论，可以将析构子视为攻击者（或在 Hintikka 的博弈论语义学术语中称为“自然”，即其对应物），而将构造子视为

以及关于项的逻辑或数学规定。参见皮尔士的评论：

> 研究逻辑时，你希望纠正自己当前关于何为正确推理、何为错误推理的观念。当然，这必须通过推理来完成。有些作者觉得他们在这里看到了某种荒谬之处。他们说，这会形成一个“*petitio principii*”。不如这样表述这一问题：目前，你拥有一个 *logica utens*，它似乎并不令人满意。问题在于，利用这个并不令人满意的 *logica utens*，你能否弄清它必须在哪些方面加以修改，并由此达到一个更好的体系。这是对问题更为准确的表述；如此表述之后，它似乎并没有人们所声称的那种不可克服的困难。（*Collected Papers*，2:191）。

[64]维特根斯坦 *Nachlass* Ms-110：VI，《哲学评论》（WL），（IDP）（访问于2022年5月14日）[65]Howard（2014）谈到所谓的 *Curry-Howard ‘Formulae-as-Types’*：[de Bruijn]独立发现了推导即项的思想，以及与之相伴的命题即类型的思想。（.....）Martin-L¨of 的工作源自我的工作。他一直承认我的贡献，而且我们是好朋友。进一步思考后，我需要提到，在那次最初的谈话中，Martin- L¨of 提出，推导即项的思想尤其适合与 Prawitz 的自然演绎理论结合。我当时想：好吧，但也没什么大不了的。事实上，那时我并不熟悉 Prawitz 的成果（或者说，即使有所了解，也只是略知一二）。但这比我原先以为的更重要，因为 Prawitz 对一次演绎所作的约简步骤，直接对应于相关 λ项的约简步骤！

[66]采用 Curry-Howard“推导即项”风格呈现的自然演绎系统中，证明之间的约简规则取自（de Queiroz 等人，2011）。

断言（或 Hintikka 的“我自己”）。由此，逻辑联结词的博弈论解释便在函数式解释中有了直接对应，其语义采用可转换性语义：

$\wedge$-β-*reduction*

$$\dfrac{\dfrac{a : A \qquad b : B}{\langle a, b\rangle : A \wedge B}\wedge\text{-}intr}{\mathtt{FST}(\langle a, b\rangle) : A}\wedge\text{-}elim \quad \twoheadrightarrow_\beta \quad a : A$$

$$\dfrac{\dfrac{a : A \qquad b : B}{\langle a, b\rangle : A \wedge B}\wedge\text{-}intr}{\mathtt{SND}(\langle a, b\rangle) : B}\wedge\text{-}elim \quad \twoheadrightarrow_\beta \quad b : B$$

相关 REWR 事项:i i
FST($\langle a, b\rangle$) $=_\beta$ a第二投
影($\langle a, b\rangle$) $=_\beta$ b

断言/*Introd.*	攻击/*Elim.*	$\twoheadrightarrow_\beta$	防御
合取（‘$\wedge$’）：			
$A \wedge B$	L?		A
$A \wedge B$	R?		B
$\langle a, b\rangle : A \wedge B$	FST($\langle a, b\rangle$)	$\twoheadrightarrow_\beta$	a: A
$\langle a, b\rangle : A \wedge B$	第二投影($\langle a, b\rangle$)	$\twoheadrightarrow_\beta$	$b : B$

$\vee$-β-*reduction*

$$\dfrac{\dfrac{a : A}{\mathtt{inl}(a) : A \vee B}\vee\text{-}intr \quad \dfrac{[x : A] \quad [y : B]}{f(x) : C \quad g(y) : C}}{\mathtt{CASE}(\mathtt{inl}(a), \upsilon x.f(x), \upsilon y.g(y)) : C}\vee\text{-}elim \quad \twoheadrightarrow_\beta \quad \begin{array}{c} a : A \\ f(a/x) : C \end{array}$$

$$\dfrac{\dfrac{b : B}{\mathtt{inr}(b) : A \vee B}\vee\text{-}intr \quad \dfrac{[x : A] \quad [y : B]}{f(x) : C \quad g(y) : C}}{\mathtt{CASE}(\mathtt{inr}(b), \upsilon x.f(x), \upsilon y.g(y)) : C}\vee\text{-}elim \quad \twoheadrightarrow_\beta \quad \begin{array}{c} b : B \\ g(b/y) : C \end{array}$$

关联的 REWR 规则i i CASE(inl(a) $\upsilon x.f(x)$ $\upsilon y.g$
(y)) $=_\beta$ $f(a/x)$ CASE(inr(b) $\upsilon x.f(x)$ $\upsilon y.g(y)$)
$=_\beta$ $g(b/y)$

断言/*Introd.*	攻击/*Elim.*	$\twoheadrightarrow_\beta$	防御
析取（‘$\vee$’）：			
$A \vee B$	?		A
$A \vee B$	?		B
左注入(a) : $A \vee B$	CASE(左注入(a) $\upsilon x.f(x)$ $\upsilon y.g(y)$)	$\twoheadrightarrow_\beta$	a : A, $f(a/x) : C$
右注入(b) : $A \vee B$	CASE(右注入(b) $\upsilon x.f(x)$ $\upsilon y.g(y)$)	$\twoheadrightarrow_\beta$	b : B, $g(b/y)$: C

虽然在 FST($\langle a, b\rangle$) 和 第二投影($\langle a, b\rangle$) 中，析构子都可以访问任一合取项，但在 CASE(inl(a) $\upsilon x.f(x)$ $\upsilon y.g(y)$) 和CASE(inr(b) $\upsilon x.f(x)$ $\upsilon y.g(y)$) 中，析构子无法访问任一析取项，而必须请求引入规则所带来的那个析取项。

$\rightarrow$-β-*reduction*

$$\dfrac{a : A \qquad \dfrac{\dfrac{[x : A]}{b(x) : B}}{\lambda x.b(x) : A \to B}\to\text{-}intr}{\texttt{APP}(\lambda x.b(x), a) : B}\to\text{-}elim \quad \twoheadrightarrow_\beta \quad \begin{array}{c} a : A \\ b(a/x) : B \end{array}$$

相关重写:
APP($\lambda x.b(x)$ a) $=_\beta$ $b(a/x)$

断言/*Introd.*	攻击/*Elim.*	$\twoheadrightarrow_\beta$	防御
蕴涵（“$\rightarrow$”）：			
$A \to B$	A ?		B
$a : A$			
$\lambda x.b(x)$: $A \to B$	APP($\lambda x.b(x)$ a)	$\twoheadrightarrow_\beta$	$b(a/x)$: B

$\forall$-β-*reduction*

$$\dfrac{a : D \qquad \dfrac{\dfrac{[x : D]}{f(x) : P(x)}}{\Lambda x.f(x) : \forall x^D.P(x)}\forall\text{-}intr}{\texttt{EXTR}(\Lambda x.f(x), a) : P(a)}\forall\text{-}elim \quad \twoheadrightarrow_\beta \quad \begin{array}{c} a : D \\ f(a/x) : P(a) \end{array}$$

相关重写:
EXTR($\Lambda x.f(x)$ a) $=_\beta$ $f(a/x)$

$\exists$-β-*reduction*

$$\dfrac{\dfrac{a : D \quad f(a) : P(a)}{\varepsilon x.(f(x), a) : \exists x^D.P(x)}\exists\text{-}intr \qquad \begin{array}{c}[t : D, g(t) : P(t)] \\ d(g, t) : C\end{array}}{\texttt{INST}(\varepsilon x.(f(x), a), \sigma g.\sigma t.d(g, t)) : C}\exists\text{-}elim \quad \twoheadrightarrow_\beta \quad \begin{array}{c} a : D, f(a) : P(a) \\ d(f/g, a/t) : C \end{array}$$

相关重写:
INST($\varepsilon x.(f(x)$ $a)$ $\sigma g.\sigma t.d(g, t)$) $=_\beta$ $d(f/g, a/t)$

断言/*Introd.*	攻击/*Elim.*	$\twoheadrightarrow_\beta$	防御
全称量词（‘$\forall$’）：			
$\forall x^D.P(x)$	a: D ?		$P(a)$
$a : A$			

$\Lambda x.f(x) : \forall x^D.P(x)$

$\texttt{EXTR}(\Lambda x.f(x), a) \quad \twoheadrightarrow_\beta \quad f(a/x) : P(a)$

Existential Quantifier ('∃'):

$\exists x^D.P(x)$? $a : D, P(a)$

$a : D, f(a) : P(a)$

$\varepsilon x.(f(x), a) : \exists x^D.P(x)$

$\texttt{INST}(\varepsilon x.(f(x), a), \sigma g.\sigma t.d(g(t), t)) \quad \twoheadrightarrow_\beta \quad d(f(a)/g(t), a/t) : C$

在 EXTR($\Lambda x.f(x)$ a) 中，析构子可以访问见证（可以使用一个泛型元素） a；而在 INST($\varepsilon x.(f(x)$ $a)$ $\sigma g.\sigma t.d(g(t)$ $t)$) 中，唯一的选择是对见证 a 进行消去。该见证位于使用构造子构造的项 $\varepsilon x.(f(x)$ $a)$ 内，因为它是由引入规则选定的。

Id-β-reduction

$$\dfrac{\dfrac{a =_r b : A}{r(a,b) : Id_A(a,b)}\,Id\text{-}intr \qquad \begin{matrix}[a =_t b : A] \\ d(t) : C\end{matrix}}{\texttt{REWR}(r(a,b), \sigma t.d(t)) : C}\,Id\text{-}elim \quad \twoheadrightarrow_\beta \quad \begin{matrix}a =_r b : A \\ d(r/t) : C\end{matrix}$$

相关重写：REWR($r(a,b)$ $\sigma t.d(t)$)
$=_\beta$ $d(r/t)$

断言/*Introd.*	攻击/*Elim.*	$\twoheadrightarrow_\beta$	防御
命题等式（'$Id_A(a,b)$'）：$Id_A(a,b)$	?		$a =_r b$: A
$r(a,b)$; $Id_A(a,b)$	REWR($r(a,b)$ $\sigma t.d(t)$) $\twoheadrightarrow_\beta$		$d(r/t)$: C

在 REWR($r(a,b)$ $\sigma t.d(t)$) 中，析构子无法选择 a 等于 b 的"理由"，因为在应用引入规则时， r 已经选定。

建立这些平行关系，旨在展示一种联系：皮尔士关于 *Interpreter* 与 *Utterer* 之间交互的著述所揭示的"实用主义／对话式"意义方法，似乎与"游戏／对话"意义方法有关（洛伦岑、Hintikka、Ehrenfeucht-Fra¨ıss´e[67]）

[67]当然，Ehrenfeucht-Fra¨ıss´e 方法的主要贡献在于运用 *winning strategy* 这一概念来证明或反驳两个模型之间的初等等价，但这些游戏的实际规则基于全称公式与存在公式之间的区别，具体而言，区别在于由哪位玩家从一个结构中选择下一个元素。这种区别让人想起皮尔士的 *Utterer/Interpreter*、洛伦岑的 *Attack/Defense*、Hintikka 的 *Nature/Myself*。

4 结论

运用维特根斯坦的 *Nachlass* （我们此前并未这样做），并考察此处引述的他未发表作品中的段落，有力地印证并拓展了我们持续研究的核心主张：维特根斯坦提出，意义是通过解释一个术语或陈述的直接后果来界定的。在 *Nachlass*中考察这些新发现时，我们试图将维特根斯坦关于“意义即使用”的论述——其意义由界定或使用术语（或陈述）所涉及的“演算”来确定——与皮尔士关于 *Interpreter* 与 *Ut-terer* 之间交互的著述所揭示的实用主义意义方法联系起来；后者似乎与“游戏／对话”意义方法有关（洛伦岑、Hintikka、Fra¨ıss´e）。

在这一点上，我们也特别指出，所谓*Inversion Principle* （由 Gentzen 和 Prawitz 提出）与这些博弈式／对话式方法（包括塔斯基的“元语言”方法）一样，都具有作为意义的“元层次”解释的地位。因此，在自然演绎中，约简规则（将 *Inversion Principle*形式化）应被视为赋予意义的规则，而不应仅仅被看作基于引入规则对消去规则的辩护。带标签自然演绎的约简规则还包括“恒等类型”这一情形；对于近期那些将证明论与同伦论联系起来、数学基础更为扎实的出版物而言，这一情形至关重要。

最重要的是，我们认为，这些材料朝着为“意义即使用”这一格言提供一种形式对应物迈出了重要一步。尽管这一主题存在若干细微变体，但从早期著作（*Notebooks*、*Lettersto Russell* （1912））到所谓第二时期维特根斯坦的文本——无论是过渡时期还是很晚期的文本——都贯穿着一个共同脉络。为进一步阐明这一要点，下面引用维特根斯坦本人的著作：

> 相信哥德巴赫猜想是什么意思？这种信念由什么构成？是我们说出或听到这个猜想时的一种确信感吗？这不是我们关心的。我也不知道这种感觉在多大程度上可能是由这个猜想本身引起的。信念如何介入这个猜想？让我们看看它会带来什么后果，会促使我们做些什么。“它使我去寻找这个猜想的证明。”——好，现在我们再看看你所进行的寻找究竟是什么；这样我们就会知道“你对这个猜想的信念究竟是怎么回事。——相信这个猜想究竟意味着什么。”[68]

毫无疑问，这一提议要求极其谨慎的阐述、全面的文献记录，以及在如此广泛的概念谱系之间建立一系列有充分依据的联系

[68]可译为

> “相信哥德巴赫猜想”是什么意思？这种信念究竟是什么？是我们说出或听到这句话时产生的一种安全感吗？这与此处的讨论毫无关系。我不知道这句话本身在多大程度上可能引发了这种感觉。信念是如何介入这句话的？让我们看看它会产生什么后果，会引导我们做些什么。“它使我去寻找这一猜想的证明。”——好吧，现在让我们看看你的寻找实际上包含些什么；这样我们就会知道，“它与你对这句话的信念有何关联。——它与相信这句话究竟有什么关系。”

（维特根斯坦 *Nachlass* Ts-212,XVII-122-19（WL），（德文，1932–33？）（IDP）。Heinz Wil- helm Kr¨uger，Alois Pichler（2022：在 XML 转录中纳入修正））（访问于2022年6月11日）

和技术，这些内容涵盖了从维特根斯坦的哲学著作到用于形式化数学证明的一套基础技术。人们持续努力履行这一项至少可追溯至35年前的任务，并且期待今后始终以一贯的决心和认真态度继续下去。当然，没有任何一篇单独的文章完成过这一任务，今后也不可能做到。本文属于一系列文章的一部分，该系列始于1987–1988年（de Queiroz（1987）、（1988ab）），随后在1990年代又发表了更多文章。这种关于证明与意义的观点促成了对直觉主义类型理论的重新表述方案[69]，并产生了一些技术成果，例如一本著作（2011年）、一些博士论文（如Ramos（2018年）、Mart´ınez-Rivillas（2022年）），以及多篇文章；这些成果至少跨越了三十年，一直延续至2023年。

致谢。 首先，我们要感谢 Anderson Nakano（PUC-SP）和 Marcos Silva（UFPE），他们是线上会议 100*anos do Tractatus Logico-Philosophicus*（2021 年 9 月 14 日至 17 日）的组织者，慷慨地接受了我们的演讲提议。这次演讲也为撰写本文提供了额外动力，而本文的撰写又使我们在维特根斯坦的 *Nachlass* 中获得了新的发现。同样重要的是，匿名审稿人以极其认真且积极的态度开展评审工作，为改进本文作出了重大贡献。

参考文献

Dummett, M. 1977. *Elements of Intuitionism*，克拉伦登出版社，Ox 福特。

[69]这种重新表述的一个主要关注点是“等式证明”以及所谓的“恒等类型”。恒等类型可以说是 Martin-L¨类型论（MLTT）中最有趣的实体之一。对于任意类型 A，都可以构造恒等类型 $Id_A(x, y)$，其元素（如果存在）是 x 与 y之间相等的证明。该类型确立了 A中两个项之间的恒等关系，即如果存在一个构造 $x =_p y\colon A$，那么 p就是一个见证或证明，表明 x确实等于 y。 $Id_A(x, y)$ 和 $x =_p y : A$ 都是相等类型，后者是表示 *definitional* 相等的一种显式方式，而前者则是 *propositional* 相等。单值性公理（Univalence Axiom）的提出，使恒等类型成为过去十年左右类型论中研究最为广泛的方面之一。该公理提出，在类型论中，声称 $x = y$ 等价于声称 $x \simeq y$，也就是说，恒等类型等价于等价类型。此外，另一个重要方面是，可以对同一空间中两点之间的路径进行解释。这种解释产生了一种观点，即将相等视为同伦路径的集合。类型论与同伦论之间的这种联系，使类型论成为计算和数学的合适基础。然而，在 MLTT 中内涵恒等类型的原始表述中，这种解释仅具有语义性质，即所有元素都等于一个表示自反性的特殊项，而类型论中路径这一概念并没有与之对应的句法形式。基于这一原因，(de Queiroz and Gabbay (1994), de Oliveira and de Queiroz (1999), de Queiroz and de Oliveira (2011,2014), de Queiroz 等人 (2016), Ramos 等人 (2017), Ramos 等人 (2018), de Veras 等人 (2023a)) 提出了将路径加入同伦类型论句法的方案。在这些研究中，作者使用了一种称为“计算路径”的形式实体，该实体由 (de Queiroz and 加拜 (1994)) 提出，并展示了如何利用它以更加显式的方式形式化恒等类型。正如我们在 (Ramos 等人 (2021ab), de Veras 等人 (2023ab)) 中所强调的，这使得在计算理论、代数拓扑、逻辑、高阶范畴和高阶代数（Mart´ınez-Rivillas and de Queiroz (2022ab,2023ab)）之间建立有益的桥梁成为可能，而一个单一概念似乎能够充当连接纽带：“路径”。这通过采用恒等类型的一种替代表述得以实现，该表述对“路径”给出了明确的形式化描述，并在操作层面将其理解为一个可逆的重写序列（例如 Church 关于 λ-项之间的“转换”）。

Dummett, M. 1991. *The Logical Basis of Metaphysics*，哈佛大学出版社，剑桥（马萨诸塞州）。

Gabbay, D. M. 1992. 将 Curry-Howard 同构扩展至线性、模态和次结构逻辑。*Journal of Symbolic Logic* 57 4 1319 1365 ( ): – 。

Gentzen, G. 1935年。《关于逻辑推理的研究》。I. *Math Z* 39, 176–210。https://doi.org/10.1007/BF01201353。（英文译文见J. von Plato（2017年）。）

Henkin, L. 1961 *Infinitistic Methods* 。“关于无限长公式的一些评论”。载于，华沙，页码 – 。*(Proc. Sympos. Foundations of Math.)* 167 183 Pergamon，牛津。

赫尔墨斯，H. 1959。“操作逻辑的反演原理”。载于 Heyting, A. 编者，*Constructivity in Mathematics*，第 62–68 页。北荷兰出版社，阿姆斯特丹。

Hilmy, S. 1987 *The Later Wittgenstein: The Emergence of a New Philosophical Method* 。，布莱克威尔，牛津。

Hintikka, J. 1968. “量词的语言游戏”。In N. *Stud-* 编者，*ies in* 46 72 ，第 – 页。布莱克威尔。

Hintikka, J. 1973. *Quantifiers in Logic and the Theory of Science*（编）。量词与逻辑和科学理论。Synthese 语言丛书 Ii, 第 5 卷。施普林格，多德雷赫特。

Hintikka, J. 1996. *The Principles of Mathematics Revisited*。布莱克威尔。

Hintikka, J. 和 Kulas, J. 1983. *The Game of Language*。

Hintikka, J. 和 Sandu, G. 1997. “博弈论语义学”。载于 J. van Benthem 和 A. ter Meulen（编），*Handbook of Logic and Language*，第 361–410 页。Elsevier，阿姆斯特丹。

Hintikka, J. 和 Sandu, G. 2006. “博弈论、逻辑和科学发现”。*Proceedings of the Aristotelian Society* 补充卷 75(1)：17–32。

Hodges, W. 2001. “怀疑性的审视”。*Logic and Games*。

Howard, W. 1980. “命题即类型的构造观念”。载于 H. Curry、J.R. Hindley、J. Seldin（编），*To H. B. Curry: Essays on Combinatory Logic, Lambda Calculus and Formalism* 1980 ，。Academic Press（）。

Howard, W. 2014。Wadler 的博客，2014，https://wadler.blogspot.com/2014/08/howard- on-curry-howard.html

Keiff, L. 2009. “对话逻辑”。载于 *Stanford Encyclopedia of Philosophy*，斯坦福。https://plato.stanford.edu/entries/logic-dialogical/

Krabbe，E. 2001。《对话逻辑的恢复》。载于 W. Hodges 和 E. C. W. Krabbe（编）*Dialogue Foundations*，Wiley，第 33–49 页。

洛伦岑，P . 1950. 《数学的建构性论证》 . *MathematischeZeitschrift* 53(2):162–202。

洛伦岑，P. 1955. *数学科学基础原理*，第78卷。施普林格出版社，柏林-哥廷根-海德堡。VII + 298 页 *Einführung in die operative Logik und Mathematik*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften.

洛伦岑，P. 1969. *Normative Logic and Ethics*，B.I-Hochschultaschenb¨ucher 系列。《系统哲学》，第 236* 卷，Bibliographisches Institut，曼海姆/苏¨黎世。

Martin-L¨of, P. 1984. *Intuitionistic Type Theory*。（G. Sambin 笔记）。Bib- liopolis, 那不勒斯。ISBN 978-8870881059。

Martin-L¨of, P. 1987. “命题的真、判断的证据、证明的有效性”。 *Synthese* 73:407–420。

Martin-L¨of, P. 2013. “验证主义的过去与现在”。M. van der Schaar（编）所编 *Judgement and the Epistemic Foundation of Logic*的第1章，《逻辑、认识论与科学统一性》第31卷，DOI 10.1007/978-94-007-5137-8 1，施普林格，2013。 -

Martin-L¨of, P. 2019. “逻辑与伦理学”。载于 Piecha, T.; Schroeder-Heister, P.（编），*Proof-Theoretic Semantics: Assessment and Future Perspectives*。《证明论语义学》第三届图宾根会议论文集，2019年3月27日至30日，图宾根大学，第227–235页。http://dx.doi.org/10.15496/publikation-35319。

Mart´ınez-Rivillas, D.O. 2022. *Towards a homotopy domain theory*。博士论文，CIn- UFPE（2022年11月）。伯南布哥联邦大学信息中心，累西腓，巴西。https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/49221

Mart´ınez-Rivillas, D.O., R. J. G. B. 德凯罗斯。2022a。“由任意拓扑 λ-模型生成的∞-群胚”。*Logic J. of the IGPL* 30(3):465–488。

Mart´ınez-Rivillas, D.O., R. J. G. B. 德凯罗斯。2022b。“迈向同伦域论”。*Archive for Mathematical Logic*。2022年11月。https://doi.org/10.1007/s00153- 022-00856-0

Mart´ınez-Rivillas, D.O., R. J. G. B. 德凯罗斯。2023a。“任意高阶 λ-模型理论”。即将在 *Bulletin of the Section of Logic*发表。2023年。arXiv:2111.07092

Mart´ınez-Rivillas, D.O., de Queiroz, R.J.G.B. 2023b. “求解同伦域方程”。（已投稿发表。）arXiv:2104.01195

G. E. 摩尔，1955年。“维特根斯坦1930—1933年的讲座”。 *Mind* 54(253)：1–27。

A. G. 德奥利维拉，de Queiroz, R.J.G.B. 1999年。“关于带标签自然演绎等式片段的规范化程序”。 *Logic J. of the IGPL* 7(2)：173–215。

A. G. 德奥利维拉，de Queiroz, R.J.G.B. 2005年。“一组新的证明变换”。载于 S. 阿尔捷莫夫、H. 巴林杰、A. 加尔塞斯、L. 兰姆和 J. 伍兹（编），*We will show them! Essays in Honour of Dov Gabbay* 2, 499 528 (第 卷，第 – 页)。伦敦：College Publications。

Pears, D. 1987 *The False Prison. A Study of the Development of Wittgenstein's Philosophy*。《第 I 卷》。牛津克拉伦登出版社。

Pears, D. 1990. “维特根斯坦的整体论”。 *Dialectica* 44(2):165–173.

皮尔士，C. S. 1932 *Collected Papers of Charles Sanders Peirce Volumes I and II:* 。 *Principles of Philosophy and Elements of Logic* C. Hartshorne 和 P. Weiss（编）。哈佛大学出版社。

Pietarinen，A-V. 2014。“从皮尔士、格赖斯到Hintikka的逻辑与语言游戏”。 *Teorema* 33 (2) 121–136。

von Plato，J. 2017 *Saved from the Cellar. Gerhard Gentzen's Shorthand Notes on* 。施普林格。 *Logic and Foundations of Mathematics.*

Prawitz，D. 1965。 *Natural Deduction: A Proof-Theoretical Study*。《Acta Universitatis Stockholmiensis》，《斯德哥尔摩哲学研究》第3号。Almqvist & Wiksell，斯德哥尔摩、哥德堡和乌普萨拉。

Prawitz，D. 1977。“意义与证明：论经典逻辑与直觉主义逻辑之间的冲突”。 *Theoria* (Sweden) XLIII 2–40。

Prawitz, D. 2019. “重新审视推理的有效性”。载于 Piecha, T.; Schroeder- Heister, P.（编），*Proof-Theoretic Semantics: Assessment and Future Perspectives*。《第三届图宾根证明论语义学会议论文集》，2019年3月27–30日，图宾根大学，第213–226页。http://dx.doi.org/10.15496/publikation-3531 9.

de Queiroz, R.J.G.B. 1987. “关于弗雷格的定义概念及证明论与递归论关系的札记（扩展摘要）”。载于 *International Congress of Logic Methodology and Philosophy of Science.* *Abstracts of the VIIth* 5, ，第一部分，苏联科学院哲学研究所，莫斯科，1987年，第69–73页。

de Queiroz, R.J.G.B. 1988a. “程序设计的证明论阐释及约简规则的作用”。 *Dialectica* 42(4): 265–282。

R. J. G. B. 德凯罗斯 1988b.《数学语言及其语义学：展示一个命题的后果即是赋予其意义》。载于 P. Weingartner、G. Schurz、E. Leinfellner、R. Haller、A. H ¨ ubner（编），第 – 页。 *Reports of the thirteenth interna- tional Wittgenstein symposium* 18 259 266

R. J. G. B. 德凯罗斯 1989.《意义、函数、目的、有用性、后果——相互关联的概念（摘要）》。载于*stein Symposium (Centenary Celebration)* 1989 20 *Abstracts of Fourteenth International Wittgen-* ，第 页。研讨会于1989年8月13日至20日在Kirchberg/Wechsel举行。

R. J. G. B. 德凯罗斯 1991 *Dialectica* . 45 1 83 86 《意义即语法加后果》。 ( ) : – 。

R. J. G. B. 德凯罗斯，1992。《〈基本定律〉与《概念文字》并论（摘要）》，载于 *Abstracts of Fifteenth International Wittgenstein Symposium*，1992年，第15–16页。研讨会于1992年8月16日至23日在Kirchberg/Wechsel举行。

de Queiroz, R. J. G. B. (2018). “规范化与语言游戏”. *Dialectica* 48(2):83–123.

de Queiroz, R. J. G. B. (2018). “意义、函数、目的、有用性、后果——相互关联的概念”。 *Logic J of the IGPL* 9 (5):693–734。

de Queiroz, R. J. G. B. (2018). 《论约简规则、意义和使用与证明论语义学》。 *Studia Logica* 90:211–247.

R. J. G. B. 德凯罗斯，Gabbay, D.M. 1994。“标记演绎系统中的等同性与命题等式的函数式解释”。载于 P. Dekker 和 M. Stokhof（编）， *Proceedings of the 9th Amsterdam Colloquium 1994*，阿姆斯特丹大学 ILLC/哲学系，第 547–546 页。

R. J. G. B. 德凯罗斯，Gabbay, D.M. 1995。“存在量词的函数式解释”。 *Bull of the IGPL* 3 (2–3):243–290。

R. J. G. B. 德凯罗斯，Gabbay, D.M. 1997。“模态必然性的函数式解释”。载于 M. de Rijke（编）， *Advances in Intensional Logic*，《应用逻辑丛书》，Kluwer，1997，第 61–91 页。

de Queiroz, R. J. G. B., Gabbay, D. M. (1999). 带标签自然演绎. 载于 Ohlbach, H. J., Reyle, U.（编）. *Logic, Language and Reasoning*. 逻辑趋势，第5卷。施普林格，多德雷赫特。https://doi.org/10.1007/978-94-011-4574-9_10

https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/32902（摘要见：Ramos, A.（2019）。类型论中的显式计算路径。 *Bulletin of Symbolic Logic*，25(2):213-214。doi:10.1017/bsl.2019.2）

Ramos, A.F., R. J. G. B. 德凯罗斯, A. G. 德奥利维拉. 2017年。“关于作为计算路径类型的恒等类型”。 *Logic J. of the IGPL* 25(4):562–584.

Ramos, A.F., R. J. G. B. 德凯罗斯, A. G. 德奥利维拉, de Veras, T.M.L. 2018. “显式计算路径”。 *South Amer. J. of Logic* 4(2):441–484.

Ramos, A.F., R. J. G. B. 德凯罗斯, A. G. 德奥利维拉, 2021a. “类型的计算路径与基本群胚”。载于: *Encontro de Teoria da Computação (ETC)* 6 ¸˜ 2021 ，线上活动。阿雷格里港：巴西计算机学会，。第22–25页。ISSN 2595-6116。DOI：https://doi.org/10.5753/etc.2021.16371

Ramos, A.F., de Queiroz, R.J.G.B., A. G. 德奥利维拉 2021b. “术语转换、同伦与群胚结构”。载于: *Workshop Brasileiro de Lógica (WBL)*，2，线上活动。阿雷格里港：巴西计算机学会，2021。第33–40页。ISSN 2763-8731。DOI：https://doi.org/10.5753/wbl.2021.15776

Schroeder-Heister, P. 2006 *Syn-* . “证明论语义学中的有效性概念”。 ( ) : – 。 *these* 148 3 525 571

Schroeder-Heister, P. 2018 *Stanford Encyclopedia of* . “证明论语义学”，斯坦福大学。https://plato.stanford.edu/entries/proof-theoretic- semantics/ *Philosophy*

V¨an¨a¨anen, J. 2022.《逻辑博弈的战略平衡》。arXiv:2212.01658

de Veras, T.M.L., Ramos, A.F., R. J. G. B. 德凯罗斯, A. G. 德奥利维拉, 2021.《通过计算路径计算基本群》。载于: *Encontro de Teoria da Computação (ETC)* 6 2021, , . , 在线活动。阿雷格里港：巴西计算机学会, 2021。第17–21页。ISSN 2595-6116。DOI：https://doi.org/10.5753/etc.2021.16370。

de Veras, T.M.L., Ramos, A.F., R. J. G. B. 德凯罗斯, A. G. 德奥利维拉, 2023a.《带标签自然演绎的一个拓扑学应用》。即将在 *South American J. of Logic* 1906 09105 发表。arXiv: 。

de Veras, T.M.L., Ramos, A.F., de Queiroz, R.J.G.B., Silva, T.D.O., A. G. 德奥利维拉, 2023b. “计算路径——一个弱群胚”。arXiv: 2007.07769。（已提交发表）

维特根斯坦，L. 1974. *Letters to Russell, Keynes and Moore*，G. H. 冯·赖特编，并作导言（B. F. 麦吉尼斯协助），布莱克威尔，牛津。

维特根斯坦，L. 1982。《 *Last Writings on the Philosophy of Psychology*》，第1卷，1982年，第2卷，1992年，G.H. 冯·赖特和H. Nyman（编），C.G. Luckhardt和M.A.E. Aue（译），牛津：布莱克威尔。

维特根斯坦，L. 1974. *Lectures and Conversations on Aesthetics Psychology and Religious Belief*, C. Barrett（编），1966 牛津：布莱克威尔。

维特根斯坦，L. 1961. *Notebooks 1914–1916年*, G. H. 冯·赖特和G. E. M. 安斯康姆（编），牛津：布莱克威尔。

维特根斯坦，L. 1969. *On Certainty*, G. E. M. 安斯康姆和D. 保罗（译），牛津：布莱克威尔。

维特根斯坦，L. 1974。 *Philosophical Grammar*，R. 里斯（编），A. 肯尼（译），牛津：布莱克威尔。

维特根斯坦，L. 1953。 *Philosophical Investigations*，G.E.M. 安斯康姆和 R. 里斯（编），G.E.M. 安斯康姆（译），牛津：布莱克威尔。

维特根斯坦，L.（1964） *Philosophical Remarks*，R. 哈格里夫斯和 R. 怀特（译），牛津：布莱克威尔。

维特根斯坦，L. 1971 *ProtoTractatus–An Early Version of Tractatus Logico- Philosophicus*，B. F. 麦吉尼斯、T. 尼贝里、G. H. 冯·赖特（编），D. F. 皮尔斯和 B. F. 麦吉尼斯（译），伊萨卡：康奈尔大学出版社。

维特根斯坦，L. 1956. *Remarks on the Foundations of Mathematics*，G. H. 冯·赖特、R. 里斯和G. E. M. 安斯康姆（编），G. E. M. 安斯康姆（译），牛津：Black- well，修订版，1978 年。

维特根斯坦，L. 1980. *Remarks on the Philosophy of Psychology*，第 1，G. E. M. 安斯康姆与 G. H. 冯·赖特（编），G. E. M. 安斯康姆（译），第 2 卷，G. H. 冯·赖特与 H. Nyman（编），C. G. 勒克哈特和 M.A.E. Aue（译），牛津：布莱克威尔。

维特根斯坦，L. 1922. *Tractatus Logico-Philosophicus*，C.K. 奥格登译。基根·保罗、特伦奇、特吕布纳有限公司。纽约：哈考特、布雷斯公司

维特根斯坦，L. 2016。《维特根斯坦，路德维希：路德维希·维特根斯坦哲学著作的交互式动态呈现（IDP）》 *Nachlass* [wittgensteinonline.no]。由卑尔根大学维特根斯坦档案馆（WAB）在 Alois Pichler 指导下编辑。卑尔根：卑尔根大学维特根斯坦档案馆，2016年起。http://wab.uib.no/wab BEE.page（访问日期：2021年5月13日）